



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 705

DATA: 07/10/2013

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Orefice

MATERIA: Instabilità Statica e Dinamica delle Strutture

Prof. Manuello

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## INSTABILITÀ STATICA E DINAMICA DELLE STRUTTURE

### Programma del corso (2012-2013)

**Docenti:** Titolare: Dr. Amedeo Manuello  
 Coadiutori: Prof. Giuseppe Lacidogna, Dr. Mauro Corrado, Ing. Gianfranco Piana  
 Ing. Federico Accornero, Ing. Sandro Cammarano.

- 1ª Settimana**
- (1) 02/10/12 Aula 9S Manuello Introduzione al Corso e aspetti storici  
 martedì 10-13
- (2) 03/10/12 Aula 7D Lacidogna Breve storia dei ponti e delle torri sino alla Rivoluzione Industriale  
 mercoledì 8.30-10
- 2ª Settimana**
- (3) 9/10/12 Aula 9S Manuello Instabilità dell'equilibrio elastico: Sistemi discreti  
 martedì 10-13
- (4) 10/10/12 LAIB Manuello ~~Calcolo di casi elementari~~  
 mercoledì 8.30-10
- 3ª Settimana**
- (5) 16/10/12 Aula 9S Manuello Travi rettilinee e telai  
 martedì 10-13
- (6) 17/10/12 Aula 7D Manuello Calcolo di un telaio piano a due campate diseguali e dodici piani  
 mercoledì 8.30-10
- 4ª Settimana**
- (7) 23/10/12 Aula 9S Manuello Lastre soggette a compressione; Instabilità flessor-torsionale  
 martedì 10-13
- (8) 24/10/12 LAIB Manuello ~~Calcolo di una lastra soggetta a compressione~~
- 5ª Settimana**
- (9) 30/10/12 Aula 9S Manuello Anelli e gusci cilindrici soggetti alla pressione esterna; Archi e gusci ribassati soggetti alla forza peso  
 martedì 10-13
- (10) 31/10/12 LAIB Manuello ~~Calcolo di un guscio e fenomeno dello snap-through~~  
 mercoledì 8.30-10
- 6ª Settimana**
- (11) 06/11/12 Aula 9S Manuello Interazione tra svergolamento e risonanza; Fenomeni di instabilità dinamica nei ponti (flutter)  
 martedì 10-13
- (12) 07/11/12 LAIB Piana ~~Esempi di calcolo~~  
 mercoledì 8.30-10
- 7ª Settimana**
- (13) 13/11/12 Aula 9S Accornero Ponti ad arco o in muratura: Aspetti generali e fondamenti teorici  
 martedì 10-13

# INSTABILITÀ DELL'EQUILIBRIO ELASTICO

L'ipotesi di piccoli spostamenti considera le equazioni cardinali della Statica in relazione alla configurazione originale strutturale indeformata. Gli spostamenti elastici sono cioè stati ipotizzati talmente piccoli da poter confondere la configurazione deformata con quella indeformata, nella valutazione delle escentricità e delle condizioni statiche interne.

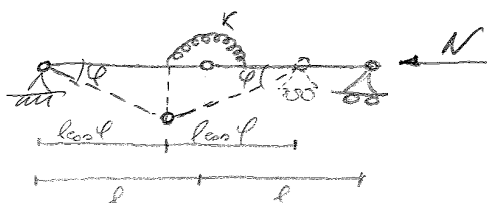
Riassumiamo, ora, tale ipotesi e modifichiamo come la relazione di un problema elastico possa rappresentare, in realtà, una condizione di Equilibrio STABILE, INSTABILE o INDIFFERENTE.

L'INSTABILITÀ DELL'EQUILIBRIO ELASTICO si verifica in genere per elementi strutturali nelli soggetti a sollecitazioni di compressione. Ma anche altri casi, più complessi sia per geometria che per sollecitazioni, possono essere ugualmente considerati. Basti pensare all'INSTABILITÀ PRESSO-TORSIONALE delle travi a sezione rettangolare snella, in cui la differenza tra l'ordine di grandezza dei due momenti centrali d'inerzia può provocare, in una trave snella, un'impulsione assai meno onerosa. L'instabilità dell'equilibrio elastico è inoltre un fenomeno di crisi che può riguardare un intero sistema di travi, prima che il singolo elemento. Ciò accade per i sistemi reticolari e misti, i metallici, spesso costituiti da aste e travi di estrema snellezza.

La perdita di stabilità dell'equilibrio elastico è comunemente detta SVERCHIAMENTO. Essa, come allo SVERCHIAMENTO e alla FRATTURA FRAGILE è uno dei tre fenomeni fondamentali del calceo strutturale. Tali fenomeni in genere non avvengono separatamente, ma interagiscono durante le fasi di calceo.

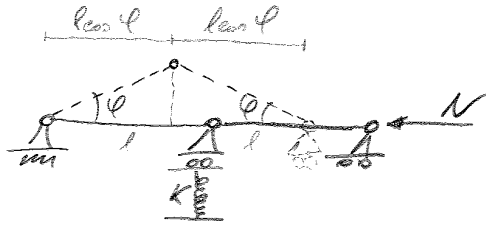
## - SISTEMI MECCANICI DISCRETI AD UN GRADO DI LIBERTÀ

Consideriamo un Sistema Meccanico costituito da due aste rigide collegate da una cerniera rotazionale lorde di rigidezza  $K$  e vincolate alle estremità da una cerniera e un carrello.



Sollecitiamo il sistema con una forza orizzontale  $N$  e assumiamo come coordinata generalizzata la rotazione Angolare  $\varphi$  dei due bracci.

► Consideriamo ora un Sistema Meccanico costituito da due aste rigide collegate da una cerniera e vincolate esternamente da una cerniera e due carrelli, poggianti quello intermedio su un solo basilio di rigidezza  $K$ .



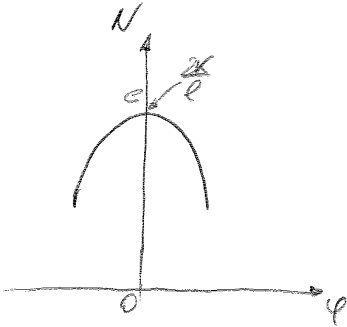
L'Energia Potenziale Totale vale:

$$W(\varphi) = \frac{1}{2} K (l \cos \varphi)^2 - 2Nl(1 - \cos \varphi)$$

e Condizioni di Equilibrio si ottengono imponendo la Stazionarietà:

$$W'(\varphi) = l \sin \varphi (K l \cos \varphi - 2N) = 0$$

$$\Rightarrow N = \frac{Kl \cos \varphi}{2}$$



In questo caso, il comportamento globale del sistema è di tipo RICUSO-SOFTENING, in quanto ad un aumento di deformazione corrisponde un decremento del carico esterno. Un tale comportamento post-critico viene detto **INSTABILE**.

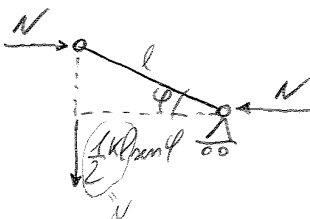
Per verificare l'instabilità del ramo post-critico è possibile analizzare la curvatura del potenziale:

$$W'(0) = W''(0) = W'''(0) = 0$$

$$W^{(4)}(0) = -3Kl^2 < 0$$

$$N = \frac{Kl}{2} \text{ in } 0$$

Anche in questo caso la determinazione del carico critico  $N_c$  è effettuabile eguagliando il momento instabilizzante, agente su ciascuna asta e valutato agli appoggi esterni, col momento stabilizzante, dovuto alla Reazione dell'Appoggio Centrale.



$$M_c = Nl \sin \varphi \approx Nl \varphi$$

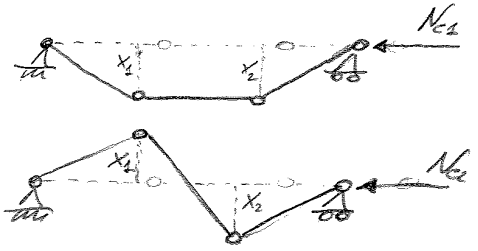
$$M_s = \frac{1}{2} Kl^2 \sin \varphi \cos \varphi \approx \frac{1}{2} Kl^2 \varphi$$

che fornisce i 2 AUTOVALORI che, sostituiti nel sistema, danno 2 EQUAZIONI,

$$\begin{cases} N_{c1} = \frac{K}{l} \\ N_{c2} = \frac{3K}{l} \end{cases}$$

$$\rightarrow x_2 = x_2$$

$$\rightarrow x_2 = -x_2$$



è si vuole analizzare il ramo post-critico relativo al primo autovalore, è utile il seguente cambiamento di variabile,

$$\begin{cases} x_2 = \epsilon + y_2 \\ x_2 = \epsilon + y_2 \end{cases}$$

ove  $y_2$  e  $y_2$  sono perturbazioni di ordine superiore rispetto alle spostamenti  $\epsilon$ , che può essere anche l'auto. La condizione di Equilibrio si introduce imponendo la Stazionarietà della funzione  $W(\epsilon + y_2, \epsilon + y_2)$

$$N = \frac{K}{\epsilon} \text{ ovvero } \frac{K}{l} \epsilon$$

è  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow$  al primo autovalore  $\frac{K}{l}$ , in accordo con quanto ottenuto.

risolvendo questa  $N$  di equilibrio nell'espressione di  $W(\epsilon + y_2, \epsilon + y_2)$  e calcolando l'Hessiano

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial y_2^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial y_2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial y_2} & \frac{\partial^2 W}{\partial y_2^2} \end{bmatrix}$$

si ottiene:

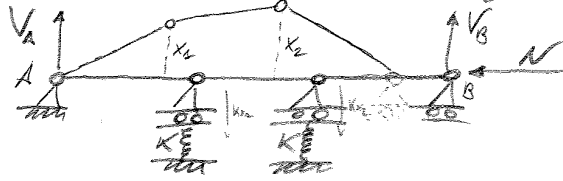
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial y_2^2} &= \frac{K}{l^2} \left[ 3 + \frac{2}{6} \left( \frac{\epsilon}{l} \right)^2 + \frac{132}{120} \left( \frac{\epsilon}{l} \right)^4 + \dots \right] \\ \text{Det}[H] &= \frac{K^2}{l^4} \left[ 2 \left( \frac{\epsilon}{l} \right)^2 + \frac{52}{15} \left( \frac{\epsilon}{l} \right)^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

questi due sviluppi in serie continuano con le sole potenze PARI di  $\epsilon/l$  e con coefficienti tutti positivi, pertanto l'Hessiano è DEFINITO POSITIVO e il ramo post-critico risulta STABILE, in analogia con il primo esempio dei Sistemi a 4 gradi di libertà.

Il problema agli Autovalori appena visto può essere rapidamente risolto, considerando direttamente le Equazioni di Equilibrio alla rotazione attorno alle cerniere distriche, allo cambio della convenienza invertita.

$$\begin{cases} N x_2 = K \left( \frac{x_1}{l} - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) \\ N x_2 = K \left( \frac{x_2}{l} + \frac{x_2 - x_1}{l} \right) \end{cases}$$

► Come secondo esempio, consideriamo un sistema formato da 3 aste rigide su 4 appoggi, di cui quelli centrali sono accenti elastici elasticamente con rigidezza  $K$ :



! Energia Potenziale totale vale:

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{2} K(x_1^2 + x_2^2) - Nl \left[ 3 - \cos\left(\arcsin \frac{x_1}{l}\right) - \cos\left(\arcsin \frac{x_2}{l}\right) - \cos\left(\arcsin \frac{x_2 - x_1}{l}\right) \right]$$

sviluppendo in serie di Taylor intorno all'origine, si ottiene:

$$W(x_1, x_2) \approx \frac{1}{2} K(x_1^2 + x_2^2) - \frac{N}{l}(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)$$

imponiamo stazionarietà per cercare Equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial x_1} = x_1 \left( \frac{K-2N}{l} \right) + \frac{N}{l} x_2 = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial x_2} = \frac{N}{l} x_1 + x_2 \left( \frac{K-2N}{l} \right) = 0 \end{cases}$$

la cui, per ottenere soluzione non banale:

$$\begin{vmatrix} \frac{K-2N}{l} & \frac{N}{l} \\ \frac{N}{l} & \frac{K-2N}{l} \end{vmatrix} = 0$$

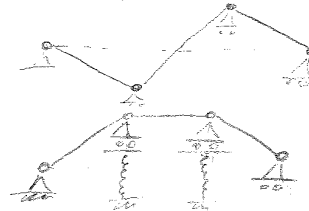
$$\Rightarrow \frac{3}{l^2} N^2 - \frac{4K}{l} N + K^2 = 0$$

secondi AUTOVALORI, da cui AUTOVETORI

$$\begin{cases} N_{e1} = \frac{1}{3} K l \\ N_{e2} = K l \end{cases}$$

$$\rightarrow x_1 = -x_2$$

$$\rightarrow x_1 = x_2$$



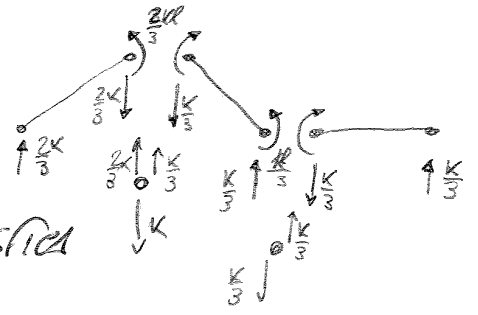
$$\begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3}kl - N\right) & \frac{kl}{3} \\ \frac{kl}{3} & \left(\frac{2}{3}kl - N\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Annullando il determinante si riduce l'Equazione caratteristica di prima.

Anche in questo caso, per  $N=0$ , la matrice di prima coincide con la Matrice di Rigidezza del sistema.

