



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 702**

**DATA: 07/10/2013**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Orefice**

**MATERIA: Scienze delle Costruzioni II + Esercizi**

**Prof. Cornetti**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## **SCIENZA DELLE COSTRUZIONI II**

### **Programma del corso**

#### **TELAI**

Testo adottato: A. Carpinteri, "Scienza delle Costruzioni", Vol. 2, Pitagora Ed., Bologna, 1992.  
Testo per esercizi: A. Carpinteri, G. Lacidogna, C. Surace, "Calcolo dei telai piani", Pitagora Ed., Bologna, 2002.

#### Cap. 12 – LA SIMMETRIA STRUTTURALE

- 12.2 Sistemi di travi con simmetria assiale
- 12.3 Sistemi di travi con antisimmetria assiale
- 12.4 Sistemi di travi con simmetria polare
- 12.5 Sistemi di travi con antisimmetria polare

#### Cap. 15 – TELAI PIANI

- 15.1 Premesse
- 15.2 Telai a nodi fissi
- 15.3 Telai a nodi spostabili
- 15.4 Carichi termici e spostamenti imposti
- 15.5 Telai a maglie non ortogonali

#### Cap. 14 – LE STRUTTURE IPERSTATICHE: METODO DEGLI SPOSTAMENTI

- ✓ 14.2 Sistemi di bielle in parallelo
- ✗ 14.3 Sistemi di travi in parallelo
- ✗ 14.4 Calcolo automatico dei sistemi di travi a molti gradi di iperstaticità
- 14.5 Travature reticolari piane
- 14.6 Telai piani
- 14.7 Grigliati piani
- 14.8 Telai spaziali

#### **METODO DEGLI ELEMENTI FINITI**

Testo adottato: A. Carpinteri, "Scienza delle Costruzioni", Vol. 2, Pitagora Ed., Bologna, 1992.

#### Cap. 11 – IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

- ✗ 11.1 Sistema ad un grado di libertà
- ✗ 11.2 Principio di minimo dell'energia potenziale totale
- ✗ 11.3 Metodo di Ritz-Galerkin
- ✗ 11.4 Principio dei lavori virtuali

#### **TRAVI, LASTRE E GUSCI**

Testi adottati: A. Carpinteri, "Scienza delle Costruzioni", Vol. 1 e 2, Pitagora Ed., Bologna, 1992.

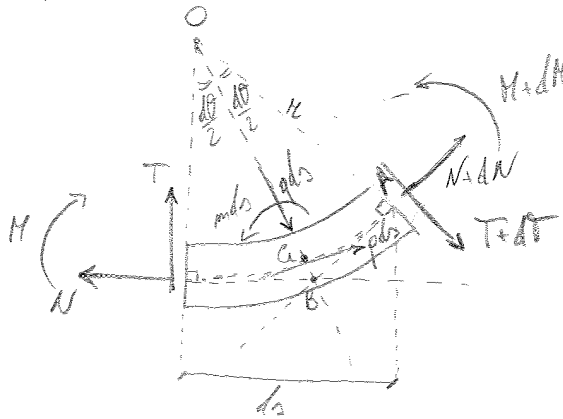
#### Cap. 10 – LE TRAVI E LE LASTRE INFLESSE

- ✗ 10.2 Travi ad asse rettilineo
- ✗ 10.3 Travi piane ad asse curvilineo

# TRAVI PIANE

## \* EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

Consideriamo un conio infinitesimo della trave delimitato da due sezioni trasversali rette, cioè ortogonali all'asse della trave.



Per deflessione =  $ds = r d\theta$   
 Inoltre:  $\widehat{OBA}$  retta in  $\hat{A}$   
 $\underline{NB} = \underline{AB} = \underline{OB} - \underline{OA}$   
 $= \frac{r}{\cos \frac{d\theta}{2}} - r$

Il conio è un genere soggetto ad un carico distribuito longitudinale  $q ds$ , ad un carico distribuito normale  $p ds$  e a un momento distribuito  $m ds$ .

Imponiamo condizioni di equilibrio:

(tang. massima):  $p ds - N \cos \frac{d\theta}{2} + (N+dN) \cos \frac{d\theta}{2} + T \sin \frac{d\theta}{2} + (T+dT) \sin \frac{d\theta}{2} = 0$   
 (radiale massima):  $q ds - N \sin \frac{d\theta}{2} - (N+dN) \sin \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} + (T+dT) \cos \frac{d\theta}{2} = 0$   
 (B):  $m ds + M + dM - M - p ds \left( \frac{r}{\cos \frac{d\theta}{2}} - r \right) - T \cdot r \tan \frac{d\theta}{2} - (T+dT) r \tan \frac{d\theta}{2} = 0$

Poiché l'angolo  $\frac{d\theta}{2}$  è infinitesimo, è lecito confondere l'angolo stesso con il suo seno o la sua tangente, e porre  $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$ .

$$\begin{cases} p ds + dN + T d\theta = 0 \\ q ds - N d\theta + dT = 0 \\ m ds + dM - T r d\theta = 0 \end{cases}$$

=>

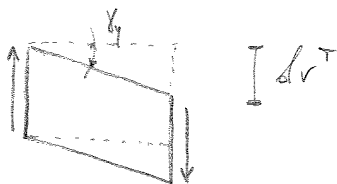
$$\begin{cases} p + \frac{dN}{ds} + T = 0 \\ q - \frac{N}{r} + \frac{dT}{ds} = 0 \\ m + \frac{dM}{ds} - T r = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONI INDEFINITE

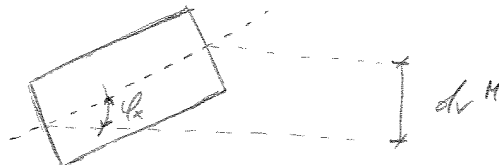
di EQUILIBRIO per  
la TRAVE

# TRAVI AD ASSE RETTILINEO

Consideriamo un concio elementare di una TRAVE ad ASSE RETTILINEO e a sezione simmetrica rispetto all'asse  $Y$ . Sia tale concio soggetto a momento flettente  $M_x$  e a taglio  $T_y$ . Le deformazioni dovute a queste due caratteristiche produrranno spostamenti relativi fra i baricentri delle due sezioni estreme del concio, esclusivamente nella direzione dell'asse  $X$ :



$$dv^T = \gamma_y dz$$



$$dv^H = -\epsilon_x dz$$

$$\Rightarrow dv = dv^T + dv^H = \gamma_y dz - \epsilon_x dz$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dz} = \gamma_y - \epsilon_x$$

Possiamo quindi formulare le equazioni fondamentali del PROBLEMA ELASTICO per SOLIDI UNIDIMENSIONALI ad ASSE RETTILINEO.

\* EQUAZIONI CINEMATICHE: definiscono le componenti di deformazione in funzione degli spostamenti in senso generalizzato.

$$\begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \epsilon_z \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix}$$

che, in forma compatta, diventano:

$$\boxed{\{q\} = [a] \{z\}}$$

$6 \times 1$       $6 \times 6$       $6 \times 1$

EQUAZIONI  
CINEMATICHE

\* EQUAZIONI COSTITUTIVE: legamo le caratteristiche statiche con le caratteristiche deformative duali. Proseguono dal Solido di Saint-Venant

$$\begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ E\varepsilon \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_x}{GA} & \frac{t_{xy}}{GA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_{xy}}{GA} & \frac{t_y}{GA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GI_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Forma Compatta:

$$\{q\}_{6 \times 1} = [H]_{6 \times 6}^{-1} \{Q\}_{6 \times 1}$$

EQUAZIONI COSTITUTIVE

La  $[H]^{-1}$  rappresenta la inversa della matrice Hessiana del Potenziale Elastico della Trave. Ovviamente, vale anche la relazione

$$\{Q\} = [H] \{q\}$$

Applicando il TEOREMA di CLAPEYRON, si ottiene il lavoro di Deformazione per unità di lunghezza della Trave, cioè il Potenziale Elastico della Trave

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \{Q\}^T \{q\}$$

NB:  $[H]^T = [H]!$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \{Q\}^T [H]^{-1} \{Q\} \quad \text{oppure} \quad \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \{q\}^T [H] \{q\}$$

Esplorando si ottiene:

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \left( t_x \frac{T_x^2}{GA} + t_y \frac{T_y^2}{GA} + 2t_{xy} \frac{T_x T_y}{GA} + \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{GI_z} \right)$$

che è una Forma Quadratica delle caratteristiche statiche. Nel caso in cui la sezione della Trave presente almeno un asse di simmetria, il fattore misto dei tagli  $t_{xy}$  si annulla e il lavoro totale è uguale alla somma dei lavori delle singole caratteristiche, valendo in questo caso il Principio di Sovrapposizione degli Effetti.

Avremo, quindi, il **PROBLEMA ELASTICO DELLA TRAVE RETTILINEA**

$$\left\{ \begin{array}{l} [L]\{\eta\} = -\{F\} \quad 0 < z < l \\ ([H][Z])\{\eta\} = \{Q_0\} \quad z = 0, l \\ \{\eta\} = \{\eta_0\} \quad z = 0, l \end{array} \right.$$

PROBLEMA ELASTICO  
della TRAVE RETTILINEA

in cui compaiono le condizioni al contorno statiche (2° eq) e quelle cinematiche (3° eq).  
Nel caso in cui non vi siano condizioni sugli spostamenti, le sollecitazioni  $\{Q_0\}$  devono costituire un sistema autoequilibrato.

\* la formulazione si semplifica notevolmente nel caso di TRAVE ad ASSE RETTILINEO SOLLECITATA nel PIANO - In particolare, infatti, avremo

> EQUAZIONI CINEMATICHE

$$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \epsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ \varphi_x \end{bmatrix}$$

> EQUAZIONI STATICHE

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ N \\ M_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ p \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> EQUAZIONI COSTITUTIVE

$$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \epsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_y}{GA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ N \\ M_x \end{bmatrix}$$

La matrice di rotazione che trasforma il sistema globale  $\{Z\}$  nel riferimento locale  $\{z\}$  è data da

$$[N] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \{z^*\} = [N]\{z\}$$

Quindi possiamo riformulare il tutto nel sistema locale:

$$\{z^*\} = [N]\{z\}$$

$$\{\eta^*\} = [N]\{\eta\}$$

$$\Rightarrow [D]^* \{Q\} + \{z^*\} = \{0\} \quad \Rightarrow [D]^* \{Q\} + [N]\{z\} = \{0\}$$

$$\{q\} = [D]\{\eta^*\} \quad \{q\} = [D][N]\{\eta\}$$

Quindi, ricordando che  $\{Q\} = [H]\{q\}$ , si ha

$$[D]^*[H][D][N]\{\eta\} + [N]\{z\} = \{0\}$$

Pre-moltiplichiamo per  $[N]^T$  e otteniamo

$$\boxed{([N]^T [D]^* [H] [D] [N]) \{\eta\} = -\{z\}}$$

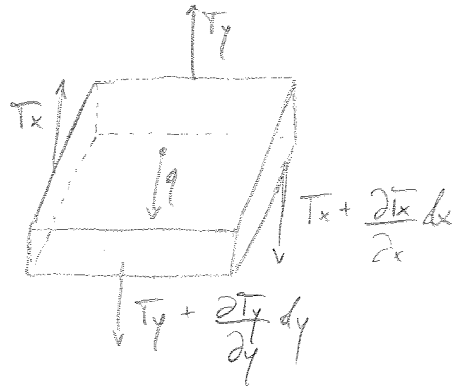
EQUAZIONE DI LAME  
per TRAVI CURVE e  
ARCHI

Quindi, possiamo formulare

$$\boxed{\begin{cases} [L]\{\eta\} = -\{z\} & 0 \leq s \leq l \\ ([N]^T [H] [D] [N]) \{\eta\} = \{Q_0\} & s=0, l \\ \{\eta\} = \{\eta_0\} & s=0, l \end{cases}}$$

