



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 699

DATA: 07/10/2013

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Sannipoli

MATERIA: Plasticità e Frattura

Prof. Carpinteri\_Corrado

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# PLASTICITÀ E FRATTURA

05-05-2013

## LIBRI

• Carpinteri. Vol 2 cap. 18, 19, 20 (la maggior parte delle cose è qui).

## ESAME

• Orale (tema delle esercitazioni)

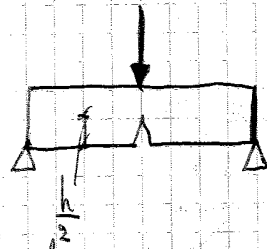
## COLLASSI STRUTTURALI GLOBALI

- COLLASSO PLASTICO: (è l'optimum dal punto di vista progettuale: è quello da ricercare, perché sfruttiamo la capacità di dissipare energia in campo plastico).
- FRATTURA FRAGILE: un materiale fragile è il c.s. Il c.s. viene definito "quasi fragile", perché il comportamento nei confronti della propagazione della fessura segue modelli non lineari (e non perfettamente lineari).

Il tipo di collasso, però, non è definito solo dal tipo di materiale (fragile, duttile), ma entra (nel tipo di risposta) anche la dimensione della struttura. È più corretto parlare di tenacità per i materiali (perché la tenacità è una caratteristica intrinseca dei materiali) mentre di duttilità per la struttura.

Esempio di prova in laboratorio su travi di acciaio:

Provano con un autogelo univale



Schermo di flessione su 3 punti.

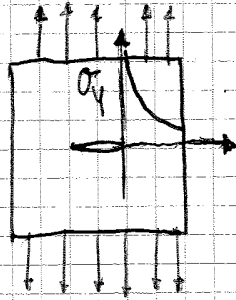
Prova su stesso materiale, ma su provini di diverse dimensioni: uno con luce 100 mm e l'altro con luce 200 mm.

- provino 100 mm  $\Rightarrow$  comportamento duttile (formazione cerniera plastica)
- provino 200 mm  $\Rightarrow$  comportamento fragile con propagazione della fessura instabile:

una volta che la fessura si propaga, il carico cala vertiginosamente.

ACCIAIO: materiale molto tenace, ma duttile/fragile a seconda della scala

piccolo intaglio  
nel centro  
della lamina

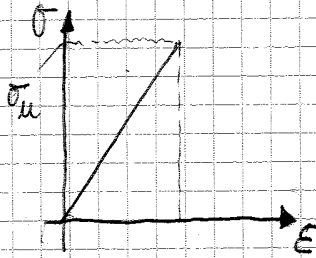


da  $\sigma_{II}$  in corrispondenza dell'intaglio,  
va all'  $\infty$ :  
INTENSIFICAZIONE DELLE TENSIONI

2 approcci che si possono usare (vedibile)

## STRENGTH, DUCTILITY, FRACTURE ENERGY PAG. 257 SDC 4

Materiale perfettamente fragile (non c'è plasticizzazione):



Materiali fragili: caratterizzati da una res. a trazione di 4-2 ordini di grandezza inferiore a quella a compressione (cls. res. a compressione: 30 MPa res. a trazione: 3 MPa).

Materiali duttili: resist. a trax. con stesso ordine di grandezza di quello a compr. (aggregati matrice...)

(materiali fragili)  
Nel ds abbiamo dimensioni diverse che interagiscono tra loro ( $\Rightarrow$  abbiamo grani microferenze all'interno del materiale (anche dovute al ritiro nella fase di maturazione)  $\Rightarrow$  tale microferenza aumentano d'ampiezza, vengono a contatto fra loro, diventano macroferenze e dunque si ha la rottura).

(MATERIALI COMPOSITI:  
fiber pull-out: estrazione di fibre dalla matrice).

Tensione nominale: noi nelle prove applichiamo una forza; da essa ricaviamo la tens. nominale dividendo la forza per l'area iniziale della sezione.

Per leggere bene le deformaz. si applica un estensimetro su una base di misura ed esso va a leggere lo spostamento relativo  $\Delta l$  relativo alla base 2



Nella realtà si parte in controllo di forza e, dopo lo snervamento, si opera in controllo di spostamento (perché ad es.: se si operasse da subito in controllo di spostamento si dovrebbe partire con una  $\epsilon$  bassa per poter leggere bene il ramo elastico, ma poi con tale  $\epsilon$  bassa si arriverebbe rapidamente al punto U (la prova diverrebbe tantissimo!))

(L.S.: dopo il picco, c'è un ramo decrescente: ramo di softening

(rammollimento: è una sorta di "hardening (incrudimento) negativo"; la  $\epsilon$  cresce mentre  $\sigma$  diminuisce).

Il controllo di spostamento  $\Rightarrow$  riusciamo anche a leggere il ramo di softening.

La lunghezza del ramo di softening dipende dalla base di misura  $\Rightarrow$  la legge  $\sigma - \epsilon$  non è costitutiva del materiale, ma dipende dalla scala:

prendiamo un provino di  $l_0$  e sottoponiamolo a trazione:



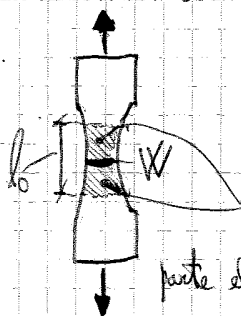
stiamo dicendo che  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ . La  $\epsilon$  è uniforme lungo tutta la lunghezza del provino: non è venuta dritta nel ramo elastico. Durante la prova, però, le deformazioni si concentrano nella parte centrale.



In questa zona si forma la fessura, mentre le parti esterne rimangono in campo elastico.

Il  $\Delta l$  è dato da due contributi.

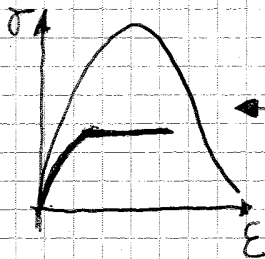
Il provino si sta caricando, tramite una regione che si sta allungando.



Man mano che aumenta il carico, la deformazione si localizza in una sola regione (quella più centrale) fino a che, raggiunto il picco, si avrà l'apertura della fessura centrale, e la prova è a controllo di spostamento, non continua. La prova applicata però un carico inferiore  $\Rightarrow$  il provino continua ad allungarsi (però il carico  $\sigma$  sta diminuendo, dunque  $\epsilon$  è dimmenticabile (perché  $\sigma$  diminuisce)). La  $\epsilon$  della fessura è dimmenticabile invece ad aumentare. La deformazione totale della base di misura è somma di due contributi:  $\epsilon_{tot} = \epsilon_{elastica} + \epsilon_{localizzata}$  nella fessura.

Uniaxial compression:  $\lambda$ : mellorato

Quando facciamo un progetto, per il ch assumiamo la legge parabola-rettangolo e la applichiamo per qualsiasi struttura (senza guardare la dimensione della struttura). Inoltre la legge parabola-rettangolo è cautelativa, perché è molto inferiore alla legge costitutiva reale del materiale.

