



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 700

DATA: 07/10/2013

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Orefice

MATERIA: Meccanica delle Vibrazioni

Prof. Marchesiello

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

**01BPPNG - Meccanica delle Vibrazioni – A.A. 2011-2012**

- Introduzione all'analisi modale. Cenni sui modelli di smorzamento. **M**
- ✓ Risposta libera non smorzata ed effetto del peso proprio. **M**
- ✓ Risposta libera di sistemi a un grado di libertà con smorzamento viscoso: equazione caratteristica, sistemi sotto-, criticamente-, sovrasmorzati. Decremento logaritmico e applicazione. pag 160 **M**
- ✓ Risposta al gradino. Luogo delle radici Risposta alla forzante armonica: notazione complessa, modulo, fase, parte reale e immaginaria. **M**
- ✓ Diagramma di Bode, risonanza. Definizioni di Funzioni Risposta in Frequenza (FRF). **M**
- ✓ Recettanza: modulo, fase. Fenomeno del battimento e risonanza infinita. **M**
- ✓ Calcolo del lavoro dello smorzatore viscoso in un ciclo. Modello di smorzamento isteretico. FRF di sistemi con smorzamento isteretico: diagramma del modulo, della fase e di Nyquist. **M**
- ✓ Moto armonico della base e applicazione al caso dell'accelerometro/sismografo. **M**
- ✓ Masse eccentriche: diagrammi di corpo libero ed equazione del moto. Trasmisibilità. **M**
- X ✓ Rotore di Jeffcott: equazioni del moto con velocità costante, diagrammi di Bode, significato della fase. **M**
- X ✓ Rotore costituito da albero rigido su supporti cedevoli e anisotropi: equazioni del moto, diagramma di bode, orbite di precessione. **M**
- ✓ Definizione di Delta di Dirac e risposta all'impulso di sistemi con smorzamento viscoso. **M**
- ✓ Integrale di convoluzione. Equazione del pendolo in presenza di attrito Coulombiano. **M**
- ✓ Sistemi a molti gradi di libertà: diagrammi di corpo libero e equazioni del moto. **M**
- ✓ Sistemi a molti gradi di libertà senza smorzamento: definizioni, proprietà, soluzione sincrona e problema agli autovalori. Proprietà di ortogonalità. Teorema di espansione. Cenni sugli autovalori ripetuti. Normalizzazione degli autovettori. Disaccoppiamento delle equazioni. **M**
- ✓ Sistemi MDOF con smorzamento viscoso proporzionale: definizioni e disaccoppiamento delle equazioni, risposta alla forzante generica, risposta alla forzante armonica, definizione di recettanza e sua espressione. Risposta libera dei sistemi smorzati con due approcci. **M**
- ✓ Antirisonanze e andamento qualitativo della recettanza. Assorbitore dinamico: principio di funzionamento, condizione di sintonizzazione. **M**
- ✓ Sistemi a molti gradi di libertà con smorzamento viscoso non proporzionale: metodo di Duncan, risposta libera e alla forzante armonica. Luoghi delle radici. **M**
- ✓ Sistemi a parametri distribuiti: la trave. Vibrazioni assiali di aste e torsionali degli alberi: diagrammi di corpo libero, equazioni del moto e soluzioni libere. **M**
- ✓ Vibrazioni flessionali di travi di Eulero-Bernoulli: diagramma di corpo libero, equazione del moto, condizioni al bordo, soluzione libera. Caso particolare della trave su due appoggi. **M**
- ✓ Vibrazioni di sistemi continui: approccio unificato, autoproblema e casi particolari. Operatori autoaggiunti (dimostrazione per la trave in flessione) e ortogonalità delle autofunzioni. Vibrazioni forzate di sistemi continui e carico concentrato. **M**
- ✓ Il quoziente di Rayleigh. Principio di Rayleigh (solo enunciato). Metodo dell'energia di Rayleigh. **M**
- ✓ Metodo di Rayleigh-Ritz, scelta delle funzioni di tentativo. Quoziente di Rayleigh per i sistemi continui. **M**
- ✓ Caso particolare della trave incastrata libera: soluzione "esatta", metodo dell'energia di Rayleigh ed applicazione del metodo di Rayleigh-Ritz. **M**

✓ Metodi di identificazione: esponenziali complessi, diagrammi di stabilizzazione. **M**

Laboratorio meccanico (3 ore/studente). Laboratorio informatico (9 ore/studente). **M**

Oltre agli appunti del corso ed al materiale disponibile sul portale si fa riferimento al testo:  
 A. Fasana, S. Marchesiello, Meccanica delle vibrazioni, ISBN: 88-7992-217-3, Clut, Torino, 2006.

Handwritten notes and calculations at the bottom of the page:

$$S = \frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2 + i 2\zeta\omega\omega_n}$$

$$|S|^2 = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2\omega_n^2}$$

$$\frac{d}{d\omega} |S|^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_n^2 \frac{1 - 2\zeta^2}{1 - \zeta^2}$$

$$\omega_{max} = \omega_n \sqrt{\frac{1 - 2\zeta^2}{1 - \zeta^2}}$$

$$|S|_{max} = \frac{1}{2\zeta\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$P_{max} = \frac{1}{2} F_0 \omega_{max} |S|_{max} = \frac{F_0^2}{4\zeta\omega_n^2 \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$P_{max} = \frac{1}{2} F_0^2 \frac{1}{\omega_n^2 \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$P_{max} = \frac{1}{2} F_0^2 \frac{1}{\omega_n^2 \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

## SISTEMI A UN GRADO DI LIBERTÀ: SDOF

### \* CENNI sui MODELLI di SMORZAMENTO

In questo capitolo viene presentato lo studio della RISPOSTA di SDOF, la cui comprensione è di fondamentale importanza quando si vogliono analizzare sistemi più complessi: si dimostrerà che un qualunque Sistema Vibrante può infatti essere studiato come combinazione lineare di Sistemi Indipendenti, ciascuno SDOF.

Gli elementi di cui si compongono i sistemi oggetto delle nostre attenzioni sono 3: un elemento MASSA, caratterizzato dalla costante  $m$  e infinitamente rigido; un elemento MOLLA, lineare, scisso di massa, capace di dissipare Energia e che produce una Forza di richiamo elastica proporzionale, tramite la RIGIDEZZA  $K$ , allo spostamento relativo dei suoi estremi; un elemento SMORZATORE VISCOSO, anch'è lineare e privo di massa, deputato a rappresentare TUTTE le forme di DISSIPAZIONE eventualmente presenti e che produce una forza proporzionale, tramite la costante  $c$ , alla Velocità Relativa dei suoi estremi. Questa schematizzazione non ha evidentemente la pretesa di rappresentare fedelmente la varietà e la complessità delle strutture reali, ma ha il pregio di condurci, con relativa semplicità, a un modello adatto a fornire una approssimazione il più delle volte accurata della realtà.

Dei SDOF si prendono in esame sia la RISPOSTA LIBERA, ovvero l'andamento nel tempo del moto della Massa a partire da generiche Condizioni Iniziali, sia la RISPOSTA FORZATA, ovvero il comportamento del Sistema soggetto a un'azione esterna, ponendo particolare attenzione alla ANALISI della FUNZIONE di RISPOSTA in FREQUENZA (FRF), vale a dire al moto della Massa quando viene applicata una Forza che segue una legge Armonica nel tempo.

in cui  $a, b$  vengono determinati componendo condizioni iniziali:

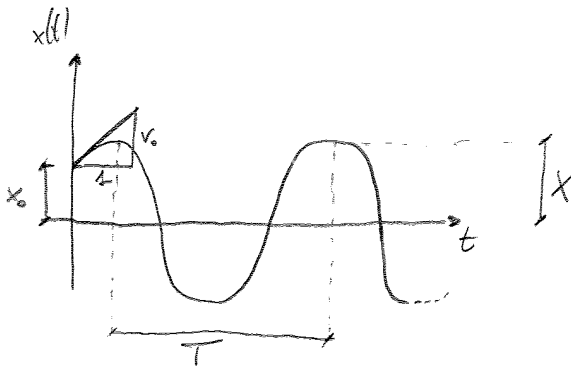
$$\begin{cases} x(0) = a \\ \dot{x}(0) = b \omega_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x(0) = x_0 \\ b = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n} = \frac{v_0}{\omega_n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

Il moto può anche essere scritto come

$$x(t) = X \cos(\omega_n t + \vartheta) = X \cos \omega_n t \cos \vartheta - X \sin \omega_n t \sin \vartheta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = X \cos \vartheta \\ b = -X \sin \vartheta \end{cases} \quad \begin{cases} X = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan \vartheta = -\frac{b}{a} \end{cases} \begin{array}{l} \rightarrow \text{AMPIEZZA} \\ \rightarrow \text{FASE, } -\pi \leq \vartheta \leq \pi \end{array}$$



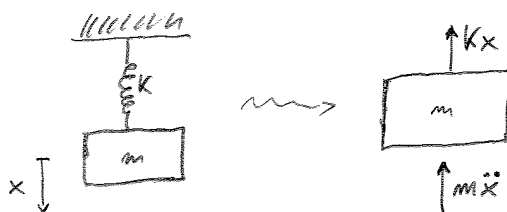
dove

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \text{PERIODO}$$

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \text{FREQUENZA}$$

CICLI nell'UNITÀ di TEMPO

► OSS: Abbiamo visto come coordinata lo spostamento  $x(t)$  della massa  $m$  a partire dalla configurazione come L'EQUILIBRIO STATICO. Questo è molto IMPORTANTE perché ci permette di affermare che se anche il moto avvenisse in direzione VERTICALE, NON si dovrebbe tener conto della FORZA PESO in quanto già BILANCIATA dalla forza statica di richiamo elastico della molla:



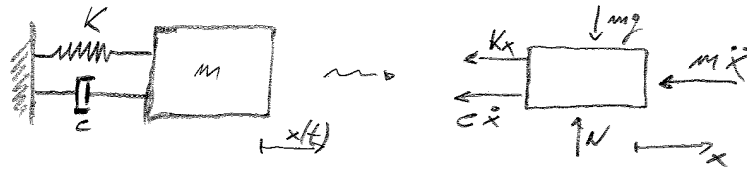
$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = a \cos \omega_n t + b \sin \omega_n t$$

COME PRIMA...

\* RISPOSTA LIBERA SDOF con SMORZAMENTO VISCOZO

Si consideri il Sistema SDOF nel quale la Massa  $m$  è vincolata a muoversi orizzontalmente e sono  $K$  la rigidità della molla e  $c$  la costante dello Smorzamento Viscoso:



$\Rightarrow$   $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$  EQ. del MOFO  
 SISTEMA LTI, coefficienti costanti

la cui soluzione si cerca nella forma  $x(t) = Ae^{st}$

$\Rightarrow A(ms^2 + cs + K) = 0 \Rightarrow ms^2 + cs + K = 0$  POLINOMIO CARATTERISTICO

Da un'Eq. Differenziale dell'II Ordine, si passa a un'Eq. Algebrica di II grado, i cui zeri sono POLI del Sistema e valgono

$$\Delta_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4Km}}{2m}$$

si indichiamo con

$$\begin{aligned} c_{cr} &= 2\sqrt{Km} \\ \omega_n &= \sqrt{K/m} \\ \xi &= c/c_{cr} \end{aligned}$$

COEFF. di SMORZ. CRITICO  $\xi$ ,  $A=1$   
 PULSAZIONE NATURALE. PROPRIA  
 FATTORE di SMORZAMENTO

$\Rightarrow \Delta_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$

! Evoluzione nel tempo dello Spostamento  $x$  varia di conseguenza con il segno del Radicante

- $\xi > 1$   $\Rightarrow$  Sistema SOVRASMORZATO e gli zeri  $\Delta_{1,2}$  sono REALI-NEGATIVI
- $\xi = 1$   $\Rightarrow$  Sistema CRITICAMENTE SMORZATO e gli zeri  $\Delta_{1,2}$  sono REALI-NEG.-COINC
- $\xi < 1$   $\Rightarrow$  Sistema SOTTO SMORZATO e gli zeri  $\Delta_{1,2}$  sono COMPL. CONIUG. con  $Re < 0$

Invece che la parte reale delle radici è comunque sempre negativa e quindi  $x(t)$  ha un andamento decrescente nel tempo: si parla in questo caso di Sistema STABILE, cioè di un Sistema che, allontanato dalla sua configurazione di Equilibrio, tende a ritornarvi.

> SISTEMA SOTTOAMORTIZATO:  $\zeta < 1$

∴ questo il caso che più frequentemente si riscontra nella pratica e sul quale è opportuno soffermarsi più a lungo. Indichiamo con

$$\boxed{\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{PULSAZIONE del Sistema SOTTOAMORTIZATO "SMORFITO"}$$

$$\Rightarrow A_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm i \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$= \boxed{-\zeta \omega_n \pm i \omega_d = A_{1,2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (A_1 e^{-i \omega_d t} + A_2 e^{i \omega_d t})}$$

Applicando le Formule di Eulero:  $x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} [(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + i(A_2 - A_1) \sin \omega_d t]$

∴ Imponendo le Condizioni Iniziali: 
$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ -\zeta \omega_n (A_1 + A_2) + i \omega_d (A_2 - A_1) = v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ i(A_2 - A_1) = \frac{v_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d} \end{cases}$$

U, visto che  $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ , è necessario che 
$$\begin{cases} A_1 + A_2 \in \mathbb{R} \\ i(A_2 - A_1) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

∴  $A_1, A_2$  sono COMPLESSI CONIUGATI, così come  $A_{1,2}$

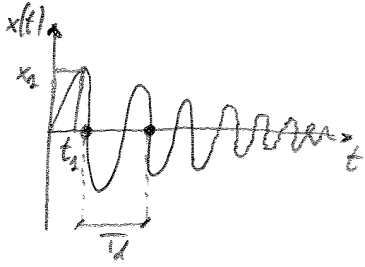
ricambiando possiamo risolvere 
$$\begin{cases} A_1 + A_2 = a \\ i(A_2 - A_1) = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t)}$$

con 
$$\begin{cases} a = x_0 \\ b = \frac{v_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d} \end{cases}$$

\* DECREMENTO LOGARITMICO

Supponiamo di avere misurato la risposta  $x(t)$ , e ne conosciamo il Periodo  $T_d$  e, di conseguenza, la Pulsazione Smorzata  $\omega_d$ : vogliamo determinare la Pulsazione Naturale  $\omega_n$  e il Fattore di Smorzamento  $\xi$ .