PROBLEMA ELASTICO per le  
TRAVI CURVE e ARCHI



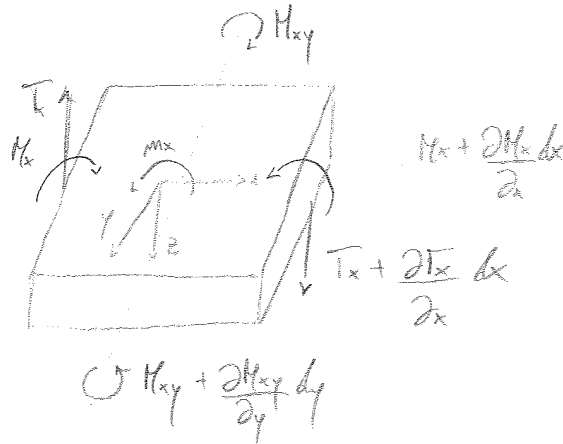


Equilibrio lungo z:

$$\left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx\right) dy - T_x dy + \left(T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy\right) dx - T_y dx + q dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q = 0}$$

Rotazione ass. y

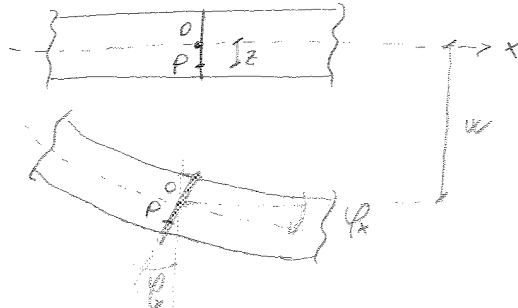
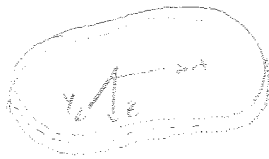


$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx\right) dy - M_x dy + \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy\right) dx - M_y dx - T_x dx dy + m_x dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_x + m_x = 0}$$

\* EQUAZIONI CINEMATICA

Consideriamo l'IPOTESI CINEMATICA di KIRCHHOFF: i segmenti ortogonali al piano medio, a deformazione assensibile, restano ortogonali al piano medio deformato



Indicando con  $\chi_x$  l'angolo di rotazione intorno a  $Y$  e con  $\chi_y$  l'angolo di rotazione intorno a  $-X$ , lo spostamento di un generico punto  $P$  presenterà le 3 componenti  $u$

$$\begin{cases} u = \chi_x z \\ v = \chi_y z \\ w = w(x, y) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{CAMPO degli} \\ \text{SPOSTAMENTI} \end{array}$$

NB: L'ultima relazione ci dice che tutti i punti appartenenti ad uno stesso segmento ortogonale al piano medio, si spostano nella stessa direzione della stessa quantità.

Otteniamo quindi il CAMPO DEFORMATIVO, PIANO:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \chi_x}{\partial x} z = \chi_{xx} z \\ E_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \chi_y}{\partial y} z = \chi_{yy} z \\ E_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \chi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial \chi_x}{\partial y} + \frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right) z = \chi_{xy} z \\ \chi_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \chi_x + \frac{\partial w}{\partial x} = \chi_x \\ \chi_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \chi_y + \frac{\partial w}{\partial y} = \chi_y \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{NON DIPENDONO} \\ \text{da } z!! \end{array}$$

\* EQUAZIONI COSTITUTIVE

Per lo STATO TENSIONALE PIANO, le EQUAZIONI COSTITUTIVE diventano

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) - \frac{\nu}{E} \sigma_z \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) - \frac{\nu}{E} \sigma_z \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases}$$

questo perché lo spessore  $h$  della lamina è ipotizzato talmente piccolo da dare possibilità di sviluppo a tensioni  $\sigma_z$  molto basse e quindi trascurabili.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x - \nu \sigma_y = E \epsilon_x \\ \nu \sigma_y - \nu^2 \sigma_x = E \nu \epsilon_y \end{cases}$$

da cui, per semplice addizione, risulta:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{cases}$$

Ma, per le relazioni cinematiche ottenute prima, possiamo formulare

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\chi_x + \nu \chi_y) z \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\chi_y + \nu \chi_x) z \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \chi_{xy} z \end{cases}$$

In Forma Matriciale avremo:

$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{12D}{h^3} & \nu \frac{12D}{h^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu \frac{12D}{h^3} & \frac{12D}{h^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6(1-\nu)D}{h^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5(1-\nu)D}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5(1-\nu)D}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)D}{2} \end{bmatrix}$								$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_x \\ \gamma_y \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$
	$\begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{B} \\ \text{B} \\ \text{B} \\ \text{B} \\ \text{B} \\ \text{B} \end{matrix}$								

$$\{Q\} = [M] \{\epsilon\}$$

$\begin{matrix} 8 \times 2 & & 8 \times 8 & & 8 \times 2 \end{matrix}$

EQUAZIONI COSTITUTIVE  
LASTRA PIANA

> EQUAZIONI CINETICHE

$$\begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix}$$

NB: Ancora si vede che l'operatore  $[\partial]$  è uguale al trasposto di:  $[\partial]^*$  a meno del segno degli  $\partial$ .

$$\{q\}_{5 \times 1} = [\partial]_{5 \times 3} \{q\}_{3 \times 1}$$

Raggruppando insieme le relazioni, si ha

$$\begin{aligned} \{q\} &= [\partial] \{q\} \\ [\partial]^* \{Q\} + \{K\} &= \{0\} \\ \{Q\} &= [H] \{q\} \end{aligned}$$

in tal modo possiamo ~~anche~~ esprimere nuovamente l'OPERATORE LA MÈ

$$[L]_{3 \times 3} = [\partial]_{3 \times 5}^* [H]_{5 \times 3} [\partial]_{5 \times 3}$$

e definiva il PROBLEMA ELASTICO DELLA LASPRA PIANA INFLESSA

$[L] \{q\} = -\{Z\}$	VPE <sub>S</sub>
$([L]^* [H] [\partial]) \{q\} = \{p\}$	VPE <sub>P</sub>
$\{q\} = \{q_0\}$	VPE <sub>C</sub>

contorno su cui definite COND. STAT  
contorno su cui definite COND. CI

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q}{D}$$

$\Rightarrow$   $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$  EQUAZIONE di SOPHIE GERMAIN

• Nota l' Operatore laplaciano  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

possiamo riformulare come:  $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = \frac{q}{D}$

$\Rightarrow \nabla^2(\nabla^2 w) = \frac{q}{D}$

$\Rightarrow \nabla^4 w = \frac{q}{D}$

Nota simile all'equazione della LINEA ELASTICA  $\frac{d^4 w}{dz^4} = \frac{q(z)}{EI}$

• Come imponiamo CONDIZIONI AL CONFINO ?

1) INCASTRO



> Lati Paralleli a y

• Se  $k_x \neq 0$  e  $k_y \neq 0$

$$\begin{cases} w=0 \\ \psi_x=0 \\ \psi_y=0 \end{cases}$$

• Se  $k_x = k_y = 0$

$$\begin{cases} w=0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

TRASCURTO DEFORMABILITÀ A TAGLIO  
 Se  $w=0$  lungo y  $\Rightarrow$  qsk. combinazione è ovvia  
 $\Rightarrow$  ... solo 11

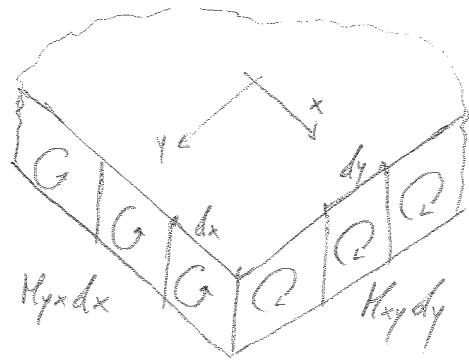
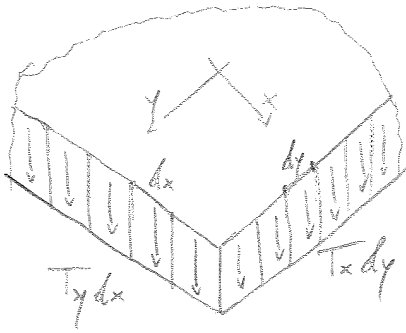
> Lati Paralleli a x

• Se  $k_x \neq 0$ ,  $k_y \neq 0$

$$\begin{cases} w=0 \\ \psi_x=0 \\ \psi_y=0 \end{cases}$$

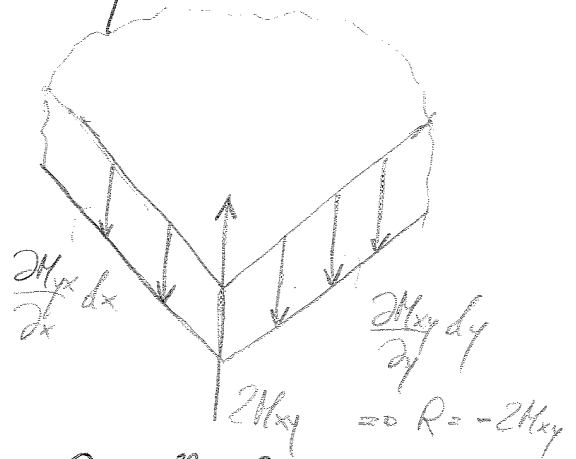
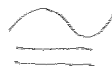
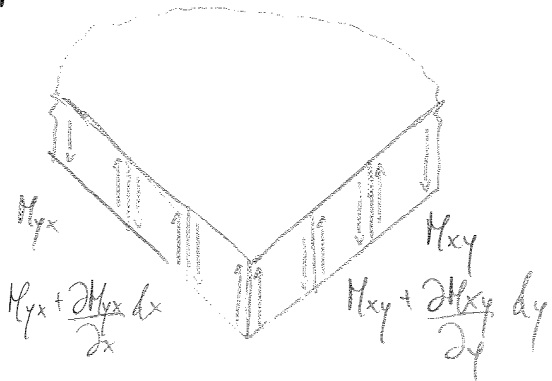
• Se  $k_x = k_y = 0$

$$\begin{cases} w=0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{INUTILE}$$

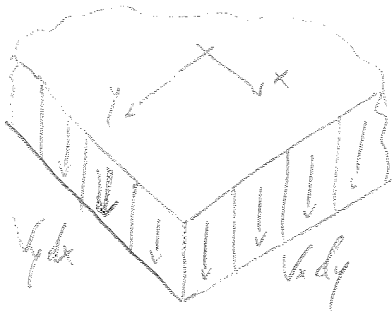


Scorporiamo i Momenti Torsionali in Coppie di Forze Equivalenti

2D



Al confine tra due elementi agiscono 2 Forze opposte sulla stessa cella d'azione. Peraltro, commutabile, restano solo gli incrementi. SOLO nello SPAZIO si SOMMANO. Possiamo, ~~per~~ quindi, considerare i cosiddetti TAGLI di KIRCHHOFF  $V_x$  e  $V_y$ :

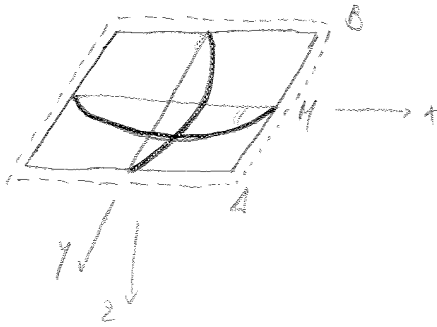


$$\begin{cases} V_y dx = T_y dx + \frac{\partial H_{yx}}{\partial x} dx \\ V_x dy = T_x dy + \frac{\partial H_{xy}}{\partial y} dy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_x = T_x + \frac{\partial H_{xy}}{\partial y} \\ V_y = T_y + \frac{\partial H_{yx}}{\partial x} \end{cases}$$

Possiamo finalmente esprimere le CONDIZIONI al CENTRO del caso di BORDO LIBERO con trascuramento della deformabilità al taglio.