In generale, quando si considera un Sistema Descritto ad  $n$  gradi di libertà, il Problema della Stabilità dell'Equilibrio Elastico può sempre porsi nella forma

$$([K] - \lambda[K_g])\{\delta\} = \{0\}$$



ove con  $[K]$  si indica la MATRICE di RIGIDEZZA ELASTICA

$[K_g]$  = MATRICE di RIGIDEZZA GEOMETRICA

$\{\delta\}$  = VETORE degli SPOSTAMENTI NORMALI

$\lambda$  = MOLTIPLICATORE di CARICHI, che si suppongono crescere proporzionalmente

li. Autovalori del Problema si ottengono tramite la condizione

$$\det([K] - \lambda[K_g]) = 0$$

? MINIMO AUTOVALORE  $\lambda$  è detto MOLTIPLICATORE CRITICO dei CARICHI e rappresenta

l'allocazione di energia collasso.

osservando che, nel caso di tralicci e sistemi piani considerati, la  $[K_g]$  è la stessa e vale

$$[K_g] = \begin{bmatrix} \frac{2}{l} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{2}{l} \end{bmatrix}$$



richiede questa deve valere  $v \delta v$ , le seguenti equazioni risultano identicamente soddisfatte:

$$\begin{aligned} (1) \quad & EI v'''' + N v'' - q = 0 \\ (2) \quad & (EI v''' + N v') \delta v = 0 \quad \text{per } z=0, l \\ (3) \quad & (EI v'') \delta v = 0 \quad \text{per } z=0, l \end{aligned}$$

(1) si dice **EQUAZIONE della LINEA ELASTICA con EFFETTI del SECONDO ORDINE**,  
 2. a meno del termine  $N v''$ , coincide con la versione alternativa dell'Equazione della Linea Elastica del quarto ordine con termine noto proporzionale al carico distribuito ortogonale  $q(z)$ .

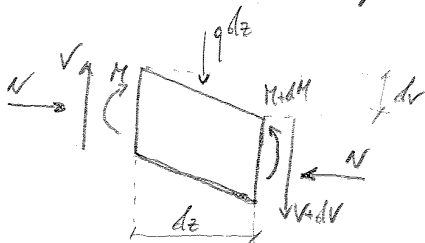
$$\boxed{\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q}{EI_x}}$$

Ora, per la trave appoggiata che abbiamo considerato, si ha come condizioni al contorno

$$v(0) = v(l) = 0 \Rightarrow \delta v = 0 \Rightarrow (2) \text{ è soddisfatta!}$$

inoltre  $v'' = 0$  agli estremi, in quanto nelle cerniere il momento flettente è nullo, pertanto anche la (3) è soddisfatta!

Un modo alternativo e più immediato di ottenere la (1) è quello di considerare l'Equilibrio di un **Concetto Elementare Deformato**:



L'Equilibrio alla Traslazione Verticale fornisce:

$$\boxed{\frac{dV}{dz} = -q}$$

dove  $V$  rappresenta la componente verticale della reazione interna da **NON CONFONDERE** con P.A.G.110!

L'Equilibrio alla Rotazione fornisce:

$$\boxed{V = \frac{dM}{dz} - N \frac{dv}{dz}}$$

da equare  
di prima  $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d^2 M}{dz^2} - N \frac{d^2 v}{dz^2} + q = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{EI v'''' + N v'' - q = 0}$$

➤ Nel caso in cui NON sia presente il carico Distribuito,  $q=0$ , l'Equazione della linea elastica è un'Equazione differenziale lineare omogenea che si semplifica:

$$(1) \quad EI v'''' + N v'' = 0$$

La cui integrale vale

$$v(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z + C z + D$$

applicando le condizioni al contorno si ha

$$v(0) = v(l) = EI v''(0) = EI v''(l) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cos \alpha l & \sin \alpha l & l & 1 \\ -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha^2 \cos \alpha l & -\alpha^2 \sin \alpha l & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema ammette soluzioni diverse da quella banale se e solo se il determinante è nullo, e soltanto quando  $\sin \alpha l = 0$ . Le condizioni coincide con quelle che annulla la regolarità del determinante alla base!

La stessa soluzione si può giungere componendo che in ciascuna sezione della base, il MOMENTO STABILIZZANTE

$$M_0 = N v$$

è uguale a quello STABILIZZANTE

$$M_1 = -EI \frac{d^2 v}{dz^2}$$

$$\Rightarrow v'' + \alpha^2 v = 0$$

l'integrale generale vale

$$v(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z$$

è, visto che

$$v(0) = v(l) = 0$$

si ha

$$A = 0, \quad \sin \alpha l = 0, \quad B \text{ qualsiasi valore}$$

solo che  $\sin \alpha l = 0$ , si ottiene la Successione degli AUTOVALORI del problema:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l} \quad n \in \mathbb{N}$$

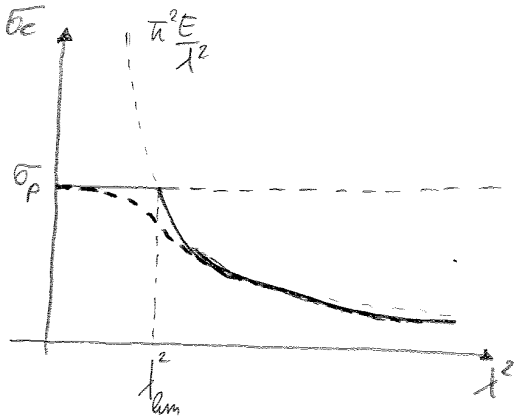
$$\Rightarrow N_{cn} = n^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

Ad ogni Autovalore  $N_{cn}$  corrisponde un'AUTOFUNZIONE che rappresenta il modo critico di deformazione per quella forza. Tale Deformata è costituita da  $n$  Semionde sinusoidali:

$$v_n(z) = B \sin \alpha_n z$$



in realtà, le due curve INTERSECONO e quindi si passa dall'una all'altra con una transizione graduale al variare della snellezza della trave.



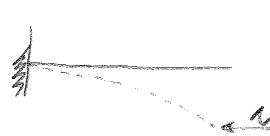
La tensione critica viene quindi fornita dalla linea realeggiata, che connette le due curve di crisi assicurando la condizione che esse formano un'eccezione nel loro punto di intersezione. Tale curva di raccordo è normalmente fornita in forma tabellata ponendo

$$\sigma < \frac{\sigma_p}{w}$$

dove  $w$  è un FATTORE DI SICUREZZA maggiore dell'unità, funzione del materiale e della snellezza della trave.

Abbiamo esaminato fin qui solo il caso della trave vincolata da estremi e avvitale. L'equazione (1) rappresenta d'altra parte l'equazione di equilibrio di una trave comunque vincolata. Le condizioni al contorno invece saranno in funzione dei vincoli alle estremità. Essendo la  $v$  libertà (libera o bloccata) alle due estremità (2 Abbinamenti e 2 Relazioni), le risultano essere una le condizioni al contorno. Parle di esse sono CONDIZIONI CINEMATICHE (o GEOMETRICHE) e parte sono CONDIZIONI STATICHE (o NATURALI). In tabella sono riportati diversi casi possibili:

Ad esempio, nel caso di una **MENSOLA**



COND. STATICA:  $EI v''''(l) + N v'(l) = 0$   
 oia  $T(l) = N v'(l)$

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = -\frac{T}{EI}$$

In ogni caso si è riportato in tabella anche il carico libero, che è sempre esprimibile nella forma

$$N_{es} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

dove  $l_0$  = LUNGHEZZA LIBERA di INFLESSIONE, la quale rappresenta la distanza tra due successivi punti di flesso nella deformata libera.

Si osservi infine come le condizioni statiche siano determinate dalle condizioni al contorno (2) e (3) ma volte applicate le condizioni cinematiche alla perturbazione  $sv$  e alla sua derivata  $sv'$ .

L'ENERGIA POTENZIALE TOTALE della trave i-esima in una generica configurazione deformata  $v_i(z)$  vale:

$$W(v_i) = \int_0^{l_i} \left[ \frac{1}{2} (E_i I_i v_i''^2 - N_i v_i'^2) - q_i v_i \right] dz$$

La, dalla relazione di prima, si ha:

$$v_i'(z) = \{ \eta_i' \}^T \{ \delta_i \}$$

$$v_i''(z) = \{ \eta_i'' \}^T \{ \delta_i \}$$

quindi

$$v_i'^2 = \{ \delta_i \}^T \{ \eta_i' \} \{ \eta_i' \}^T \{ \delta_i \}$$

$$v_i''^2 = \{ \delta_i \}^T \{ \eta_i'' \} \{ \eta_i'' \}^T \{ \delta_i \}$$

che, inserite in  $W$ , danno:

$$W(v_i) = \frac{1}{2} \{ \delta_i \}^T \left[ \int_0^{l_i} E I_i \{ \eta_i'' \} \{ \eta_i'' \}^T dz \right] \{ \delta_i \} - \frac{1}{2} N_i \{ \delta_i \}^T \left[ \int_0^{l_i} \{ \eta_i' \} \{ \eta_i' \}^T dz \right] \{ \delta_i \} + \left[ \int_0^{l_i} q_i \{ \eta_i \}^T dz \right] \{ \delta_i \}$$

$$\Rightarrow W(v_i) = \frac{1}{2} \{ \delta_i \}^T \left( [K_i] - N_i [K_{g_i}] \right) \{ \delta_i \} - \{ F_i \}^T \{ \delta_i \}$$

la evidenza la MATRICE di RIGIDEZZA ELASTICA

$$[K_i] = \int_0^{l_i} E I_i \{ \eta_i'' \} \{ \eta_i'' \}^T dz$$

la MATRICE di RIGIDEZZA GEOMETRICA della trave i-esima

$$[K_{g_i}] = \int_0^{l_i} \{ \eta_i' \} \{ \eta_i' \}^T dz$$

anche il VETTORE delle FORZE NORMALI EQUIVALENTI

$$\{ F_i \} = \int_0^{l_i} q_i \{ \eta_i \} dz$$



$$\phi = \frac{1}{2} (M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy})$$

$$\text{1D} \quad \begin{cases} E_x = \chi_x z \\ E_y = \chi_y z \\ E_{xy} = \chi_{xy} z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \chi_x = E_x / z \\ \chi_y = E_y / z \\ \chi_{xy} = E_{xy} / z \end{cases}$$

$$\text{2D} \quad \begin{cases} E_x = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} z \\ E_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} z \\ E_{xy} = -2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} z \end{cases}$$

$$\text{2D} \quad \phi = -\frac{1}{2} \left[ M_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 M_{xy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right]$$

Via Arcora, 35 - 80013 Casalnuovo di Napoli (Na) Tel. 081/8425282

# LASTRE SOCCHE A COMPRESSIONE

in base alle relazioni relative allo stato deformativo\* di una LASTRA PIANA, si ha che la ENERGIA DI DEFORMAZIONE PER UNITÀ DI SUPERFICIE di una lamina piana INFLESSIBILE

$$\Phi = -\frac{1}{2} \left( M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

Utilizzando le Equazioni\* Costitutive, si ottiene

$$\Phi = \frac{1}{2} D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + D(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2$$

Se la lamina è considerata, oltre che indeformabile a taglio, anche inestensibile e soggetta ad un Regime Membrana  $N_x, N_y, N_{xy}$ , l'ENERGIA POTENZIALE di tali sollecitazioni in configurazione FIESSA vale

$$\Phi_{NS} = \frac{1}{2} \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

In quanto riguarda i primi 2 addendi, tali contributi sono del tutto analoghi a quelli calcolati in la teoria reticolare, mentre il terzo addendo rappresenta il lavoro delle tensioni tangenziali per lo Scorrimento Angolare dovuto all'abbassamento  $w$  e può giustificarsi come segue:



Si considerano 2 segmenti infinitesimi OA e OB nelle direzioni dei due assi coordinati X e Y. A causa dell'abbassamento  $w$ , tali segmenti si trasformano in OA' e OB'. La differenza tra l'angolo AOB' e  $\pi/2$  rappresenta lo Scorrimento Angolare cercato. Per determinarlo, si costruisce l'angolo retto B'O'A'. Restando quest'angolo attorno al lato OA' della quantità  $\frac{\partial w}{\partial y}$  si porta il piano B'O'A' a coincidere col piano B'OA', così che B'' si oppone alla posizione C. Lo spostamento B'C è pari a  $\frac{\partial w}{\partial y} dy$  ed è inclinato rispetto alla verticale B''B' dell'angolo  $\frac{\partial w}{\partial x}$ . Pertanto, il segmento CB' è uguale a  $\left( \frac{\partial w}{\partial x} / \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy$  e l'angolo CO'B', che rappresenta lo SCORRIMENTO ANGOLARE dovuto all'abbassamento  $w$ , è pari a  $\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)$ .

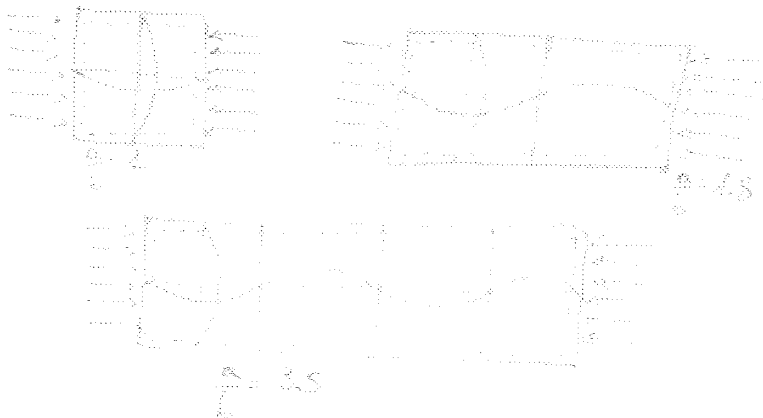
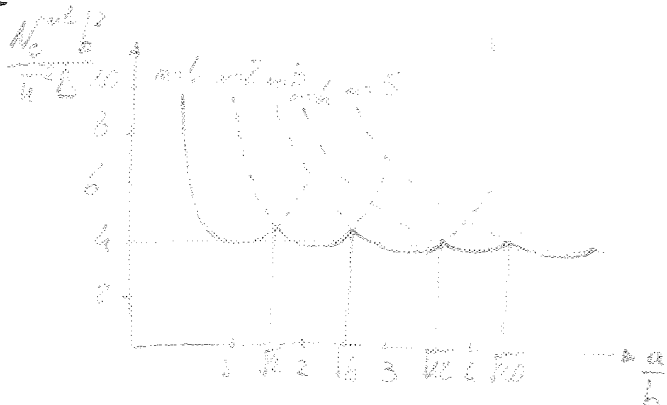
e quindi:

$$N_c^{min} = \bar{u}^2 D \frac{a^2}{m^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^2$$

Il più piccolo valore di  $N_c^{min}$  è da considerarsi il CARICO CRITICO per INSTABILITÀ dell'EQUILIBRIO ELASTICO della LASTRA. Tale valore si ottiene per  $m=1$ , poiché in comparazione il denominatore è

$$N_c^{m=1} = \bar{u}^2 D \left( \frac{m b}{a} + \frac{1 a}{m b} \right)^2$$

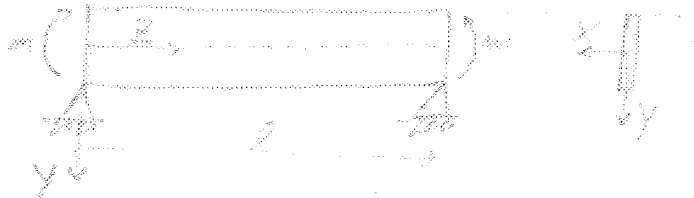
corrisponde ad una deformata con una sola semionda lungo il lato  $b$  e  $m$  semionde lungo il lato  $a$ .