Scegliamo un punto nella zona di MASSIMO  $(t_1, x_1)$  e prendiamo il tempo  $t_2 = t_1 + T_d$ , a cui è associata la risposta  $x_2$

Calcoliamo il logaritmo Naturale del Rapporto delle Ampiezze di Oscillazione, detto DECREMENTO LOGARITMICO  $\delta$ , e tenendo conto della Periodicità della funzione Acosinica, si ha

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{A e^{-\xi \omega_n t_1} \sin(\omega_d t_1 + \alpha)}{A e^{-\xi \omega_n (t_1 + T_d)} \sin(\omega_d (t_1 + T_d) + \alpha)} =$$

$$= \xi \omega_n T_d = \xi \omega_n \frac{2\pi}{\omega_d} = \boxed{\xi \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \delta}$$

Poiché  $x_1$  e  $x_2$  sono quantità misurate, il Decremento Logaritmico è noto, pertanto:

$$\delta^2 = \frac{\xi^2 4\pi^2}{1-\xi^2} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}}$$

$\delta = \xi \omega_n T_d \Rightarrow \omega_n = \frac{\delta}{\xi T_d}$

Nota  $\xi$  e  $T_d$ , è facile ricavare la Pulsazione Naturale  $\omega_n$ !  
 La tecnica del Decremento Logaritmico prevede di conoscere il Periodo del Sistema Smorzato  $T_d$ . Tenendo presente che tutte le misure di cui si dispone sono il risultato di un processo di digitalizzazione è evidente che NON è possibile conoscere il  $T_d$  con una precisione superiore al Periodo di campionamento. D'altra parte NON sempre è possibile, o opportuno, aumentare la Frequenza di campionamento per migliorare la stima di  $T_d$ , perché si preferisce leggere un tempo più lungo, corrispondente ad alcuni periodi, sul quale gli effetti della scarsa risoluzione nel tempo sono minori. Seguendo questo ragionamento si vorrebbe porci a pensare che la procedura migliore preveda di misurare il maggior numero possibile di Periodi di Oscillazione - MA, l'inevitabile presenza di errori Sperimentali si fa particolarmente evidente quando l'ampiezza di oscillazione è piccola, rendendo inutilizzabile la parte terminale della storia Temporale (molto RUMORE). Infine, si nota che, per individuare questo intervallo di tempo, è comodo cercare i PASSAGGI per lo ZERO della risposta nel tempo!



Il termine noto è una COSTANTE  $\Rightarrow$  cerco  $x_p$  come COSTANTE

$$\Rightarrow \dot{x}_p = 0, \ddot{x}_p = 0$$

$$\Rightarrow Kx_p = f_0 \Rightarrow \boxed{x_p = \frac{f_0}{K}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{f_0}{K} + (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) e^{-\varepsilon \omega t}}$$

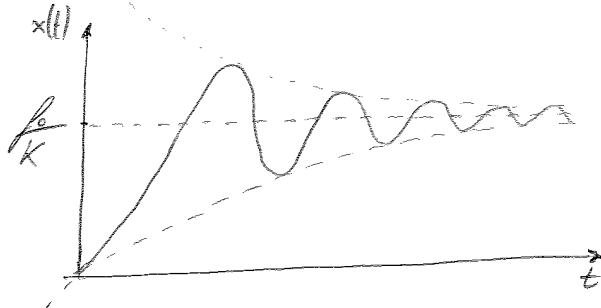
Imponiamo condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \frac{f_0}{K} + a = x_0 = 0 \\ -\varepsilon \omega a + \omega b = v_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{f_0}{K} \\ b = -\frac{f_0}{K} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{f_0}{K} \left[ 1 - e^{-\varepsilon \omega t} \left( \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin(\omega t) \right) \right]} \quad \text{RISPOSTA al GRADINO}$$

Il cui andamento è dato da



Nel caso particolare del Gradino Unitario, la risposta prende il nome di **ARRIVATA INDICIALE**

Eschiamo un **TERMINALE DI CONFRONTO** per le **OSCILLAZIONI**. Ad esempio, consideriamo la **PULSAZIONE PROPRIA** del Sistema:

$$\frac{f_0/m}{K/m - \omega^2 + i\omega c/m} \Rightarrow X_0 = \frac{f_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2iE\omega/m}$$

$$= \frac{f_0/(m\omega_n^2)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2iE\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

HA,  $\boxed{\frac{f_0}{m\omega_n^2} = \frac{f_0}{K} = X_{sr}}$  = **SPOSTAMENTO STATICO**, ossia corrisponde allo spostamento a REGIME con  $\omega \rightarrow 0$

Lo Forzo il Sistema con una Forza "LENTRA"  $\approx$  CASO STATICO

$$\Rightarrow \boxed{\frac{X_0}{X_{sr}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2iE\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} = Q(i\omega)}$$

**FATTORE DI AMPLIFICAZIONE**. QUANDO del Sistema, ossia quanto aumenta la risposta rispetto alla configurazione Statica.

OSS, Perché  $i\omega$ ?

→ Se considero la **FUNZIONE DI TRASFERIMENTO**  $\boxed{G(s) = \frac{X(s)}{F(s)/K}$

ponendo  $s = i\omega$ , vedo proprio che  $\boxed{G(s=i\omega) \equiv Q(i\omega)}$

⇒ Trasformo il Sistema con LAPLACE, mettiamo a posto  $Q$ !

Definiamo  $\boxed{\eta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\text{PULSAZIONE FORZANTE}}{\text{PULSAZIONE PROPRIA}}}$

Trasformo

$$Q = \frac{1 - \eta^2 - i2E\eta}{(1 - \eta^2)^2 + (2E\eta)^2}$$

$$\begin{cases} \text{Re}(Q) = \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2E\eta)^2} \\ \text{Im}(Q) = \frac{-2E\eta}{(1 - \eta^2)^2 + (2E\eta)^2} \end{cases}$$

⇒  $\boxed{|Q| = \left( (1 - \eta^2)^2 + (2E\eta)^2 \right)^{-1/2}}$  **MODULO della FUNZIONE DI RISPOSTA in FREQUENZA (FRF)**

$\boxed{\varphi^* = \frac{\text{Im}(Q)}{\text{Re}(Q)} = \frac{-2E\eta}{1 - \eta^2}}$  → Perché il Sistema è **CASUALE**, la **FASE** è **SEMPRE NEGATIVA**, ossia la **RISPOSTA** è **SEMPRE in RITARDO!!**

OSS: TUTTE le curve passano per  $(\kappa=1, \varphi=0)$ :

$$\lim_{\kappa \rightarrow 1} \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

Questo vuol dire che, al variare di  $\varepsilon$ , ESISTE SEMPRE una RISPOSTA IN QUADRATURA.  
Qualcuno chiama  $\kappa=1$  CONDIZIONE di RISONANZA, MA in realtà

$$\omega_{RIS} = \omega_{MAX AMPIEZZA} \quad \text{COND. RISONANZA}$$

anche se, solitamente  $\varepsilon$  assume valori dell'ordine di qualche punto percentuale ( $\varepsilon = 0.01 \div 0.1$ ): quindi le 2 definizioni, dal punto di vista quantitativo, coincidono!

Però, per calcolare il MAX di  $\frac{|X_d|}{X_{st}}$ , ora dobbiamo MIN il denominatore:

$$\frac{d}{dt} [(1-\kappa^2)^2 + 4\varepsilon^2 \kappa^2] = 2(1-\kappa^2)(-2\kappa) + 8\varepsilon^2 \kappa = 0$$

$$\Rightarrow \kappa^2 - 1 + 2\varepsilon^2 = 0 \Rightarrow \kappa = \sqrt{1 - 2\varepsilon^2} = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\Rightarrow \omega_{RIS} = \omega_n \sqrt{1 - 2\varepsilon^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2\varepsilon^2 > 0$$

$$\text{ovvero} \quad 0 < \varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a cui corrisponde  $Q_{MAX} = \frac{1}{2\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$

FAITORE di QUALITÀ!  
per i nostri scopi MEGLIO se BASSO!

A questo punto, scriviamo le somme:

$$x(t) = |X_0| \cos(\omega t - \varphi)$$

Analizziamo l'Equazione alla luce del diagramma:

$$(k - m\omega^2 + i\omega c) X_0 = f_0$$

- Se  $\kappa \ll 1 \Rightarrow \boxed{K|X_0| \approx f_0 \text{ e } \varphi \approx 0}$

$\rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{ZONA DOMINATA dalla RIGIDEZZA} \\ \text{Risposta e Forzante QUASI IN FASE} \\ \text{TUTTA la Forza Esterna serve a vincere la Rigidezza} \end{array} \right.$

Assumiamo per semplicità'  $x_0 = v_0 = 0$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{f_0}{K - m\omega^2} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_m t))$$

ovvero, mediante le FORMULE DI PROSTATESI e assumendo

$$\omega_{ME} = \frac{\omega_m + \omega}{2}$$

$$\{ = \frac{\omega_m - \omega}{2}$$

$$\text{NUM: } \cos(\omega t) - \cos(\omega_m t) = 2 \sin\left(\frac{\omega_m - \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_m + \omega}{2} t\right)$$

$$= 2 \sin(\{t) \sin(\omega_{ME} t)$$

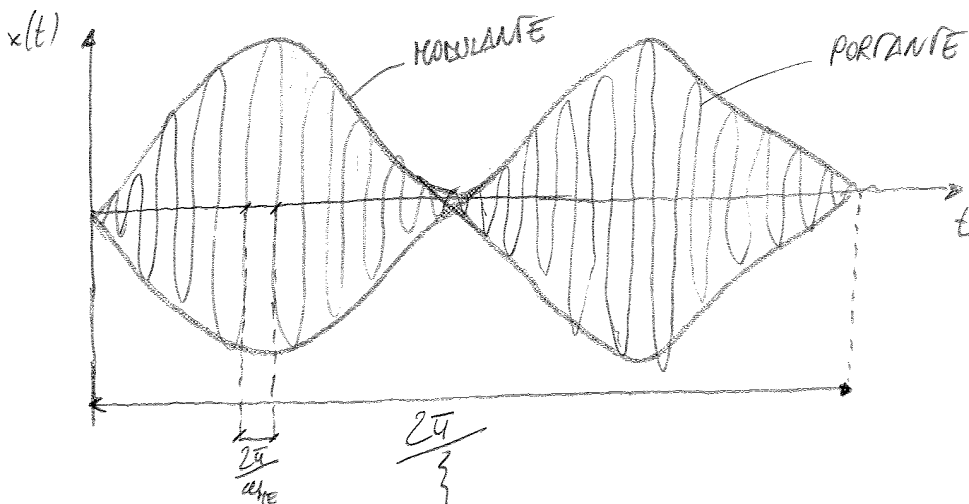
$$\text{DEN: } K - m\omega^2 = m(\omega_m^2 - \omega^2) = m(\omega_m + \omega)(\omega_m - \omega) =$$

$$= m(2\{)(2\omega_{ME})$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{f_0}{2m\{\omega_{ME}} \sin(\{t) \sin(\omega_{ME} t)$$

► Se  $\omega \approx \omega_m \Rightarrow \{$  PICCOLO e  $\omega_{ME} \approx \omega_m$

$\Rightarrow$  abbiamo un' ARMONICA di AMPIEZZA ELEVATA ( $\{$  è a DEN) alla Frequenza  $\omega_{ME}$  della PORTANTE, Ampiezza però RIDOLTA da una SECONDA ARMONICA di Frequenza  $\{$  della MODULANTE  $\Rightarrow$  si ottiene il fenomeno del BATTIMENTO che altro non è che il risultato della SOMMA di 2 ARMONICHE con FREQUENZE VICINE e AMPIEZZE PARAGONABILI (con questa, da NON trascurare!)



- Tutto questo è in accordo col DIAGRAMMA DI BODE?

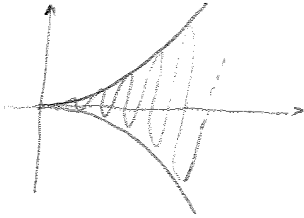
Il Diagramma di Bode dà informazioni su RISPOSTE A REGIME, pertanto qui diciamo che l'Impedanza va ad infinito in un Tempo infinito, MA il Diagramma di Bode NON dà alcuna informazione sul Tempo!!

- TAKOMA BRIDGE: il Takoma NON crollò per una Risonanza infinita!

Il Vento forniva Energia al Sistema quando le Oscillazioni NON erano "piccole".

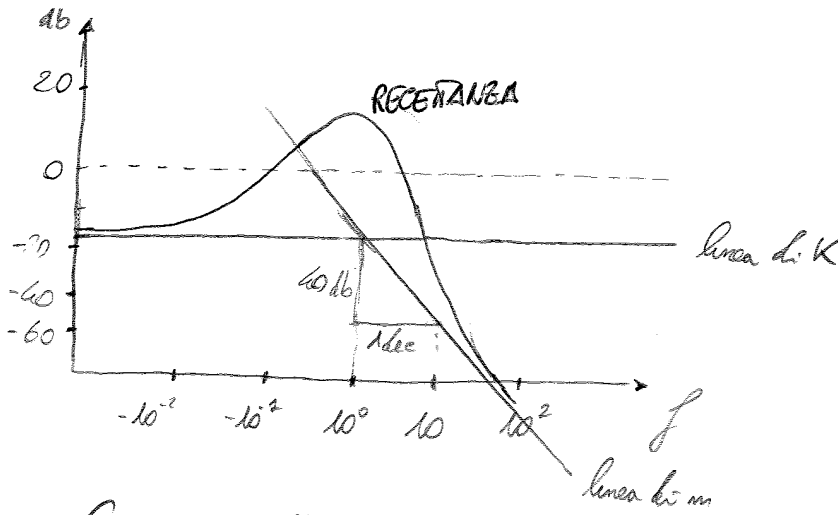
Si parla di Risonanza infinita in presenza di Forzanti Oscillanti, MA il Vento è Costante!!

Quella che si intende per una INSTABILITÀ di tipo FLUTTER: la differenza in questo è la Risonanza infinita è che nell'INSTABILITÀ tende all'INFINITO (l'Impedanza) in maniera ESPOENZIALE.