➤ OSS: Consideriamo una lastra trapezoidale:



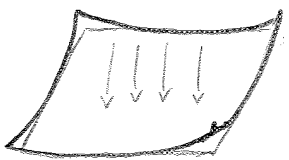
Se  $AB$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x} < 0$  -  $MA$ , se da  $M$  mi sposto verso  $A$ , l'angolo diminuisce  
 $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} > 0$  in  $A$

Quindi,  $\chi_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} < 0$

$\Rightarrow M_{xy} = \frac{1-\nu}{2} D \chi_{xy} < 0 \Rightarrow R_{11} = -2M_{xy} > 0$

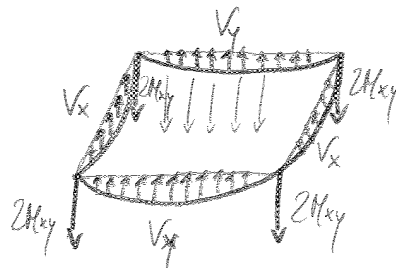
Quindi:

- VINCOLO UNILATERO



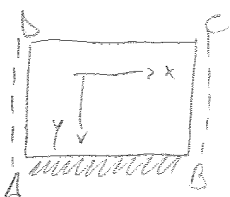
- VINCOLO BILATERO

Nota bene = Cerniera



Questo fa capire come mai negli Specchi si allungano le reazioni: Poiché lungo  $z$ , infatti, se così non fosse, gli specchi tenderebbero ad abbassarsi come succede nel caso Unilaterale,  $M_{xy}$  non apparirebbe che in realtà esse NON si spostano!

: ESEMPIO



$$AB: \begin{cases} w=0 \\ \frac{\partial w}{\partial y}=0 \end{cases}$$

$$BC=AB: \begin{cases} w=0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \end{cases}$$

$$CD: \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 \underline{DLM}: L_{v,ext} &= \int_A \{ \underline{Q}_a \} \{ \underline{q}_b \} dA + \oint_C \{ \underline{P}_a \} \{ \underline{q}_b \} ds = \\
 &= \int_A (P_x u + P_y v + q w + m_x \varphi_x + m_y \varphi_y) dA + \oint_C (N_{mx} u + N_{my} v + T_m w + H_{mx} \varphi_x + \\
 &\quad + H_{my} \varphi_y) ds = \\
 &= \int_A (---) dA + \oint_C [ (N_{mx} m_x + N_{my} m_y) u + (N_{my} m_x + N_y m_y) v + (T_x m_x + T_y m_y) w + \\
 &\quad + (H_x m_x + H_{xy} m_y) \varphi_x + (H_{xy} m_x + H_y m_y) \varphi_y ]
 \end{aligned}$$

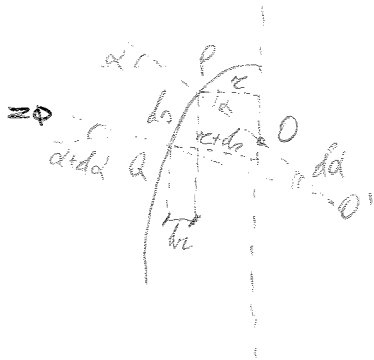
Vediamo l'applicazione del Teorema di Green per un solo termine

$$\oint_C (N_x u) m_x ds = \int_A \frac{\partial}{\partial x} (N_x u) dA = \int_A \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} u + N_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) dA$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow L_{v,ext} &= \int_A \left[ \left( -\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial H_{xy}}{\partial y} \right) u + \left( -\frac{\partial H_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial N_y}{\partial x} \right) v + \left( -\frac{\partial T_x}{\partial x} - \frac{\partial T_y}{\partial y} \right) w + \right. \\
 &\quad \left. + \left( T_x - \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H_{xy}}{\partial y} \right) \varphi_x + \left( T_y - \frac{\partial H_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \varphi_y \right] dA + \int_A \left[ \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial y} \right) u + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial H_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) v + \left( \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \right) w + \left( \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial y} \right) \varphi_x + \left( \frac{\partial H_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) \varphi_y \right] dA \\
 &+ \int_A \left( N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial u}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + T_x \frac{\partial w}{\partial x} + T_y \frac{\partial w}{\partial y} + H_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \right. \\
 &\quad \left. + H_{xy} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + H_{xy} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + H_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) dA = \\
 &= \int_A (N_x E_x + N_{xy} \gamma_{xy} + N_y E_y + T_x \delta_x + T_y \delta_y + H_x \chi_x + H_{xy} \chi_{xy} + H_y \chi_y) dA \\
 &= \int_A \{ \underline{Q}_a \}^T \{ \underline{q}_b \} dA = L_{v,ext}
 \end{aligned}$$

(crd)

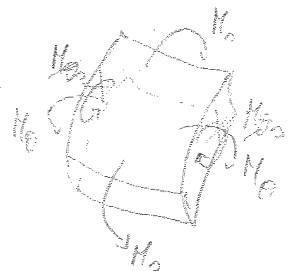
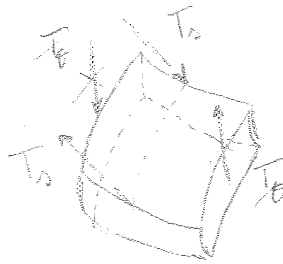
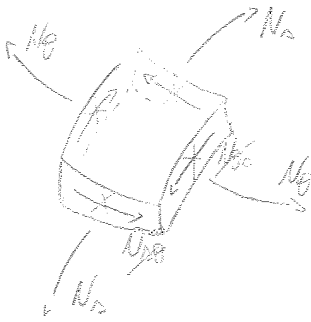
- Per semplificare una visualizzazione grafica, si adotta un SISTEMA DI RIFERIMENTO LOCALE  $(\hat{s}, \hat{\theta}, \hat{n})$  Definito, dove
  - $\hat{s}$ : lungo l'ascissa (Ascesa Curvilinea)
  - $\hat{\theta}$ : Longitudinale, Ascesa Curv Parallela
  - $\hat{n}$ : Normale



$$\begin{aligned} \overline{OP} &= R_2 \\ \widehat{QP} &= ds = R_2 d\alpha \\ dz &= ds \sin \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{ds} = \sin \alpha \\ \overline{OP} &= R_2 = \frac{r}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

### \* CARICO ASSIALSIMMETRICO

Consideriamo la lastica curvilinea ASSIALSIMMETRICAMENTE, ossia ogni piano contenente l'asse di simmetria è un Piano di Simmetria. Avremo quindi:



Le caratteristiche  $N_s, N_\theta, T_\theta$  e i momenti  $M_s$  NON compaiono perché NON rispettano SIMMETRIA. Quindi

In generale, avremo

$$\{Q\}^T = (N_s, N_\theta, N_\theta, T_s, T_\theta, M_s, M_\theta, M_\theta)$$

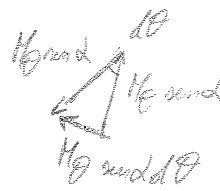
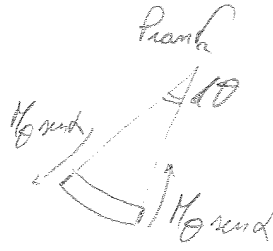
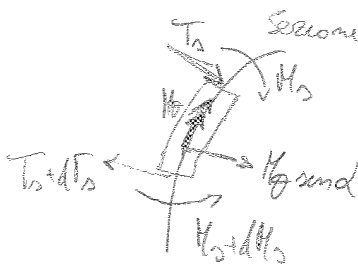
$$\{z\}^T = (p_s, p_\theta, q, m_s, m_\theta)$$

In ASSIALSIMMETRIA:

$$\{Q\}^T = (N_s, N_\theta, T_s, M_s, M_\theta)$$

$$\{z\}^T = (p_s, q, m_s)$$

• Consideriamo EQUILIBRIO attorno al PARALLELO



$$(N_s + dN_s)(r + dr)d\theta - N_s r d\theta - H_s r \sin d\theta - T_s dr \sin d\theta + m_s r d\theta dr = 0$$

$$dN_s r d\theta + N_s dr d\theta - H_s r \sin d\theta - T_s dr \sin d\theta + m_s r d\theta dr = 0$$

$$\frac{dN_s}{dr} + \frac{N_s}{r} \frac{dr}{dr} - \frac{\sin d\theta}{r} H_s - T_s + m_s = 0$$

$$\Rightarrow \left( \frac{d}{dr} + \frac{\sin d\theta}{r} \right) N_s - \frac{\sin d\theta}{r} H_s - T_s + m_s = 0$$

QUINDI:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dr} + \frac{\sin d\theta}{r} & -\frac{\sin d\theta}{r} & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & \frac{d}{dr} + \frac{\sin d\theta}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{d}{dr} + \frac{\sin d\theta}{r} & -\frac{\sin d\theta}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s \\ H_s \\ T_s \\ M_s \\ M_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_s \\ q \\ m_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[a]^* \{Q\} + \{f\} = \{d\}$$

VB. Nei CUSCI, la soluzione MEMBRANALE e quella FLESSIONALE sono ACCOPPIATE!

$$\begin{aligned}
 L_{v,ent} &= \int_S N_s \left( \frac{du}{ds} + \frac{\cancel{v \sin \alpha} u}{r} \right) r d\theta ds - \oint_C N_s u r d\theta + \\
 &+ \int_S \left[ -N_s \frac{\cancel{v \sin \alpha} u}{r} + N_\theta \frac{v \sin \alpha}{r} u - \frac{T_s}{R_1} u \right] r d\theta ds + \\
 &+ \int_S T_s \left( \frac{dv}{ds} + \frac{\cancel{v \sin \alpha} v}{r} \right) r d\theta ds - \oint_C T_s v r d\theta + \\
 &+ \int_S \left[ \frac{T_s}{R_1} v + \frac{N_\theta}{R_2} v - T_s \frac{\cancel{v \sin \alpha} v}{r} \right] r d\theta ds + \\
 &+ \int_S M_s \left( \frac{d\varphi_0}{ds} + \frac{\cancel{v \sin \alpha} \varphi_0}{r} \right) r d\theta ds - \oint_C M_s \varphi_0 r d\theta + \\
 &+ \int_S \left[ T_s \varphi_0 - M_s \frac{\cancel{v \sin \alpha} \varphi_0}{r} + M_\theta \frac{v \sin \alpha}{r} \varphi_0 \right] r d\theta ds + \\
 &+ \oint_C \left( \cancel{N_s u} + \cancel{T_s v} + M_s \varphi_0 \right) r d\theta = \\
 &= \int_S \left[ N_s \left[ \frac{du}{ds} + \frac{v}{R_1} \right] + M_\theta \left( \frac{v \sin \alpha}{r} u + \frac{v}{R_2} \right) + T_s \left( -\frac{u}{R_1} + \frac{dv}{ds} + \varphi_0 \right) + M_s \left( \frac{d\varphi_0}{ds} \right) + M_\theta \left( \frac{v \sin \alpha}{r} \varphi_0 \right) \right] r d\theta ds \\
 &= L_{v,ent} \quad \text{per PLV}
 \end{aligned}$$

KA

$$L_{v,ent} = \int_S \left[ N_s \varepsilon_s + N_\theta \varepsilon_\theta + T_s \chi_s + M_s \chi_s + M_\theta \chi_\theta \right] r d\theta ds$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 \varepsilon_s &= \frac{du}{ds} + \frac{v}{R_1} \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{v \sin \alpha}{r} u + \frac{v}{R_2} \\
 \chi_s &= -\frac{u}{R_1} + \frac{dv}{ds} + \varphi_0 \\
 \chi_s &= \frac{d\varphi_0}{ds} \\
 \chi_\theta &= \frac{v \sin \alpha}{r} \varphi_0
 \end{aligned} \right.$$

## MEMBRANE E VOLTE SOTTILI

Se diciamo MEMBRANE gli elementi strutturali bidimensionali privi di rigidità flessionale. In pratica, nella matrice [H],  $D \approx 0$ , quindi i termini  $D$  e  $\nu D$ , essendo  $D \sim h^3$ , tendono a zero molto più velocemente degli altri termini  $\frac{12D}{h^2} \sim h$ , pertanto vengono trascurati. Ciò vuol dire che

$$M_s = M_\theta = T_s = 0, \quad N_s, N_\theta \neq 0, \quad \text{SFORZI MEMBRANALI}$$

le MEMBRANE, quindi, approssimano bene lastre molto sottili,  $h \rightarrow 0$ .