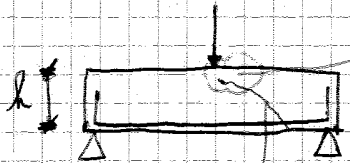


CONCLUSIONI

Al variare della scala:

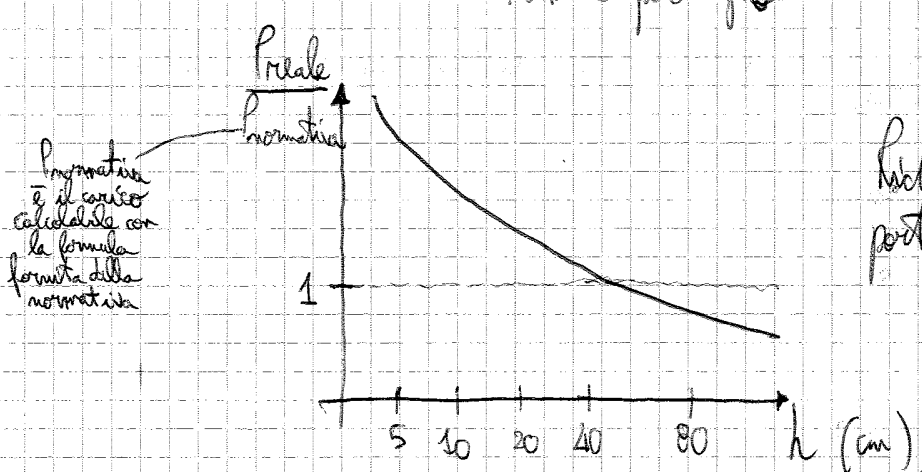
- cambia il tipo di risposta (deile / fragile)
- non cambia il tipo di collaudo, ma si riduce la capacità portante

es: prove in travi in ch armate con armatura solo a flessione:



in queste prove la rottura è avvenuta sempre per compressione di questa parte

rottura per taglio

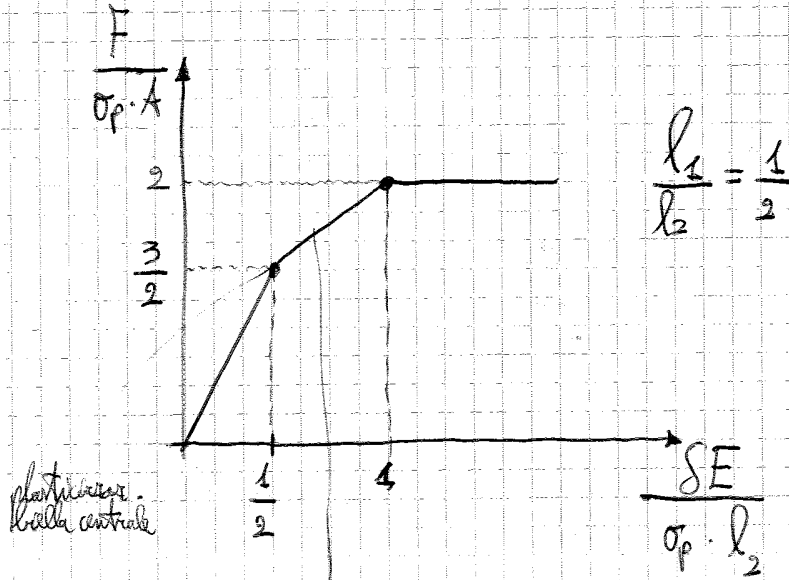


$P_{normativa}$  è il carico calcolabile con la formula fornita dalla normativa

riduzione della capacità portante all'aumentare dell'altezza della trave.

ciò avviene perché cambia la sensibilità alla frattura: proporzioni piccole non insensibili alla frattura, cioè la fessura propaga difficilmente.

Al variare dei rapporti  $\frac{l_1}{l_2}$  si ha:



$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{2}$$

Se  $l_1 \rightarrow 0 \Rightarrow$  la biella centrale si plasticizza subito e non si ha contributo delle bielle laterali all'inizio (poi quando la biella centrale si è plasticata  $\Rightarrow$  contribuiscono quelle laterali)

Se  $l_1 = l_2 \Rightarrow$  tutte si muovono allo stesso istante.

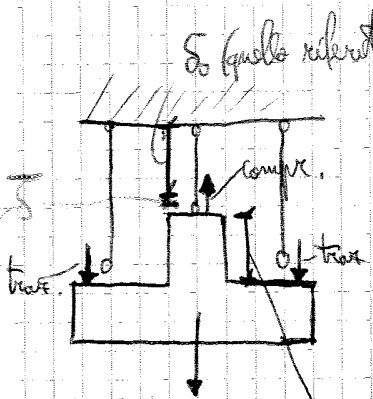
CASO PARTICOLARE:

Supponiamo che la biella centrale sia lunga  $(\frac{1}{2} + \text{qualcosa})$  delle bielle laterali:

$$l_1 = \frac{l_2}{2} + \frac{1}{6} \frac{\sigma_p \cdot l}{E}$$

(quantità che non solo perché con una pinta forse delle semplificazioni)

che, in totale, sono autoequilibrate

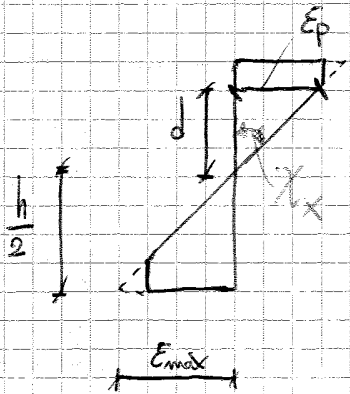


invece che le bielle non sono scricche, ma si hanno autotensioni interne, perché forse le bielle a partire da una condizione di attacco con il trasverso, il quale ha la distanza nera pari a  $\frac{l}{2}$ .

questo tra  $\frac{1}{2}$  fatto riferito a  $(\frac{l_2}{2})$  e al punto di partenza della biella centrale (in realtà non si può dire che  $\frac{l_2}{2} + \frac{1}{6} \frac{\sigma_p \cdot l}{E}$ )

$$\epsilon = \chi_x \cdot y$$

↓  
distanza del punto di cui vogliamo trovare la  $\epsilon$



$$\chi_x = \frac{\epsilon_p}{d}$$

Vogliamo trovare il  
momento e la curvatura:

$$M_x = 2 \cdot \int_0^d \left( \sigma_p \cdot \frac{y}{d} \right) y \cdot b \, dy + 2 \int_d^{\frac{h}{2}} \sigma_p \cdot y \cdot b \, dy$$