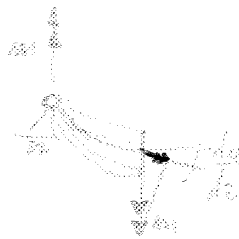
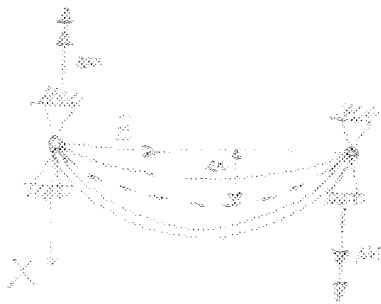
In figura è riportato il diagramma del carico critico normalizzato in funzione del rapporto  $a/b$  tra i lati del rettangolo. In realtà si ha un successione di curve al variare di  $m$ , ma per ciascun valore  $a/b$  si ha 1 determinato valore di  $m$  per cui  $N_c^{m=1}$  è minimo.  
 Per  $a/b < \sqrt{2}$ , il minimo si ha per  $m=1$   
 $\Rightarrow$  la deformata presenta una semionda in ciascuna direzione....  
 Per  $a/b > \sqrt{2}$ ,  $N_c^{m=1} \approx \bar{u}^2 D \frac{a^2}{b^2}$  ed  $m$  risulta tale da dare luogo a semionde di ampiezza comparabile sia lungo  $x$  che lungo  $y$ .

## INSIABILITA' FLESSO-TORSIONALE

Si consideri una TRAVE A SEZIONE RETTANGOLARE SOTTILE, vincolata agli estremi in modo che sia impedita la Rotazione intorno all'asse longitudinale  $Z$ . Sia tale trave soggetta a flessione Uniforme tramite l'applicazione alle estremità di due momenti in contenuti nel piano  $XZ$  di Magnezza Regolare Generale:



Si consideri una configurazione deformata della trave, con inflessione della stessa nel piano  $XZ$  di tipo regolare flessionale, e contemporanea torsione attorno all'asse  $Z$ . L'inflessione  $u(z)$  e la Rotazione torsionale  $\varphi(z)$  generano delle componenti del Momento esterno in rispettivamente nella direzione reale  $Z$  e nella direzione trasversale  $Y$ :



$$M_{zi} = m \frac{du}{dz}$$

$$M_{yi} = -m \varphi$$

Entrambe le reazioni  $M_{zi}$  e  $M_{yi}$  sono INSTABILIZZANTI, poiché tendono a far aumentare rispettivamente la rotazione torsionale  $\varphi$  e lo spostamento flessionale  $u$ . Peraltro, come per l'asta di Euler, anche in questo caso sono presenti le corrispondenti reazioni STABILIZZANTI.

$$\begin{cases} GI_z \frac{d\varphi}{dz} = m \frac{du}{dz} \\ EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = -m \varphi \end{cases}$$

Derivando la prima rispetto a  $z$  e inserendo nella seconda si ottiene

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{m^2}{EGI_y I_z} \varphi = 0$$



## K TRAVI AD ASSE CURVILINEO, ARCHI E ANELLI

Si consideri una TRAVE ad ASSE CURVILINEO, INESTENSIBILE e NON DEFORMABILE

PAGLIO. Le Equazioni cinematiche

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \epsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{1}{r} & 1 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ \varphi \end{bmatrix}$$

nell'ipotesi fatta, ossia  $\gamma = \epsilon = 0$ , si ottiene

$$\begin{cases} \varphi = -\frac{dv}{ds} + \frac{w}{r} \\ \frac{dw}{ds} = -\frac{v}{r} \\ \chi = \frac{d\varphi}{ds} \end{cases}$$

Utilizzando la prima nella terza, si ha

$$\chi = -\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{d}{ds} \left( \frac{w}{r} \right)$$

quindi, sfruttando la seconda

$$\chi = -\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{v}{r^2}$$

ricordando la relazione che lega la variazione di curvatura  $\chi$  e il momento flettente  $M$

$$\left( \chi = \frac{M}{EI} \right)$$

si ricava l'EQUAZIONE della LINEA ELASTICA per le TRAVI CURVE:

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{v}{r^2} = -\frac{M}{EI}$$

Consideriamo un involucro cilindrico di raggio  $R$ , soggetto a pressione esterna  $q$ , in una configurazione deformata simmetrica rispetto a due diametri ortogonali



l'equazione agli Autovalori diventa

$$\frac{d^2 v}{d\theta^2} + \alpha^2 v = \frac{R^2}{EI} (qRv_0 - M_A)$$

Termine cost  
 $\alpha^2$

la cui integrale è

$$v(\theta) = A \cos \alpha \theta + B \sin \alpha \theta + \frac{qRv_0 - M_A R^2}{qR^3 + EI}$$

debbono imporre le 2 Condizioni di Simmetria:

$$\frac{dv}{d\theta} = \alpha A \sin \alpha \theta - \alpha B \cos \alpha \theta = 0 \quad \text{per } \theta = 0, \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha A = 0 \\ \alpha B \sin \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} A = 0 \\ \alpha \frac{\pi}{2} = m\pi, m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

l'ultima fornisce la Successione degli Autovalori

$$\alpha_m = 2m, m \in \mathbb{N}$$

B lo ricavo ponendo  
 $v(0) = v_0$

per  $m=1$ , si ottiene il PRIMO CRITICO CRITICO:

$$q_c = \frac{3EI}{R^3}$$

→ da  $\alpha^2$

la DEFORMAZIONE

$$v(\theta) = \frac{M_A R^2 + v_0 EI}{qR^3 + EI} \cos 2\theta + \frac{qRv_0 - M_A R^2}{qR^3 + EI}$$

dalla Condizione di inestensibilità

$$\left( \frac{dw}{ds} = -\frac{v}{R} \right)$$

si ottiene

$$\text{MA } ds = R d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{d\theta} = -v$$

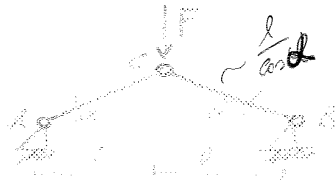
$$w(\theta) = \frac{M_A R^2 + v_0 EI}{qR^3 + EI} \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{qRv_0 - M_A R^2}{qR^3 + EI} \theta$$

la, per  $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ , lo spostamento Assiale si deve Annullare per simmetria, quindi

$$M_A = qRv_0$$

## \* ARCHI RIBASSATI

Consideriamo un arco ribassato costituito da due tratti omogeneamente deformabili di rigidità  $K$ , numerate tra loro in chiave, oltre che al suolo.



Sotto l'azione della forza  $F$ , l'angolo di deviazione della quantità conservativa  $\psi$

se si considerano solo deformazioni Simmetriche, il sistema avrà un solo grado di libertà, e la ENERGIA di DEFORMAZIONE dell'arco sarà allora pari a

$$\phi(\psi) = K \left[ \frac{l}{\cos \alpha} - \frac{l}{\cos(\alpha - \psi)} \right]^2$$

All'ipotesi di Arco Ribassato, si può porre

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}; \quad \cos(\alpha - \psi) \approx 1 - \frac{1}{2}(\alpha - \psi)^2$$

e quindi, utilizzando opportunamente la Serie di Taylor

$$\frac{1}{\cos \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2}; \quad \frac{1}{\cos(\alpha - \psi)} \approx 1 + \frac{1}{2}(\alpha - \psi)^2$$

restando

$$\phi(\psi) = \frac{1}{4} K l^2 \psi^2 (2\alpha - \psi)^2$$

l'altra parte, l'abbassamento del carico  $F$  vale

$$\eta(\psi) = l \tan \alpha - l \tan(\alpha - \psi)$$

ovvero, in prima approssimazione:

$$\eta(\psi) \approx l \psi$$

quindi, l'ENERGIA POTENZIALE TOTALE del sistema vale

$$W(\psi) = \phi(\psi) - F \eta(\psi)$$

ma

$$W(\psi) = \frac{1}{4} K l^2 \psi^2 (2\alpha - \psi)^2 - F l \psi$$

è invece si vuole percorrere il ramo virtuale IIVT, è necessario controllare il fenomeno imponendo un angolo  $\varphi$  crescente con continuità. In questo caso la forza  $F$  la si può interpretare come una reazione vincolare, che tra  $H$  ed  $N$  decresce, diventando oltre  $O'$  persino negativa. Ciò significa che, oltre la configurazione a becco allineato, è necessaria una forza verso l'alto per procedere lungo la curva  $F(\varphi)$  in modo controllato.

1. Energia restituita dal sistema nel salto HP è pari all'area  $HO'NO''P$  moltiplicata per la lunghezza  $l$ .  
 2. Tale energia si trasforma quindi in Energia Cinetica Vibrazionale del sistema attorno alla condizione rappresentata dal punto  $P$ . Il fenomeno di instabilità appena descritto, e in particolare il salto  $P$  a carico costante, è detto **SNAP-THROUGH**.

In che casi più complessi di Archi e volte ribaltate, cedendo pure flessionalmente, si verifica il fenomeno dello Snap-Through può sovrapporsi dando luogo improvvisamente ad un brusco cambio di configurazione.



- ANALISI LINEARE
- ANALISI NON LINEARE
- \* INSTABILITÀ CUSCO FLESSO-ANGOLARE
- \* INSTABILITÀ VOLTATA FLESSO-ANGOLARE

in figura: sono mostrate le curve Carico-Flessione relative a volte sferiche incastrate sul bordo, sollecitate da una pressione uniforme  $q$ . Le curve tratteggiate riguardano un'Analisi lineare, mentre quelle tratte sono un'Analisi Non-lineare. Sulla risposta lineare sono segnati anche i carichi di instabilità in un guscio sferico, di pari raggio e spessore, e per la stessa volta sferica incastrata.

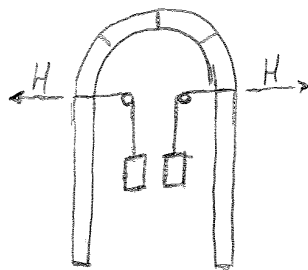
## PONTI ad ARCO in MURATURA

Un ARCO può essere definito come un elemento strutturale vincolato e regolato in modo tale che i carichi agenti su di esso generino prevalentemente sforzi di compressione.

L'assenza quasi totale dei momenti flettenti nelle sezioni dell'arco si può avere solo per i carichi fissi, cioè permanenti, purché si scelga una opportuna forma dell'arco; viceversa i carichi accidentali, che possono assumere posizioni diverse, generano sempre sezioni flettenti.

Il primo riferimento chiaro all'arco studiato come elemento strutturale si deve a Leonardo da Vinci. Egli ne propone una interpretazione significativa e non priva di fascino attraverso una serie di osservazioni e di promettenti intuizioni che solo alcuni secoli dopo avrebbero trovato il loro sviluppo e approfondimento.

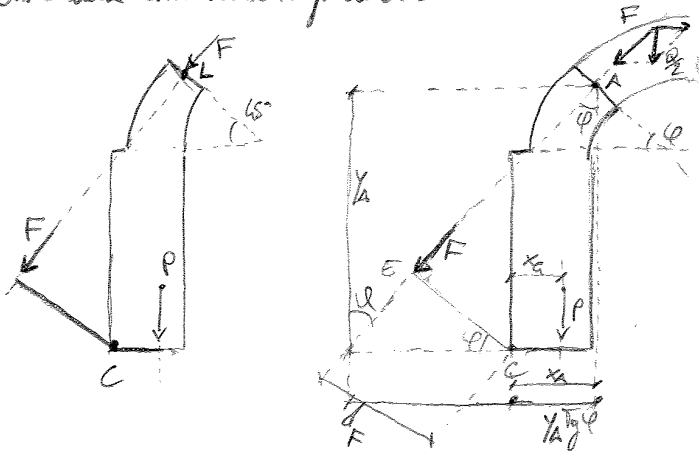
È il primo a capire che la causa principale dell'INSIABILITÀ di un arco in muratura è da ricercarsi nella spinta dell'arco sull'impalcatura: nel Codice Forster sono contenute alcune schizzi che esemplificano molto chiaramente il tentativo di MISURARE la SPINTA dell'arco sull'impalcatura attraverso il valore dei pesi applicati a catene che servono intorno a carovelle opportunamente dimensionate.



### CRITERI CINEMATICALI

Nei primi studi teorici sulla STATICA delle strutture voltate, condotti tra il 1695 e il 1740 da P. De la Hire, A. Parent, B.F. De Belidor e C.A. Couplet, la questione fondamentale sulla quale si è sempre dibattuto riguarda il problema della determinazione della linea delle pressioni relative ad un sistema di carichi assegnati. Nel loro progressivo sviluppo, questi studi permisero di individuare, attraverso la determinazione della condizione limite di collasso dell'arco e della curva delle pressioni di crisi associate, lo strumento generale che permette il calcolo della spinta sulle impalcature.