L'importanza della soluzione membranale è aumentata dal fatto che essa coincide anche la soluzione approssimata per lastre con rigidità flessionale: se i vincoli sono membranali, si dimostra che la soluzione (con  $D \neq 0$ ) si avvicina pochissimo alla soluzione membranale (con  $D = 0$ ); se, invece, i vincoli NON sono membranali, ~~con~~ massimo delle sollecitazioni flessionali che, però, si SMOZZANO RAPIDAMENTE allontanandosi dal vincolo.

### \* SOLUZIONE MEMBRANALE

#### • EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{d_0} + \frac{\nu d}{z} & -\frac{\nu d}{z} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} p_s \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

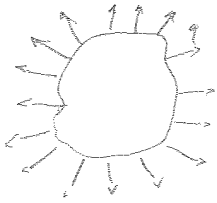
$$[a] \{x\} + \{f\} = \{0\}$$

Notiamo che sono 2 Equazioni in 2 Incognite  $\Rightarrow$  PROBLEMA INFERVAMENTE ISOSTATICO!

Quindi, in generale, c'è SEMPRE SOLUZIONE !!

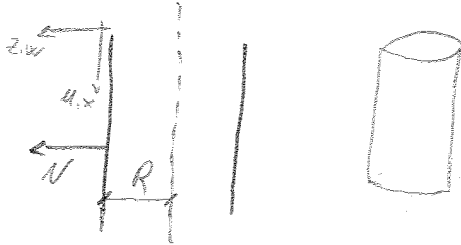
MA, se  $R_1, R_2 \rightarrow \infty$  (LASTRA PIANA)  $\Rightarrow$  NO SOLUZIONE!

→ BREVE RICHIAMO



Un corpo soggetto a un carico Uniforme, Normale al suo Profilo, è in EQUILIBRIO

\* MEMBRANE CILINDRICHE



PARTICOLARITÀ:

$d=0$  Angolo Tra  $z$  e Normale  $N$

$s \rightarrow x$

$R_2 \rightarrow \infty$  Perché il Meridiano è una Retta

$R_2 = r = R$  Perché coincide col raggio del Parallelo

$$=0 \cdot \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ N_\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_x \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [D] \{Q\} + \{F\} = \{0\}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\{q\} = [D] \{g\}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Eh} & -\frac{\nu}{Eh} \\ -\frac{\nu}{Eh} & \frac{1}{Eh} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ N_\theta \end{pmatrix}$$

$$\{q\} = [H] \{Q\}$$

• Se  $p_x = 0$  :

$$\frac{dN_x}{dx} = 0 \Rightarrow N_x = \text{cost}$$

$$N_\theta = qR \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{qR}{t}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{v}{R} = \frac{1}{Eh} (N_\theta - \nu N_x) \Rightarrow w = \frac{R}{Eh} (qR - \nu N_x)$$

$N_x, N_\theta = \text{Forza} \times \text{Unità di Lunghezza}$   
 $\sigma_x, \sigma_\theta = \text{Forza} \times \text{Unità di Area}$

\* MEMBRANE SFERICHE

- PARTICOLARITÀ:  $R_1 = R_2 = R$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} + \frac{\cos \alpha}{r} & -\frac{\sin \alpha}{r} \\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_s \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [2]^* \{Q\} + \{F\} = \{0\}$$

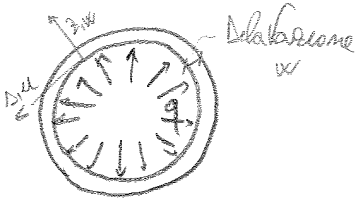
$$\begin{bmatrix} E_s \\ E_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Eh} & -\frac{\nu}{Eh} \\ -\frac{\nu}{Eh} & \frac{1}{Eh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_s \\ E_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{R} \\ \frac{\cos \alpha}{r} & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

$$\{q\} = [H]^{-1} \{Q\}$$

$$\{q\} = [2] \{q\}$$

† Caso 1: MEMBRANA SFERICA IN PRESSIONE



$$p_s = 0 \\ q = \text{cost}$$

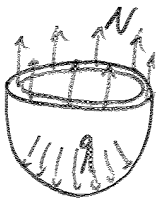
$$u = 0$$

$$N_s = N_\theta = \text{cost}$$

$$\Rightarrow -\frac{N}{R} - \frac{N}{R} + q = 0 \Rightarrow N = \frac{qR}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_s = \sigma_\theta = \frac{N}{h} = \frac{qR}{2h}$$

Per via elementare



$$N \cdot 2\pi R - q \pi R^2 = 0$$

$$\Rightarrow N = \frac{qR}{2}$$

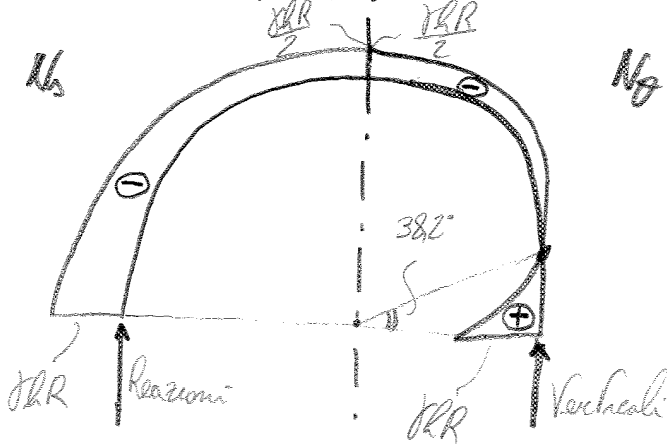
$$E_\theta = \frac{w}{R} = -\frac{\nu N}{Eh} + \frac{N}{Eh} = \frac{(1-\nu)N}{Eh} = \frac{(1-\nu)qR}{2Eh}$$

$$\Rightarrow q = \frac{2RE}{(1-\nu)R^2} w$$

↳ RIGIDEZZA

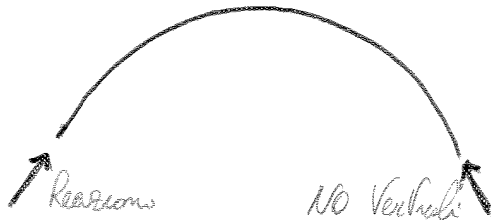
OSS: la Rigidezza della Sfera è SEMPRE Maggiore di quella del Cilindro!

vediamone i DIAGRAMMI,



Questi sforzi Pontici creano Problemi di Trazione, alla base della Cupola, che vengono risolti usando delle cerchiature di Ferro o Legno

Se si prova a risolvere scrivendo la costruzione prima che si avverano a Tensione positive



si ha avverso delle Reazioni alla base NON più Verticali, pertanto Problematiche!



• EQUAZIONI CINEMATICHE:

Per Dualità, otteniamo

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \chi_x \\ \chi_x \\ \chi_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \psi \end{bmatrix}$$

$$\{q\} = [D]\{\zeta\}$$

$$\Rightarrow \chi_\theta = 0$$

• EQUAZIONI COSTITUTIVE

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ T_x \\ M_x \\ M_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12D}{h^2} & \frac{\nu 12D}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu 12D}{h^2} & \frac{12D}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5D(1-\nu)}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & \nu D \\ 0 & 0 & 0 & \nu D & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \chi_x \\ \chi_x \\ \chi_\theta \end{bmatrix}$$

$$\{Q\} = [M]\{\zeta\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = \frac{N_x}{Eh} - \nu \frac{N_\theta}{Eh} \\ \epsilon_\theta = \frac{N_\theta}{Eh} - \nu \frac{N_x}{Eh} \end{cases}$$

Vediamola in maniera più formale:

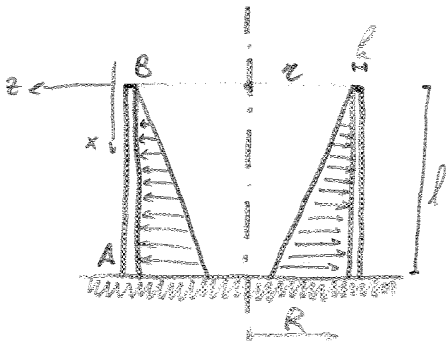
$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{4R^2} w = \frac{q}{\Delta}$$

dove  $\beta^4 = \frac{Eh}{4R^2} = \frac{Eh \cdot 12(1-\nu^2)}{4Eh^3 R^2} = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 R^2}$

$$\Rightarrow \boxed{w'''' + 4\beta^4 w = \frac{q}{\Delta}}$$

$$\beta^4 = [m^{-1}]$$

\* SERBATOIO CILINDRICO SOGGETTO A CARICO IDROSTATICO



$$q(x) = \gamma z$$

$$E, \nu \rightarrow \Delta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4R^2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w'''' + 4\beta^4 w = \frac{q(x)}{\Delta} \\ w(l) = w_A = 0 \\ \varphi(l) = \varphi_A = 0 \Rightarrow -\frac{dw}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \\ M(0) = M_B = 0 \Rightarrow -\Delta \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0 \\ T(0) = T_B = 0 \Rightarrow -\Delta \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=0} = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{l < 1}$$

Se, invece, il cilindro è LUNGO, ossia  $l > 1 = \frac{2\sqrt{3}}{\beta}$ , allora le sollecitazioni alla base NON influenzano le estremità superiori. Quindi, le deformazioni 3D sono trascurabili, perché vengono già naturalmente determinate, inutili imporre

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w(x) = e^{-\beta(l-x)} \{ C_2 \cos[\beta(l-x)] + C_3 \sin[\beta(l-x)] \} \\ w(l) = 0 \\ w'(l) = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{l > 1}$$

Possiamo quindi definire le EQUAZIONI di CONVERGENZA:

$$\begin{cases} w_A = 0 \\ \varphi_A = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} w_A = \tilde{w}_A + \lambda_{FF} T_A + \lambda_{FH} M_A = 0 \\ \varphi_A = \tilde{\varphi}_A + \lambda_{HF} T_A + \lambda_{HH} M_A = 0 \end{cases}$$

→ Richiamo:

TRAVE su SUOLO ELASTICO

$$\lambda_{FF} = \bar{F} \frac{2\beta}{K} = \bar{F} \frac{1}{2\beta^3 EI}$$

$$\lambda_{FH} = \frac{2\beta^2}{K} = \frac{1}{2\beta^2 EI} \implies$$

$$\lambda_{HH} = \bar{F} \frac{4\beta^3}{K} = \bar{F} \frac{1}{\beta EI}$$

LASTRA CILINDRICA

$$\lambda_{FF} = \bar{F} \frac{1}{2\beta^3 D}$$

$$\lambda_{FH} = \frac{1}{2\beta^2 D}$$

$$\lambda_{HH} = \bar{F} \frac{1}{\beta D}$$

$$\implies \begin{cases} \frac{YR^2}{Eh} l + \frac{1}{2\beta^3 D} T_A - \frac{1}{2\beta^2 D} M_A = 0 \\ -\frac{YR^2}{Eh} - \frac{1}{2\beta^2 D} T_A + \frac{1}{\beta^3 D} M_A = 0 \end{cases}$$

$\implies$

$$\boxed{\begin{aligned} T_A &= -\frac{Y}{2\beta^2} [2\beta l - 1] \\ M_A &= -\frac{Y}{2\beta^3} [\beta l - 1] \end{aligned}}$$

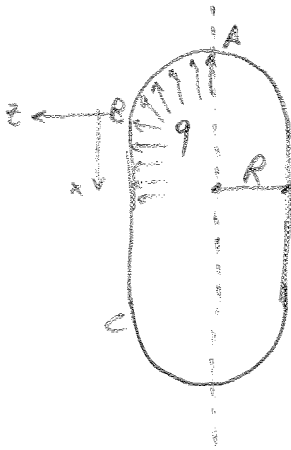
QUINDI:

$$w(x) = \frac{YR^2}{Eh} x + T_A \frac{1}{2\beta^3 D} e^{-\beta(l-x)} \cos[\beta(l-x)] - M_A \frac{1}{2\beta^2 D} [\cos[\beta(l-x)] - \sin[\beta(l-x)]]$$

e, per derivazione, ricavare

$$\begin{aligned} &\varphi(x) \\ &M(x) \\ &T(x) \end{aligned}$$

# \* SERBATOIO CILINDRICO IN PRESSIONE CON FONDI SEMISFERICI



## SOLUZIONE MEMBRANALE



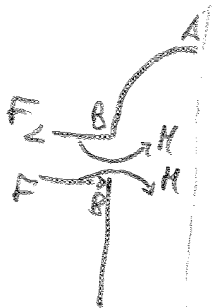
Consideriamo delle Biotte al polo degli incastri con la  
 Trasmissione solo Sforzi Membranalì

Quando:

Sfera  $\rightarrow q = \left[ \frac{2}{1-\nu} \frac{Eh}{R^2} \right] w$

Cilindro con Fondo  $\rightarrow q = \left[ \frac{2}{2-\nu} \frac{Eh}{R^2} \right] w$

## EQUAZIONI di CONGIUNZIONE



$$\begin{cases} (w_B)_{sfera} = (w_B)_{cilindro} \\ (C_B)_{sfera} = (C_B)_{cilindro} \end{cases}$$

NB: CEDOLEZZE di Sfera e  
 Cilindro sono parecchie IDENTICHE!