↓  
valore della  $\sigma$   
nel generico punto

↓  
braccio di leva

↓  
base

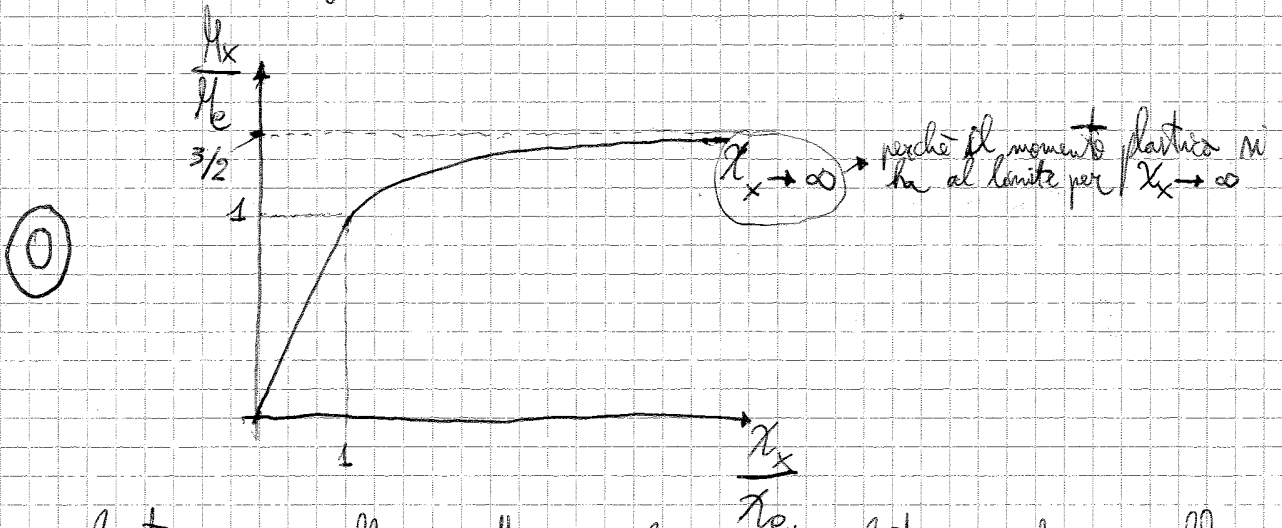
CONTRIBUTO PARTE  
RETTANGOLARE

CONTRIBUTO PARTE TRIANGOLARE

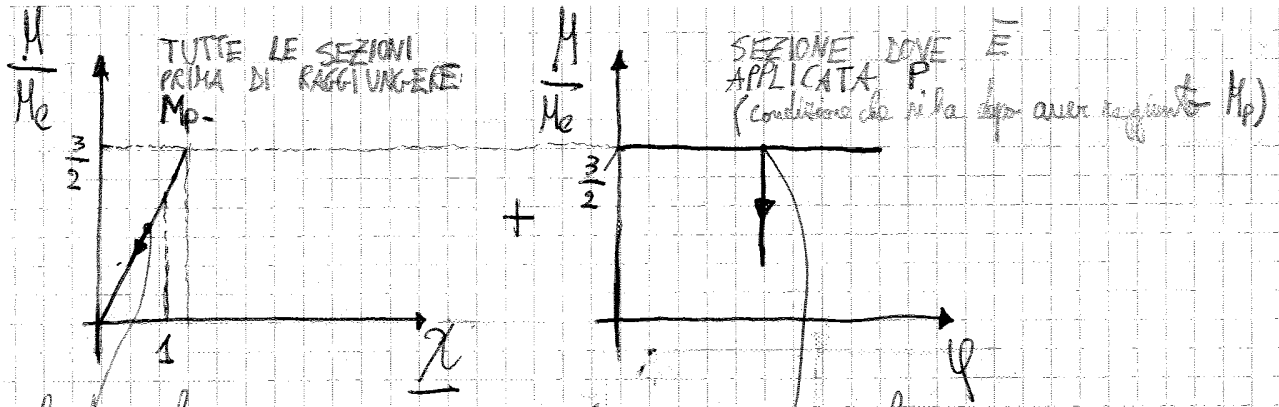
$\chi_e$ : curvatura relativa al momento limite elastico  $\frac{bh^2}{6}$

$$\chi_e = \frac{\epsilon_p}{\frac{h}{2}}$$

$\chi_x$ : curvatura in un generico istante



Dunque: è lecito usare nella progettazione il momento plastico, anche se nella realtà, teoricamente, non si raggiunge mai?



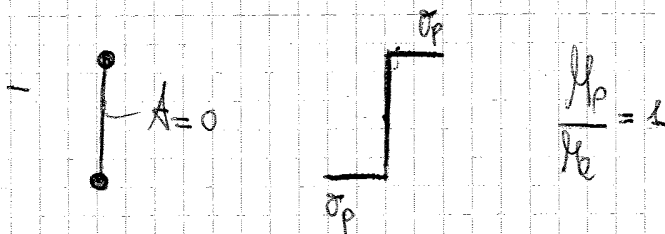
se scarico la trave, le sezioni recuperano il rango elastico

se scarico la trave, la trave non torna più indietro (rimane fissa nella posizione raggiunta)

Tutta la non linearità è concentrata in una sola sezione. Tutte le altre sezioni hanno comportamento lineare fino a  $M_p$ .

Se cambio la forma della sezione:

- doppio T: mettendo la nave più lontana dal baricentro, riduciamo le riserve plastiche della sezione

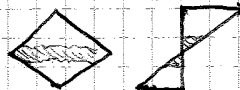


- Nelle sezioni commerciali si ha  $\frac{M_p}{M_e} = 1,12 \div 1,14$

- La sez. rettangolare ha più riserve plastiche, ma la sfrutta poco in campo elastico.

A parità di materiale, le sezioni a doppio T hanno un elevato momento limite elastico (perché centrifugano il materiale lontano dal baricentro)

- cerchio:  $M_p/M_e = 1,7$
- "      "      "      " = 2
- "      "      "      " = 2,34



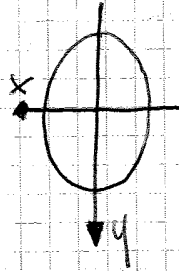
base riserve elastiche, perché la maggior parte del materiale è concentrata nella zona dove lo  $\sigma$  sono basse

# PLASTICITÀ E FRATTURA

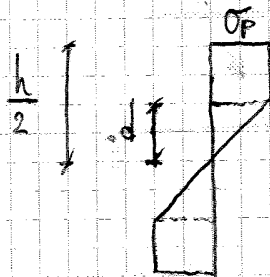
06-05-2015

Continuiamo a parlare della FLESSIONE ELASTO-PLASTICA; PAG. 268 SDC2

Sezione generica ma comunque doppiamente simmetrica:



$M_x$  è il momento resistente al generico istante di plasticizzazione

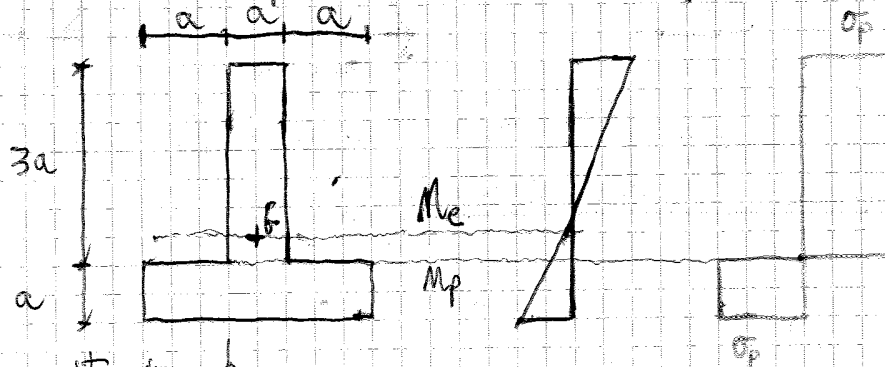


di una funzione del generico istante di carico che considero

Sezione con un unico asse di simmetria:

Nel momento in cui su una fibra si raggiunge  $\sigma_p \Rightarrow$  questa configurazione è quella relativa al momento limite elastico.

l'asse neutro si sposta all'aumentare del carico.



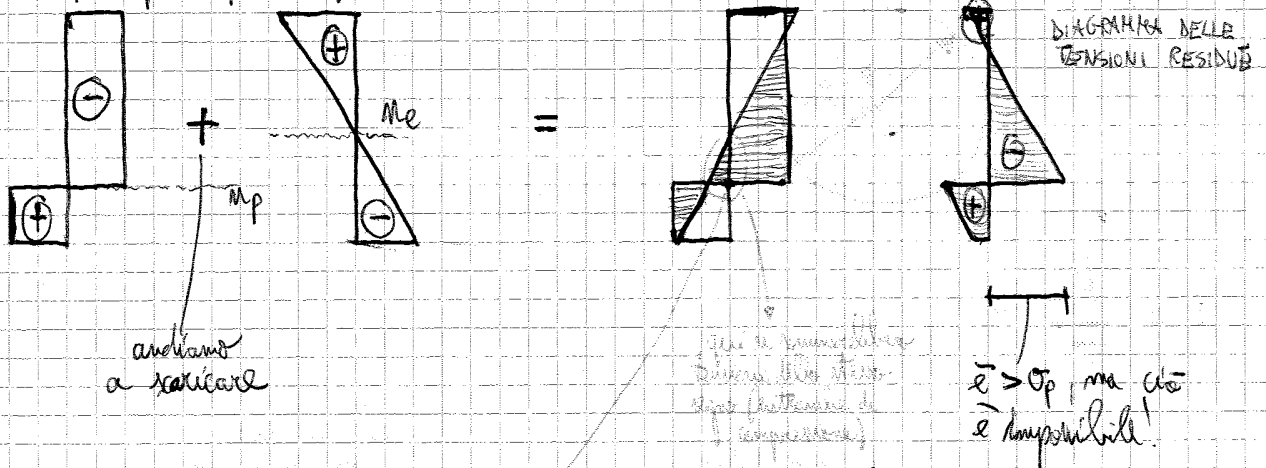
$M_e$ : <sup>si trova imponendo</sup> l'uguaglianza tra i momenti statici  
 $M_p$ : <sup>si trova imponendo</sup> l'uguaglianza tra le aree

$\sigma_p \cdot A_1 = \sigma_p \cdot A_2$  : si deve avere equilibrio alla trazione!