Nella sua analisi, Belidor si differenzia dal De la Hire nel concetto di leva angolare che costituisce l'interpretazione della modalità di interazione tra arco superiore e pedante. In questo caso, la forza  $F$ , applicata nella mezz'arco  $L$  del quinto di rotazione, è la diretta espressione della spinta esercitata dalla struttura superiore.



$$\frac{Q}{2} = F \cos \varphi \Rightarrow F = \frac{Q}{2 \cos \varphi}$$

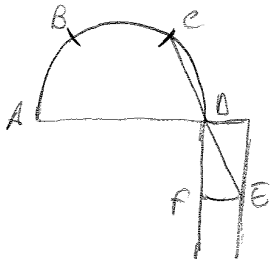
$$d_F = (y_A \sin \varphi - x_A) \cos \varphi$$

INSTABILITÀ  $\Leftrightarrow F d_F \geq P x_A \Leftrightarrow \frac{Q}{2} (y_A \sin \varphi - x_A) \geq P x_A \Leftrightarrow$

$$P \leq \frac{Q}{2} \frac{y_A \sin \varphi - x_A}{x_A}$$

la leva proposta mette chiaramente in evidenza il gioco di equilibrio tra la spinta dell'arco e il peso del pedante!

L'abate Lorenzo Mascheroni nel 1785 propone in forma più sistematica e ripropone l'analisi del cinematico del collare di un sistema arco-pedante. Il sistema strutturale preso in esame è lo stesso affrontato da De la Hire e Belidor, nel quale ci si riferisce ad un arco centrale in grado di ruotare, rimanendo un pezzo unico, spostando le due parti laterali. Per la simmetria del sistema, la reazione sulla cerniera in B non può che essere orizzontale, pertanto il peso  $\frac{Q}{2}$  del tratto di arco AB, partendo per il baricentro  $h_2$ , può essere scomposto in una direzione orizzontale partendo per B ed una direzione partendo per A.

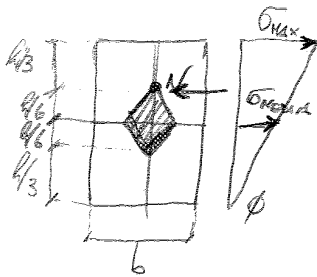


Qualunque sia la forma dell'arco, se ne divide la linea di intradosso in tre quarti di uguale misura AB, BC, CD. Si prolunga il lato CD fino al punto F, simmetrico di C rispetto a D, e si individua così la posizione dello spigolo esterno del piedritto.

Tuttavia questa costruzione, oltre a non tener conto dell'altezza dei piedritti, che ovviamente non può non entrare a far parte del problema, non dà indicazioni alcuna circa l'influenza dei diversi sistemi di carichi applicati al bi-ogiva degli archi.

NAVIER - MÈRY : III MEDIO

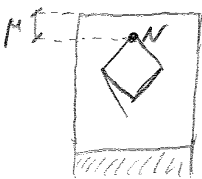
Si deve essenzialmente a Navier, per alcune precise considerazioni sulla distribuzione delle tensioni lungo le superfici di interfaccia tra i conci, il ragionamento spontaneo dei temi di studio verso la preoccupazione circa l'effettivo stato di sollecitazione del materiale. Con Navier per la prima volta viene posta attenzione alla consistenza del materiale, facendo dipendere da questo l'ultima la determinazione dei punti di applicazione delle risultanti sia in chiave che al giunto di rottura. È Navier, infine, che come un rivale per la prima volta ha ricordato che la spinta in chiave venga applicata in corrispondenza del TERZO MEDIO Superiore e la risultante in corrispondenza del giunto di rottura nel terzo medio inferiore, intendendo in tal modo la non-tenerezza a trazione del materiale.



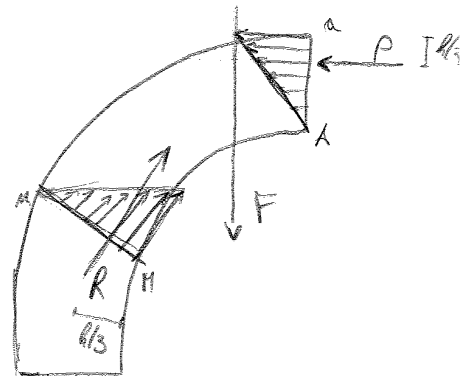
$$\sigma_{MEDIA} = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_{MAX} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot h/6}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{N}{bh} + \frac{N}{bh} = \frac{2N}{bh}$$

⇒ OSS. Il prof. Lacabozza propone in seguito a compressione



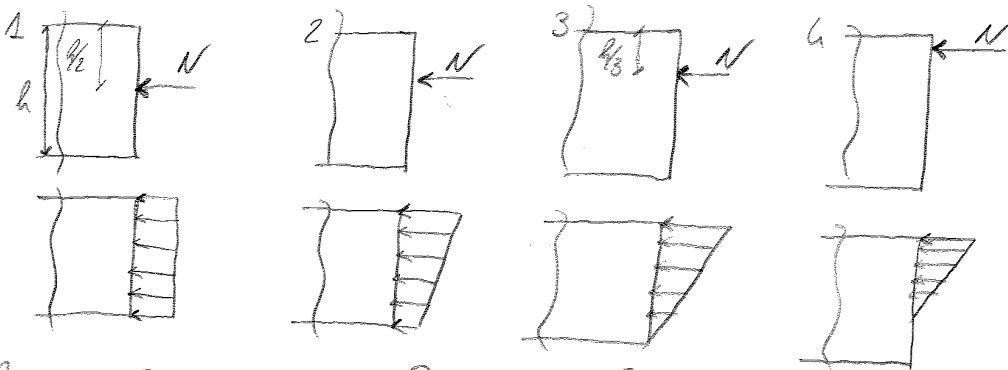
$$\sigma_{MAX} = \frac{2N}{A^*} = \frac{2N}{3ub}$$



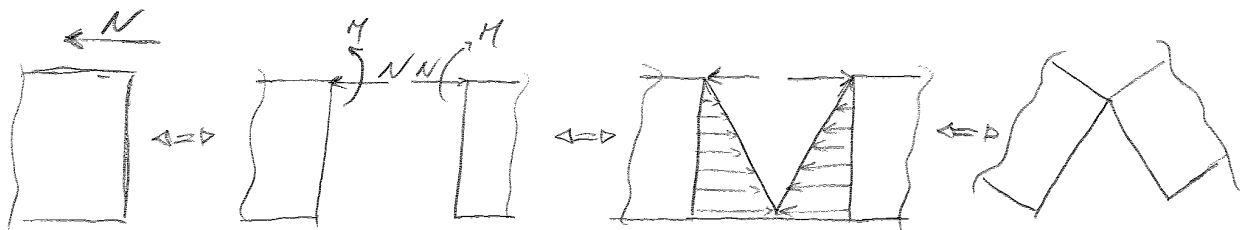
Nell'intento di applicare i metodi del calcolo a strutture all'analisi degli archi in muratura, Heymann pone 3 ipotesi per la definizione del dominio di ammissibilità del materiale:

- la pietra non possiede alcuna resistenza a trazione ('Stone has no tensile strength')
- la pietra ha infinite resistenza a compressione ('Stone has an infinite compressive strength')
- i conci in pietra non possono scivolare l'uno sull'altro ('Sliding of one stone upon another cannot occur').

Supponiamo che l'arco e i suoi carichi siano noti. Nell'analisi di questo problema il fattore più importante sarà il punto in cui agisce la forza Normale di compressione su ogni conca.



Nelle prime 3 posizioni è certamente garantita la STABILITÀ. Quando  $N$  agisce nel III Medio (3), viene comunque raggiunta dalla distribuzione delle tensioni una compressione limite. Se  $N$  agisce al di sopra del III Medio (4), necessariamente si verificherebbe una tensione di trazione nell'area del conca che nulla altro corrisponde al fatto in cui non appaiono tensioni. Questa iniziale approssimazione delle allestimenti di trazione, che il punto non può sopportare, dà alla base della regola conservativa del III Medio. In base a questa regola la forza Normale deve agire all'interno del III Medio del conca affinché sia garantita la stabilità dell'arco.



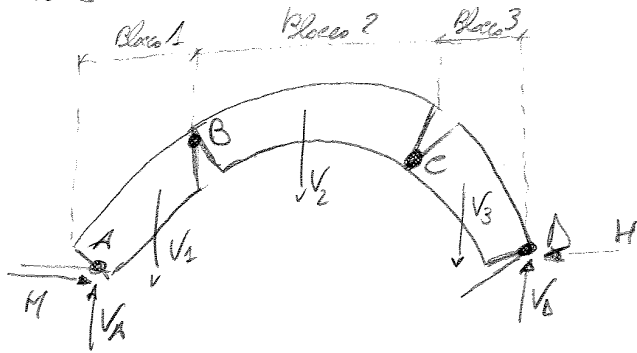


\* QUICK METHOD di HEYMAN (1901)

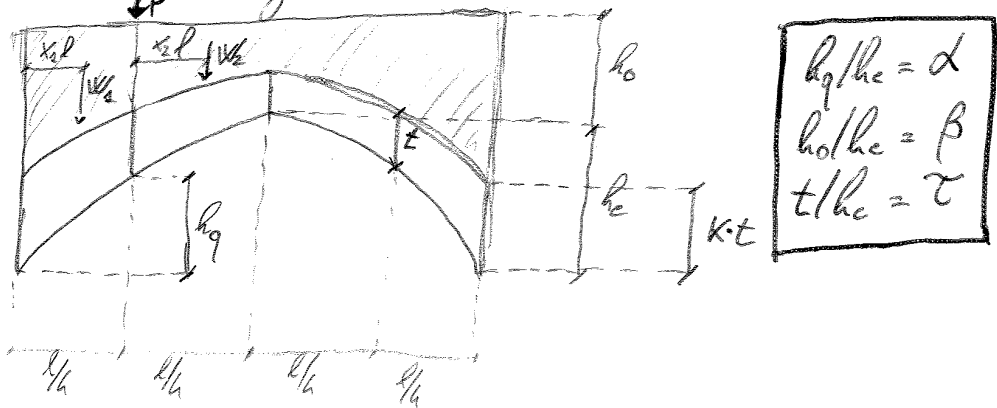
In Arco iperstatico in traveatura è dotato di 3 GRADI DI IPERSTATICITÀ. In tal modo, per divenire LABILE ha bisogno di 4 SINCRONAMENTI.

Il Modello più semplice considera esclusivamente i carichi permanenti dei diversi elementi. Il valore di allargio  $W$  può essere determinato adottando il Teorema cinematico, scrivendo le equazioni di Momento intorno alle cerniere e prendendo rispetto a  $V_2$ ,  $V_3$  e  $H$ .

Questo metodo considera un Meccanismo cinematicamente Ammissibile e praga, quindi, 1 Soluzione in Eccesso. In tal modo è necessario supporre diverse posizioni delle cerniere finché non si determina il Minimo valore di  $W$ .

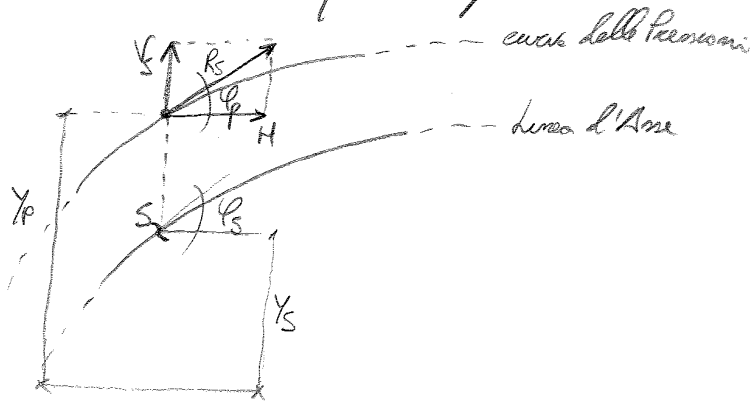


Secondo Heyman il carico che provoca il allargio è ricavabile dalla seguente equazione - si assume che la Cerniera si formi agli incastri, sotto il carico e nella sezione di Chiave



$$P = 16. \frac{W_2 x_2 \left\{ \alpha + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \tau \right\} - \left( W_3 x_2 + \frac{1}{k} W_2 \right) \left\{ (1-x) - \left(1 + \frac{1}{k}\right) \tau \right\}}{(3-2\alpha) - (2+k)\tau}$$

Vole la densità d'Asse dell'arco e la densità della Pressione relativa ad un dato Sistema di Forze, è possibile calcolare le Sollecitazioni indotte da queste. Infatti:



nella generica sezione S:

$$\begin{cases} M_s = H(y_p - y_s) \\ N_s = -R_s \cos(\phi_p - \phi_s) \\ T_s = R_s \sin(\phi_p - \phi_s) \end{cases}$$

Valiamo di  $\phi$  l'angolo spontaneamente tra le due linee, ossia  $\phi_p \approx \phi_s$ .

$$\begin{cases} M_s = H(y_p - y_s) \\ N_s = -R_s = -H/\cos\phi \\ T_s = 0 \end{cases}$$

Infine, nel caso di Perfetta Concordanza tra le due linee, si ha

$$\begin{cases} M_s = 0 \\ N_s = -H/\cos\phi \\ T_s = 0 \end{cases}$$

Questo è la Soluzione Ideale, in quanto è di interesse notevole a realizzare una struttura in cui sia presente solo Forza Normale in TUTTE le Sezioni! Questo si può ottenere per una sola configurazione di carichi (usualmente i permanenti) e per gli Archi a 3 Cerniere in quanto la Costante di Spinta negli Archi iperstatici origina sempre momenti flessionali, anche se di linea unitaria.

Quando il carico distribuito è COSTANTE, la CAP è PARABOLICA!