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1-\nu}{2} \frac{R^2}{Eh} q + (A_{FF})_p \cdot F + (A_{FM})_p \cdot M = \frac{2-\nu}{2} \frac{R^2}{Eh} q + (A_{FF})_{cil} \cdot F + (A_{FM})_{cil} \cdot M \\ 0 + (A_{FF})_p \cdot F + (A_{FM})_p \cdot M = 0 + (A_{FF})_{cil} \cdot F + (A_{FM})_{cil} \cdot M \end{cases}$$

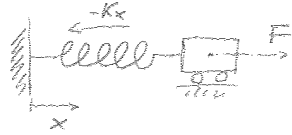
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1-\nu}{2} \frac{R^2}{Eh} q + \frac{1}{2\beta^3 D} F - \frac{1}{2\beta^3 D} M = \frac{2-\nu}{2} \frac{R^2}{Eh} q - \frac{1}{2\beta^3 D} F - \frac{1}{2\beta^3 D} M \\ -\frac{1}{2\beta^3 D} F + \frac{1}{\beta D} M = -\frac{1}{2\beta^3 D} F - \frac{1}{\beta D} M \end{cases}$$



# METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

## \* SISTEMA A UN GRADO di LIBERTÀ

Consideriamo un punto materiale soggetto ad una Forza esterna  $F$  e alle Forze Elastiche di richiamo di una molla lineare di rigidità  $K$



CONDIZIONE di EQUILIBRIO:  $F - Kx = 0$   
 $\Rightarrow$  POSIZIONE di EQUILIBRIO:  $x = \frac{F}{K}$

Allo stesso risultato si può giungere considerando l'ENERGIA POTENZIALE TOTALE del Sistema:

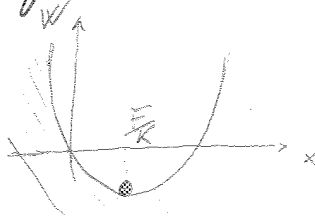
$$W(x) = \frac{1}{2} Kx^2 - Fx$$

Dalla meccanica razionale, si sa che

$$\text{Forza Totale} = -\frac{dW}{dx} = -Kx + F$$

$$\Rightarrow \text{EQUILIBRIO: } -\frac{dW}{dx} = 0$$

che definisce un PUNTO di STAZIONARIETÀ, che è esattamente il MINIMO dell'ENERGIA POTENZIALE TOTALE, che può essere rappresentata come una Parabola  $f$  in funzione dell'elongazione, detta BUCIA di POTENZIALE



• La Posizione di Equilibrio è ottenibile anche applicando il PRINCIPIO dei LAVORI VIRTUALI, infatti imponendo uno spostamento virtuale  $\Delta x$  al sistema in equilibrio, il lavoro con prodotto deve risultare nullo

$$\Rightarrow F\Delta x - Kx\Delta x = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{F}{K}$$

Il METODO degli ELEMENTI FINITI è un METODO di DISCRETIZZAZIONE nel senso che, invece di considerare la Funzione Continua degli Spostamenti  $\{q\}$ , considera come incognite solo gli Spostamenti  $\{\delta\}$  di un numero discreto  $n$  di punti tutti NON (= speculari). Una volta noti questi, con l'uso di FUNZIONI INTERPOLANTI, si determinano gli Spostamenti Continui  $\{q\}$ .

$$\Rightarrow W(\eta) = \frac{1}{2} \left( - \int_V \{\eta\}^T [\mathcal{L}] \{\eta\} dV + \int_S \{\eta\}^T [\mathcal{L}_0] \{\eta\} ds \right) - \int_V \{\eta\}^T \{\mathcal{Z}\} dV + \int_S \{\eta\}^T \{\rho\} ds$$

Per turbiamo le Condizioni di Equilibrio, con  $\Delta\eta$ .

$$\begin{aligned} W(\eta + \Delta\eta) &= \frac{1}{2} \left( - \int_V \{\eta + \Delta\eta\}^T [\mathcal{L}] \{\eta + \Delta\eta\} dV + \int_S \{\eta + \Delta\eta\}^T [\mathcal{L}_0] \{\eta + \Delta\eta\} ds \right) + \\ &- \int_V \{\eta + \Delta\eta\}^T \{\mathcal{Z}\} dV - \int_S \{\eta + \Delta\eta\}^T \{\rho\} ds = \\ &= \frac{1}{2} \left( - \int_V \{\eta\}^T [\mathcal{L}] \{\eta\} dV - \int_V \{\eta\}^T [\mathcal{L}] \{\Delta\eta\} dV - \int_V \{\Delta\eta\}^T [\mathcal{L}] \{\eta\} dV - \int_V \{\Delta\eta\}^T [\mathcal{L}] \{\Delta\eta\} dV + \int_S \{\eta\}^T [\mathcal{L}_0] \{\eta\} ds + \int_S \{\eta\}^T [\mathcal{L}_0] \{\Delta\eta\} ds + \int_S \{\Delta\eta\}^T [\mathcal{L}_0] \{\eta\} ds + \int_S \{\Delta\eta\}^T [\mathcal{L}_0] \{\Delta\eta\} ds \right) - \int_V \{\eta\}^T \{\mathcal{Z}\} dV + \\ &- \int_V \{\Delta\eta\}^T \{\mathcal{Z}\} dV - \int_S \{\eta\}^T \{\rho\} ds - \int_S \{\Delta\eta\}^T \{\rho\} ds = \end{aligned}$$

per TEOR. BETH

$$\begin{aligned} &= W(\eta) - \int_V \{\Delta\eta\}^T [\mathcal{L}] \{\eta\} dV + \int_S \{\Delta\eta\}^T [\mathcal{L}_0] \{\eta\} ds + \\ &\frac{1}{2} \left( - \int_V \{\Delta\eta\}^T [\mathcal{L}] \{\Delta\eta\} dV + \int_S \{\Delta\eta\}^T [\mathcal{L}_0] \{\Delta\eta\} ds \right) - \int_V \{\Delta\eta\}^T \{\mathcal{Z}\} dV \\ &- \int_S \{\Delta\eta\}^T \{\rho\} ds \end{aligned}$$

per EQU. PROB. ELAS.

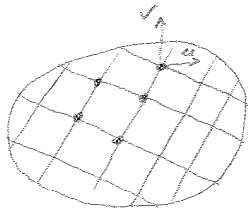
$$= W(\eta) + \frac{1}{2} \left( - \int_V \{\Delta\eta\}^T [\mathcal{L}] \{\Delta\eta\} dV + \int_S \{\Delta\eta\}^T [\mathcal{L}_0] \{\Delta\eta\} ds \right)$$

HA

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}] \{\Delta\eta\} &= - \{\Delta\mathcal{Z}\} \\ [\mathcal{L}_0] \{\Delta\eta\} &= \{\Delta\rho\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Il Corollario esprime il lavoro delle Forze di Volume  $\{\Delta\mathcal{Z}\}$  e quelle di Superficie  $\{\Delta\rho\}$  compiono per gli spostamenti  $\{\Delta\eta\}$  da essi provocati

# \* METODO DI RITZ-GALERKIN



$n = \text{NODI}$

$g = \text{GRADI DI LIBERTÀ}$

Con il METODO DI APPROSSIMAZIONE DI RITZ-GALERKIN, si rende stazionario il Funzionale  $W(\eta)$  esprimendo la Funzione Incongnita  $\{\eta\}$  come somma di funzioni inde e linearmente indipendenti  $\{\eta_i\}$ ,  $i=1,2,\dots,(g \times n)$

$$\{\eta\} = \sum_{i=1}^{g \times n} \alpha_i \{\eta_i\}$$

boia le nuove incognite sono i coefficienti  $\alpha_i$ . Quindi

$$W(\eta) = \frac{1}{2} \left( - \sum_{i=1}^{g \times n} \sum_{j=1}^{g \times n} \alpha_i \alpha_j \int_V \{\eta_i\}^T [L] \{\eta_j\} dV + \sum_{i=1}^{g \times n} \sum_{j=1}^{g \times n} \alpha_i \alpha_j \int_S \{\eta_i\}^T [L_0] \{\eta_j\} ds \right) +$$

$$- \left( \sum_{i=1}^{g \times n} \alpha_i \int_V \{\eta_i\}^T \{z\} dV + \sum_{i=1}^{g \times n} \alpha_i \int_S \{\eta_i\}^T \{p\} ds \right)$$

In forma sintetica:

$$W(\alpha) = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [L] \{\alpha\} - \{\alpha\}^T \{F\}$$

boia -  $\{\alpha\}$  è il vettore dei coeff. di incogniti

-  $[L]$  è quadrata  $(g \times n) \times (g \times n)$  e ha come elementi

$$L_{ij} = - \int_V \{\eta_i\}^T [L] \{\eta_j\} dV + \int_S \{\eta_i\}^T [L_0] \{\eta_j\} ds$$

-  $\{F\}$  vettore di dimensione  $(g \times n) \times 1$  e ha come elementi

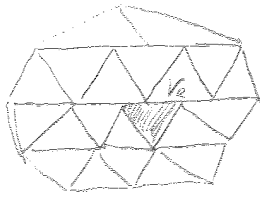
$$F_i = \int_V \{\eta_i\}^T \{z\} dV + \int_S \{\eta_i\}^T \{p\} ds$$

-  $[L]$ , per FEO di BEM, è SIMMETRICA e prende il nome di MATRICE DI RITZ-GALERKIN.



## \* PRINCIPIO LAVORI VIRTUALI

Suddividiamo il nostro dominio elastico  $V$  in sottodomini  $V_e$ , detti **ELEMENTI FINITI**, con forma (essendo in dimensione 2) a 3 o 4 lati,



Ogni elemento contiene  $m$  NODI, che possono essere interni, sui lati o coincidenti con i vertici.