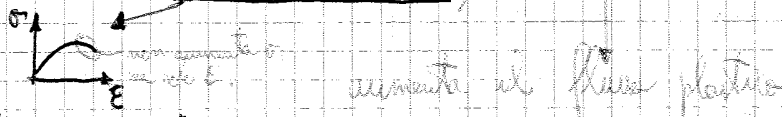
Altro caso (figura della sezione a T ribaltata della 1° pagina):

se sommassi alla distribuzione completamente plasticizzata quella triangolare di carico (con cui neutro sopra quello plastico) si avrebbe:

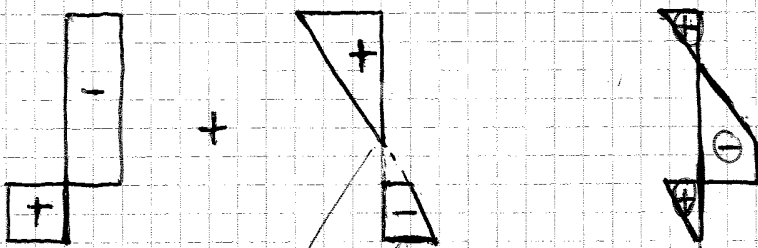


La cerniera plastica è UNIDIREZIONALE: consente la rotazione solo nel verso del momento plastico e scarico  $\rightarrow$  la cerniera si comporta rigidamente.

Inoltre, in tutti a rimanere tensione della stessa segno, il materiale non aumenta lo  $\sigma$ , ma aumenta solo le deformazioni (è un po' quello che succede nel caso di trazione di barre)



Dunque, la distribuzione che dovrà avere a rottura sarà:



valore estremo un po' più grande del disegno per farlo, perché l'asse neutro è scivolo

l'asse neutro non è più quello elastico in corso, ma è leggermente variato. Sarà scivolo e non rispetto a quello in corso? Questa distribuzione deve essere tale da fornire una forza normale nulla (perché non ho N esterni applicati); dunque perché ho fatto un perfetto di compressione, dovrà fornire anche un perfetto di trazione per far sì che  $N=0$ .

valore estremo un po' più piccolo del disegno un alto perché l'asse neutro è scivolo

per far sì come avere un po' l'asse neutro.

il  $M_+$  vale:

$$M_+ = 2\pi \int_0^{\bar{\kappa}} \tilde{\sigma}_p \cdot \frac{M}{\bar{\kappa}} \cdot \kappa^2 d\kappa + 2\pi \int_{\bar{\kappa}}^R \tilde{\sigma}_p \cdot \kappa^2 d\kappa$$

diviso su tutte  
circonferenze  
e poi integrato  
su tutte queste  
circonferenze

$\tilde{\sigma}$  alla  
generica distanza  $\kappa$ :  
• per  $\kappa=0 \Rightarrow \tilde{\sigma}=0$   
• per  $\kappa=\bar{\kappa} \Rightarrow \tilde{\sigma}=\tilde{\sigma}_p$

$2\pi\kappa$  è la circonferenza  
per cui moltiplicare  
per il braccio  $\kappa$  (ma con segno  $\tilde{\sigma}$ )

Il momento limite di completa plasticizzazione sarà:

$$M_{+,p} = \tilde{\sigma}_p \cdot \frac{2}{3} \pi R^3$$

momento statico platea della sezione =  $\frac{1}{3} \pi R^3$ ;  
facendo il limite per  $\pi \rightarrow 0$   $2\tilde{\sigma}_p$  sarebbe  $\sigma_p$  se adottiamo Tresca.

Caso dello sforzo normale centrato:

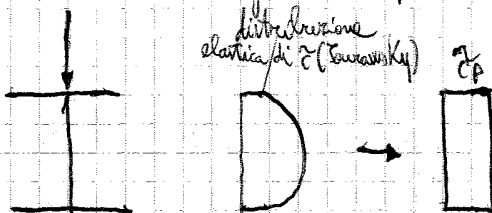
non c'è nessun momento di capacità portante se si considerano  
a meno risorse plastiche.

(Adottando la normativa attuale, per l'acciaio avremo che il momento limite  
che viene fornito è solo quello PLASTICO).

la normativa ci dice che

Taglio: se il taglio sta al di sotto di certi valori, non combinare le  
sollecitazioni taglio e flessione, ma trattarle separatamente:

nel caso di  
solo taglio:



distribuzione  
elastica di  $\tilde{\sigma}$  (Navier)

distribuzione di  $\tilde{\sigma}$  in  
completa plasticizzazione

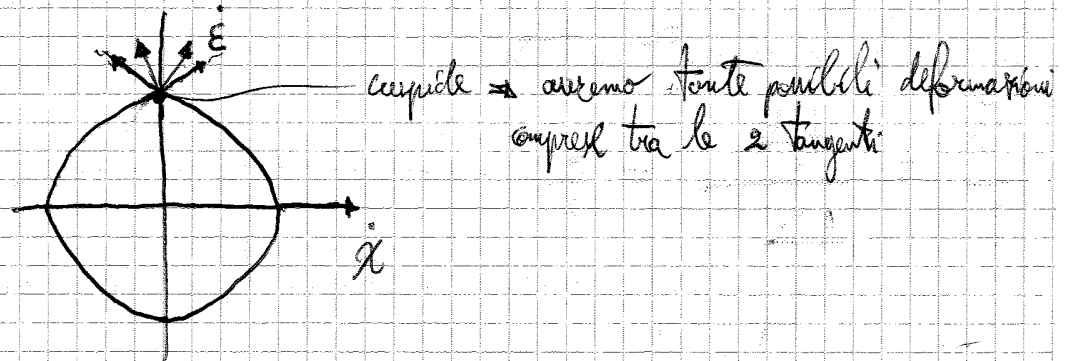
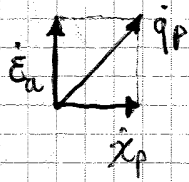
si considera che il taglio è  
equilibrato dalla sola funzione  
che gli non danno contributo

è trascurabile

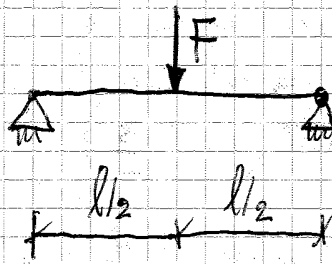


$-\frac{N}{N_p} \rightarrow \epsilon_{ammal}$

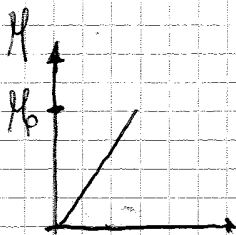
$-\frac{M}{M_p} \rightarrow \chi$



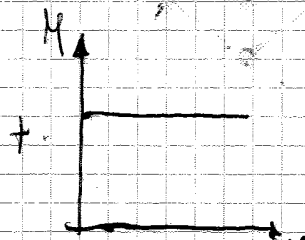
# ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI PAG. 243 SIC 2



$\frac{F \cdot l}{4}$  → quando esso è uguale a  $M_p$



questo vale per tutte le sezioni (compresa quella ove si forma la prima plastica)



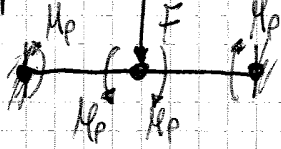
questo vale solo per la sezione ove si ha la prima plastica

$F_p = \frac{4 \cdot M_p}{l}$

In generale, l'incremento di capacità di carico  $\bar{\epsilon}$  ~~è~~ maggiore del rapporto  $M_p/M_e$  (dato da  $n$  nodi, in generale,  $n+1$  cerniere plastiche e) ~~semplice~~ (non una sola!).