La curva delle Pressioni di equazione  $y(z)$  rappresenta, a meno di un fattore, l'andamento del Momento Flettente =

$$M_z = P \delta (y - y_0) = H (y - y_0)$$

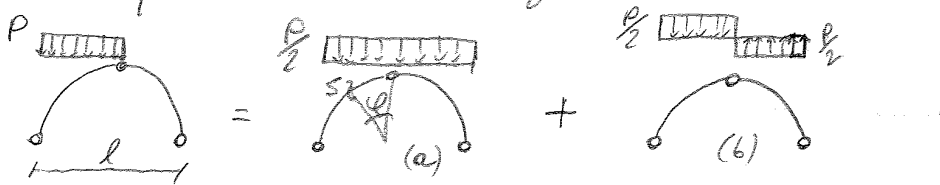
derivando 2 volte rispetto a  $z^2$

$$\frac{d^2 M_z}{dz^2} = H \left[ \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{d^2 y_0}{dz^2} \right] \quad \text{MA } y_0 = \frac{h}{l} z$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 M_z}{dz^2} = H \frac{d^2 y}{dz^2} = -q(z)$$

è in evidenza un arco che rappresenta esattamente la curva delle Pressioni, si ha  $y = y_0$  quindi il Momento Flettente è Nullo in ogni punto dell'Arco e si hanno solo Compressioni. Quando il carico è costante per Unità di lunghezza dell'Arco, e NON per Unità di area, si ottiene una Catenaria.

Per comprendere meglio il comportamento di queste strutture, è utile ricavare il diagramma dei Momenti Massimi e Minimi di un Arco Parabolico per un Carico Accidentale Uniformemente Ripartito. Si dimostra, con buona approssimazione, che la condizione più gravosa ai fini del calcolo si ha quando il carico accidentale grava su metà arco:

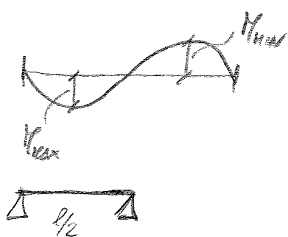


a) l'Arco è configurato secondo una Parabola del 2° ordine (Formelare di Carico Uniforme Ripartito)  $\Rightarrow$  genera in ogni sezione solo sforzo Normale

$$\begin{cases} N_s = 0 \\ N_s = -\frac{H}{\cos \varphi} = \left( -\frac{F}{2} \cdot \frac{l^2}{8} \cdot \frac{1}{f} \right) \frac{1}{\cos \varphi} = -\frac{Pl^2}{8f} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \end{cases}$$

$U_2 = F \cdot l^2 \cdot \frac{1}{8}$

b) si ha un diagramma dei Momenti simile a quello di una Trave appoggiata di luce  $l/2$ :



$$\begin{cases} N_s = 0 & F \\ M_{MAX} = \left( \frac{P}{2} \right) \left( \frac{l}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{Pl^2}{64} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Nell'Arco a 3 Cerniere Parabolico, il MAX Momento Flettente provocato da un Carico Accidentale  $P$  è 8 volte più piccolo di quello che si avrebbe in una Trave Appoggiata di pari luce !!

OSS, All'Arco a 3 Cerniere è riservato anche il calcolo dei Ponti in Muratura (METODO di NAVIER). Questo metodo fa l'ipotesi che la luce della trazione passi, nelle sezioni di chiave al terzo medio superiore, e nelle sezioni di imposta nel terzo medio inferiore. Poiché il materiale non reagisce a Trazione, ciò equivale ad ipotizzare cerniere nei punti detti, cioè in meccanismo di collasso.

la cui

$$H = \frac{\int_A^B \frac{N_0 \cos \varphi}{EA} ds + \int_A^B \frac{T_0 \sin \varphi}{CA} ds + \int_A^B \frac{M_0 \gamma}{EI} ds}{\int_A^B \frac{\cos^2 \varphi}{EA} ds + \int_A^B \frac{\sin^2 \varphi}{CA} ds + \int_A^B \frac{\gamma^2}{EI} ds}$$

Un'ESPRESSIONE APPROSSIMATA si ottiene trascurando il taglio  $T$  e considerando per lo sforzo Normale complessivo l'espressione ossia  $\varphi_p \approx \varphi_s$

$$N = N_0 + HN' \approx -\frac{H}{\cos \varphi}$$

veramente

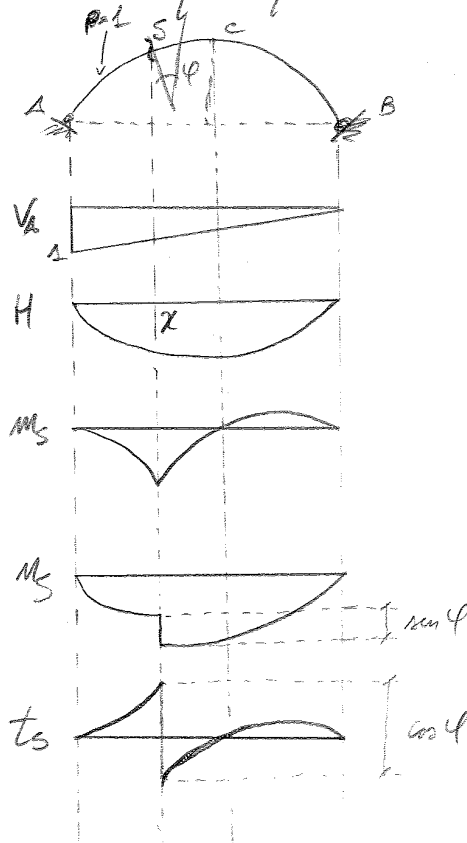
$$\int \frac{NN'}{EA} ds = \int \left( -\frac{H}{\cos \varphi} \right) (-\cos \varphi) \frac{ds}{EA} = \int \frac{H ds}{EA}$$

⇒

$$H = \frac{\int \frac{M_0 \gamma}{EI} ds}{\int \frac{\gamma^2 ds}{EI} + \int \frac{ds}{EA}}$$

L'Espressione precedente, per determinare la Spinta nell'Arco a 2 cerniere, è valida per qualunque condizione di carico.

In particolare, per un Carico Unitario Viaggiante si ottiene la LINEA D'INFLUENZA della spinta Orizz.  $H$ . Detta  $X$ , e da questa, con la linea d'influenza di  $V_A$ , si possono ricavare le linee di influenza della Sollecitazione in qualunque sezione dell'arco.



o, in forma Approssimata

$$H = \frac{\int \frac{M_0 y}{EI} ds}{\int \frac{ds}{EA} + \int \frac{y^2}{EI} ds + \frac{l}{EI l_0}}$$

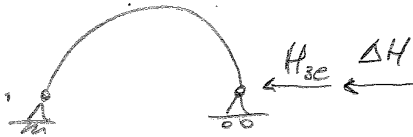
⇒ Più il Tronco è Estensibile, tanto più  $H$  è Piccolo e l'Arco si avvicina a una Trave Semplicemente Appoggiata di luce  $l$  perdendo effetto  $\frac{1}{8}$  sul Momento!

\* CADUTA di SPINTA

Se si vuole calcolare lo Stato di Sollecitazione dovuto al Peso Proprio di un ARCO a 2 CERNIERE si possono applicare le relazioni usuali prima

si può però procedere in un altro modo, e, considerando lo stesso Sistema Principale, si può applicare alla cerniera B la Spinta  $H_{3c}$  che si avrebbe se l'Arco fosse a 3 Cerniere, calando la forza  $H_{3c}$  come una Forza Esterna alla stagione di carichi permanenti.

in facendo si ottiene la differenza  $\Delta H$  (CADUTA di SPINTA) fra la Spinta Effettiva e quella <sup>del</sup> corrispondente Arco a 3 Cerniere.



Trascurando il taglio. Nella soluzione con il PLV dell'Arco a 2 Cerniere si ha

$$\begin{cases} M = M_0 + Hx' \\ N = N_0 + Hx' \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} H' = -y \\ N' = -\cos \varphi \end{cases}$$

Quindi, nella generica Sezione

$$\begin{cases} M = M_0 - (H_{3c} + \Delta H)y \\ N = N_0 - (H_{3c} + \Delta H)\cos \varphi \end{cases}$$

lunghi, c'è un beneficio perché si riduce l'aperta. Tuttavia, la caduta di Spunta provoca dei momenti flessionali (detti **PALASSI**) provocati dai carichi permanenti anche nel caso ideale in cui la linea d'Asse sia stata scelta perfettamente coincidente con il Poligono funicolare dei carichi. Nella generale sezione di ordinata  $y$ , infatti, si ha

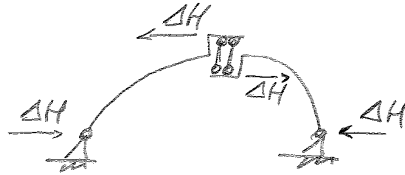
$$M_y = -\Delta H y$$

tenendo conto del segno di  $\Delta H$ , si tratta di Momenti Sempre Positivi!

La caduta di Spunta è tanto Maggiore quanto più l'Asse è Rettilineo!

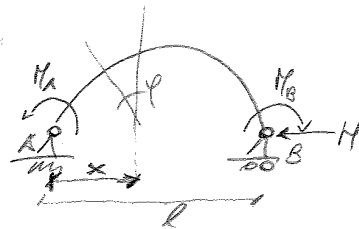
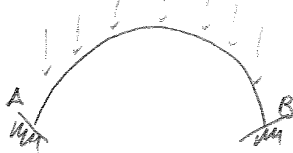
Questo effetto si può compensare progettando l'Asse in modo da avere, inizialmente, Momenti Negativi opposti a quelli dovuti alla Caduta di Spunta.

Un'altra possibilità è quella di disporre dei **MARINETTI PIGNI** (che hanno l'effetto di una **Brella Doppia**) nella Chiave dell'Asse in modo da fornire la Forza  $\Delta H$  dall'esterno

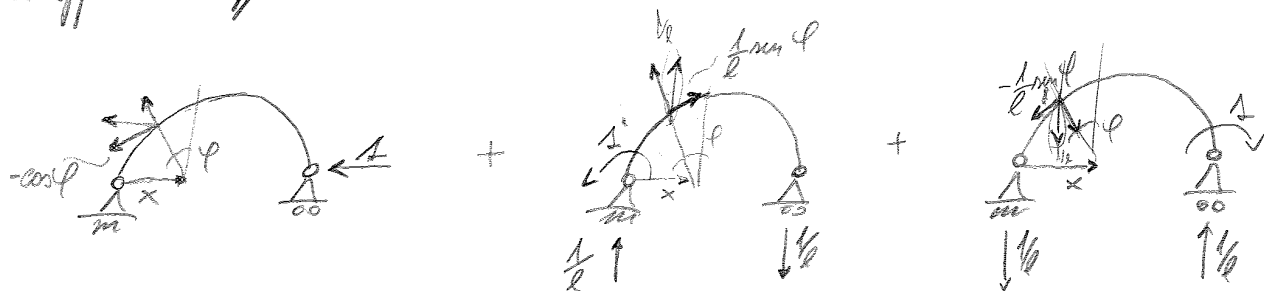


### ARCO INCASTRATO

è fatto da una struttura 3 volte iperstatica, con carichi agenti in direzione verticale. Rendiamo la struttura isostatica ponendo un carrello in B ed una cernera in A e mettendoci in evidenza le iperstatiche  $M_A, M_B$  e  $H$



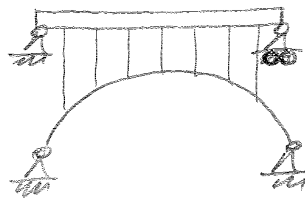
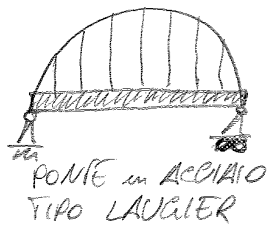
sovrapposizione Effetti:



OK

## 5) SISTEMI COLLABORANTI ARCO-TRAVE

Qualora nell'impalcato non esistano giunti, la Ripetenza Flessionale dello stesso arco è più trascurabile, specie per luci molto piccole, ed i carichi ~~esterni~~ esterni vengono portati in parte dalla trave e in parte dall'arco.



PONTE in C.A.  
TIPO MAILLART

Questi sistemi sono impiegati anche per rafforzare, con l'aggiunta dell'arco, sezioni trassate non dotate a reggere carichi accidentali di accresciuti intensità rispetto a quella di progetto.

Se enumeriamo le seguenti ipotesi:

- la distanza dei montanti è piccola rispetto alla luce  $l$  del ponte, in modo da poter considerare una inflessione a "cortine" dei montanti stessi;
- i montanti sono incernierati alle estremità, ovvero infinitamente flessibili rispetto alla trave, così da poter trascurare i Momenti Flettenti da essi derivanti;
- punti dell'arco e della trave corrispondenti alla stessa verticale subiscono eguali abbassamenti  $v$ , ciò giustifica e trascurare la Deformazione Anziché dei Montanti;
- la trave eccedente ha Momento d'inerzia costante.

### 2) CASO di ARCO SOFFILE

Ancora a quelle viste, si fa l'ipotesi di Arco infinitamente Flessibile rispetto alla trave. Questo metodo si può applicare per volte molto sottili, e porterà a stabilizzare le collaborazioni nella trave perché si trascurano le collaborazioni di flessione, mentre la stabilizzazione delle travi nella trave è un errore.

L'impossibilità da parte dell'arco di assorbire Momenti Flettenti fa sì che il sistema di forze risultate che gli vengono trasmesse dai montanti abbia come plesso focale la linea d'arco dell'arco, qualsiasi sia il carico esterno.

L'ipotesi di Arco Flessibile comporta che il sistema di forze sia rappresentativo in più rispetto a quello che si applica alla trave considerata a sé sola. In particolare, nel caso di trave semplicemente appoggiata, si ha come un'equivalente ipotetica la Spinta Orizzontale  $H$  dell'Arco:

102



la trave non ha momenti flettenti provocati dal carico permanente, che viene portato interamente dalla base. In questo caso si hanno gravi rischi di INSTABILITÀ dell'Arco nella fase iniziale, quando la trave non ha ancora acquistato la Rigidezza iniziale definitiva.