Per ognuno degli  $m$  NODI, associamo una SPLINE, che sarà definita solo su  $V_e$  se è un nodo interno, anche nell'elemento adiacente se il nodo è su un lato, anche su tutti gli altri elementi a cui appartiene il nodo se esso coincide con un vertice. Quindi ad ciascun nodo  $K$  di  $V_e$  associamo una matrice diagonale formata da  $q$  vettori:

$$[\eta_K] = \begin{bmatrix} \eta_K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta_K & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \eta_K \end{bmatrix} \quad K=1, \dots, m$$

$q \times q$

Tali matrici prendono il nome di **FUNZIONI di FORMA** e ~~sono~~ soddisfanno

$$[\eta_K]_j = [\delta_{Kj}]$$

In questo modo il vettore spostamento  $\{z\}$  può essere espresso per interpolazione mediante le funzioni di forma:

$$\{z\} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \dots & \eta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_m \end{bmatrix}$$

$q \times 1 \quad q \times q \quad q \times q \quad q \times q \quad q \times 1$

$L_0$  FUNZIONI SPOSTAMENTO  
sui NODI


L'integrale a primo membro è detto **MATRICE di RIGIDITÀ LOCALE**

$$[K_e] = \int_{V_e} [B_e]^T [M] [B_e] dV$$

$(g \times m) \times (g \times m)$       $(g \times m) \times d \times d \times d \times (g \times m)$

$$\Rightarrow [K_e] \{d_e\} = \{F_e\} + \{P_e\}$$

$(g \times m) \times (g \times m) \times (g \times m) \times 2$       $(g \times m) \times 2$       $(g \times m) \times 2$

dove  $\{F_e\}$  e  $\{P_e\}$  sono i **VETTORI delle FORZE NODALI EQUIVALENTI** e rappresentano l'effetto integrato delle forze distribuite nel dominio e sul contorno di  $V_e$ . Calcolata la Matrice di Rigidezza, sarebbe possibile determinare il vettore degli spostamenti nodali  $\{d_e\}$ . MA, mentre le Forze di Volume  $\{F\}$  sono un dato del problema, le Forze  $\{P\}$  che si scambiano tra loro gli elementi alle reciproche frontiere sono **NECESSARIE!**  Le Forze  $\{P_e\}$  tra 2 elementi adiacenti sono uguali ed opposte!!

Per ovviare a questo problema, si ~~scrive~~ somma la relazione ottenuta per il singolo elemento  $V_e$  a tutte le analoghe relazioni valide per tutti gli altri elementi, con che i contributi di superficie  $\{P_e\}$  si elidono tutti, tranne quelli che sono relativi alla frontiera esterna. Questa operazione è definita **ASSEMBLAGGIO** e richiede una **ESPANSIONE** dei vettori  $\{d_e\}$ ,  $\{F_e\}$  e  $\{P_e\}$  dalla dimensione **LOCALE**  $(g \times m)$  a quella **GLOBALE**  $(g \times m)$ , dove  $m =$  numero totale di Nodi.

Definiamo, quindi, una **MATRICE di ASSEMBLAGGIO**  $[A_e]^T$ , di dimensione  $(g \times m) \times (g \times m)$ , che ha tutti gli elementi nulli ad eccezione di  $(g \times m)$  elementi unitari posti nelle  $(g \times m)$  diverse righe da riempire in corrispondenza delle  $(g \times m)$  relative colonne. Così facendo passiamo da un riferimento **LOCALE** a uno **GLOBALE**:

In questi due diversi spacci,  $\{F\}$  e  $\{S\}$  sono gli STESSI, hanno lo stesso significato fisico e, pertanto, sono uguali. Quindi, per verificare che otteniamo lo stesso risultato, dobbiamo dimostrare che  $[K] = [L]$ :

$$[K_e] = \int_{V_e} [B_e]^T [H] [B_e] dV = \int_{V_e} ([\partial][\eta_e])^T [H] [\partial][\eta_e] dV$$

A questo punto RICHIAMIAMO TEOREMA di GAUSS.  $\nabla$

$$\int_V \nabla \cdot \bar{f} dV = \int_S \bar{f} \cdot \bar{n} ds$$

Ipotesizzando  $\bar{f} = f(x) = g(x) \cdot h(x)$ , si ha

$$\int_V \frac{\partial g}{\partial x} h dV + \int_V g \frac{\partial h}{\partial x} dV = \int_S g \cdot h \cdot n_x ds$$

Svolgendo tutti i prodotti tra matrici della relazione precedente, ci saranno somme di integrali a cui posso applicare il teorema di Gauss così richiamato, fino ad ottenere

$$[K_e] = - \int_{V_e} [\eta_e]^T \underbrace{[\partial]^* [H] [\partial]}_{[L]} [\eta_e] dV + \int_{S_e} [\eta_e]^T \underbrace{[L_0] [H] [\partial]}_{[L_0]} [\eta_e] ds$$

$$\Rightarrow [K_e] = - \int_{V_e} [\eta_e]^T [L] [\eta_e] dV + \int_{S_e} [\eta_e]^T [L_0] [\eta_e] ds$$

~~Il risultato finale è la somma di tutti i contributi elementari, dove il primo termine rappresenta l'energia potenziale associata alle forze di volume e il secondo termine rappresenta l'energia potenziale associata alle forze di superficie.~~

$$\Rightarrow [K] = \sum_e [K_e] = - \int_V [A_e]^T [\eta_e]^T [L] [\eta_e] [A_e] dV + \int_S [A_e]^T [\eta_e]^T [L_0] [\eta_e] [A_e] ds$$

# TRAVE SU SUOLO ELASTICO

Consideriamo il caso di una trave appoggiata su un suolo che reagisce elasticamente. Visto che la ~~reale~~ reazione del suolo è proporzionale alla flessione  $v$ , rappresentiamo questo suolo come un letto di molle.



Se  $K$  il modulo elastico del suolo. Si ha

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + \frac{K}{EI} v = \frac{q}{EI}$$

Indichiamo con  $\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}$

$$\Leftrightarrow \frac{d^4 v}{dz^4} + 4\beta^4 v = \frac{q}{EI}$$

L'integrale generale vale

$$v(z) = e^{\beta z} (C_2 \cos \beta z + C_3 \sin \beta z) + e^{-\beta z} (C_4 \cos \beta z + C_5 \sin \beta z)$$

con le costanti  $C_i$  che vanno determinate con opportune condizioni al bordo.

Se  $q$  è rappresentata da una funzione Polinomiale  $q = e z^m$  con  $m \leq 3$

avremo un integrale particolare pari a  $v_p(z) = \frac{q}{K}$

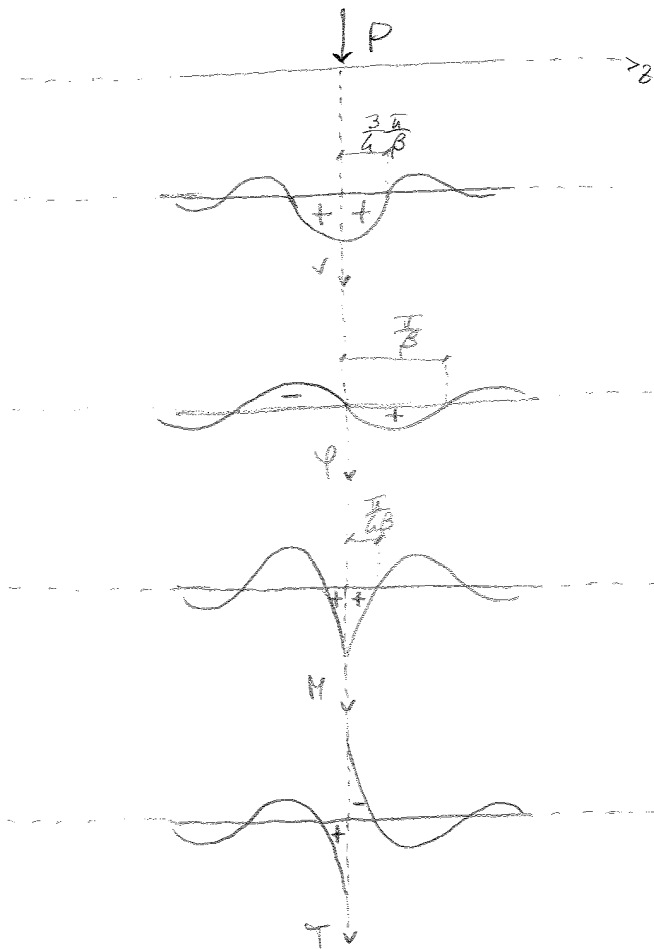
Osserviamo il fatto che, se  $\begin{cases} m=0 & \text{la Trave TRASLA} \\ m=1 & \text{la Trave RUOTA e TRASLA} \end{cases}$

$\Rightarrow$  la defl. NON sarà sollecitata!

Inoltre, una volta ottenute la flessione  $v$ , è possibile ottenere per derivazione la Rotazione  $\varphi$ , Momento  $M$  e Taglio  $T$ :

$$\begin{aligned} v(z) &= f(C_1, C_2, C_3, C_4, z) \\ \varphi(z) &= -\frac{dv}{dz} \\ M(z) &= -EI \frac{d^2 v}{dz^2} \\ T(z) &= -EI \frac{d^3 v}{dz^3} \end{aligned}$$

Visualizzazione i diagrammi:



$$V(z) = \pm \frac{P\beta}{2K} A_{\beta z}$$

$$M(z) = \pm \frac{P\beta^2}{K} B_{\beta z}$$

$$T(z) = \pm \frac{P}{4\beta} C_{\beta z}$$

$$N(z) = \pm \frac{P}{2} D_{\beta z}$$

Definiamo LUNGHEZZA D'ONDA la grandezza  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$

Nota  $F(z)$ , proviamo a determinare  $F(z+\lambda)$ :

$$F(z+\lambda) = e^{-\beta(z+\lambda)} f(z+\lambda) = e^{-\beta(z+\lambda)} f(z) = e^{-\beta z} e^{-2\pi} f(z) =$$

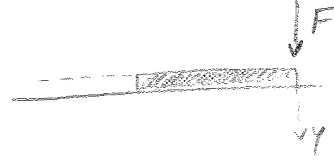
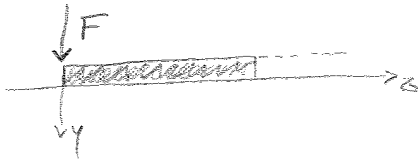
$$= e^{-2\pi} F(z) \approx \frac{1}{535} F(z) \Rightarrow \text{TRASCURABILE!}$$

Quando il nostro range di interesse sarà  $(-\lambda, \lambda)$ , un quarto oltre  $\lambda$  la parte NON rilevante del carico  $P$  ed  $\bar{e}$ , pertanto, merche!

Inoltre notiamo che se

$K \downarrow$	$\Rightarrow$	$\lambda \uparrow$
RIGIDEZZA SUOLO		
$EI \uparrow$	$\Rightarrow$	$\lambda \uparrow$
RIGIDEZZA TRAVE		

\* TRAVE SEMI-INFINITA



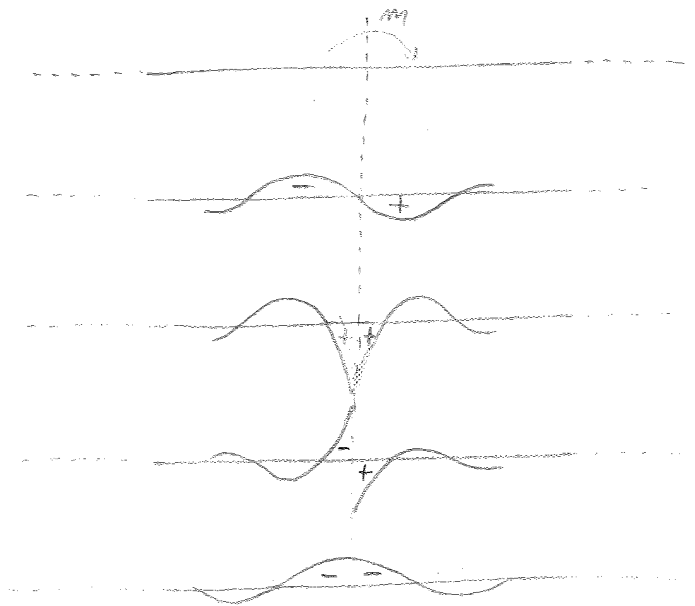
$$\begin{aligned}
 v(z) &= + \frac{2\beta}{K} F D_{\beta z} \\
 \psi(z) &= - \frac{2\beta^2}{K} F A_{\beta z} \\
 M(z) &= + \frac{E}{\beta} B_{\beta z} \\
 T(z) &= + F C_{\beta z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 \frac{v(0)}{F} = + \frac{2\beta}{K} = \lambda_{FF} & \text{CENEVOLEZZA per effetto di } F \\
 \frac{\psi(0)}{F} = - \frac{2\beta^2}{K} = \lambda_{\psi F} & \text{ROTAZIONE per effetto di } F
 \end{cases}$$