Si possono avere però casi particolari:

- caso particolare:



le 3 cerniere si formano contemporaneamente

Il rettangolo  $\Rightarrow$  l'incremento di capacità portante dell'intera struttura vale  $\frac{3}{2}$

$$\frac{1}{8} F l = M_p \Rightarrow F_p = \frac{8 M_p}{l}$$

(In alcuni testi non si scrive la rotazione, ma la velocità di rotazione, perché è più corretto parlare di velocità di rotazione):

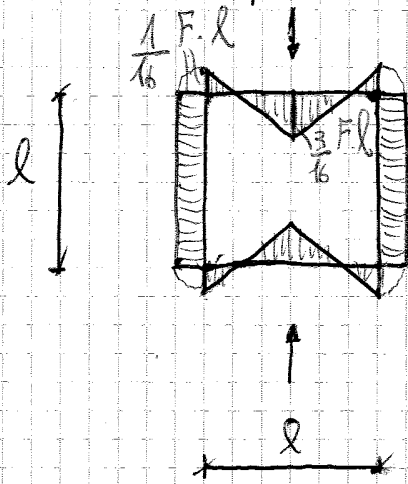
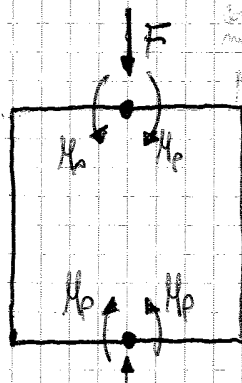


diagramma di momento in campo elastico (si deve partire sempre da questo nell'analisi passo-passo!)

se si formano alla condizione di momento limite elastico, la forza  $F$  che avrai in tale condizione sarebbe  $\frac{2}{3}$  di questa  $F_p$ .

la prima cerniera plastica si ha quando:  $\frac{3}{16} F.l = M_p \Rightarrow F_p = \frac{16}{3} \frac{M_p}{l}$

ora la struttura è diventata la seguente:



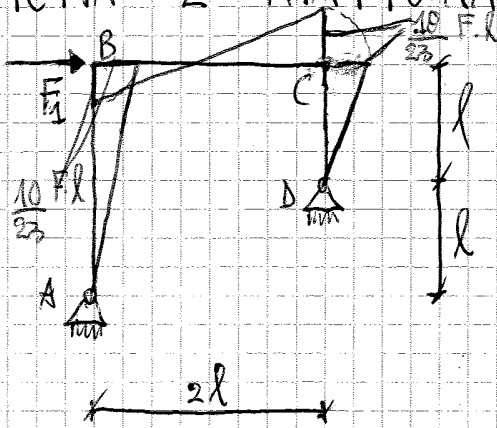
una conseguenza della limitazione di momento di carico è una ridistribuzione delle sollecitazioni

Al crescere di  $F$  avremo una ridistribuzione delle sollecitazioni  $\Rightarrow$  è possibile perché abbiamo flussi plastici; se rimaniamo in campo elastico l'unica soluzione è questa

# PLASTICITÀ E FRATTURA

04-03-2013

Esempio



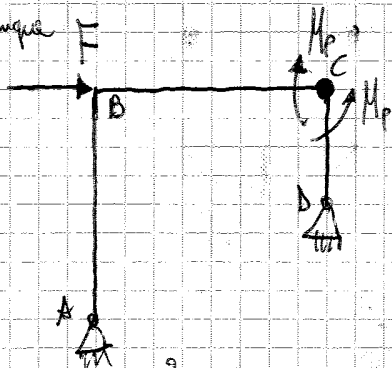
PAG. 247 SIC 2

totale 1 volta iperstatico → dunque  
aspettarsi 2 cerniere plastiche

Partiamo dal diagramma di momento elastico (blu in alto).

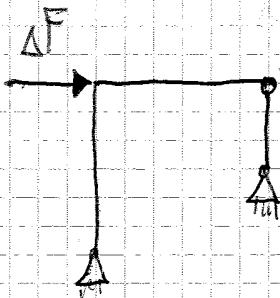
$$\frac{10}{23} F l = M_p \Rightarrow F_1 = \frac{23}{10} \frac{M_p}{l}$$

Ora, abbiamo dunque questo schema:



(A)

Ora ci può essere in modi diversi per trovare la forza di ultima plasticizzazione  $F_p$ :



Traccio il diagramma di momento in cima al diagramma di momento che si genera qua e determino  $\Delta F \rightarrow F_p = F_1 + \Delta F$

oppure posso operare nella struttura (A) su cui sono applicate F e  $M_p$  e determinare  $F_p$ .

La struttura, quando ~~non~~ si sono formate le due cerniere plastiche, è un meccanismo ma è anch'è in equilibrio (retto l'azione di  $F_p$  e dei momenti plastici) → se infatti applichiamo il P.L.V., troviamo che, è soddisfatto (lavoro forze esterne = lavoro sollec. interne).  
L'equilibrio è soddisfatto per ogni valore di  $F_p$ .

Per l'allungamento in flessione:

- ci poniamo al limite nel momento in cui si sono formate le 2<sup>a</sup> cerniere (vedi schema  $A_2$ ):

$$S_1 = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI}, \quad - \frac{M_0 l^2}{8 EI}$$

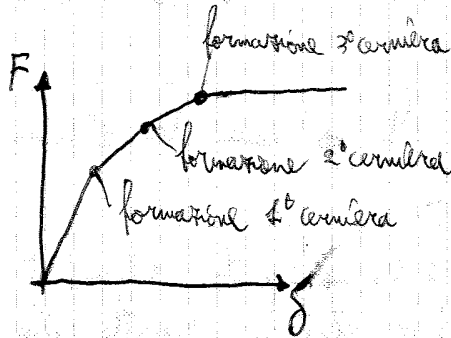
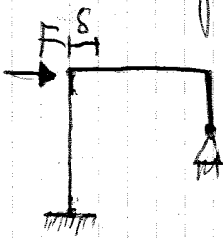


- nell'istante in cui raggiungo il meccanismo di collasso  $n^{\circ}$  ha: ci poniamo un attimo prima della formazione della 3<sup>a</sup> cerniera, quindi lo schema che si considera è ancora: → ma la formula qui in alto sostituendo  $q_1$  a  $q_0$ .

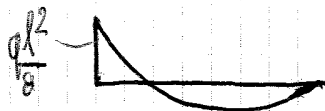
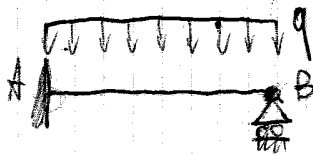
Diagramma 18,16 b:

- da 0 a 1: fase elastica
- da 1 a 2: tratto inclinato: perché ci spostiamo dalla fase elastica, ma il carico cresce ancora all'aumentare della deformazione
- da 2 in poi: tratto perfettamente plastico

Le vediamo diagrammare:

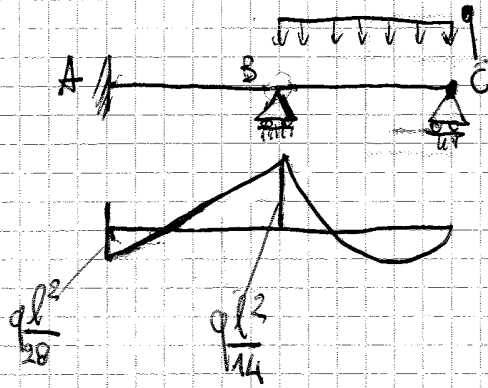


Studiamo un altro esempio (facciamo solo il 1<sup>o</sup> delle slide, non il 2<sup>o</sup>):



$$\Rightarrow q_1 = 8 \frac{M_0}{l^2}$$

Altro esempio:



Momenti in campo elastico

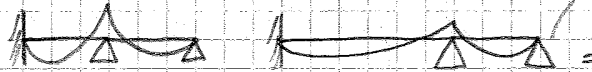
La prima cerniera plastica si forma in B, poi ci interesserà solo il tratto BC, cioè la redistribuzione di momenti avviene solo nel tratto BC, mentre non c'è una redistribuzione di momenti nella 1° campata (rimane come in campo elastico).