L'Esponenziale è causato dalla Soluzione dell'Omogenea Associata che INVERTE  $\epsilon < 0$ , Smorzamento Negativo!  
 Pertanto in questo caso il problema NON è generato dal Termine Forzante!

⇒

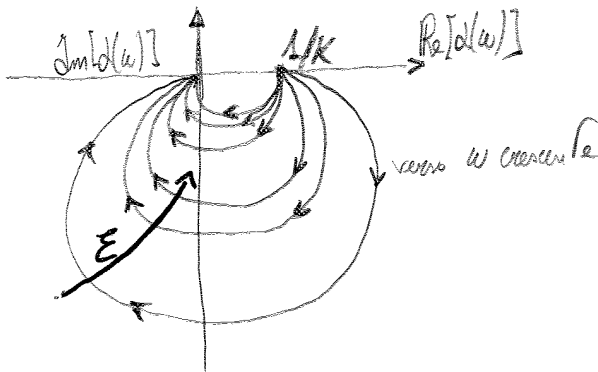


Questa è una Rappresentazione con SCALE LOGARITMICHE (in quanto le Scale lineari comprimono troppo le informazioni) e osserviamo che, in un SDF, le LINEE di MASSA e di RIGIDEZZA sono gli ASINTOTI della RESONANZA

Questa, però, NON è l'unico modo per rappresentare la FRF, MA possiamo servirci anche di

- > Grafici su SCALE SEMILOGARITMICHE
- > Grafici di PARTE Re e PARTE Im

→ DIAGRAMMA DI NYQUIST, ottenuto riproiettando Parte Re e Parte Im sul piano di ARGAND-GAUSS



$$= \frac{1}{K} \frac{(1-r^2) - i2\zeta r}{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}$$

$$d(s) = \frac{1}{K - ms^2 + i\zeta\omega_n s} = \frac{1}{\omega_n^2 - s^2 + i2\zeta\omega_n s} = \frac{1 (K \omega_n^2 / m)}{1 - r^2 + i2\zeta r}$$

$$\text{Re}[d(s)] = \frac{1}{K} \frac{(1-r^2)}{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}$$

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Re}[d(s)] = 1/K$$

$$\text{Im}[d(s)] = 0$$

$$\text{Im}[d(s)] = \frac{1}{K} \left( \frac{-i2\zeta r}{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2} \right)$$

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Re}[d(s)] = 0$$

$$\text{Im}[d(s)] = 0$$

ba.

\* SMORZAMENTO ISIPERETICO → VALE SUO × FORZANTI ARMONICHE

Calcoliamo il LAVORO fornito dalla Forza Esterna per consentire al Sistema di compiere un N°ERO ciclo di OSCILLAZIONE. Poiché è stata attribuita solo allo Smorzatore Viscoso ogni forma di Dissipazione dell'Energia, il lavoro fornito dall'esterno deve essere pari a:

$$L_e = \int_{ab} c \dot{x} dx = \int_T c \dot{x} \frac{dx}{dt} dt = \int_T c \dot{x}^2 dt$$

ove T è il PERIODO della Forzante.

Scriviamo lo spostamento come:  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

in cui:  $\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$

$$\Rightarrow L_e = \int_T c \dot{x}^2 dt = \int_T c A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt$$

ponendo  $\theta = \omega t + \varphi$   
 $d\theta = \omega dt \Rightarrow = c A^2 \omega^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{\omega} d\theta = c A^2 \omega \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi c A^2 \omega$

$$\Rightarrow \boxed{L_e = \pi c \omega A^2}$$

Poiché l'Energia dissipata in un ciclo dallo Smorzatore Viscoso è proporzionale al quadrato della Ampiezza di Oscillazione e alla pulsazione della Forzante. Verificazioni sperimentali hanno così messo in luce che molti materiali, sottoposti a cicli di deformazione, dissipano energia in modo quasi indipendente dalla frequenza con cui i cicli stessi vengono percorsi: si parla in questo caso di SMORZAMENTO ISIPERETICO INTERNO o STRUTTURALE.

Per ottenere un modello semplice di questo comportamento, si è soliti cercare di rappresentare lo Smorzatore Isteretico a un EQUIVALENTE Smorzatore Viscoso, imponendo l'uguaglianza dei lavori:

Indichiamo con  $L_\eta = a A^2$  l'Energia dissipata dallo Smorzatore Isteretico, con a costante di proporzionalità dipendente dal materiale, e imponiamo

$$L_e = L_\eta$$

$$\Rightarrow \pi c \omega A^2 = a A^2$$

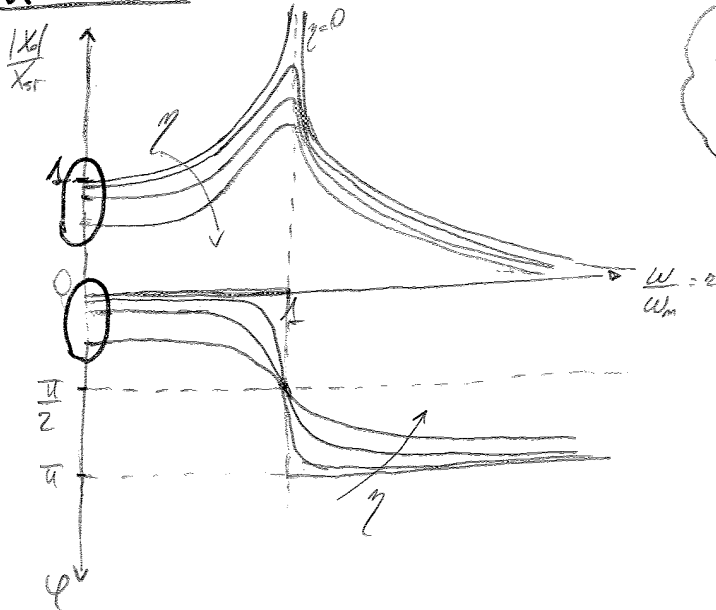
$$\Rightarrow \boxed{c_\eta = \frac{a}{\pi \omega}}$$

COSTANTE DI SMORZAMENTO VISCOSO EQUIVALENTE

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{RIS} = \omega_n} \quad \text{e} \quad \boxed{Q_{MAX} = \frac{1}{2}}$$

⇒ A differenza del caso con Smorzamento Viscoso, la Frequenza di Risonanza NON dipende dalla entità dello Smorzamento  $\eta$  coincide con la Frequenza Naturale e la Curva della Ampiezza  $\therefore$  Oscillazione presenta sempre un MAX pari a  $f_0/(K\eta)$ :

→ DIAGRAMMA DI BODE



NB:  $\omega_{RIS} = \omega_n$  SEMPRE  $\Rightarrow$   
 MAX SEMPRE in corrispondenza di  $\omega = \omega_n$

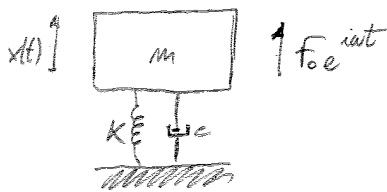
$\eta = 0, \eta = 0 \Rightarrow \frac{|K|}{X_{sr}} = 1$

OSS: Per  $\eta = 0$ , la  $\frac{|K|}{X_{sr}}$  è la Risposta del Sistema ad una Forzante STAZIONARIA (= COSTANTE)  $\Rightarrow$  dovrebbe assumere valore UNITARIO  $\forall \eta$ , e la stessa cosa accade per la fase  $\phi$ , che per  $\omega = 0$  NON assume sempre valore NULLO (= la Risposta è in ritardo anche quando la Forzante è Costante!).  
 Questo comportamento è imputabile al fatto che NON può essere unito quando il Sistema NON compie un ciclo di ISTABILITÀ!



# TRASMISSIBILITÀ

Consideriamo la situazione



Si definisce **TRASMISSIBILITÀ** il rapporto tra la Forza Applicata e la Forza che si SCELTA a Terra (armata al vincolo). Più in generale si indica con il termine **TRASMISSIBILITÀ** il rapporto tra 2 Ampiezze commensurabili

(ad esempio Forza su Forza, Spool su Spool), una delle quali è interpretata come Wagon e l'altra come OUTLINE.

Indichiamo con  $f_v(t)$  la Forza Trasmessa al vincolo,

$$f_v(t) = Kx + c\dot{x} = (K + i\omega c) X_0 e^{i\omega t} = F_v e^{i\omega t}$$

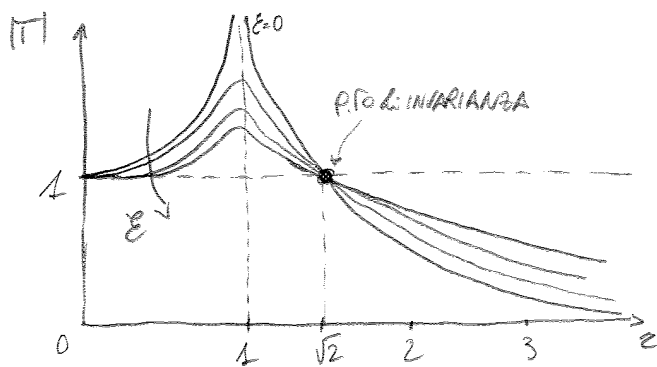
$$\text{con } F_v = (K + i\omega c) X_0 = (K + i\omega c) \frac{F_0}{K - m\omega^2 + i\omega c}$$

Quindi

$$T = \frac{F_v}{F_0} = \frac{K + i\omega c}{K - m\omega^2 + i\omega c} = \frac{1 + i2\zeta\epsilon\epsilon_r}{1 - \epsilon^2 + i2\zeta\epsilon\epsilon_r}$$

da cui

$$|T| = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\epsilon\epsilon_r)^2}{(1 - \epsilon^2)^2 + (2\zeta\epsilon\epsilon_r)^2}}$$



OSS  $|T(\sqrt{2})| = \sqrt{\frac{1 + 8\zeta^2\epsilon^2}{1 + 8\zeta^2\epsilon^2}} = 1$   
 = costante NON dipende da  $\epsilon$   
 => PUNTO di INVARIANZA!

• Un BUON ISOLATORE è tale che  $\boxed{\epsilon > \sqrt{2}}$  con  $|T| < 1$

Secondo un luogo comune, per diminuire le oscillazioni bisogna aumentare lo Smorzamento, MA NON è sempre vero, infatti se prima del punto di invarianza questo mi porta ad avere una Forza Applicata Minore, dopo è controproducente.

Ma che  $\epsilon = \frac{\omega}{\omega_n}$  e  $\omega$  è assegnato: mi procurano interferenza su  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$

=> visto che è meglio avere  $\epsilon > \sqrt{2}$ , intervenire su  $K$  e  $m$  per raggiungere questo compromesso!!

→ PROCEDURA STANDARD

$$m\ddot{x} + E\dot{x} + Kx = Mu^2 R e^{i\omega t}$$

$$x(t) = X_0 e^{i\omega t} \Rightarrow (K - m\omega^2 + i\omega E) X_0 = Mu^2 R$$

$$\hookrightarrow \frac{X_0}{R} = \frac{Mu^2}{K - m\omega^2 + i\omega E} \quad \text{ADIMENSIONALE}$$

$$\hookrightarrow \frac{X_0}{R} = \frac{(M/K)\omega^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i \frac{2\zeta E \omega}{\omega_n}}$$

$$\hookrightarrow \frac{X_0}{R} = \frac{(M/m)\omega^2}{1 - \omega^2 + i 2\zeta E \omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{X_0}{R} = \frac{M}{m} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \cdot G(i\omega)}$$

FATTORE DI AMPLIFICAZIONE  
del SISTEMA

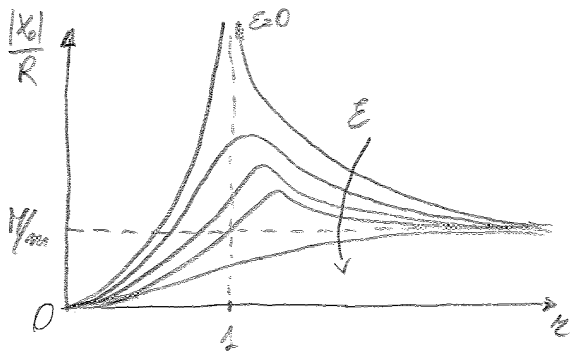
da cui

$$\boxed{\frac{|X_0|}{R} = \frac{M}{m} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\zeta E \omega)^2}}}$$

$$|G| = \frac{2\zeta E \omega}{1-\omega^2}$$

→ Per la Fase, il Diagramma è uguale!!

→ DIAGRAMMA BODE



- Per  $\omega=0$ , TUTTE le CURVE sono a 0  
 ⇒ A Velocità  $\omega$  basse, le Oscillazioni  
 Transientabili!

- ASINTOTO NON-NULLO, MA passa a  $M/m$ !

- Al crescere di  $E$ , i MAX si spostano verso DX!!

Cerchiamo MAX.

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\zeta E \omega)^2}} = \frac{2\omega \sqrt{\dots} - \omega^2 \frac{1}{\sqrt{\dots}} [2(1-\omega^2)(-2\omega) + 8\zeta^2 E^2 \omega]}{(\sqrt{\dots})^2}$$

$$\Rightarrow \omega \left[ (1-\omega^2)^2 + (2\zeta E \omega)^2 \right] - \omega^2 [2(1-\omega^2)(-2\omega) + 8\zeta^2 E^2 \omega] = 0$$

$$\omega \left[ (1-\omega^2)^2 + (2\zeta E \omega)^2 + \omega^2 - \omega^4 - 2\zeta^2 E^2 \omega^2 \right] = 0$$

$$1 - \omega^2 + 2\zeta^2 E^2 \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{1}{1 - 2\zeta^2 E^2}} \iff \boxed{E < \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

129

Sarebbe auspicabile lavorare in un intorno di  $|X_0| = 0$ , con da cui si vede precede oscillazioni.