Se invece, la trave viene condotta nell'ARCO ANCORA PUNTELATO, il peso proprio da questa necessità, all'atto del duranno, la struttura collaborante nella sua configurazione finale, con una iperstaticità. In questo caso, procedendo in modo analogo a quanto visto per l'Arco a 2 cerniere, nasce una CADUTA di SPINTA pari a

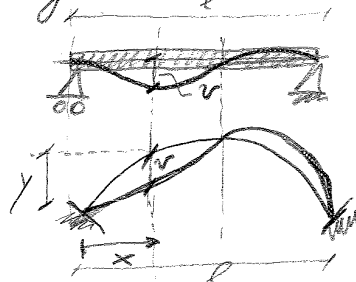
$$\Delta H = -H_2 \frac{\int_a \frac{ds}{\cos^2 \varphi E_a A_a}}{\int_0^l \frac{y^2 dx}{E_t I_t} + \int_a \frac{ds}{\cos^2 \varphi E_a A_a}}$$

e quindi nella trave orizzontale si avranno momenti flettenti pari a

$$M_y(x) = -\Delta H \cdot y$$

Le equazioni precedenti valgono nel caso in cui si accetti la Teoria del I Ordine. Quando NON si trascura l'abbassamento  $v$  della generica sezione dell'Arco (o della trave), si ha

$$M(x) = m(x) - H(y - v)$$



e si vede che, in questo caso, gli effetti del II Ordine portano ad un aumento delle sollecitazioni alla trave.

Le equazioni necessarie a calcolare anche l'incognita  $v$  vengono fornite dalle Equazioni di Conguimento alla volta.

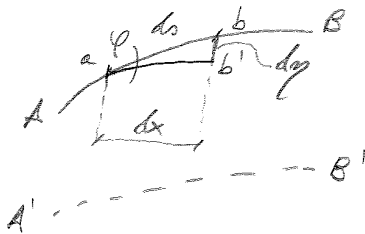
$$\Rightarrow M = M_t \left( 1 + \frac{E_a I_a \cos \varphi}{E_t I_t} \right) = M_t \left( \frac{E_t I_t + E_a I_a \cos \varphi}{E_t I_t} \right)$$

$$\Rightarrow M_t = \frac{E_t I_t}{E_t I_t + E_a I_a \cos \varphi} \cdot M = M \cdot \eta_t = M(1 - \eta_a)$$

$$M_a = \frac{E_a I_a \cos \varphi}{E_t I_t + E_a I_a \cos \varphi} \cdot M = M \cdot \eta_a$$

OSS. SPOSTAMENTI VERTICALI di una TRAVE ad ARCO

L'espressione del Momento risultante utilizzata nel sistema (1), deriva dalla definizione degli Spostamenti Verticali di una trave ad arco  $\rightarrow$   $\eta_a$  dell'arco!



AB: asse originale  
 A'B': asse deformato, godato parallelamente  
 stesso a sistema in ab'  
 $\varphi$  = Angolo di rotazione

$$\tan \varphi \approx \varphi = \frac{d\eta}{dx} ; \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi$$

Differenziando:  $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2 \eta}{dx^2} \Rightarrow d\varphi = dx \frac{d^2 \eta}{dx^2} \rightarrow$  Angolo di rotazione della sezione b rispetto ad a dovuto alla flessione di ds

Elemento ds parametrico, perché si suppone la base a piccola curvatura e trascurando le deformazioni di taglio, si ha:

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{M}{EI}$$

$$\Rightarrow d\varphi = -\frac{M}{EI} ds$$

$$\Rightarrow dx \frac{d^2 \eta}{dx^2} = -\frac{M}{EI} ds$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \eta}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \frac{ds}{dx} = -\frac{M}{EI \cos \varphi}$$

OK

# PONTI SERRALLATI

(MORANDI) → L'UNO DEI PIÙ GRANDI INGEGNERI ITALIANI  
 PRIMO STUDIOSO A PRESENTARE PROGETTO TEORICO E PRATICO  
 "PONTS FERREUX" CON IMPALCATO IN LEGNO  
 E SERRALLI = CATEGORIE DI FERRO

Ponti Serrallati non hanno avuto una evoluzione caratterizzata da uno sviluppo storico lineare, ma una affermazione rapida e piuttosto recente cui hanno contribuito i programmi congiunti delle Scienze alle Costruzioni, della Tecnologia dei Materiali e della Tecnica di Esecuzione.

Il concetto di GRANDE LUCE è infatti largamente underexplored: una luce di 100m rappresenta per un ponte in traliccio o in legno un'opera tanto impegnativa da potrebbe non essere mai realizzata mentre per un ponte in CA con microstruttura in acciaio è una luce che rientra fra i normali impieghi della pratica costruttiva.

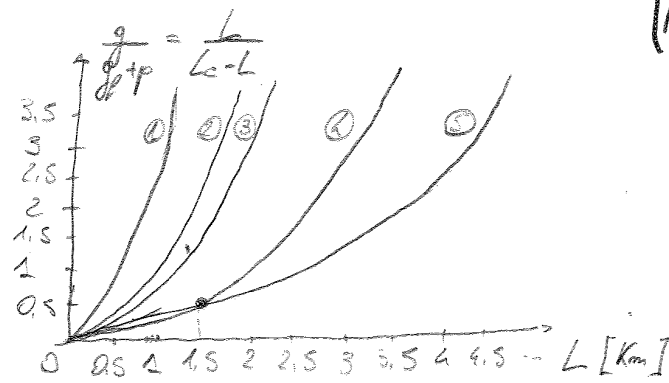
Il concetto di GRANDE LUCE deve quindi essere inteso solo in senso relativo, ossia rispetto ai materiali impiegati ed alle loro caratteristiche meccaniche. Definiamo



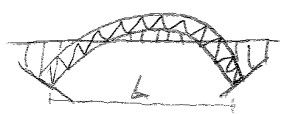
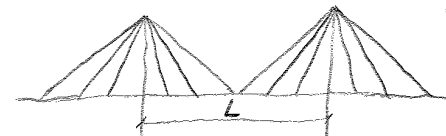
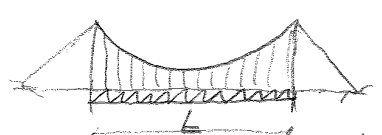
LUCE LIMITE TEORICA:  $L_c = \frac{\sigma_a}{\alpha \gamma}$

dove  $\sigma_a$  = tensione ammissibile  
 $\gamma$  = Peso Specifico  
 $\alpha$  = Coeff. dipendente dallo Schema Strutturale

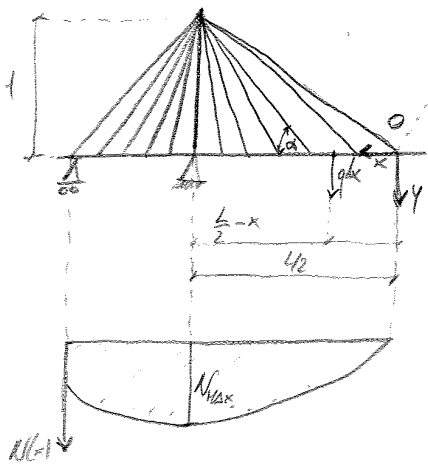
PESO TEORICO:  $g = (g_p + p) \frac{L}{L_c - L}$

dove  $g$  = carico Permanente  
 $p$  = carico Accidentale

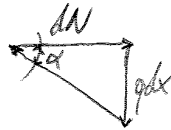


- ove:
- ① TRAVATURA RETICOLARE SEMI-PARABOLICA 
  - ② TRAVATURA RETICOLARE TIPO CERBER 
  - ③ ARCS RETICOLARE A SPINA ELIMINATA 
  - ④ PONTE SERRALLATO 
  - ⑤ PONTE SOSPESO A TRAVATA IRRIDIANTE 

► SCHEMA A VENTAGLIO: STRUTTO DI COMPRESSIONE ALL'IMPALETO



Supporto anche in questo caso la struttura diffusa, con  $\Delta$  pedissequo, si ha:



$$\frac{dN}{g dx} = \frac{1}{g dx} = \frac{L/2 - x}{H}$$

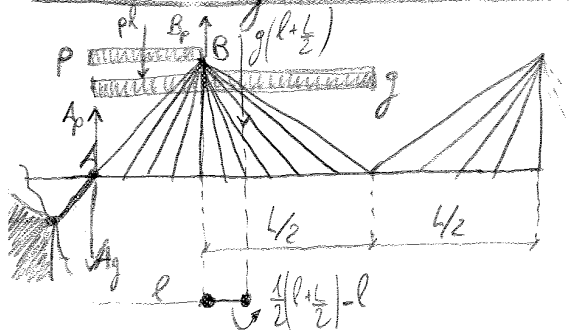
$$\Rightarrow dN = \frac{g}{H} \left( \frac{L}{2} - x \right) dx$$

$$\Rightarrow N(x) = \frac{g}{H} \int_0^x \left( \frac{L}{2} - x \right) dx = \frac{g}{H} \left( \frac{L}{2} x - \frac{x^2}{2} \right)$$

► In corrispondenza delle pile  $x = L/2$

$$N(x)_{max} = N \Big|_{x=L/2} = \frac{gL^2}{8H}$$

► STABILITA' negli STRUTTI d'ORNECCIO nello SCHEMA A VENTAGLIO



Se consideriamo INSTABILI quegli strutti nei quali lo sforzo di TRAZIONE si ANNULLA.

$$A_g = -g \left( -\frac{l^2}{2} + \frac{Ll}{2} - \frac{Ll}{2} + \frac{L^2}{8} \right) \quad \text{OK}$$

con il peso proprio  $g$  uniformemente ripartito su tutta la lunghezza, si ha

$$A_g = -g \left( \frac{l}{2} - \frac{L^2}{8l} \right) \quad B) = A_g l + g \left( \frac{l+L}{2} \right) \cdot \left( \frac{l+L}{2} - l \right) = 0$$

caso  $L = k \cdot l$ , si ha

$$A_g = g l \left( \frac{k}{8} - \frac{1}{2} \right) \quad \rightarrow \text{Da rotazione intorno a B}$$

Per la condizione di Carico Accidentale  $p$  distribuito su  $x = 0 \pm l$ , la reazione  $A_p$  vale

$$A_p = p \frac{l}{2} \quad B) = A_p l - p l \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad \text{ma } A_p = p \frac{l}{2}$$

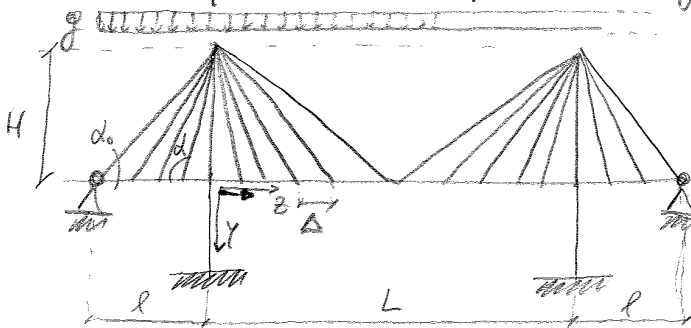
► Per la STABILITA' dello STRUTTO d'ORNECCIO, deve valere

$$|A_g^{(-)}| > |A_p^{(+)}|$$

► ANALISI STATICA per la VERIFICA STRUTTURALE  
 - EFFETTI STATICI dei CARICHI PERMANENTI

Per una immediata comprensione degli aspetti strutturali, cerchiamo una relazione con equazioni differenziali. Formuliamo lo Schema a Ventaglio.

Questo schema è quello più idoneo per la realizzazione di grandi luci. Non sono previsti Ventioli Duce di all'impalcato. Si considera il passo degli stelli  $\Delta$  generalmente piccolo rispetto alla luce della campata centrale  $L$  del ponte. Riulta quindi ragionevole supporre una loro distribuzione uniforme. La costruzione comincia a partire dalle pile, proseguendo a stallo, da configurazione finale alla Tronca e ribaltata ed è priva di Momenti flessionali. Gli sforzi sono concentrati sui nodi. La condizione di carico è quella dei carichi permanenti "g" ed è uniforme su tutta la campata.



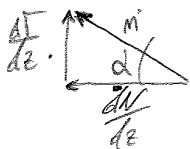
Gli Sforzi Normali nella struttura sono calcolabili dallo schema stallo equivalente con accuratezza nei nodi. Data la Simmetria strutturale e di costruzione, si può imporre l'equilibrio di un elemento di stallo nella sola metà sinistra del ponte.