SOLUZIONE per TRAVE SEMI-INFINITA SOCCETTA A CARICO CONCENTRATO

(TRAVE INFINITA)

$$\begin{aligned}
 v(z) &= + \frac{m\beta^2}{K} B_{\beta z} \\
 \psi(z) &= + \frac{m\beta^3}{K} C_{\beta z} \\
 M(z) &= + \frac{m}{2} D_{\beta z} \\
 T(z) &= - \frac{m\beta}{2} A_{\beta z}
 \end{aligned}$$



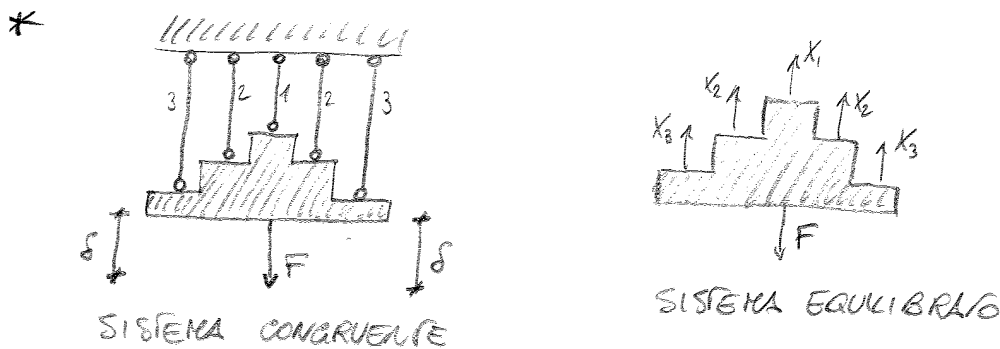
SOLUZIONE per TRAVE INFINITA SOCCETTA a un MOMENTO FLEVENTE

## METODO DEGLI SPOSTAMENTI

IL METODO degli SPOSTAMENTI è il duale del Metodo delle Forze. Si tratta di individuare quell'unico insieme di Parametri cinematici che, oltre alla CONGRUENZA, implichi anche l'EQUILIBRIO.

Dal punto di vista operativo, il Metodo degli Spostamenti consiste nell'imporre alcuni Spostamenti o Rotazioni, caratteristici del sistema, in modo tale che le  $(v-g)$  reazioni ipostatiche risultino  $(v-g)$  reazioni di equilibrio.

### \* SISTEMI di BIELLE in PARALLELO



Si consideri un traverso rigido di forma Simmetrica vincolato a un sistema Simmetrico di Bielle parallele, le quali possono presentare diverse  $l_i, A_i, E_i$ . Se tale sistema vincolato Simmetricamente ha una Forza Verticale  $F$  agente nella  $z$  mediana, la deformazione risultante sarà Simmetrica e può essere globalmente descritta da un'unica informazione: lo spostamento  $\delta$  di traslazione verticale del traverso.

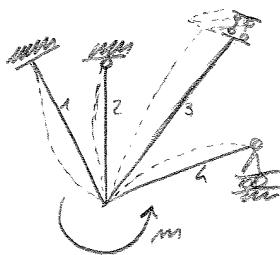
Per la CONGRUENZA: 
$$\delta_i = \frac{X_i l_i}{E_i A_i} = \delta$$

La Congruenza viene implicitamente assunta. L'Inequazione Cinematica  $\delta$  viene determinata imponendo l'EQUILIBRIO:

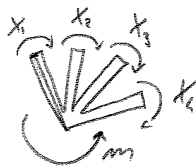
$$F = \sum_i X_i$$

## \* SISTEMI DI TRAVI IN PARALLELO

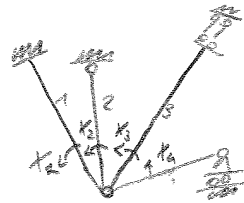
\*



SISTEMA  
CONGRUENTE



SISTEMA  
EQUILIBRATO



(METODO  
ALTERNATIVO)

Se consideriamo  $n$  travi collegati tra loro da un unico nodo-incastro e vincolato al suolo ciascuna in maniera qualsiasi. Sia il nodo-incastro sollecitato da un momento esterno  $m$ . A deformazione avvenuta, il nodo-incastro avrà ruotato di un angolo  $\varphi$  per tutto, per **CONGRUENZA**

$$\varphi_i = \frac{x_i l_i}{c_i E_i I_i} = \varphi$$

dove  $c_i$  è un coefficiente reperibile in tabella e dipendente dal costante vincolo.  
Per l'**EQUILIBRIO**,

$$m = \sum_i x_i$$

$$\text{Ma } x_i = \frac{c_i E_i I_i}{l_i} \varphi \quad \Rightarrow \quad m = \varphi \sum_i \frac{c_i E_i I_i}{l_i}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{m}{\sum_i \frac{c_i E_i I_i}{l_i}} = \frac{m}{K}$$

dove  $K = \text{RIGIDEZZA TOTALE}$

Quindi

$$x_i = m \frac{\frac{c_i E_i I_i}{l_i}}{\sum_i \frac{c_i E_i I_i}{l_i}} = m \frac{K_i}{K}$$

dove  $\frac{K_i}{K} = \text{COEFFICIENTE DI RIPARTIZIONE FLESSIONALE}$  e rappresenta la frazione di sollecitazione esterna rapportata alla trave  $i$ -esima

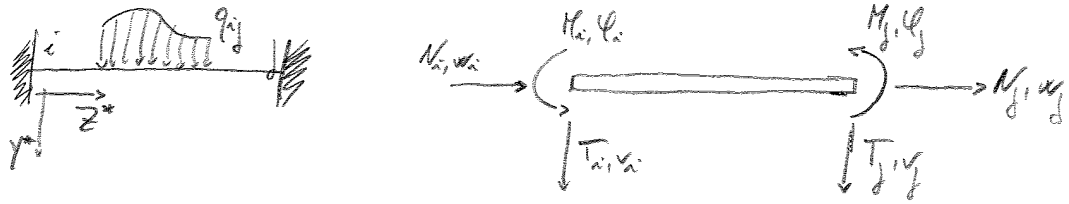


Analogamente a quanto visto prima, è possibile applicare la forza  $T_i$  e ricavare lo spostamento  $\delta_i$ , univocamente con il ruolo di causa ed effetto.

Inoltre, osservando che i pedenti, oltre al taglio  $T_i$ , trasmettono in genere al tronco anche un momento  $H_i$  e una forza normale  $N_i$ . Gli equilibri alla trafilazione verticale e alla rotazione saranno assicurati da queste sollecitazioni -  $H_i$ , mentre i momenti  $H_i$  non noti e ricavabili dagli schemi noti, gli sforzi  $N_i$  costituiranno un insieme di **INCORNUTE IPERSIATICHE**, calcolabili in accordo a uno schema di tralicci in parallelo in cui la sollecitazione esterna sia costituita dai momenti  $H_i$ .

Allo stesso modo, i tagli e gli sforzi trasmessi al Nodo - Incastro dell'esempio precedente devono permettere l'Equilibrio alla trafilazione. Ovviamente in questo caso i tagli non noti e la loro risultante costituirà la Forza totale agente sul nodo, mentre gli sforzi sono incogniti ma determinabili da uno schema a tralicci convergenti.

Si vede ciascuna trave dei nodi  $i, j$ , e la si considera incastata nelle sezioni terminali.  
 Si fa allora, quindi, lo spostamento, a ciascun estremo, i tre spostamenti generalizzati e si ricavano le reazioni ipostatiche agli incastri.



Nelle  $M, T, N$  le reazioni agli incastri e  $\varphi, v, w$  la rotazione e i due spostamenti imposti; assumendo i segni positivi come in figura e equazioni ad entrambi gli estremi, si ha

$$\begin{bmatrix} M_i \\ T_i \\ N_i \\ M_j \\ T_j \\ N_j \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & 0 & \frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} & 0 \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & 0 & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{l} & 0 & 0 & -\frac{A}{l} \\ \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & 0 & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & 0 \\ \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & 0 & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{l} & 0 & 0 & \frac{A}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_i^0 \\ T_i^0 \\ N_i^0 \\ M_j^0 \\ T_j^0 \\ N_j^0 \end{bmatrix}$$

Tale relazione esprime il VETTORE delle REAZIONI VINCOLARI come somma di due contributi: il primo derivante dagli SPOSTAMENTI IMPOSTI, il secondo equilibrante i carichi esterni agenti sulla trave. La matrice simmetrica (6x6) è detta **MATRICE di RIGIDEZZA dell'ELEMENTO**: ogni colonna si ottiene imponendo il relativo spostamento o rotazione e calcolando le reazioni ipostatiche agli estremi.  
 Al polo del vettore delle forze equilibranti il carico esterno agente sulla trave, compare il **VETTORE delle FORZE EQUIVALENTI al CARICO ESTERNO**, con il segno negativo:

In forma compatta si ha

$$\boxed{[K_e] \{ \delta_e^* \} = \{ Q_e^* \} + \{ F_e^* \}}$$

$\begin{matrix} 6 \times 6 & 6 \times 2 & 6 \times 1 & 6 \times 2 \end{matrix}$

Le grandezze locali sono esprimibili in funzione delle grandezze globali.

$$\boxed{\begin{aligned} \{ \delta_e^* \} &= [N] \{ \delta_e \} \\ \{ Q_e^* \} &= [N] \{ Q_e \} \\ \{ F_e^* \} &= [N] \{ F_e \} \end{aligned}}$$

dove  $[N]$  è la matrice di Rotazione che trasforma il Riferimento Globale  $YZ$  in quello locale  $y^*z^*$ .

$$\boxed{[N] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}$$

Quindi, si ha:

$$[K_e][N] \{ \delta_e \} = [N] (\{ Q_e \} + \{ F_e \})$$

$$\Rightarrow \boxed{([N]^T [K_e] [N]) \{ \delta_e \} = \{ Q_e \} + \{ F_e \}}$$

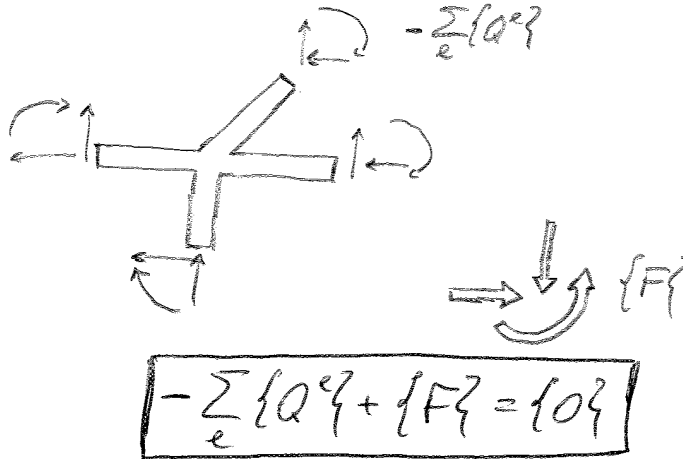
MATRICE di RIGIDITÀ  
dell'elemento nel  
Sistema Globale

— VETTORE delle FORZE NODALI  
EQUIVALENTI  
— VETTORE delle REAZIONI VINCOLARI  
EQUIVALENTI

La Relazione locale in forma espansa può essere sommata a quella analoga relativa alle altre travi:

$$\left( \sum_e [K^e] \right) \{ \delta \} = \sum_e (\{ Q^e \} + \{ F^e \})$$

Ma, per l'Equilibrio dei nodi:



si ha:

$$\boxed{[K] \{ \delta \} = \{ F \} + \{ F_{eq} \}}$$

dove  $[K]$  = MATRICE RIGIDITÀ GLOBALE

$\{ F \}$  = VETTORE delle FORZE NODALI EFFETTIVE

$\{ F_{eq} \}$  = VETTORE delle FORZE NODALI EQUIVALENTE

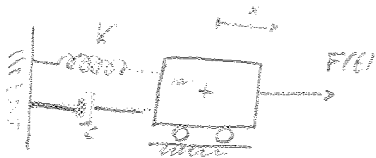
Questi ultimi due vettori,  $\{ F \}$  e  $\{ F_{eq} \}$ , riassumono le sollecitazioni Esterne agenti sul sistema di travi e pertanto saranno termini noti o dati del problema.  $[K]$  è anch'essa nota una volta che siano note geometria e proprietà elastiche delle travi.