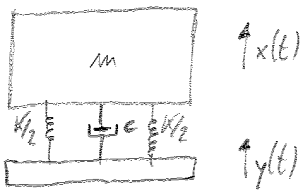
Tuttavia, nel caso della lavatrice si ha un sistema a BASSO STOCCAMENTO e con PULSILLONIA PROPRIA BASSA rispetto alla velocità di rotazione del cestello durante la centrifuga, che invece deve essere alta perché l'operazione stema sia efficace. Dunque NON è possibile lavorare nella zona con  $\omega \ll \omega_m$ ! (dove si avrebbero forze e spostamenti ridotti)

Però conviene lavorare nella zona di  $\omega \approx \omega_m$ , e visto che  $\omega$  è assegnato, possiamo intervenire su  $\omega_m$ :

$$\omega_m = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{BASSO} \Rightarrow \text{BLOCCO DI CEMENTO PER AUMENTARE } m$$

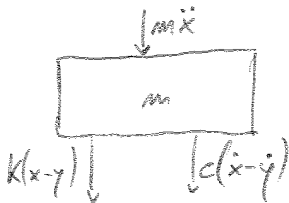
### \* ACCELEROMETRO e SISMOGRAFO

Consideriamo il Sistema SDOF:



La base, a cui è collegata la massa  $m$ , è animata di moto armonico e si muove con  $y(t)$  il suo spostamento rispetto a un SR Inerziale. Con  $x(t)$  indichiamo, nello STESSO SR, lo spostamento di  $m$  a partire dalla configurazione di EQUILIBRIO  $\Rightarrow$  NO P.E.

$\Rightarrow$  DEL



$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + K(x - y) = 0$$

Indichiamo con  $z(t)$  il MOTO RELATIVO:  $z = x - y$

$$\Rightarrow m\ddot{z} + c\dot{z} + Kz = -m\ddot{y}$$

$\rightarrow$  Procedura Standard:  $\begin{cases} z = z_0 e^{i\omega t} \\ y = Y_0 e^{i\omega t} \end{cases}$

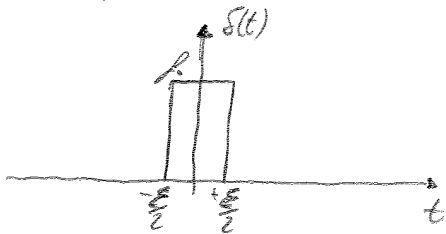
$$\Rightarrow (K - m\omega^2 + i\omega c) z_0 = m Y_0 \omega^2$$

## \* RISPOSTA all'IMPULSO

Il calcolo della risposta a una forzante generica richiede la conoscenza della RISPOSTA all'IMPULSO: si definisce IMPULSO UNITARIO o DELTA di DIRAC la funzione, meglio DISTRIBUZIONE  $\delta(t-t_0)$  tale che

$$\begin{cases} \delta(t-t_0) = 0 & \forall t \neq t_0 \\ \delta(t-t_0) \rightarrow \infty & t = t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \end{cases}$$

L'IMPULSO è quindi una funzione ovunque nulla, tranne che in  $t_0$  in cui tende all'infinito. La particolarità è ulteriormente accentuata dal fatto che il suo integrale fornisce un VALORE FINITO, pari a 1



Per essere d'aiuto pensare all'impulso come il limite per  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $h \rightarrow \infty$  della funzione in figura, la cui area  $h \cdot \epsilon$  è pari a 1.

Studiamo, quindi, la RISPOSTA del Sistema provocata dall'azione di un impulso applicato in  $t_0 = 0$  (e così non perde, sarebbe sufficiente effettuare una Traduzione dell'asse dei tempi)

Per qualunque istante, eccetto quello iniziale, l'Eq. del Moto è

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \forall t \neq 0$$

la cui soluzione approssimativa dipende da  $\epsilon$  e dalle Condizioni Iniziali. Se si ipotizza che un istante prima dell'azione dell'impulso, cioè in  $t = 0^-$ , il SISTEMA sia a RIPOSO, si ha

$$\begin{cases} x(t=0^-) = x(0^-) = 0 \\ \dot{x}(t=0^-) = \dot{x}(0^-) = 0 \end{cases}$$

Nell'istante iniziale, invece, si ha

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta(t)$$

QUINDI, la RISPOSTA all'IMPULSO,  $h(t)$ , si calcola come RISPOSTA LIBERA

con COND INIZ.

$$\begin{cases} h(t) = (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) e^{-\zeta \omega_n t} \\ x(0^+) = 0 \\ \dot{x}(0^+) = 1/m \end{cases}$$

A NOI INTERESSA SOLO CASO  $\zeta < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \omega = \frac{1}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{m \omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{m \omega} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega t) u(t) \quad \text{RISPOSTA all'IMPULSO}$$

Il caso in cui l'impulso NON fosse centrato nell'origine dell'asse dei tempi, MA in  $t_0 \neq 0$ .

$$\begin{cases} h(t) = 0 & t \leq t_0 \\ h(t) = \frac{1}{m \omega} \sin(\omega(t-t_0)) e^{-\zeta \omega_n(t-t_0)} & t > t_0 \end{cases}$$

oppure, forse,

$$h(t) = \frac{1}{m \omega} \sin(\omega(t-t_0)) e^{-\zeta \omega_n(t-t_0)} u(t-t_0)$$

Passando al limite:

$$\begin{cases} \Delta\tau \rightarrow d\tau \\ n \rightarrow \infty \\ K\Delta\tau \rightarrow \tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

INTEGRALE di CONVOLUZIONE  
di DUHAMEL

con  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

Se le Condizioni Iniziali NON fossero entrambe nulle, per ottenere la risposta del sistema sarebbe sufficiente aggiungere all'Espressione dell'Integrale di Convoluzione quella della risposta libera!

→ PROPRIETA'

> Il Prodotto di Convoluzione è COMMUTATIVO: infatti, ponendo  $\tau = t - \tau$

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

> La TRASFORMATA di FOURIER commuta la CONVOLUZIONE in PRODOTTO di TRASFORMATE

> Possiamo tranquillamente scrivere

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots = \int_{-\infty}^0 \dots + \int_0^t \dots + \int_t^{+\infty} \dots = \int_0^t \dots$$

$L=0$   
 perché  $f(\tau)=0$  per  $\tau < 0$   
 (Hp)

$L=0$   
 perché per  $\tau > t$   
 $\Rightarrow t-\tau < 0 \Rightarrow h(t-\tau)=0$   
 perché SISTEMA CAUSALE

Linearizzando e approssimando, come Condizioni Iniziali:

$$\begin{cases} \vartheta(t=t_0=0) = \vartheta_0 > 0 \\ \dot{\vartheta}(t=0) = \dot{\vartheta}_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_0 \ddot{\vartheta} + mgL\vartheta - c_0 = 0}$$

$$\hookrightarrow I_0 \ddot{\vartheta} + mgL\vartheta = c_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vartheta(t) = \frac{c_0}{mgL} + A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t}$$

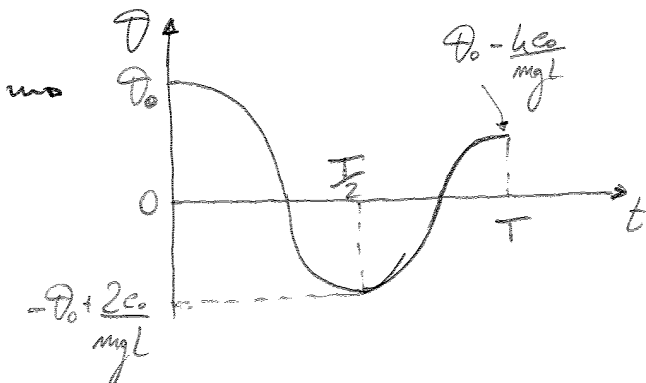
dove  $\omega_n^2 = \frac{mgL}{I_0}$  MA se la Massa è concentrata all'estremo  $\Rightarrow \boxed{I_0 = mL^2} \Rightarrow \boxed{\omega_n^2 = \frac{g}{L}}$

Imponendo Condizioni Iniziali:

$$\begin{cases} \vartheta_0 = \frac{c_0}{mgL} + A \Rightarrow A = \vartheta_0 - \frac{c_0}{mgL} \\ \dot{\vartheta}_0 = B \omega_n = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vartheta(t) = \frac{c_0}{mgL} + \left( \vartheta_0 - \frac{c_0}{mgL} \right) \cos \omega_n t}$$

con  $\dot{\vartheta} < 0$  - Poiché in Cond di No Equilibrio, lascio e il pendolo si muove con velocità angolare Negativa



$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_n}}$$

$$\cdot \vartheta(0) = \vartheta_0 > 0$$

$$\cdot \vartheta\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{c_0}{mgL} + \left( \vartheta_0 - \frac{c_0}{mgL} \right) \cos \pi = -\vartheta_0 + \frac{2c_0}{mgL}$$

E inoltre è noto anche  $u_m$

$$u_m = \frac{mgl}{I_0} \quad \text{e poi MISURARLO e da esso porre} \\ \text{TARARE } T = \frac{2\pi}{\omega_m}$$

⇒ Con 2 MISURE ho le condizioni sufficienti per determinare  $\omega_0$   
U SCONSIGLIAVA questa procedura perché:

- MISURE affette da ERRORI
- QUALE COPPIA di PUNTI SCEGLIO?

→ Consideriamo l'Equazione su OGNI CAMPIONE, con USATO TUTTA l'INFORMAZIONE

$$V_i = \frac{I_0}{mgl} \ddot{\theta}(i\Delta t) + \frac{c_0}{mgl} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}(i\Delta t)) = -\sin(\theta(i\Delta t))$$

$$\text{ma } \begin{bmatrix} \ddot{\theta}(i\Delta t) & \operatorname{sgn}(\dot{\theta}(i\Delta t)) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0/mgL \\ c_0/mgL \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sin(\theta(i\Delta t)) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

⇒ REGRESSIONE LINEARE PSEUDOINVERSA  $[A]^T[A] - [I]$   
 (MINIMI QUADRATI)



Visto che la Forza Pèro crea delle enormi difficoltà dal punto di vista matematico, ci proponiamo nel caso in cui il Rotore ha asse VERTICALE  $\Rightarrow g=0$  ( $\odot \vec{g}$ )

Però studiamo il caso  $\omega = \cos t, g=0$ :

$$\begin{cases} \text{Eq. } \leftarrow: m\ddot{x}_a + kx + c\dot{x} = 0 \\ \text{Eq. } \downarrow: m\ddot{y}_a + ky + c\dot{y} = 0 \\ \text{Eq. } \curvearrowright: M - I\ddot{\Psi} + (ky + c\dot{y})\varepsilon \cos \Psi - (kx + c\dot{x})\varepsilon \sin \Psi = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Sistema a 3 gradi di libertà

MA  $\dot{\Psi} = \omega = \cos t \text{ DANTE} \Rightarrow \Psi = \omega t, \ddot{\Psi} = 0$

$\Rightarrow$  abbiamo SOLO 2 CdL!

Dalla 3<sup>a</sup> eq possiamo ricavare solo  $M \Rightarrow$  ho solo ESPRESSIONE ANALITICA del MOMENTO!

Sappiamo che:  $\begin{cases} x_a = x + \varepsilon \cos \omega t \\ y_a = y + \varepsilon \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow$  sostituisco nelle prime 2 Equazioni:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\omega^2 \varepsilon \cos \omega t & (1) \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = m\omega^2 \varepsilon \sin \omega t & (2) \end{cases}$$

A questo punto definiamo  $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$  e sommiamo  $(1) + i(2)$

$\Rightarrow m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m\omega^2 \varepsilon e^{iat}$  e procediamo come SDOF!

$\Rightarrow$  Definisci  $z = z_0 e^{iat}$  con  $z_0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow (k - m\omega^2 + i\omega c) z_0 = m\omega^2 \varepsilon$

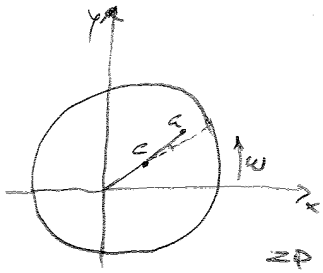
$\Rightarrow z_0 = \frac{m\omega^2 \varepsilon}{k - m\omega^2 + i\omega c}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet \frac{|z_0|}{\varepsilon} = \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right)^2 + \left(2\frac{\varepsilon \omega}{\omega_m}\right)^2}} \\ \bullet \varphi = \frac{2\frac{\varepsilon \omega}{\omega_m}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2} \end{cases}$$

$\rightarrow$  COSTANTE!  
NON DIPENDE  
dal TEMPO!!

Visualizziamo le 3 CONFIGURAZIONI NOTIEVOLI:

▷  $\omega \ll \omega_n$

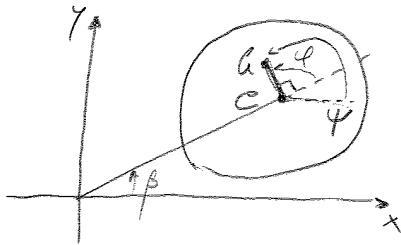


Curvato dal Diagramma:

- $\overline{OC}$  Molto Piccolo!
- $\varphi \approx 0$  ma  $\overline{OC}$  quasi parallelo a  $\overline{CE}$ !

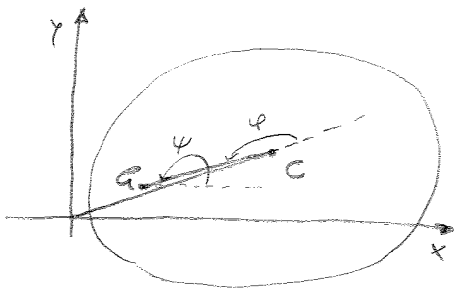
⇒ Il Centro Geometrico descrive una Traiettoria circolare piccola e il Baricentro si muove anch'esso su una circonferenza mantenendosi all'esterno della circonferenza descritta da C.

▷  $\omega = \omega_n$



- $\overline{OC}$  Molto grande rispetto a  $\epsilon$ !
- $\varphi = 90^\circ$
- $\beta$  è  $\omega$  RITARDATO di  $90^\circ$  rispetto alla FORZANTE  $\varphi = \omega t$
- Traiettoria di C Esterna a quella di E

▷  $\omega \gg \omega_n$



- $\delta \approx \epsilon$
- $\varphi \approx 180^\circ$  ⇒ il SISTEMA cerca di STABILIZZARSI !!