Spuniamo con  $m$  lo Sforzo Distribuito nella Continua Continua degli Stelli:

$$m = \frac{N_s}{\Delta}$$

base  $N_s =$  Sforzo Normale nel generico stallo  
 $\Delta =$  distanza tra gli stelli

Si ha:



$$\frac{dN}{dz} = m \cos \alpha$$

$$\frac{dT}{dz} = m \sin \alpha$$

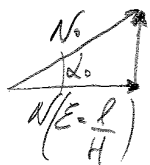
$$\tan \alpha = \frac{H}{z}$$

$$\frac{dT}{dz} = -g$$

$\Rightarrow$   
 EQUAZIONI  
 di EQUILIBRIO

$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} + m \cos \alpha = 0 \\ g - m \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Per quanto riguarda lo sforzo di trazione  $N_0$  nello STRALLO di ORNECCIO si ha:



$$\frac{N(l/H)}{N_0} = \cos \alpha \Rightarrow N_0 = \frac{N(l/H)}{\cos \alpha}$$

Prendendo conto dell'angolo ottenuto per'anni:

$$N_0 = \frac{gH}{2} \left[ \left( \frac{L}{2H} \right)^2 - \left( \frac{l}{H} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \quad \text{dove} \quad \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{(1 + \varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{l}{H}$$

Quindi:

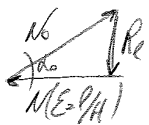
$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{gH}{2} \left[ \left( \frac{L}{2H} \right)^2 - \left( \frac{l}{H} \right)^2 \right] \cdot \frac{H}{l} \left[ 1 + \left( \frac{l}{H} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{gH^2}{2l} \left[ 1 + \left( \frac{l}{H} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \left[ \left( \frac{L}{2H} \right)^2 - \left( \frac{l}{H} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{gH^2}{2l} \left[ 1 + \left( \frac{l}{H} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \frac{l^2}{H^2} \left[ \left( \frac{L}{2l} \right)^2 - 1 \right] = \frac{g l}{2} \left[ 1 + \left( \frac{l}{H} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \left[ \left( \frac{L}{2l} \right)^2 - 1 \right] = N_0 \end{aligned}$$

Il  $N_0$  è NEGATIVO, ossia lo sforzo di compressione nello strallo di Orneccio diventa di compressione per effetto del solo vento proprio, quando

$$\left( \frac{L}{2l} \right)^2 < 1 \Rightarrow L < 2l$$

CONDIZIONE di INSTABILITÀ nello STRALLO di ORNECCIO

La REAZIONE NEGATIVA negli APPOCCI LATERALI vale



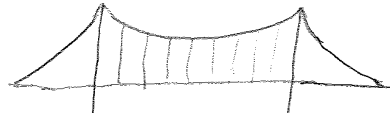
$$\frac{Re}{N_0} = \sin \alpha \Rightarrow Re = N_0 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow Re = \frac{g l}{2} \left[ 1 + \left( \frac{l}{H} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \left[ \left( \frac{L}{2l} \right)^2 - 1 \right] \sin \alpha$$

$$\text{dove} \quad \sin \alpha = \left[ 1 + \varepsilon^2 \right]^{-1/2} \quad \varepsilon = l/H$$

$$\Rightarrow Re = \frac{g l}{2} \left[ 1 + \left( \frac{l}{H} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \left[ \left( \frac{L}{2l} \right)^2 - 1 \right] \cdot \left[ 1 + \left( \frac{l}{H} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{g l}{2} \left[ \left( \frac{L}{2l} \right)^2 - 1 \right] = R_0$$

# PONTI SOSPESI



Attualmente il più lungo è l'AKASHI KAIKYO BRIDGE GIAPPONE, 1993, la Campata intermedia ha luci di 1990 m

## CONSIDERAZIONI GENERALI

lo schema di Ponte Sospeso più frequente è quello dotato di 3 Campate.  
l'impalcato è sostenuto da cavi ancorati alle estremità e alla cima delle torri

I Principali Elementi Strutturali di questi classici Ponti Sospesi sono:

a) 2 o più AM flessibili che supportano l'impalcato e trasferiscono gli sforzi alle torri e agli ancoraggi, essi sono formati da fili di acciaio con un rapporto resistenza-tensione circa 3 volte superiore a quello delle normali strutture in acciaio;

b) L'IMPALCATO, sostenuto dai cavi, realizzato da travi realizzate con acciaio ad alta resistenza;

c) L'IMPALCATO LONGITUDINALE, realizzato per distribuire i carichi concentrati (carichi di traffico) sui cavi, ha anche la funzione di uniformizzare e controllare le deformazioni locali.

l'impalcato fornisce, inoltre, la necessaria rigidità flessionale e torsionale per evitare le oscillazioni dinamiche del ponte. la sua progettazione è particolarmente delicata, bisogna infatti realizzare delle travi che abbiano sufficiente rigidità e minimo peso per ridurre al minimo la sezione dei cavi, la dimensione delle travi e degli ancoraggi.

d) le TORRI, realizzabile per sostenere i cavi al giusto livello, che dipende dalla luce della campata principale

e) gli ANCORAGGI, progettati in modo da ancorare la stabilità dei cavi principali contro ogni movimento.

la LUCE di questi ponti può superare i 1000 m ed il loro aspetto estetico è tra i più apprezzati

## PROBLEMI DI INSTABILITÀ:

- TORRE: Carichi di punta, dal punto di vista Analitico è un Problema Elettrostatico analogo a quello dei Ponti Strallati

- ORMEGGI: Analogo Ponte Strallato

- CONFIGURAZIONE FUNE

- SUFFICIENZA IMPALCATO: avendo continui pendenti, questo mi permette di creare un numero considerevole di Appoggi lungo tutto l'impalcato, e quindi sono snellito, HA però il suo oblio!

Integriamo:  $\boxed{C \sinh^{-2} \left( \frac{dy}{dx} \right) = x + A}$

NB:  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$   
 $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

U, poiché l'Origine del sistema è nel punto più basso della catenaria, si ha

in  $x=0$ , ~~non~~ la pendenza  $\boxed{\frac{dy}{dx} = 0} \Rightarrow \boxed{A=0}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \sinh \left( \frac{x}{C} \right)}$

Integriamo di nuovo:  $\boxed{y = C \cosh \left( \frac{x}{C} \right) + B}$

U, in  $x=0 \rightarrow \boxed{y=C} \Rightarrow \boxed{B=0}$

$\Rightarrow \boxed{y = C \cosh \left( \frac{x}{C} \right)}$

EQUAZIONE CARTESIANA  
 CATENARIA

È possibile ottenere la LUNGHEZZA di ciascuna parte del cavo combinando:

$\begin{cases} s = C \int \psi = C \int \frac{dx}{C} \\ \frac{dy}{dx} = \sinh \left( \frac{x}{C} \right) \end{cases} \Rightarrow \boxed{s = C \sinh \left( \frac{x}{C} \right)}$

Lo SFORZO di TRAZIONE si può ottenere da:

$\begin{cases} T \cos \psi = H \\ T \sin \psi = w s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T^2 \cos^2 \psi = H^2 \\ T^2 \sin^2 \psi = w^2 s^2 \end{cases} \Rightarrow T^2 \cos^2 \psi + T^2 \sin^2 \psi = H^2 + w^2 s^2$

$\Rightarrow \boxed{T^2 = H^2 + w^2 s^2}$

ed, essendo  $\boxed{\frac{H}{w} = C} \Rightarrow \boxed{T^2 = w^2 (C^2 + s^2)}$

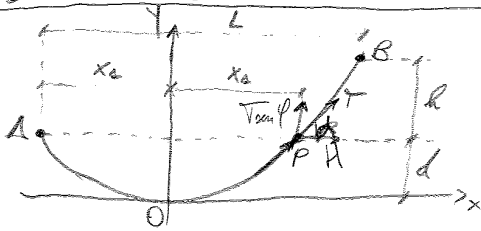
U,  $y = C \cosh \left( \frac{x}{C} \right)$ ,  $y^2 = C^2 \cosh^2 \left( \frac{x}{C} \right) \Rightarrow \boxed{C^2 = \frac{y^2}{\cosh^2 \left( \frac{x}{C} \right)}}$

$s = C \sinh \left( \frac{x}{C} \right)$ ,  $s^2 = C^2 \sinh^2 \left( \frac{x}{C} \right)$



La soluzione della Catenaria è principalmente utilizzata per determinare il profilo libero del cavo in modo da poterlo costruire. Infatti quando verranno applicati i carichi permanenti dell'impalcato, il cavo raggiungerà il suo profilo finale.

\* CASO SOTTILE A CARICO UNIFORMEMENTE RIPARTITO



Se il carico è uniformemente distribuito tra i punti di supporto, piuttosto che sulla lunghezza del cavo, si ottiene:

$$\begin{cases} T \sin \varphi = wx \\ T \cos \varphi = H \end{cases} \quad \cos \varphi = \frac{dx}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{T \sin \varphi}{T \cos \varphi} = \tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{wx}{H}$$

integrando si ottiene:  $y = \frac{1}{2} \left( \frac{wx^2}{H} \right) + A$

è l'Origine è posta nel punto più basso del cavo, dove  $x=0, y=0$ , allora  $A=0$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \left( \frac{wx^2}{H} \right) (*)$$

ritornando il caso soggetto ad un carico ripartito ha un profilo PARABOLICO, con lo stesso il caso dato da:

$$\frac{T}{H} = \frac{ds}{dx} \Rightarrow T = H \frac{ds}{dx} = H \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}$$

da (x),  $\frac{dy}{dx} = \left( \frac{w}{H} \right) x \Rightarrow T = H \sqrt{1 + \left( \frac{wx}{H} \right)^2} !$

## SISTEMI COLLABORANTI

$$H = \frac{\int_t m(x) y \frac{dx}{E_t I_t}}{\int_t y^2 \frac{dx}{E_t I_t} + \int \frac{ds}{a \cos^2 \varphi E_t A_n}}$$

• SE ARCO ANFIELLATO, nasce  $\Delta H$ .

$$\Delta H = -H_y \frac{\int \frac{ds}{a \cos^2 \varphi E_t A_n}}{\int_t y^2 \frac{dx}{E_t I_t} + \int \frac{ds}{a \cos^2 \varphi E_t A_n}} \Rightarrow y(x) = -\Delta H y$$

## PONTI STRALZATI

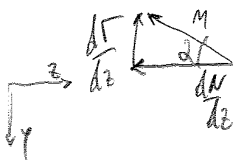
• ARPA



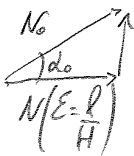
• VENTAGLIO



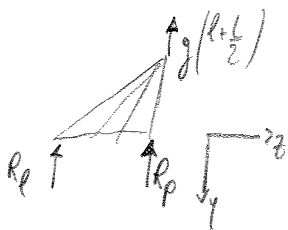
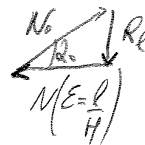
• EFFETTI SPANCI



ORNECCIO



REAZ. APPAGGI LATERALI



REAZ. PILA

## PONTI SOSPESI

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = c \frac{R_y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

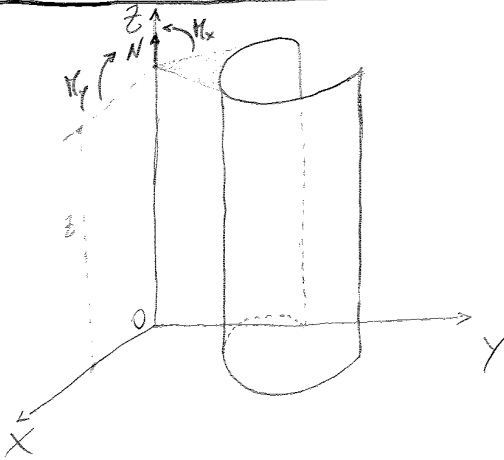
$$C \cosh^2 \left(\frac{dy}{dx}\right) = x + A \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$\Rightarrow y = C \cosh\left(\frac{x}{c}\right) + B \Rightarrow y = C \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

VUCLEI IRRIGIDENTI A SEZIONE SOTTILE APERIA:

TEORIA di VLASOV

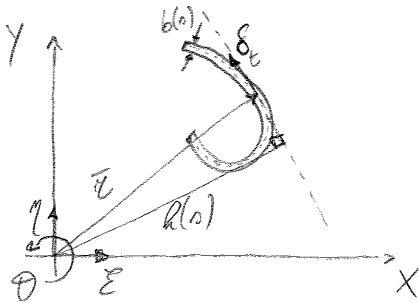
RICHIAMI sulla TEORIA delle TRAVI di SEZIONE SOTTILE APERIA



• Se consideri la trave in figura. Delle  $u, v, w$  le componenti di spostamento, l'ipotesi di indeformabilità trasversale della sezione richiede che per un generico punto  $P = P(x, y, z)$  si abbia

$$\begin{cases} u = E(z) - \theta(z)y \\ v = \eta(z) + \theta(z)x \end{cases}$$

dove  $E$  e  $\eta$  sono gli spostamenti dell'origine secondo  $X$  e  $Y$  e  $\theta$  è la Rotazione attorno all'asse  $Z$



• Sia  $\delta_t$  la componente dello spostamento secondo la tangente all'asse curvilineo  $s$  della sezione

$$\delta_t = \delta \times \bar{u}_t = u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds}$$

$$\Rightarrow \delta_t = E \frac{dx}{ds} + \eta \frac{dy}{ds} + \theta h(s)$$

lova con  $h(s)$  si è indicata la distanza orientata tra la tangente alla linea media e il polo  $P$ , origine degli assi di riferimento:

$$h(s) = \bar{r} \times \bar{u}_n$$

$$\bar{u}_t = \frac{dx}{ds} \bar{e}_x + \frac{dy}{ds} \bar{e}_y$$

$$\bar{u}_n = \frac{dy}{ds} \bar{e}_x - \frac{dx}{ds} \bar{e}_y$$

$$\Rightarrow h(s) = x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds}$$

la componente di scorrimento angolare  $\kappa_{zs}$  tra la fibra generatrice e l'asse  $z$  può porsi nella

$$\kappa_{zs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \delta_t}{\partial z}$$

Queste ultime consentono di introdurre le caratteristiche della sollecitazione

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_z dA = E(A\varepsilon' - S_y \varepsilon'' - S_x \eta'' - S_w \vartheta'') \\
 M_y &= \int_A \sigma_z x dA = E(S_y \varepsilon' - I_{yy} \varepsilon'' - I_{yx} \eta'' - I_{yw} \vartheta'') \\
 M_x &= \int_A \sigma_z y dA = E(S_x \varepsilon' - I_{xy} \varepsilon'' - I_{xx} \eta'' - I_{xw} \vartheta'') \\
 B &= \int_A \sigma_z w dA = E(S_w \varepsilon' - I_{wy} \varepsilon'' - I_{wx} \eta'' - I_{ww} \vartheta'')
 \end{aligned}$$

nel caso in cui si possano trascurare le derivate degli spostamenti  $\varepsilon, \eta, \xi$  si ha

$$\vartheta'' = -\frac{B}{EI_{ww}} \Rightarrow \bar{\sigma}_w = \frac{Bw}{I_{ww}} \rightarrow \propto B$$

Dalla  $A$  l'area della sezione trasversale della trave, abbiamo indicato con  $S$  i momenti del primo ordine:

$$S_y = \int_A x dA, \quad S_x = \int_A y dA, \quad S_w = \int_A w dA$$

con  $I$  i Momenti del Secondo Ordine:

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int_A y^2 dA, & I_{yy} &= \int_A x^2 dA, & I_{ww} &= \int_A w^2 dA \\
 I_{xy} &= \int_A xy dA, & I_{xw} &= \int_A yw dA, & I_{yw} &= \int_A xw dA
 \end{aligned}$$

$N, M_y, M_x$  evidenziano le consuete azioni interne di forza Normale e Momento Flettente  
 $B$ , invece, evidenzia l'azione interna di BIFORMENTO, come ulteriore caratteristica della sollecitazione  
 che produce Tensioni Normali Assiali  $\sigma_z$

è dato:

$$\begin{aligned} V_x &= \int_C \frac{\partial(\sigma_z b)}{\partial z} x \, ds = \frac{d}{dz} \int_A \sigma_z x \, dA & H_y \\ T_y &= \int_C \frac{\partial(\sigma_z b)}{\partial z} y \, ds = \frac{d}{dz} \int_A \sigma_z y \, dA & H_x \\ M_z &= \int_C \frac{\partial(\sigma_z b)}{\partial z} w \, ds = \frac{d}{dz} \int_A \sigma_z w \, dA & B \end{aligned}$$

Da relazioni, tenendo presente quelle ricavate per le caratteristiche di sollecitazione, consentendo di scrivere le 3 equazioni:

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{dH_y}{dz} = E(\sigma_y \xi''' - I_{yy} \xi'''' - I_{yx} \eta'''' - I_{ya} \vartheta''') \\ T_y &= \frac{dH_x}{dz} = E(\sigma_x \xi''' - I_{xy} \xi'''' - I_{xx} \eta'''' - I_{xa} \vartheta''') \\ M_z &= \frac{dB_z}{dz} = E(\sigma_w \xi''' - I_{wy} \xi'''' - I_{wx} \eta'''' - I_{wa} \vartheta''') \end{aligned}$$

le dimostriamo come il Bimomento  $B$  sia legato al Momento Torsionale  $M_z$ , così come i Componenti Torsionali  $H_x$  e  $H_y$  sono legati ai corrispondenti sforzi taglianti  $T_x$  e  $T_y$ .