«C'è una redistribuzione di momenti dall'appoggio B verso la 2° campata».

Si ritorna dunque ad una situazione uguale a quella analizzata nell'esercizio precedente (figura m).

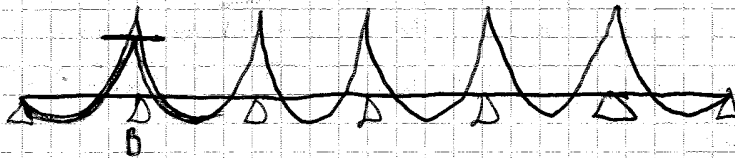
In questo caso la redistribuzione dei carichi avviene come nell'esercizio precedente, ma richiede rotazioni maggiori (perché qui abbiamo appoggio in B e non in centro ⇒ rotazione superiore).

Tanto più A si allontana da B, tanto più cresce la richiesta di rotazione per permettere la redistribuzione dei carichi.



in questa situazione, una volta che si è formata la cerniera in campata, il momento nell'appoggio centrale è basso ⇒ prima di arrivare a  $H_0$  ci vorrà una grande rotazione (maggiore rispetto al caso di sinistra).

Normativo:



da norma ci dice: puoi redistribuire al massimo il 15-20% dei momenti nella campata.

Appoggio B: il momento dovuto ai carichi di progetto sarebbe quello rosso, però ad esempio non c'è possibilità fisica di mettere tutte le armature del momento richiesto (non c'è spazio!!!) quindi il massimo può raggiungere il momento blu. Raggiungendo il momento blu, si formerà una cerniera plastica, ma dovendo dai carichi di progetto è quello rosso. La norma prevede del poter redistribuire il questo gap di momento nella campata per un max! del 15-20%.

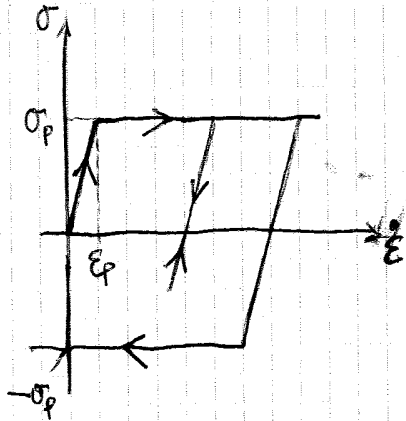
Oppure si possono verificare le rotazioni del corso nell'appoggio (andando a integrare la curvatura) e verificare che siano minori di un certo valore (se accade ciò ⇒ possiamo redistribuire).

# PLASTICITÀ E FRATTURA

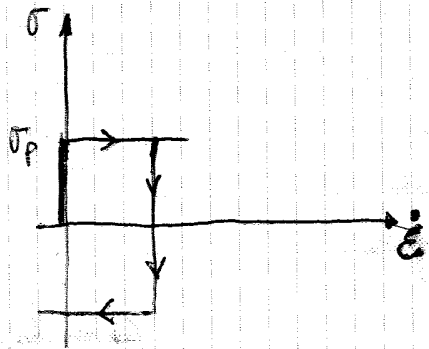
19-03-2013

## TEOREMI DELL'ANALISI LIMITE PLASTICA (LEZIONE 2 FOTOCOPIE)

partiamo dal caso uniaxiale:

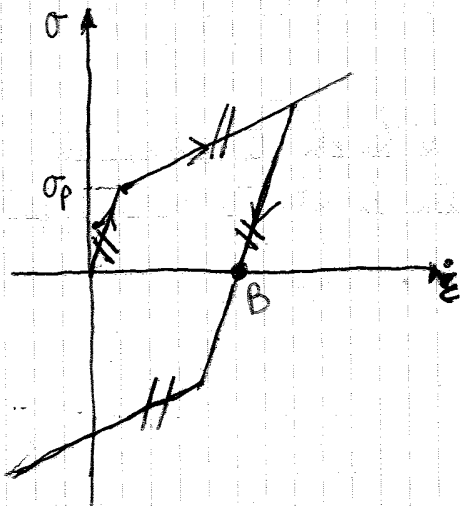


COMPORTAMENTO  
ELASTO-PERFETTAMENTE PLASTICO



COMPORTAMENTO  
RIGIDO-PLASTICO

All'atto pratico, non c'è differenza tra i 2 comportamenti (perché quando considero il lavoro o la potenza durante un ciclo di carico-scarico, il contributo del ramo elastico nel caso di comportamento elasto-perfettamente plastico si eliche).

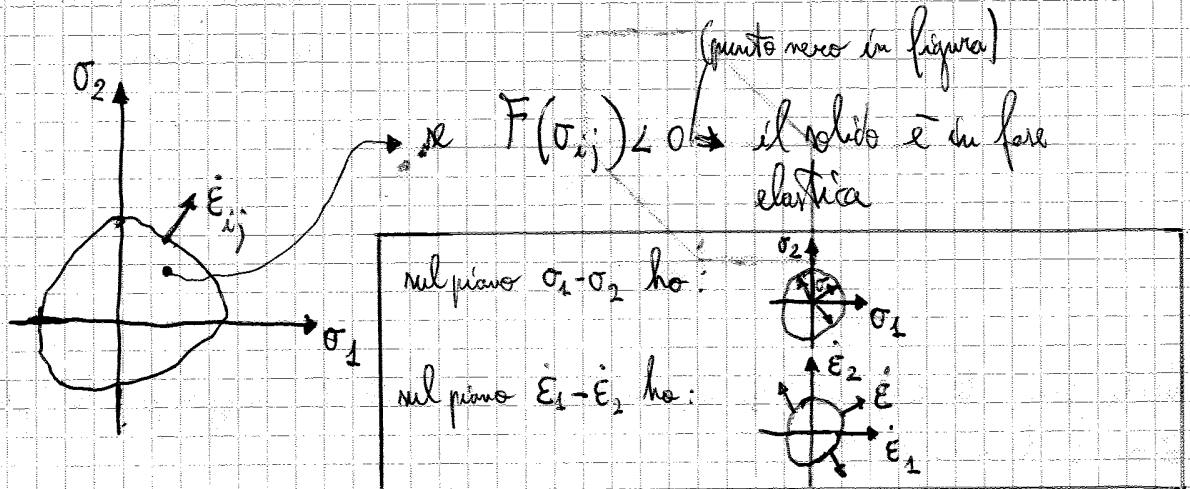


COMPORTAMENTO  
ELASTO-INCRODENTE

(A)

Se sto sulla superficie, (cioè  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ )  $\rightarrow$  ho raggiunto la plasticità.  
(caso 3b)

In 2D:



Nel caso di materiale elastico-perf. plastico non si potrà mai avere  $F(\sigma_{ij}) > 0$ .

In generale operiamo nel caso in cui queste figure sono CONNESSE.

Gli incrementi di def. plastica  $(d\epsilon_{ij}^P)$  possono averli senza averne ad aumentare lo stato tensionale.