Infatti: 
$$\left. \begin{matrix} \omega \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow \epsilon \\ \varphi \rightarrow \pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x_a, y_a) \rightarrow (0, 0)$$
 da figura a  $\infty$

⇒ AUTOCENTRAMENTO = ELIMINO FORZE & INERZIA

$$x_a = x + \epsilon \cos \omega t = \delta \cos(\omega t - \varphi) + \epsilon \cos \omega t$$
  
 MA  $\delta \approx \epsilon$  e  $\varphi \approx \pi \Rightarrow \approx \epsilon(-\cos \omega t) + \epsilon \cos \omega t = 0$

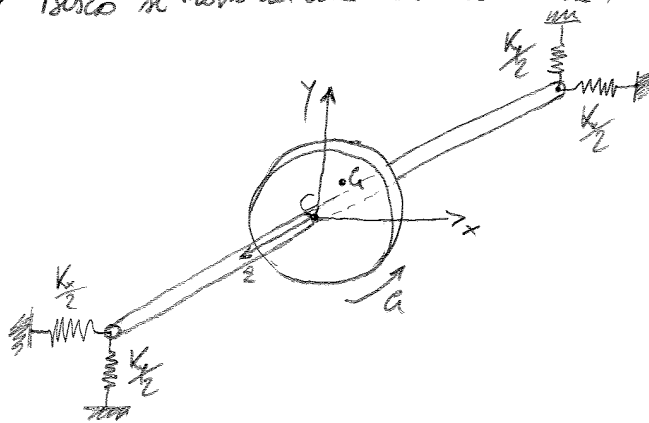
K ROTORE con ALBERO RICIDO su SUPPORTI CODEVOLI e ANISOTROPI

Consideriamo un Albero INFINITAMENTE RICIDO avente 2 cuscinetti di estremità.  
 Supponiamo che i 2 cuscinetti siano ELASTICI e ANISOTROPI, ossia abbiano costante di elasticità differente sui 2 assi.

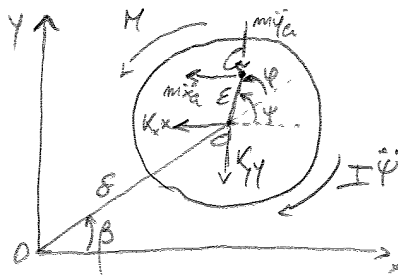
NON teniamo conto dello STORZAMENTO!

Sull'albero rigido, in corrispondenza della mozzetta, è calcolato un DISCO PESANTE, di massa  $m$ , il cui Asse Polare coincide con l'Asse di Rotazione.

Immaginiamo che l'Equilibramento Statico effettuato sul disco NON sia perfetto e pertanto il baricentro  $G$  del disco si trovi ad una certa distanza, molto piccola, dal centro Geometrico  $C$ .



Questa volta NON consideriamo la deformabilità dell'Albero (inf. rigido), MA quella dei cuscinetti.  
 Quindi, determiniamo MOVO ALBERO.



$$\begin{cases} x_a = x + E \cos \omega t \\ y_a = y + E \sin \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \ddot{x}_a + k_x x = 0 \\ m \ddot{y}_a + k_y y = 0 \end{cases}$$

Ignoriamo 3° equazione

Assumiamo  $\psi = \omega t$  e sostituiamo le coordinate del Baricentro:

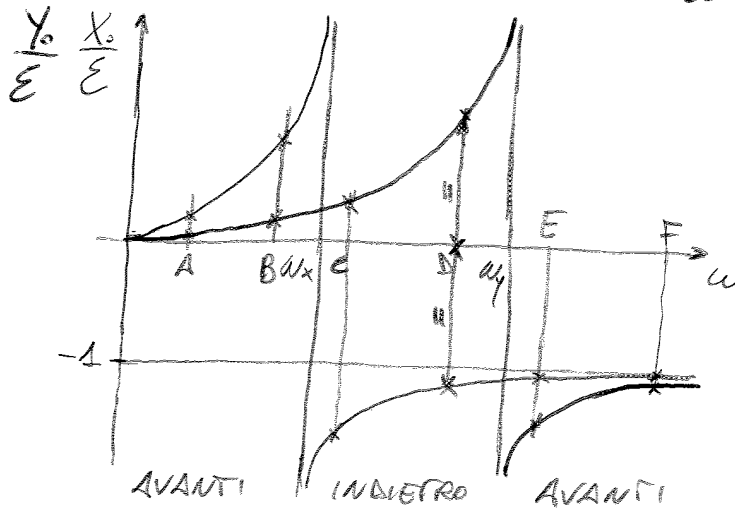
$$\begin{cases} m \ddot{x} + k_x x = m E \omega^2 \cos \omega t \\ m \ddot{y} + k_y y = m E \omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

• Per fissare le idee, supponiamo  $\omega_y > \omega_x$   $\left[ \Rightarrow K_y > K_x \right]$ :

		$\omega_x$	$\omega_y$	$\rightarrow \omega$
$\omega_x^2 - \omega^2$	+	-	-	
$\omega_y^2 - \omega^2$	+	+	-	
$\frac{\dot{\beta}}{\omega}$	+	-	+	

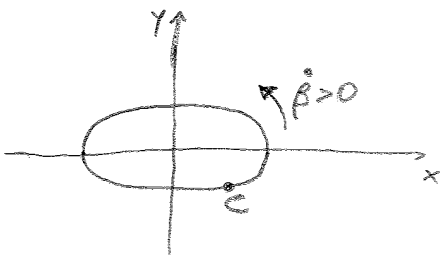
$\Rightarrow$  Moto di AVANTI INDIETRO AVANTI  
PRECESSIONE

Quindi, abbiamo dei moti di PRECESSIONE all'INDIETRO!

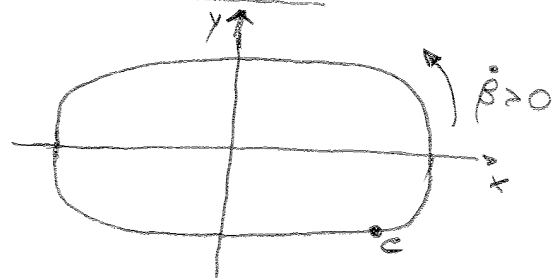


$\Rightarrow$  Abbiamo 6 CONFIGURAZIONI NOTEVOLI:

\* CASO A



\* CASO B



$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_x x = \omega^2 E \cos \omega t & (1) \\ \ddot{y} + \omega_y y = \omega^2 E \sin \omega t & (2) \end{cases} \Rightarrow (1) + i(2)$$

$t = x + iy \quad c = \omega$

Nota che  $\omega_x x + i \omega_y y = \left( \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{2} + \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{2} \right) x + i \left( \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{2} - \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{2} \right) y$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{2} z + \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{2} \bar{z} = \omega^2 E e^{i\omega t}$$

dove  $\frac{\omega_x + \omega_y}{2m} =$  TERMINE MEDIO

$\frac{\omega_x - \omega_y}{2m} =$  TERMINE DEVIABRICO

$\Rightarrow$  Il moto RETROGRADO è generato dalla presenza di  $\bar{z}$  !!

La soluzione dell'Equazione Differenziale è del tipo

$$z = z_F + z_B = F e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}$$

F = FORWARD  
B = BACKWARD

che possono essere raccolte in FORMA MATRICIALE:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Il Sistema Vibrante si dice ACCoppiato se le Eq del Moto NON sono indipendenti, come accade nel caso trattato.

Seguendo questo procedimento, è facile verificare che, nel caso di un Sistema a  $n$  DOF, le Eq del Moto possono sempre essere scritte nella forma

$$\boxed{[m] \ddot{x} + [c] \dot{x} + [K] x = \{f\}} \quad \begin{array}{l} \text{Eq del Moto} \\ \text{MOD}$$

- dove:
- $[m]$  = MATRICE di MASSA, R, Sym, DEF. POS
  - $[c]$  = MATRICE di SMORZAMENTO VISCOSO, R, Sym, SEMI DEF. POS o DEF. POS
  - $[K]$  = MATRICE di RIGIDITÀ, IR, Sym, SEMI DEF/DEF POS
  - $\{x\}$  = VETTORE COORD. GENERALIZZATE
  - $\{f\}$  = VETTORE delle FORZANTI

OSS. Quello visto è solo 1 dei procedimenti che possono essere scelti per ricavare le Eq del Moto. In alternativa, l'APPROCCIO LAGRANGIANO è particolarmente indicato nel caso di DOF MOLTO ELEVATI. Proprio ricordando le Eq di Lagrange, notando che alle Matrici  $[m]$ ,  $[c]$  e  $[K]$ , di dimensioni  $n \times n$ , è possibile associare delle FORME QUADRATICHE DEF/SEMI DEF

POS =

$$\begin{array}{l} T = \frac{1}{2} \dot{x}^T [m] \dot{x} \rightarrow \text{EN. CINETICA} \\ \mathcal{D} = \frac{1}{2} \dot{x}^T [c] \dot{x} \rightarrow \text{FUNZ. DISSIPATIVA GRAYLEIGH} \\ U = \frac{1}{2} x^T [K] x \rightarrow \text{EN. POTENZIALE ELASTICA} \end{array}$$

• Essendo  $\begin{cases} \{x_0\}^T [m] \{x_0\} > 0 \\ \{x_0\}^T [K] \{x_0\} > 0 \end{cases}$  perché  $[m]$  DEF POS  
 $[K]$  DEF/SEM DEF POS

si ha  $\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = - \frac{\{x_0\}^T [K] \{x_0\}}{\{x_0\}^T [m] \{x_0\}} = -\omega^2 \leq 0$

$\Rightarrow \ddot{g}(t) + \omega^2 g(t) = 0$  EQ. KOTO ARMONICO

Però, la SOLUZIONE è esprimibile come

$\{x(t)\} = \{x_0\} \cos(\omega t + \theta)$

$\Rightarrow -\omega^2 [m] \{x_0\} \cos(\omega t + \theta) + [K] \{x_0\} \cos(\omega t + \theta) = \{0\} \quad \forall t$

$\Rightarrow ([K] - \omega^2 [m]) \{x_0\} = \{0\}$  EVP

Affinché  $\{x_0\}$  sia diverso dalla soluzione banale (ovvero NULLA) deve valere

$\det([K] - \omega^2 [m]) = 0$

Nel caso di MDOF a  $n$  DOF, questa rappresenta un'Equazione ALGEBRICA di grado  $2n$  nella variabile  $\omega$  (ovvero di grado  $n$  nella variabile  $\omega^2$ ).

$a_n \omega^{2n} + a_{n-1} \omega^{2n-2} + \dots + a_1 \omega^2 + a_0 = 0$  EQUAZIONE CARATTERISTICA

gli ZERI del Polinomio sono gli AUTOVALORI  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$   
 le cui RADICI prendono il nome di PULSAZIONI PROPRIE o NATURALI del sistema a  $n$  DOF. Se si inseriscono, ad uno ad uno, gli Autovalori nell'EVP e si risolve il Sistema Algebrico, si ottengono gli AUTOVETTORI  $\{\psi_1\}, \{\psi_2\}, \dots, \{\psi_n\}$ , detti anche FORME MODALI. La COPPIA  $(\omega_i^2, \{\psi_i\})$  caratterizzano il MODO

2-esimo.

complichiamo la prima per  $\{\psi_0\}^T$  e la seconda per  $\{\psi_2\}^T$ :

$$\begin{cases} \omega_2^2 \{\psi_0\}^T [m] \{\psi_2\} = \{\psi_0\}^T [K] \{\psi_2\} & (1) \\ \omega_0^2 \{\psi_2\}^T [m] \{\psi_0\} = \{\psi_2\}^T [K] \{\psi_0\} & (2) \end{cases}$$

Caricando equazioni rappresentate uno SCALARE!

Tragommo la seconda:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \{\psi_0\}^T [m] \{\psi_2\} &= \{\psi_0\}^T [K] \{\psi_2\} \\ \hookrightarrow \omega_0^2 \{\psi_0\}^T [m] \{\psi_2\} &= \{\psi_0\}^T [K] \{\psi_2\} \quad \text{perché } [m], [K] \in \text{Sym} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1) - (2)^T: \quad \boxed{(\omega_2^2 - \omega_0^2) \{\psi_0\}^T [m] \{\psi_2\} = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet \text{ Se } \omega_2 \neq \omega_0 \rightarrow \{\psi_0\}^T [m] \{\psi_2\} = 0 \\ \bullet \text{ Se } \omega_2 = \omega_0 \rightarrow \{\psi_2\}^T [m] \{\psi_2\} = m_2 > 0 \end{cases}$$

NON CONSIDERO AUTOVAL. COINCIDENTI

Nel primo caso si dice che gli Autovettori sono  $[m]$ -ORTOGONALI, mentre la costante  $m_2$  che compare nel secondo caso prende il nome di MASSA MODALE  $n$ -esima ed è valida un valore del fatto che  $[m]$  è DEF. POS.

Inoltre, dalla (1) si evince che

$$\begin{cases} \bullet \text{ Se } \omega_2 \neq \omega_0 \rightarrow \{\psi_0\}^T [K] \{\psi_2\} = 0 \quad \text{perché } \{\psi_0\}^T [m] \{\psi_0\} = m_0 \\ \bullet \text{ Se } \omega_2 = \omega_0 \rightarrow \{\psi_2\}^T [K] \{\psi_2\} = k_2 = m_2 \omega_2^2 \geq 0 \end{cases}$$

Nel primo caso si dice che gli Autovettori sono  $[K]$ -ORTOGONALI, mentre la costante  $k_2$  che compare nel secondo caso prende il nome di RIGIDEZZA MODALE  $n$ -esima.