La conclusione è strettamente collegata all'ipotesi che la rigidità torsionale propria (alla St. Venant) della trave sia nulla o comunque trascurabile nei confronti di quella relativa al Bimomento.

scrivendo ulteriormente queste ultime relazioni, si ottengono le espressioni delle sollecitazioni esterne risultanti:

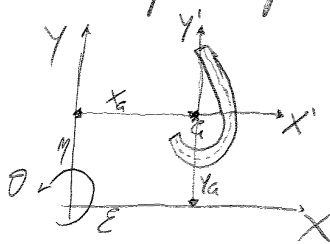
$$\begin{aligned} P_x &= -\frac{dH_x}{dz} = E(-\sigma_x \xi''' + I_{yy} \xi'''' + I_{yx} \eta'''' + I_{ya} \vartheta''') \\ P_y &= -\frac{dH_y}{dz} = E(-\sigma_y \xi''' + I_{xy} \xi'''' + I_{xx} \eta'''' + I_{xa} \vartheta''') \\ M_z &= -\frac{dB_z}{dz} = E(-\sigma_w \xi''' + I_{wy} \xi'''' + I_{wx} \eta'''' + I_{wa} \vartheta''') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= -E(I_{yy} \epsilon'' + I_{yx} \eta'' + I_{yw} \vartheta'') \\ M_x &= -E(I_{xy} \epsilon'' + I_{xx} \eta'' + I_{xw} \vartheta'') \\ B_z &= -E(I_{zy} \epsilon'' + I_{zx} \eta'' + I_{zw} \vartheta'') \end{aligned}$$

in cui si è fatto uso delle note Leggi di Trasformazione di Huygens:

$$I_{yy} = I_{yy} - A x_a^2, \quad I_{xx} = I_{xx} - A y_a^2, \quad I_{yx} = I_{yx} - A x_a y_a$$

in queste si sono indicati i Momenti del II Ordine della sezione valutati rispetto agli assi  $X'Y'$  paralleli a  $XY$  e passanti per il baricentro  $G$  della sezione



la scrittura delle caratteristiche  $M_y, M_x, B_z$  fa uso anche delle seguenti uguaglianze tra caratteristiche centrali della sezione

$$\begin{aligned} I_{yy} &= I_{yy} - A x_a^2 \\ I_{xx} &= I_{xx} - A y_a^2 \\ I_{yw} &= I_{yw} - A x_a w_a \end{aligned}$$

La differenza delle precedenti, queste non indicano alcuno spostamento del polo rispetto al quale avviene il calcolo sezionele, quanto piuttosto il cambiamento dell'origine delle coordinate  $w$  nella sezione, appunto il Momento Statico Sezionele oca Nullo (il diagramma della coordinata  $w$  diventa principale). In questo modo, i termini  $I_{yy}, I_{xx}, I_{yw}$  rappresentano le caratteristiche sezionele principali, riferite al polo scelto inizialmente.

In vista di quanto ottenuto per  $\xi'$ ,  $T_x, T_y$  e  $M_z$  assumono l'aspetto

$$\begin{aligned} T_x &= -E(I_{yy} \epsilon''' + I_{yx} \eta''' + I_{yw} \vartheta''') \\ T_y &= -E(I_{xy} \epsilon''' + I_{xx} \eta''' + I_{xw} \vartheta''') \\ M_z &= -E(I_{zy} \epsilon''' + I_{zx} \eta''' + I_{zw} \vartheta''') \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la componente longitudinale  $\xi$ , l'integrazione di  $\xi'$  nel rispetto della ossia condizione  $\xi(0) = 0$ , dà, ~~una~~ un vincolo del path che  $\xi(1) = 0$  alla base,

$$\xi = x_a \xi' + y_a \eta' + u_b \theta'$$

Una volta note le  $n$  componenti globali di movimento, si possono immediatamente dedurre le componenti di spostamento puntuali  $u, v, w$  così che si può ottenere il valore puntuale della tensione Normale  $\sigma_z$

La tensione tangenziale  $\tau_z$  deve necessariamente essere dedotta per integrazione da

$$\frac{\partial(\tau_z b)}{\partial s} + \frac{\partial(\sigma_z b)}{\partial z} = 0$$

che, tra l'altro, sotto l'espressione di  $\sigma_z$  può scriversi come

$$\frac{\partial(\tau_z b)}{\partial s} + E b (\xi'' - \epsilon'' x - \eta'' y - \theta'' w) = 0$$

visto che  $\tau_z$  è nulla sui lembi estremi della sezione, integrando si ha

$$\tau_z = -\frac{E}{b} [\xi' A(s) - \epsilon'' S_y(s) - \eta'' S_x(s) - \theta'' S_w(s)]$$

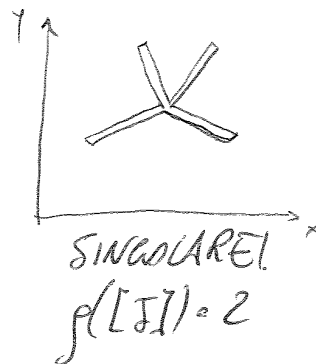
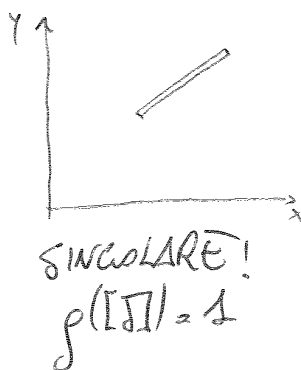
dove si sono utilizzate le relazioni

$$A(s) = \int_0^s b ds \quad S_y(s) = \int_0^s b x ds$$

$$S_x(s) = \int_0^s b y ds \quad S_w(s) = \int_0^s b w ds$$

L'analisi della tensione e della deformazione della trave può così riferirsi del tutto esaurita!

Per quanto riguarda il problema dell'invertibilità di  $[J]$ , in alcuni casi  $[J]$  può essere singolare?



e tale Matrice NON è Singolare, possiamo scrivere la relazione

$$\{\delta^{iv}\} = \frac{1}{E} [J]^{-1} \{F\}$$

Per la valutazione delle Componenti Generalizzate dello Spostamento,  $E, \eta, \theta$ , essendo i carichi  $\{F\}$  noti, si può procedere integrando quest'ultima relazione con le consuete Condizioni al Contorno:

$$\begin{cases} \{\delta\} = \{\delta'\} = \{0\} & \text{per } z=0 \\ \{\delta^u\} = \{\delta^{um}\} = \{0\} & \text{per } z=l \end{cases}$$

La componente di Spostamento longitudinale  $\xi_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) della generica trave  $i$ -esima si può scrivere come

$$\xi_i = x_{ia} \xi' + y_{ia} \eta' + w_{io} \theta'$$

Inoltre definite le funzioni  $\xi_i(z), E(z), \eta(z), \theta(z)$  attraverso il calcolo delle derivate formali e Tangenziali può essere agevolmente costruito attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E(\xi' - \xi'' - \eta'' - \theta'' w) \\ \tau_z &= -\frac{E}{b} [\xi'' A(z) - \xi''' S_f(z) - \eta''' S_x(z) - \theta''' S_w(z)] \end{aligned}$$

È di rilievo osservare che la sostituzione formale di  $\{\delta^{iv}\}$  in  $\{F_i\}$  porta la relazione

$$\{F_i\} = [D_i] [J_i]^{-1} \{F\} \quad (*)$$

$\begin{matrix} 3 \times 2 & & 3 \times 3 & & 3 \times 3 & & 3 \times 1 \end{matrix}$

ma anche

$$\begin{aligned} \{T_i\} &= [D_i] [J_i]^{-1} \{T\} \\ \{M_i\} &= [D_i] [J_i]^{-1} \{M\} \end{aligned}$$

La prima di queste tre esprime la Condizione di Ripartizione delle Azioni Transversali per le diverse "mode di Controbilanciamento dell'edificio, alla generica quota  $z$ .



## LA DINAMICA e L'INSTABILITÀ dell'EQUILIBRIO ELASTICO della TRAVE a PARETE SOTTILE SECONDO LA TEORIA di VLASOV

Le Equazioni Indipendenti di Equilibrio Transversale per il cono infinitesimo di trave, per il quale viene presa in considerazione la Teoria delle Aree Sottili di Vlasov, sono:

$$\begin{cases} q_x = -\frac{dF_x}{dz} = E(-S_y \xi'''' + I_{yy} u'''' + I_{yx} v'''' + I_{yy} \theta'''' ) \\ q_y = -\frac{dF_y}{dz} = E(-S_x \xi'''' + I_{xy} u'''' + I_{xx} v'''' + I_{xy} \theta'''' ) \\ M_z = -\frac{dM_z}{dz} = E(-S_w \xi'''' + I_{yy} u'''' + I_{xx} v'''' + I_{ww} \theta'''' ) \end{cases}$$

Il generico Sistema di Riferimento ed il generico Polo, rispetto al quale è definita la funzione  $w$ , impediscono il disaccoppiamento delle equazioni differenziali decouplate.

Affinché il problema possa essere trattato con semplicità, è conveniente scegliere <sup>ris</sup> il Sistema di Riferimento e il Polo del Calcolo Sottile (Origine e Polo) in modo che:

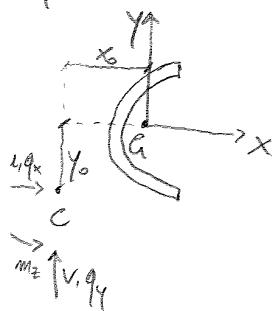
$$S_y = \int_A x dA = 0, \quad S_x = \int_A y dA = 0, \quad I_{xy} = \int_A yx dA = 0$$

ossia il Sistema di Riferimento è CENTRALE, quindi BARICENTRICO e PRINCIPALE, e

$$S_w^a = \int_A w dA = 0, \quad I_{wx}^b = \int_A wx dA = 0, \quad I_{wy}^c = \int_A wy dA = 0$$

ossia il Polo Sottile coincide col CENTRO di TAGLIO (b e c) e che l'Origine Sottile è tale che il Diagramma di  $w_c$  corrispondente sia PRINCIPALE (a).

In questo modo, le relazioni di sopra si riducono a



$$(*) \begin{cases} q_x = EI_{yy} u'''' \\ q_y = EI_{xx} v'''' \\ M_z = EI_{ww} \theta'''' - GI_T \theta'''' \end{cases}$$

$$M_z = M_z^w + M_z^t$$

$$M_z^w = -EI_{ww} \theta'''' \\ M_z^t = GI_T \theta''''$$

$$\frac{dM_z}{dz} = -m(\xi)$$

Se ipotizziamo che la trave, NON caricata da alcuna forza Esterna, inizi ad oscillare. Per effetto della massa, si sviluppano delle Forze che si oppongono agli spostamenti della trave:

$$F_{i,x} = -\rho A \ddot{u} \quad , \quad F_{i,y} = -\rho A \ddot{v}$$

Alle azioni, FORZE di INERZIA, sono esprimibili in funzione della Densità di Massa  $\rho$ , della Area  $A$  della sezione e dell'Accelerazione del Baricentro  $G$  della trave, nelle 2 Direzioni Principali. Indicando con  $u$  e  $v$  gli spostamenti del Centro di Taglio nelle Direzioni Principali e  $\theta$  la Rotazione della Sezione, si ha

$$u_a = u - y_0 \theta \quad , \quad v_a = v + x_0 \theta$$

Quindi l'Accelerazione del Baricentro presenta le seguenti componenti:

$$\ddot{u}_a = \frac{d^2}{dt^2}(u - y_0 \theta) \quad , \quad \ddot{v}_a = \frac{d^2}{dt^2}(v + x_0 \theta)$$

Le Azioni  $F_{i,x}$  e  $F_{i,y}$ , applicate nel Baricentro, esercitano un Momento rispetto al Centro di Taglio. Alle Azioni corrisponde una parte della Reazione Inerziale alla Rotazione della Sezione.

$$m_{i,z} = -\int \rho \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left[ \rho A \frac{d^2}{dt^2}(u - y_0 \theta) \right] y_0 - \left[ \rho A \frac{d^2}{dt^2}(v + x_0 \theta) \right] x_0$$

ove  $I_p$  è il Momento di Inerzia Polare della Sezione rispetto al Baricentro.

Sostituendo le forze Inerziali  $F_{i,x}$ ,  $F_{i,y}$ ,  $m_{i,z}$  ai Carichi Statici in  $(*)$ , si ottengono 3 equazioni da loro accoppiate, in cui  $I_0$  rappresenta il Momento di Inerzia Polare della Sezione rispetto al Centro di Taglio:

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u - y_0 \theta) = 0 \\ EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2}(v + x_0 \theta) = 0 \\ EI_w \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - \frac{GI_c}{L} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \rho I_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \rho A y_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho A x_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right.$$