Le funz. di mesuramento coincidono con i criteri di resistenza (Tresca, Von Mises, Coulomb).

Il cr. di Coulomb non va bene perché non prevede che  $\sigma_p$  è uguale a trax. e a compressione (mentre per materiali duttili è con).

Se prendiamo una piastra soggetta a sforzi di taglio, non cambia nulla in termini di raggiungimento della condizione di mesuramento se la tiriamo qui o a 1000 m in fondo al mare.

$\rightarrow$  se taglio con press.  $\perp$  alla condizione  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  ottengo sempre lo stesso esagono (questo ci dice l'indipendenza dalla pressione idrostatica).

Von Mises si ragiona nell'eq. di deformaz. associata al 2° invariante.



$F_0 = 0$  ,  $dF_0 = \frac{\partial F_0}{\partial \sigma_{pq}} d\sigma_{pq} = 0$

in partenza ero già nel contorno

(cioè  $d\sigma_{pq}$ )  
 vuol dire che questo vettore è tangente alla curva, cioè mi muovo nel contorno

Non è, invece, possibile questa condizione:  $dF_0 > 0$  (perché sto uscendo dalla superficie (il vettore che rappresenta l'incremento di tensione sta uscendo dalla superficie)) (questa condizione è impossibile, perché il materiale non è incrudente).

se  $dF_0 < 0 \rightarrow$  sto rientrando in fase elastica.

Se tutte le condizioni precedenti sono verificate, si trova che:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \tilde{\pi}_{ij} d\lambda$$

cap:  $d\lambda \geq 0$  per  $F_0 = 0, dF_0 = 0$

e

$d\lambda = 0$  per  $F_0 = 0, dF_0 < 0$  (rientro in fase elastica)  
 o per  $F_0 < 0, dF_0 < 0$  (rimango in fase elastica)

$\tilde{\pi}_{ij}$  rappresenta le componenti di un tensore doppio simmetrico.

La def. plastica o incremento di def. plastica quando siamo nel contorno è:

$d\varepsilon_{ij}^p = f(\sigma_{ij})$  (caso del punto in cui mi trovo)  
 $\neq f(d\sigma_{ij})$  (caso dell'incremento)

non è funzione di  $d\sigma_{ij}$

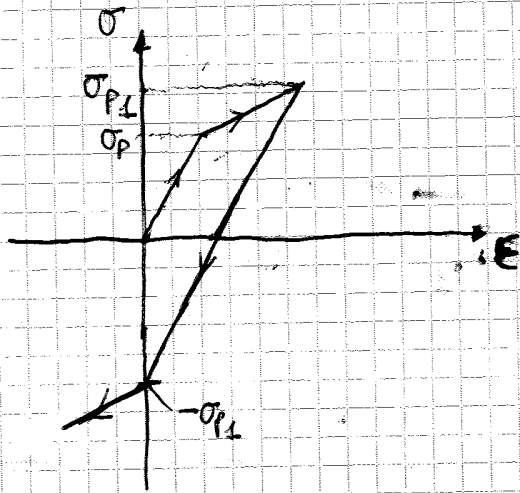
sono trattati sperimentalmente  
 (cioè, mi è stato detto sperimentalmente).

Ciò ci permette di dire che:

$\tilde{\pi}_{ij} = \frac{\partial P(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$  —————  $P(\sigma_{ij}) =$  potenziale plastico



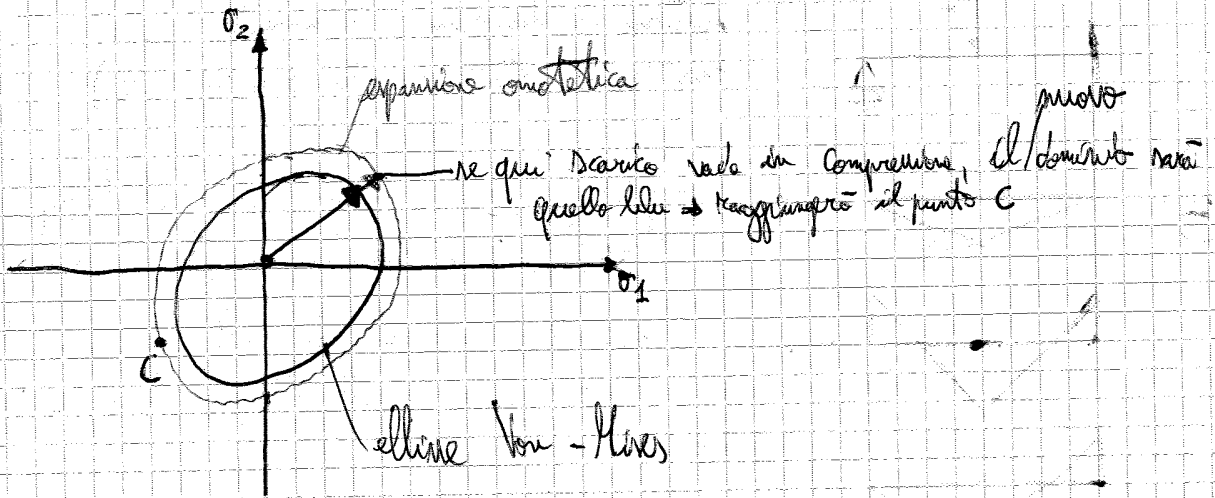
(a)



INCRODIMENTO ISOTROPO

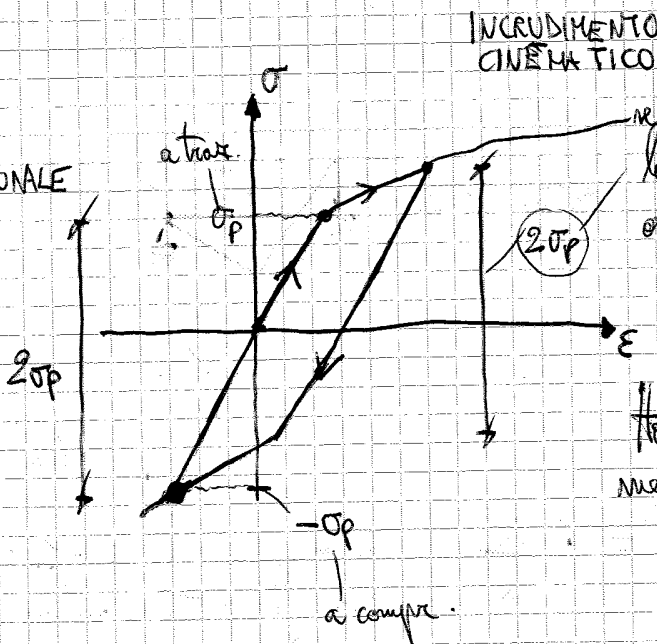
CASO MONODIMENSIONALE

CASO BIDIMENSIONALE:



(b)

CASO MONODIMENSIONALE



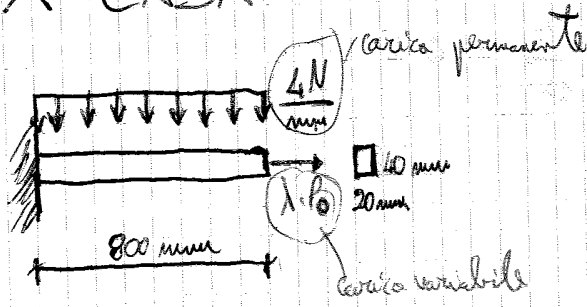
INCRODIMENTO CINEMATICO

se da qui scarico, lo momento si ha quando questa ordinata vale  $2\sigma_p$ .

Ho, in pratica, una traslazione dello momento (da  $\sigma_x$  a  $\sigma_x$ ).