Mediante la MATRICE MODALE, le proprietà dimostrate si possono sintetizzare

$$\begin{aligned} \boxed{[\Phi]^T [m] [\Phi] = \text{diag}(m_n)} &\rightarrow \text{MATRICE MASSE MODALI} \\ \boxed{[\Phi]^T [K] [\Phi] = \text{diag}(k_n)} &\rightarrow \text{MATRICE RIGIDEZZE MODALI} \end{aligned}$$

ENTRAMBE  
DIAGONALI



## \* AUTOVALORI RIPETUTI

Finora abbiamo sempre supposto che il Sistema Vibrante abbia AUTOVALORI TUTTI DISTINTI.  
 Anche se il caso di AUTOVALORI COINCIDENTI è poco frequente nella pratica, è interessante sapere se si modificano le proprietà di  $m$ - e  $K$ -ORTOGONALITÀ:

Consideriamo un Sistema Vibrante a  $n$  DOF, caratterizzato da  $p$  Autovalori ripetuti, con  $2 \leq p \leq n$ . In questo caso gli Autovettori associati all'Autovalore ripetuto non sono Ortogonali rispetto agli  $n-p$  Autovettori rimanenti, MA possono NON essere Ortogonali fra loro!  
 Fortunatamente, esiste un teorema dell'Algebra lineare che garantisce che, con come sono definite  $[m]$  e  $[K]$ , è sempre possibile scegliere gli Autovettori che associati all'Autovalore ripetuto in modo che questi siano  $m$ - e  $K$ -ORTOGONALI fra loro.

\* Consideriamo un Sistema Vibrante a 3 DOF caratterizzato da

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rivolando l'EVP  $([K] - \omega^2[m])\{x_0\} = \{0\}$  si ottiene

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{da cui si nota l'Autovalore ripetuto } \omega_1^2 = \omega_2^2 = 0$$

Si può facilmente verificare che, se si sceglie la MATRICE MODALE come

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e si calcola

$$[\Phi][m][\Phi] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

si hanno 2 Autovettori NON non  $m$ -ORTOGONALI fra loro

## \* DISACCOPPIAMENTO delle EQUAZIONI - ANALISI MODALE

Analizzare l'EVP è molto utile ai fini del disaccoppiamento delle Eq. del Mov. Integrato in Sistemi Vibranti, NON Smorzati e NON Forzati

$$[m]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

è effettuata l'ANALISI MODALE, calcolando

OPPURE

$$\begin{aligned} & \bullet [\Psi], \text{diag}(m_i) \text{ e } \text{diag}(k_i) \\ & \bullet [\Phi] \text{ e } \text{diag}(\omega_i^2) \end{aligned}$$

2 applicando la TRASFORMAZIONE MODALE DIRETTA

$$\{x(t)\} = [\Psi]\{\eta(t)\}$$

ovvero  $\{\eta(t)\}$  è il vettore delle COORDINATE MODALI (detta anche NORMALI, PRINCIPALI o NATURALI). Dato che  $[\Psi]$  NON dipende dal tempo, si ha

$$[m][\Psi]\{\ddot{\eta}(t)\} + [K][\Psi]\{\eta(t)\} = \{0\}$$

premultiplicando per  $[\Psi]^T$

$$[\Psi]^T[m][\Psi]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Psi]^T[K][\Psi]\{\eta(t)\} = \{0\}$$

∴, in virtù della  $m$ -e- $k$ - ORTOGONALITÀ, si giunge ad un SISTEMA di  $m$  EQ. DIFF. DISACCOPPIATE, ciascuna delle quali assume la forma

$$m_i \ddot{\eta}_i(t) + k_i \eta_i(t) = 0$$

OPPURE, se si usa la  $m$ -NORMALIZZAZIONE

$$\ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = 0$$

⇒ lo studio di un Sistema Vibrante a  $m$  DOF è stato ricondotto a quello di  $m$  Sistemi indipendenti SDOF, ai quali è possibile applicare tutte le considerazioni fatte precedentemente

Alla stessa modo, derivando e valutando in  $t=0$ , otteniamo

$$\{\Psi_2\}^T [M_2] \{v_0\} = \sum_{k=1}^n B_{2k} \omega_k \{\Psi_2\}^T [M_2] \{\Psi_k\} = B_{20} \omega_0 m_2$$

$$\Rightarrow \boxed{B_2 = \frac{\{\Psi_2\}^T [M_2] \{v_0\}}{\omega_2 m_2}}$$

Questo modo non solo NON implica l'INVERSIONE della Matrice Modale, MA NON richiede neanche che questa sia nota completamente, infatti alle in  $A_2$  e  $B_2$  intervengono esclusivamente l'Ambiente  $n$ -esimo e i parametri del modo  $n$ -esimo - ciò rappresenta un notevole vantaggio in quanto, per considerare il contributo alla risposta complessiva dei primi  $m$  modi (i più significativi!) di un sistema, è necessario calcolare SOLO i primi  $m$  modi stessi! Questo riduce drasticamente i tempi di calcolo quando si considerano sistemi con molti DOF, per cui risulta  $m \ll n$ , non essendo necessario risolvere completamente l'EVP.

Una CONDIZIONE SUFFICIENTE, MA NON NECESSARIA, per avere smorzamento Proporzionale si ottiene ponendo a zero TUTTI i  $c_i$ , tranne i primi 2:

$$\boxed{[C_p] = \alpha [m] + \beta [K]} \quad , \quad \underline{\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+}$$

Consideriamo allora questo caso e seguiamo tutti i passi per derivare la Eq. del Moto. Si ottiene

$$\boxed{[\Psi]^T [m] [\Psi] \{\ddot{y}\} + [\Psi]^T (\alpha [m] + \beta [K]) [\Psi] \{\dot{y}\} + [\Psi]^T [K] [\Psi] \{y\} = \{0\}}$$

⇒ si ottengono  $n$  equazioni del tipo

$$\boxed{m_2 \ddot{\eta}_2 + (\alpha m_2 + \beta k_2) \dot{\eta}_2 + k_2 \eta_2 = 0} \quad !$$

$c_2 =$  SMORZAMENTO MODALE

$$\hookrightarrow \ddot{\eta}_2 + \frac{c_2}{m_2} \dot{\eta}_2 + \frac{k_2}{m_2} \eta_2 = 0$$

$$\hookrightarrow \ddot{\eta}_2 + 2 \xi_2 \omega_2 \dot{\eta}_2 + \omega_2^2 \eta_2 = 0$$

CIASCUNA EQUAZIONE assume la classica forma di un SDOF con smorzamento VISCOO!

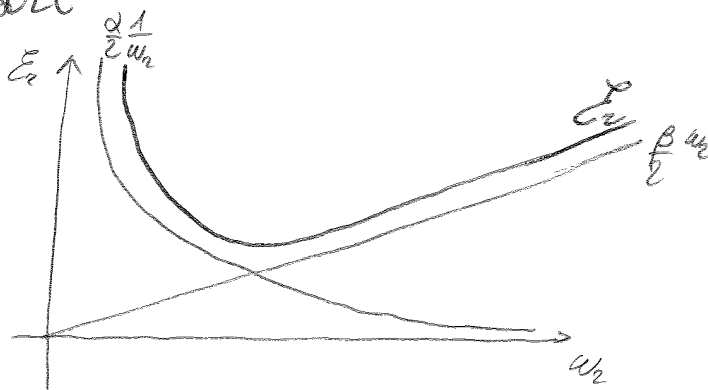
dove  $\xi_2 =$  FATTORE di SMORZAMENTO MODALE

Al caso considerato, ero  $\xi_2 =$

$$\boxed{\xi_2 = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\omega_2} + \frac{\beta}{2} \omega_2}$$

perché  $\frac{c_2}{m_2} = \frac{(\alpha m_2 + \beta k_2)}{m_2} = 2 \xi_2 \omega_2$

Depende dalla Pulverazione Naturale  $\omega_2$  e dai coeff  $\alpha, \beta$ . E' una SOMMA di una RETTA e un IPERBOLE



- (NB):  $\alpha, \beta$  devono essere positivi  
 # altrimenti SMORZAM. NEGATIV  
 # ⇒ SIST. INSTABILI  
 • Al più sono avere SOL  
 2  $\xi_2$  uguali

Analogamente, determinando e valutando in  $t=0$

$$\{\Psi_2\}^T [m] \{\dot{v}_0\} = \sum_{r=1}^n (B_r \omega_{nr} - E_r \omega_{nr} A_{r2}) \{\Psi_2\}^T [m] \{\Psi_2\} = (B_2 \omega_{n2} - E_2 \omega_{n2} A_{22}) m_2$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{\{\Psi_2\}^T [m] \{\dot{v}_0\} + E_2 \omega_{n2} \{x_0\}}{\omega_{n2} m_2}$$

Questa volta  
DIPENDE da  
 $E_2$ !

In particolare, si nota che per  $E_2 = 0$  (NO SMORZ) si ritrova la  $B_2$  trovata prima !!

Fatto ciò, dall'AMBITO MODALE torniamo a quello delle CONFIGURAZIONI

$$\{x(t)\}_p = [\Psi] \{\eta(t)\} \quad \text{TMD = Transf. Modale Diretta}$$

► RISPOSTA alla FORZANTE GENERICI

Prendiamo ora in considerazione il caso di un Sistema MDOF con Smorzamento Viscoso Proporz. soggetto ad una forzante SPER. GENERICI e nota

$$[m] \ddot{x} + [c] \dot{x} + [k] x = \{f(t)\}$$

Il punto di partenza è costituito ancora una volta dalla Matrice Modale, ottenuta risolvendo l'EVP del caso NON Smorzato  $\Rightarrow$  Applicando la Transf. Modale e premoltiplicando per  $[\Psi]^T$ , si ha

$$[\Psi]^T [m] [\Psi] \ddot{\eta} + [\Psi]^T [c] [\Psi] \dot{\eta} + [\Psi]^T [k] [\Psi] \eta = [\Psi]^T \{f(t)\} = \{Q(t)\}$$

La, per quanto detto precedentemente, si traduce in un insieme di  $m$  Eq. Diff. NON omogenee

$$m_2 \ddot{\eta}_2 + c_2 \dot{\eta}_2 + k_2 \eta_2 = Q_2(t)$$

Il vettore  $\{Q(t)\} = [\Psi]^T \{f(t)\}$  prende un nome di VETTORE delle FORZE MODALI. Ciascuna di queste Eq. Diff. può essere integrata separatamente utilizzando l'INTEGRALE di CONVOLUZIONE. Nel caso di Sistemi SOTTOAMORTIZATI si ha

$$\eta_2(t) = e^{-E_2 \omega_{n2} t} \left( \cos(\omega_{d2} t) + \frac{E_2}{\sqrt{1-E_2^2}} \sin(\omega_{d2} t) \right) \frac{Q_2(0)}{c_2} + \frac{e^{-E_2 \omega_{n2} t}}{\omega_{d2}} \sin(\omega_{d2} t) \dot{\eta}_2(0) + \frac{1}{m_2 \omega_{d2}} \int_0^t Q_2(\tau) e^{-E_2 \omega_{n2} (t-\tau)} \sin(\omega_{d2} (t-\tau)) d\tau$$

RISPOSTA  
ALL' IMPULSO  
UNITARIO  
RICEVUTO  
POI  
TMD !!

Il Valore della AMPIEZZE e OSCUILLAZIONE si ottiene

$$\{X_0\} = [K_{din}(\omega)]^{-1} \{F_0\} = [\alpha(\omega)] \{F_0\}$$

dove  $[\alpha(\omega)]$  è MATRICE di RECEIVANZA

Questa prima strada, VALIDA ANCHE PER SMORZ. NON PROPORZIONALE, è tuttavia scomoda perché richiede l'inversione di una Matrice Quadrata Per Ogni Frequenza. Tale operazione è molto onerosa dal punto di vista computazionale, soprattutto nel caso di Sistemi con # di DOF molto elevato. Inoltre NON consente di mettere in evidenza alcune importanti Proprietà di  $[\alpha(\omega)]$ !

→ STRADA 2: APPROCCIO MODALE ⇒ Valido SOLO nel caso di SMORZ. PROP.!!

Nel caso di SMORZAMENTO VISCOSO PROPORZIONALE, la Soluzione alla Forzante Armonica può essere calcolata applicando la Trasformazione Modale Diretta e premoltiplicando per  $[\Psi]^T$ . Si ottiene un Sistema di  $m$  Eq. Diff. DISCOUPLATE tra loro

$$(K_k - \omega^2 m_k + i \omega c_k) \eta_k = \{\Psi_k\}^T \{F_0\} e^{i \omega t}$$

$\eta_k(t) = \eta_k e^{i \omega t}$   
 $\eta_k = \frac{\{\Psi_k\}^T \{F_0\}}{K_k - \omega^2 m_k + i \omega c_k}$

Parzialmente, anche le Coordinate Modali a Regime saranno Armoniche

$$\Rightarrow \{x(t)\} = \{X_0\} e^{i \omega t} = \sum_{k=1}^m \{\Psi_k\} \eta_k(t) = \sum_{k=1}^m \{\Psi_k\} \eta_k e^{i \omega t}$$

$$\Rightarrow \{X_0\} = \sum_{k=1}^m \frac{\{\Psi_k\}^T \{F_0\} \{\Psi_k\}}{K_k - \omega^2 m_k + i \omega c_k}$$

valida anche nel caso in cui  $\{F_0\} \in \mathbb{C}^n$ , ovvero nel caso di  $m$  Forzanti NON in fase tra loro. In questo punto si definisce la RECEIVANZA, funzione Complessa della Frequenza di Eccitazione  $\omega$ , come

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_{j0}}{F_{k0}} \Big|_{F_{i0} = 0, \forall i \neq k}$$

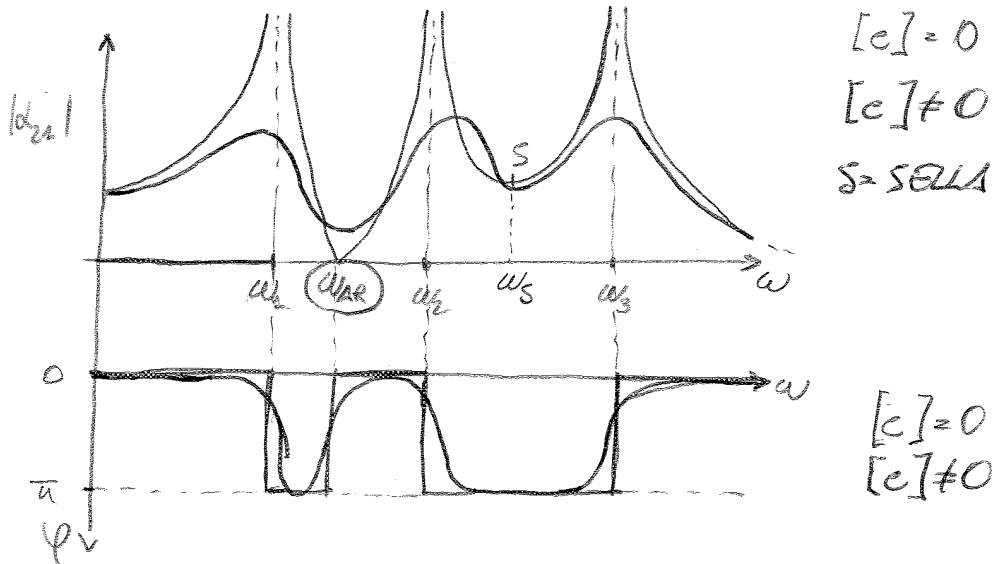
→ COMPONENTI della MATRICE di RECEIVANZA  $[\alpha(\omega)] = [K_{din}(\omega)]$   
 → RISPOSTA del DOF  $j$ -esimo quando è eccitato SOLO il DOF  $k$ -esimo!