L'incognita del problema è costituita dagli spostamenti Nodali  $\{ \delta \}$

# DINAMICA DELLE STRUTTURE

Lo scopo principale della Dinamica delle Strutture è quello di determinare le sollecitazioni interne e le deformazioni dei sistemi strutturali sollecitati in modo arbitrario nel tempo. Si tratta, quindi, di una estensione dei metodi dell'ambito strutturale, che, usualmente, sono definiti solo per i carichi statici. I carichi diventano, quindi, funzioni del tempo, così come la risposta strutturale.

I Carichi Dinamici agenti su di una struttura possono essere periodici o non periodici. Il CARICO PERIODICO più semplice è quello di tipo sinusoidale, che è anche detto SOLLECITAZIONE ARMONICA, caratteristica degli effetti delle masse eccentriche nelle macchine rotanti. I CARICHI NON-PERIODICI possono essere di Breve durata o IMPULSIVI, come quelli generati da Esplosioni, o di lunga durata o CENERICI, come quelli generati da Scosse Sismiche. Consideriamo una massa elementare soggetta ad una Forza di richiamo elastica e ad una Forza Viscosa:



$x = x(t)$   
 $c =$  costante di smorzamento viscoso  
 $K =$  costante elastica

$$F_{el} = -Kx(t)$$

$$F_{visc} = -c \dot{x}(t)$$

$$F_{inerzia} = -m \ddot{x}(t)$$

$$-m \ddot{x} - c \dot{x} - Kx + F(t) = 0$$

$$\boxed{m \ddot{x} + c \dot{x} + Kx = F(t)}$$

Se i carichi sono applicati molto lentamente:  $\dot{x} \approx \ddot{x} \approx 0$

$$\Rightarrow Kx(t) = F(t) \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{F(t)}{K}} \quad \begin{matrix} \text{RISPOSTA} \\ \text{STATICA} \end{matrix}$$

con  $[\omega] = s^{-1} \rightarrow$  PULSAZIONE ANGOLARE

$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow$  PERIODO

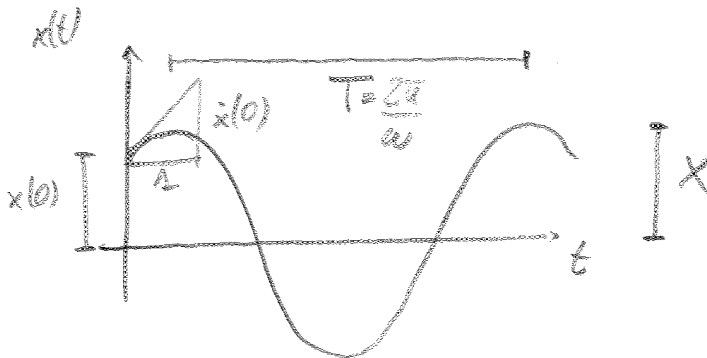
$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow$  FREQUENZA o CICLI nell'UNITÀ di TEMPO

Il moto può anche essere descritto come

$$x(t) = X \cos(\omega t - \varphi)$$

dove  $X = \sqrt{[x(0)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega}\right]^2} \rightarrow$  AMPIEZZA

$\varphi = \arctan \frac{\dot{x}(0)}{\omega x(0)} \rightarrow$  FASE,  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$



### \* OSCILLAZIONI LIBERE CON SMORZAMENTO VISCOZO ( $c > 0$ )

$$\Delta^2 + \frac{c}{m} \Delta + \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta_{1,2} = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\omega^2}}{2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2}$$

Si verificano a questo punto 3 differenti tipi di moto, a seconda che la quantità sotto radice sia positiva, negativa o nulla.

\* Caso 2: SISTEMA SOVRASFORZATO  $c > c_c$

Introduciamo il cosiddetto RAPPORTO di SFORZAMENTO

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega}}$$

In questo caso  
 $\mathcal{E} > 1$

Avremo:

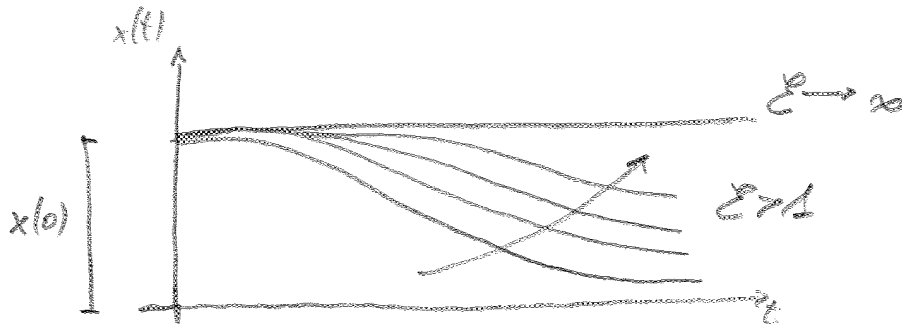
$$\Delta_{\pm} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} = -\frac{c}{c_c} \frac{c_c}{2m} \pm \sqrt{\dots}$$

$$= -\mathcal{E}\omega \pm \sqrt{(\mathcal{E}\omega)^2 - \omega^2} = \omega(-\mathcal{E} \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 - 1})$$

= 2 Soluzioni Reali Negative

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = C_1 e^{-\omega(\mathcal{E} + \sqrt{\mathcal{E}^2 - 1})t} + C_2 e^{-\omega(\mathcal{E} - \sqrt{\mathcal{E}^2 - 1})t}}$$

Se  $\mathcal{E} \rightarrow \infty \Rightarrow x(t) \rightarrow C_2 = \text{cost}$



Questo, però, è un caso che ha POCO INTERESSE PRATICO

Si voglia valutare precocemente il RAPPORIO DI SMORZAMENTO  $\xi$   
 Si considerino 2 picchi successivi qualsiasi  $x_k$  e  $x_{k+1}$ :

$$\frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{\frac{\ddot{x}(0)}{w_D} e^{-\xi w_D t_k} \sin w_D t_k}{\frac{\ddot{x}(0)}{w_D} e^{-\xi w_D (t_k + T_D)} \sin w_D (t_k + T_D)} = e^{\xi w_D T_D}$$

$$= e^{\frac{\xi w_D 2\pi}{w_D}} = e^{\frac{2\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

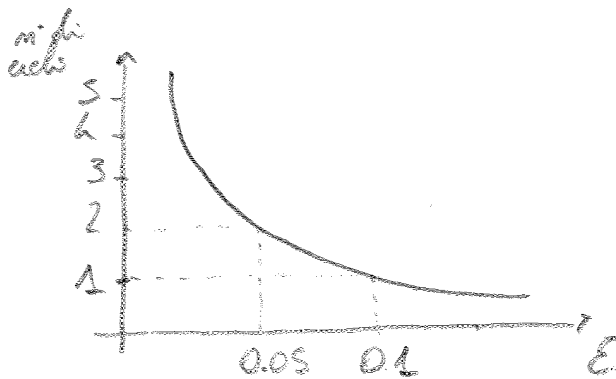
$$\Rightarrow \frac{x_k}{x_{k+1}} = \exp\left\{\frac{2\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right\} = \cos \sqrt{\quad} > 1$$

Consideriamo quindi  $\xi$  = DECREMENTO LOGARITMICO

$$\xi = \ln \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2\pi \xi \quad \text{se } \xi \ll 1$$

$$\Rightarrow \xi \approx \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x_k}{x_{k+1}}$$

Un altro metodo per stimare il Rapporto di Smorzamento  $\xi$  è quello di contare il numero di cicli necessari per produrre una riduzione del 50% nell' Ampiezza di Oscillazione:





# \* SISTEMA CON SMORZAMENTO VISCOZO ( $c > 0$ )

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + Kx(t) = F \sin \omega_f t$$

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta \omega \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F}{m} \sin \omega_f t$$

$$\Rightarrow x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

ipotesi

$$\begin{cases} x_p(t) = X \sin(\omega_f t - \varphi) \\ \dot{x}_p(t) = \omega_f X \cos(\omega_f t - \varphi) \\ \ddot{x}_p(t) = -\omega_f^2 X \sin(\omega_f t - \varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\omega_f^2 X \sin(\omega_f t - \varphi) + 2\zeta \omega \omega_f X \cos(\omega_f t - \varphi) + \omega^2 X \sin(\omega_f t - \varphi) = \frac{F}{m} \sin \omega_f t$$

$$\Rightarrow -\beta^2 \sin(\omega_f t - \varphi) + 2\zeta \beta \cos(\omega_f t - \varphi) + \sin(\omega_f t - \varphi) = \frac{F}{KX} \sin \omega_f t$$

$$\Rightarrow (1 - \beta^2) \sin(\omega_f t - \varphi) + 2\zeta \beta \cos(\omega_f t - \varphi) = \frac{F}{KX} \sin \omega_f t$$

$$\Rightarrow (1 - \beta^2) [\sin \omega_f t \cos \varphi - \cos \omega_f t \sin \varphi] + 2\zeta \beta [\cos \omega_f t \cos \varphi + \sin \omega_f t \sin \varphi] = \frac{F}{KX} \sin \omega_f t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \beta^2) \cos \varphi + 2\zeta \beta \sin \varphi = \frac{F}{KX} \\ (\beta^2 - 1) \sin \varphi + 2\zeta \beta \cos \varphi = 0 \\ \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \end{cases}$$

3 incognite:  $\sin \varphi, \cos \varphi, X$

la cui soluzione vale

$$\begin{cases} X = D \frac{F}{K} \\ \sin \varphi = 2\zeta \beta D \\ \cos \varphi = (1 - \beta^2) D \end{cases}$$

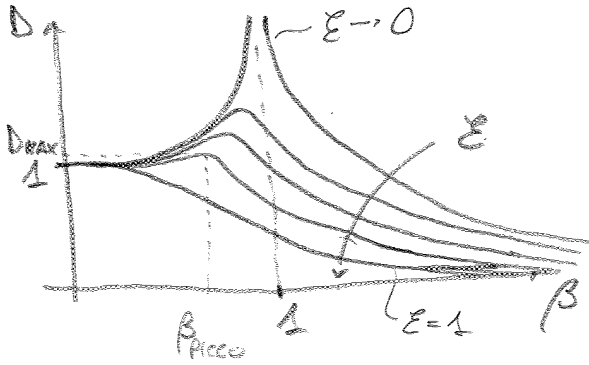
dove

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2 \beta^2}}$$

COEFFICIENTE DI  
AMPLIFICAZIONE  
DINAMICA

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta \beta}{1 - \beta^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\zeta \omega t} (A \sin \omega_f t + B \cos \omega_f t) + D \frac{F}{K} \sin(\omega_f t - \varphi)$$



Quindi, in definitiva:

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + \Delta \left( \frac{E \sin(\omega_f t - \varphi)}{K} \right)$$

RISPOSTA TRANSITORIA
RISPOSTA STATICA

legata alle condizioni libere,  $\rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ 
RISPOSTA A REGIME

legata alle forzanti

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \beta = \frac{\omega_f}{\omega}$$

$$\Rightarrow \beta \rightarrow 0 \quad (\Delta \rightarrow 1)$$

$$\begin{cases} \omega_f \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty \quad (K \rightarrow \infty) \end{cases}$$

L'INFINITAMENTE RIGIDO

$$\beta \rightarrow \infty \quad (\Delta \rightarrow 0)$$

$$\begin{cases} \omega_f \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow 0 \quad (K \rightarrow 0) \end{cases}$$

L'INFINITAMENTE FLESSIBILE