Analogamente a quanto visto per i Sistemi SDOF, assegnata una **RECELVANZA**  $\alpha_{jk}(\omega)$ , è possibile definire le **FREQUENZE di RISONANZA** come quelle che rendono **MAX** la funzione  $\alpha_{jk}(\omega)$ : esse sono un numero al massimo pari al # di DOF = n.

La **NONIA** rispetto ai Sistemi SDOF è rappresentata dalla possibilità di avere **FREQUENZE di ANTIRISONANZA** tra 2 **RISONANZE** successive, ossia frequenze in corrispondenza delle quali la **RECELVANZA è NULLA** in **ASSENZA di SMOZZAMENTO** ( $[c]=0$ )!  $\Rightarrow |\alpha_{jk}(\omega_{AR})| = 0$  con  $[c]=0$

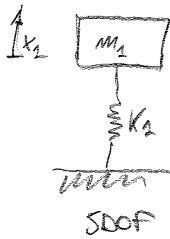
Per comprendere il concetto di **ANTIRISONANZA** è conveniente ricorrere ad un esempio. Consideriamo la **RECELVANZA**  $\alpha_{22}(\omega)$  di un Sistema a 3 DOF, **NON SMOZZATO**.  $[c]=0$

$$\alpha_{22}(\omega) = \sum_{i=1}^3 \frac{P_{2i} P_{i2}}{\omega_i^2 - \omega^2} = \frac{P_{21} P_{12}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{P_{22} P_{22}}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{P_{23} P_{32}}{\omega_3^2 - \omega^2}$$

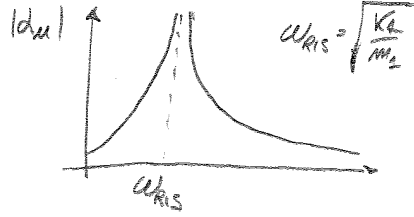


In corrispondenza di ciascuna **PULSAZIONE di RISONANZA** ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ), si ha un **Picco** (=INFINITO) visto che il sistema **NON è SMOZZATO**! Tra un picco di risonanza e un altro, si può avere un' **ANTIRISONANZA**  $\omega_{AR}$ , in cui i contributi modali si sommano e, non avendo tutti lo stesso segno, fanno sì che  $|\alpha_{22}(\omega_{AR})| = 0$ , oppure si può avere semplicemente un **MINIMO LOCALE**, caratterizzato da  $|\alpha_{22}(\omega_S)| > 0$ , detto **PUNTO di SELLA**.  
 La distinzione tra i Punti di Antirisonanza e i Punti di SELLA è molto complicata in presenza di smorzamento ( $[c] \neq 0$ ), ma dato che in questo caso anche l'Antirisonanza è tale che  $|\alpha_{jk}(\omega_{AR})| > 0$  per distinguere le 2 situazioni si può ricorrere ai **DIAGRAMMI di FASE**, quando  $[c] \neq 0$ , le curve sono più "dolci" e **NON** si ha un **CAMBIO** repentino di **FASE** in presenza di Punti di **SELLA** !!

\* ASSORBITORE DINAMICO → APPLICAZIONE ANTIRISONANZA



$F_0 e^{i\omega t}$   
↑  
ECCITAZIONE ARMONICA

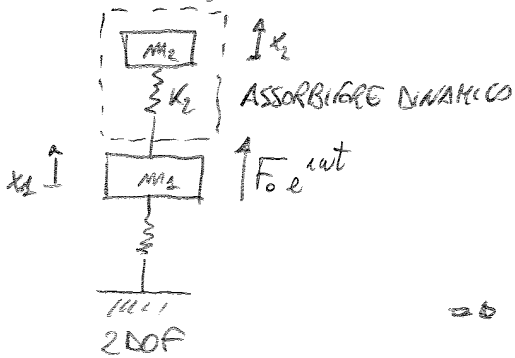


NO STORAMENTS

→ SE DEVO LAVORARE INTORNO A  $\omega_{Ris}$ , COME FACCIAMO?

DEVO CONTROLLARE LE VIBRAZIONI.

- ATTIVO: Applico una Forza Antagonista
  - \* - PASSIVO: NON introduce Energia e cerca di Modificare il Sistema
  - SEMIATTIVO: introduce poca Energia per Modificare il Sistema
- Proviamo ad Aggiungere un altro pezzo al Sistema:



Le Eq. del Moto si modificano:

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 + k_1 x_2 + k_2 (x_2 - x_1) = F_0 e^{i\omega t} \\ m_1 \ddot{x}_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2+k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

Prendiamo Soluzioni del tipo:  $\begin{cases} x_1(t) = X_1 e^{i\omega t} \\ x_2(t) = X_2 e^{i\omega t} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 + k_2 & -k_1 \\ -k_1 & -m_2 \omega^2 + k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Però chiameremo per trovare  $X_1$  e  $X_2$ , e DEN è sempre DETERMINANTE!

A NUMERATORE c'è DETERMINANTE della Matrice a cui si risolve la colonna dei termini noti  
 con - I colonna per  $X_1$ ; - II colonna per  $X_2$

$$\Rightarrow \text{DEN} = (k_1 k_2 - \omega^2 (k_1 m_1 + k_2 m_1 + m_1 k_2)) + \omega^4 m_1 m_2$$



$n=3 \} = 0$

$$\alpha_{21}(\omega) = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{2r} \phi_{1r}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\phi_{21} \phi_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{22} \phi_{12}}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{23} \phi_{13}}{\omega_3^2 - \omega^2}$$

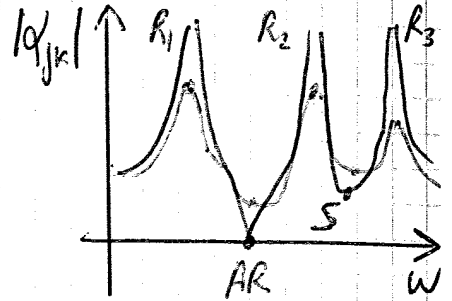
← NON C'E' TUTTA  $\phi$

Adesso si vede che gli zeri del pol. caratt. diventano POLI  
 Fra 2 risonanze successive potrei avere degli zeri. Gli zeri di  $\alpha$  in assenza di  $C$  si chiamano ANTI-RISONANZE

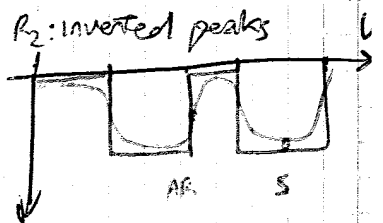
Def si dice che  $\omega_{ar}$  è puls. di risonanza se  $|\alpha_{jk}(\omega_{ar})| = 0$  con  $C = [0]$

Def Esistono delle "sellette" in cui  $|\alpha_{jk}(\omega_s)|_{\min} \neq 0$

Se rappresento lo smorzamento i picchi sono smussati SIA nelle R che nelle AR... e le AR si confondono con le S  
 Per vedere la distinzione vedo il diagramma di fase  
 Si hanno salti a cavallo delle R e delle AR



$\alpha_{ij}$  TRA DUE R C'E' SEMPRE AR; non c'è una regola per le transfer  
 ↳ TEST (se così non è ho misurato male)



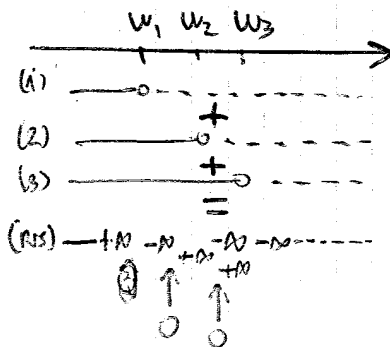
IN SCALE LOGARITMICHE si vedono MOLTO le linee di massa e rigidità

?  $|\alpha| \neq 0$  per cfo perché?

"DIM" c'è una AR tra due R in una PUNTUALE

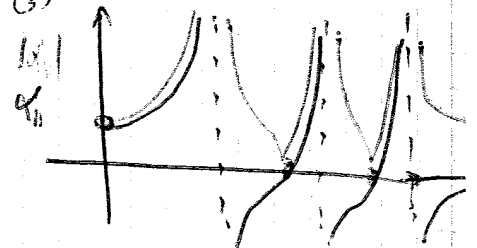
$$\alpha_{11}(\omega) = \frac{\phi_{11}^2}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{12}^2}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{13}^2}{\omega_3^2 - \omega^2}$$

(1) (2) (3)



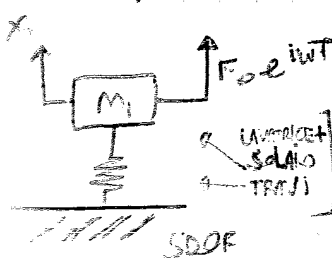
• CONTINUI RISONANTI

$\omega_0$  VALORE STATO  $> 0$

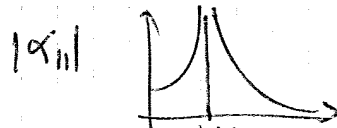


Esempio di APPLICAZIONE della AR - Assorbitore dinamico

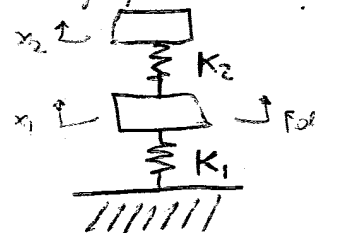
(SHOCK ASSORB. ASSORB. DI VIBRAZ. SMORZ. DINAM.)



$$\omega_{ris} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$



C'è la necessità di lavorare intorno alla  $\omega_{ris}$  (es. ho un motore ed devo fare in controllo sulle vibrazioni: si può fare ATTIVO/PASSIVO/SEMIPASSIVO)  
 ATTIVO: costa, forza opposta, può essere instabile  
 PASSIVO: senza energia esterna modifica SEMI: energia per modificare il



la soluzione PASSIVA è aggiungere un altro sistema

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{x} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

► FEM: molla collega - e  
 → automatico riempimento della 2° VIBRA DALLA 1°

## \* SISTEMI con SMORZAMENTO VISCOZO NON PROPORZIONALE

Arrivando l'Equazione del Moto libero di Sistemi con Smorzamento Viscoso:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

in generale NON è detto che la MATRICE NORMALE  $[M]$ , calcolata a partire dalle matrici  $[k]$  e  $[m]$ , sia in grado di Diagonalizzare la Matrice  $[c]$ : la Matrice  $[M]^{-1}[c][M]$  NON è DIAGONALE e di conseguenza NON è possibile DISACCOPIARE le Equazioni del Moto come invece nel caso di Smorzamento Proporzionale.

D'altra parte, NON conviene risolvere il seguente EVP

$$([m]\lambda^2 + [c]\lambda + [k])\{x_0\} = \{0\}$$

infatti, anche ammettendo di ricavare  $\lambda_2$  e  $\{\psi_2\}$ , NON si riuscirebbe a disaccoppiare le Equazioni del Moto e gli Autovalori  $\{\psi_2\}$  NON sono ORGONALI alle 3 matrici contemporaneamente, per cui verrebbe lo stesso risultato.

Allora si RISPONDIAMO le DIMENSIONI del problema passando nello SPAZIO degli STATI con una formulazione che prevede l'utilizzo di 2 Matrici Simmetriche, secondo il METODO di SHANK.

### ► METODO DI SHANK

Dopo aver definito il VETTORE dello STATO e la sua derivata come

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} \quad \text{e} \quad \{\dot{y}\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\ddot{x}\} \end{Bmatrix}_{2n \times 1}$$

si riscrive l'Equazione del Moto libero nella forma seguente:

$$[[c] \quad [m]]\{\dot{y}\} + [[k] \quad [0]]\{y\} = \{0\}$$

ove  $[c]$  è eventualmente NON PROPORZIONALE e  $[0]$  una Matrice Nulla  $n \times n$ .

Questa equazione è possibile scrivere con un'IDENTITÀ, ad esempio

$$[[m] \quad [0]]\{\dot{y}\} + [[0] \quad -[m]]\{y\} = \{0\}$$

Disponendo gli Autovalori in diagona, si ricava la **MATRICE MODALE** nello SPAZIO degli STATI

$$[\Theta] = [\{\theta_1\} \{\theta_2\} \dots \{\theta_{2n}\}]$$

è COMPLESSA e di Dimensioni  $2n \times 2n$

Sempre in analogia con quanto visto per lo Smorzamento Proporzionale, dopo avere definito la **TRASFORMAZIONE MODALE DIRETTA**

$$\{y\} = [\Theta] \{\eta\} \quad (170)$$

si riscrive l'Equazione del Moto libero come

$$[\Theta]^{-1} [A] [\Theta] \{\eta\} + [\Theta]^{-1} [B] [\Theta] \{\eta\} = \{0\}$$

e, in virtù delle Proprietà di Ortogonalità, essa si semplifica come

$$\text{diag}(a_1) \{\eta_1\} + \text{diag}(b_1) \{\eta_1\} = \{0\}$$

il che equivale ad avere  $2n$  equazioni **DISACCOPPATE** fra loro, del tipo

$$a_1 \dot{\eta}_1 + b_1 \eta_1 = 0$$

### ► RISPOSTA LIBERA SMORZATA

Il calcolo della Risposta libera di un Sistema con Smorzamento Viscoso Non Proporzionale può essere effettuato ricorrendo alla Formulazione di Duncan, una volta assegnate le Condizioni iniziali

$$\{x(t=0)\} = \{x_0\} \quad \text{e} \quad \{\dot{x}(t=0)\} = \{\dot{x}_0\}$$

che si traducono in un unico vettore di Condizioni Iniziali nello Spazio degli Stati

$$\{y(t=0)\} = \{y_0\} = \begin{Bmatrix} \{x_0\} \\ \{\dot{x}_0\} \end{Bmatrix}$$

## ► RISPOSTA alla FORZANTE ARMONICA

consideriamo l'Equazione del Moto Forzato di un Sistema con Smorzamento Viscoso (eventualmente) NON Proporzionale.

$$[m]\ddot{x} + [c]\dot{x} + [k]x = \{f(t)\}$$

Dopo aver definito il vettore  $\{y\}$  come prima, è possibile riscrivere l'Equazione del Moto nello spazio degli Stati come

$$[A]\dot{y} + [B]y = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \{p(t)\}$$

che si ricomincia, sulla base del Principio di Ortogonalità, a 2n Equazioni Disaccoppiate risolvibili mediante un Integrale di Conclusione.

• Nel caso particolare di FORZANTE ARMONICA  $\{f(t)\} = \{f_0\}e^{i\omega t}$ , il vettore delle Forzanti nello spazio degli Stati è

$$\{p(t)\} = \{p_0\}e^{i\omega t} = \begin{Bmatrix} \{f_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

La soluzione a Regime viene cercata nella forma

$$\{y(t)\} = \{y_0\}e^{i\omega t}$$

quindi, eliminando il termine comune  $e^{i\omega t}$ , applicando la TPO e premoltiplicando tutto i membri per  $[\Theta]^T$ , si ottiene

$$i\omega [\Theta]^T [A] [\Theta] \{y_0\} + [\Theta]^T [B] [\Theta] \{y_0\} = [\Theta]^T \{p_0\}$$

In questa equazione, ricordando le Proprietà di Ortogonalità degli Autovettori, si ricavano 2n equazioni del tipo

$$i\omega a_2 y_{r0} + b_2 y_{r0} = \{a_2\}^T \{p_0\}$$

$$\Rightarrow y_{r0} = \frac{\{a_2\}^T \{p_0\}}{b_2 + i\omega a_2}$$

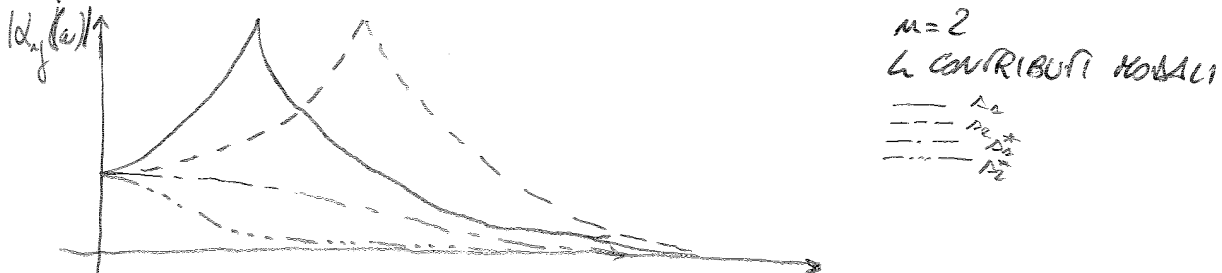
È utile valutare l'oscillazione che, nel caso di SISTEMI SOTTOSTORZATI, perché abbiamo già osservato che il Polinomio caratteristico è di grado  $2n$ , avendo coefficienti TUTTI REALI, ammette solo RADICI CONIUGATE COMPLESSE (perché sottoammortato!), la RICEVENZA può essere scritta nella forma

$$d_{jk}(s) = \sum_{z=1}^n \left[ \frac{T_{jz} T_{kz}}{a_{z2}(i\omega - s_{z2})} + \frac{T_{jz}^* T_{kz}^*}{a_{z2}^*(i\omega - s_{z2}^*)} \right]$$

e quindi i CONTRIBUTI MODALI EFFETTIVI sono un numero pari a  $M$  !!

Ⓟ Se ho un Polo REALE, vuol dire che il corrispondente Modo  $n$ -esimo è SORRA SOTTO STORZATO !

L'andamento qualitativo delle Ricevenze NON si discosta da quello dei Sistemi con Smorzamento Proporzionale:



HO DEI CONTRIBUTI dei COMPLESSI CONIUGATI!  
 Per ogni Modo, ho un Contributo RISONANTE e uno NO! Si vede dalla  
 SOTTOSTORIA!  
 => NON sono TRASCURABILI !!

## \* METODI DI IDENTIFICAZIONE ESPONENZIALI COMPLESSI

Non sempre è accettabile l'approssimazione che i sistemi MDOF presentano Modi Ben Separati e dunque non sempre è lecito utilizzare con risultati soddisfacenti i Metodi di Estrazione dei Parametri Totali SDOF. Si ricorre dunque alle tecniche MDOF, un esempio è il METODO degli ESPONENZIALI COMPLESSI, nel Dominio del Tempo.

Il Metodo si basa sull'analisi della RISPOSTA all'IMPULSO di un sistema con smorzamento viscoso (anche non Proporzionale!).

$$h_{jk}(t) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} e^{s_k t}$$

Tenuto come ANTITRASFORMATA della RICEVIBILITÀ

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_{jk}}{i\omega - s_k}$$

Il Metodo mira a determinare, CONTEMPORANEAMENTE, tutte le  $2n$  Costanti totali  $\alpha_{jk}$  e i  $2n$  Poli  $s_k$ . Supponendo che la Risposta all'Impulso sia stata SAMPLETTATA usando un PERIODO di CAMPIONAMENTO  $\Delta t$ , il generico valore di tempo si può indicare con  $m\Delta t$ , pertanto definiamo

$$\begin{cases} h_m = h_{jk}(m\Delta t) \\ A_k = \alpha_{jk} \\ V_k = e^{s_k \Delta t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow h_m = \sum_{k=1}^{2n} A_k V_k^m$$

Basterebbe la scelta dei coefficienti  $\beta_q$  è arbitraria, essi, pur essendo ancora sconosciuti, possono essere fissati in modo tale che gli ZERI del polinomio

$$\beta_0 + \beta_1 V + \beta_2 V^2 + \dots + \beta_p V^p$$

COINCIDANO con i coeff.  $V_2$ . Da questa affermazione segue innanzitutto che  $p = 2n$ , altrimenti il polinomio non potrebbe avere  $2n$  radici  $V_2$ , e anche che

$$\sum_{q=0}^{2n} \beta_q V_2^q = 0 \quad \forall V_2$$

che si calcola il polinomio proprio in corrispondenza di un suo zero. Ciò fa sì che tutto il secondo membro dell'espressione di prima sia nullo, e quindi

$$\beta_0 h_0 + \beta_1 h_1 + \dots + \beta_{2n} h_{2n} = 0$$

Repetendo tutto il procedimento a partire dal punto  $t_2 = \Delta t$  ( $m=1$ ), si ottiene, in modo analogo:

$$\begin{cases} \beta_0 h_1 = \beta_0 A_1 V_2^1 + \beta_1 A_2 V_2^2 + \dots + \beta_{2n} A_{2n} V_2^{2n} \\ \beta_1 h_2 = \beta_1 A_1 V_2^2 + \beta_2 A_2 V_2^3 + \dots + \beta_{2n} A_{2n} V_2^{2n} \\ \beta_{2n} h_{2n+1} = \beta_{2n} A_1 V_2^{2n+1} + \beta_{2n} A_2 V_2^{2n+2} + \dots + \beta_{2n} A_{2n} V_2^{2n+2n} \end{cases}$$

on gli stessi coeff  $\beta_q$  del paragrafo di prima (in cui  $m=0$ ). Sommando membro a membro si ha

$$\sum_{q=0}^{2n} \beta_q h_{q+1} = \sum_{z=1}^{2n} A_z \sum_{q=0}^{2n} \beta_q V_2^{q+z} = \sum_{z=1}^{2n} A_z V_2^z \sum_{q=0}^{2n} \beta_q V_2^q$$

$$\Rightarrow \beta_0 h_1 + \beta_1 h_2 + \dots + \beta_{2n} h_{2n+1} = 0$$

È evidente che questo meccanismo può essere ripetuto quante volte si desidera, semplicemente partendo in avanti nel tempo ( $m=2, 3, \dots$ ) il punto da cui un zero ha l'ultima dei valori della risposta  $h(t)$ .

L'implementazione e l'uso del Metodo mettono in luce alcuni problemi non tutti legati alla individuazione a priori:

➤ Innanzitutto, si nota che, nel caso sottostorziato, in via teorica si perviene a definire COPPIE di POLI  $S_1$ , Complessi Coniugati, MA il loro calcolo avviene in via numerica e si deve pertanto arbitrariamente stabilire una Soglia, una Differenza Minima, superata la quale 2 numeri NON si possono considerare Coniugati. Ciò consente peraltro di eliminare a priori tutti i Poli che, NON avendo un rispettivo coniugato, non trovano riscontro nella realtà fisica del problema e che nascono da ERRORI NUMERICI o da Imprecisioni di Misura.

➤ Una seconda osservazione concerne le DIMENSIONI delle Matrici di Vandermonde e di Hankel. Si è affermato che è opportuno assolvere di più equazioni che incognite MA questa richiesta, evidentemente eccessiva, si scontra con quella che suggerisce di NON alterare gli ultimi campioni della Storia Temporale, sui quali è più evidente la presenza degli Errori di Misura.

➤ Un'ultima considerazione, all'apparenza banale, porta a cercare un aspetto comune a tutti i Metodi MOOF: come si sceglie l'ORDINE del MODELLO?

L'ORDINE, per il Metodo degli Esponenziali Complessi, COINCIDE con  $2n$ , MA, più in generale, è un parametro che controlla le Dimensioni del Problema. La risposta alla domanda, quindi, è tutt'altro che ovvia! È infatti altamente improbabile che, dall'analisi senza di una risposta all'impulso, si possa stabilire quanti modi essa contenga e, se anche ciò fosse possibile, non è affatto assicurato che la Migliore Stim. dei Parametri Mobili si corregga ulterioreando il numero di Modi effettivamente presenti in una certa Banda di Frequenza. Le Stime stema delle Matrici di Vandermonde e Hankel le rende MAI CONDIZIONATE, cosicché piccoli errori sui termini noti, certamente presenti a causa del Rumore di Misura, danno origine a errori più marcati sulle relazioni, cioè sui Poli e Autovalori.



Per facilitare il compito all'analista, le frequenze rilevate a ogni passo, a ogni ordine del Modello, vengono solitamente rappresentate con un semplice segno grafico (un cerchietto) sulla curva del Modello della FRF corrispondente alla risposta all'impulso studiata: i MODI STABILI sono quelli che formano una colonna verticale in corrispondenza dei Picchi di Risonanza della FRF. NON è però raro il caso in cui si possano osservare frequenze stabili MA lontano dai Picchi: in questo caso sta all'analista compiere una scelta oculata - da scelta peraltro viene a volte facilitata da un'attenta LETTURA del valore di SMORZAMENTO che, per i MODI COMPUTAZIONALI, è spesso non soltanto grande o piccolo, e, quando possibile, dalla VISUALIZZAZIONE della FORMA MODALE, le annue andamenti improbabili e tipicamente molto irregolari.

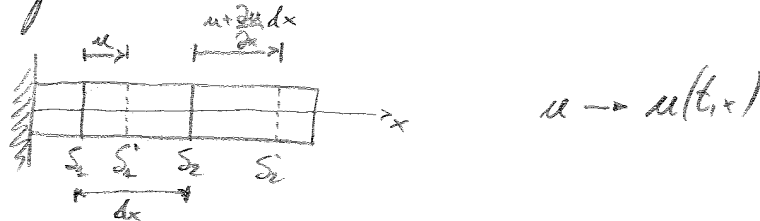
In prima approssimazione, per TRAVI RETTILINEE, la TRASL. ASSIALE  $u$  è DISCOUPLIATA dagli altri DOF!

Se si considerano sezioni aventi 2 ASSI di SIMMETRIA MUTUAMENTE ORTOGONALI e con la STESSA DIREZIONE in TUTTE le SEZIONI ('TRAVE NON SVERCIOLATA'), allora:

- > Il DOF TORSIONALE è DISCOUPLIATO dagli altri
- > Il Comportamento FLESSIONALE nel piano  $xy$  è DISCOUPLIATO da quello nel piano  $xz$

\* VIBRAZIONI LIBERE ASSIALI delle ASSE RETTILINEE

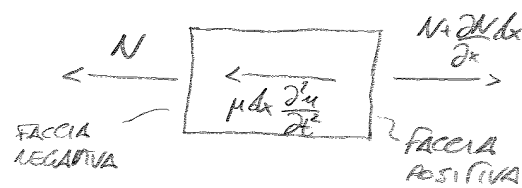
Consideriamo un'Asse Prismatico costituita da Materiali Elastici lineari ed isotropi e si supponga che ciascuna sezione si comporti come un corpo rigido (si trascuri cioè, la deformazione trasversale legata al MODULO DI POISSON).



Durante le VIBRAZIONI ASSIALI, la posizione di una generica sezione  $S_1$ , che nella configurazione indeformata si trova alla coordinata  $x$ , è individuata dalla coordinata  $x+u$ . Un'altra sezione  $S_2$ , che nella Config. Indef. dista  $dx$  da  $S_1$ , si troverà alla coordinata  $x+dx+u+\frac{\partial u}{\partial x} dx$ .

Lo STATO DE FORMAZIONE dell'Asse è individuato dalla FUNZIONE di 2 VARIABILI

⇒ DIAGRAMMA di CORPO LIBERO



Consideriamo un elemento infinitesimo sul quale, nel ciclo VIBRATORIO, agiscono le forze in figura, dove  $\mu$  rappresenta la massa per unità di lunghezza dell'Asse.

si tengano presenti le CONVENZIONI di segno assunte, secondo cui le caratteristiche della sollecitazione sono espresse nello stesso verso degli assi di riferimento, se si consideri la faccia con coordinata maggiore ( $x+dx$ ), detta FACCIA POSITIVA, e nel verso opposto rispetto agli assi di riferimento se si consideri la faccia con coordinata minore ( $x$ ), detta FACCIA NEGATIVA.