# Esercizi X CASA

1)



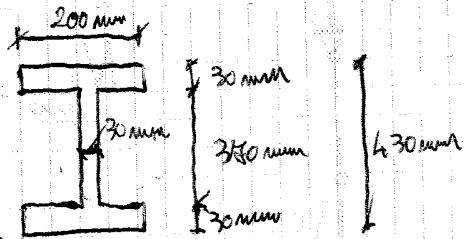
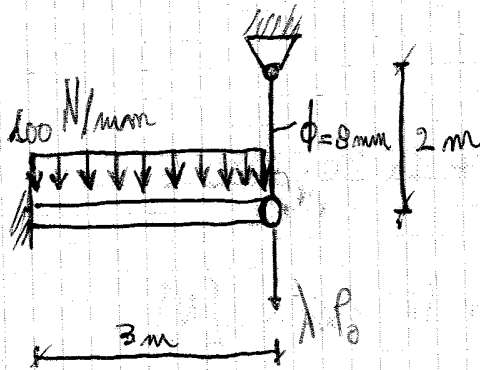
$$\sigma_p = 250 \text{ MPa}$$

$$P_0 = 80 \text{ kN}$$

valore tabellare

?  $\lambda$  che induce al collasso

2)



TRAVE:  $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$

FUNDE:  $\sigma_p = 500 \text{ MPa}$

$$P_0 = 40 \text{ kN}$$

?  $\lambda$  che induce al collasso

Problema (FATTO DA ME) (SBAGLIATO!!!)

1) Si raggiunge collasso quando nella sezione di incastro si raggiunge che:

$$\sigma_z = \sigma_p$$

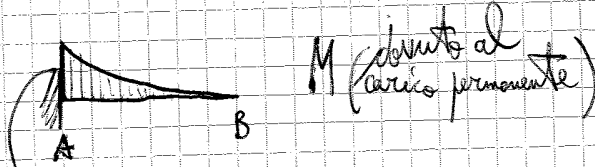
La  $\sigma_z$  è data dal contributo di momento e di sforzo assiale:



$$\sigma_{z, \max} = \frac{M_x}{W} = \frac{4 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot \frac{(800 \text{ mm})^2}{2}}{\frac{20 \text{ mm} \cdot (40 \text{ mm})^2}{6}} = 240 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = \frac{\lambda P_0}{A} = \frac{\lambda \cdot 80 \cdot 10^3 \text{ [N]}}{20 \cdot 40} = \lambda \cdot 100 \text{ MPa}$$

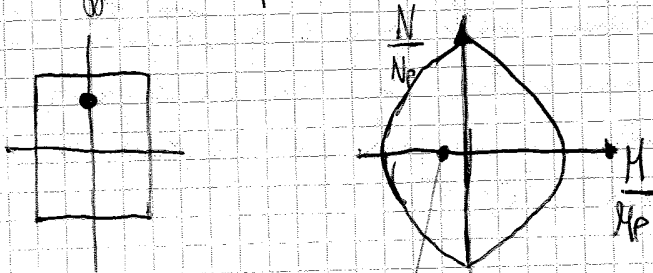
# Soluzione ESERCIZIO 1



$$M_A = M_{inc} = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,4 = 1,28 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$\lambda \cdot P_0 = \lambda \cdot 80 \text{ [KN]}$$

Sezione soggetta a sforzo normale eccentrico:



$M$  è sempre costante  $\rightarrow$  partire da qui  $\rightarrow$  mi interessa solo l'ordinata (cioè il valore di  $N$ )

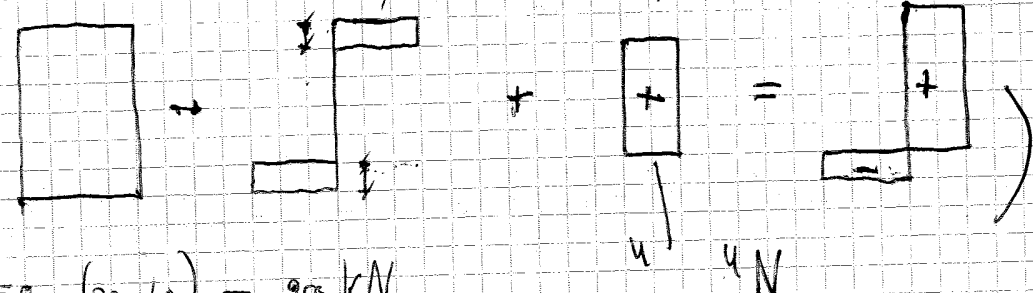
Equazione di questa curva:  $\lambda \cdot P_0$

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \left( \frac{N}{N_p} \right)^2$$

$M_p$ : mom. di plasticizzazione nel caso in cui ci sia solo momento flettente

$N_p$ : sforzo normale di plasticizzazione nel caso in cui ci sia solo sforzo normale

(Potremmo, in alternativa, fare: *determino la distribuzione che mi consente di esplicitare  $M$* )

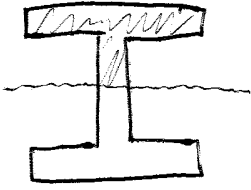


$$N_p = 250 \cdot (20 \cdot 40) = 200 \text{ KN}$$

$$M_p = 250 \cdot \left( \frac{20 \cdot 40^2}{4} \right) = 2 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

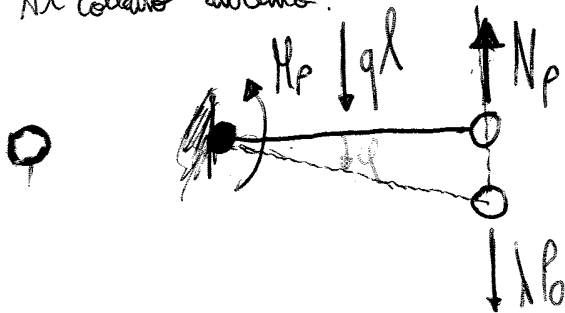
$$N_p = \sigma_p \cdot A = 500 \frac{N}{\text{mm}^2} \cdot \left( \approx \frac{8^2}{4} \right) = 25133 N \approx 25,1 \text{ kN}$$

$$M_p = 2 \cdot \sigma_p \cdot S_x^{x/2} = 2 \cdot 200 \frac{N}{\text{mm}^2} \left( (200 \cdot 30) \cdot 200 + (185 \cdot 30) \cdot 92,5 \right) = 685350000 N \cdot \text{mm} = 685,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



$$(M_p = \sigma_p \sum A_i \cdot b_i)$$

Al collarino avremo:



P.L.V.

$$-M_p \cdot \cancel{\varphi} + ql \cdot \cancel{\varphi} \frac{l}{2} + \lambda P_0 \cancel{\varphi} l - N_p \cancel{\varphi} l = 0$$

$$-M_p + q \frac{l^2}{2} + \lambda P_0 l - N_p l = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{N_p l + M_p - q \frac{l^2}{2}}{P_0 \cdot l}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{25,1 \cdot 3 + 685,4 - 100 \cdot \frac{3^2}{2}}{40 \cdot 3} =$$

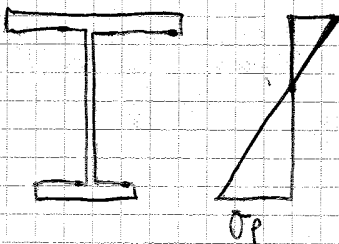
$$= 1,48$$

5. Calcolo di \$M\_e\$

1) Per trovare il \$M\_e\$ si impone l'annullamento del mom. statico:

$$S_{xx} = (200 \cdot 20) \cdot \left(20 + 300 + \frac{20}{2}\right) + (300 \cdot 20) \cdot \left(20 + \frac{300}{2}\right) + (200 \cdot 20) \cdot \frac{20}{2} = 236 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$A = (200 \cdot 20) + (300 \cdot 20) + (200 \cdot 20) = 12000 \text{ mm}^2$$

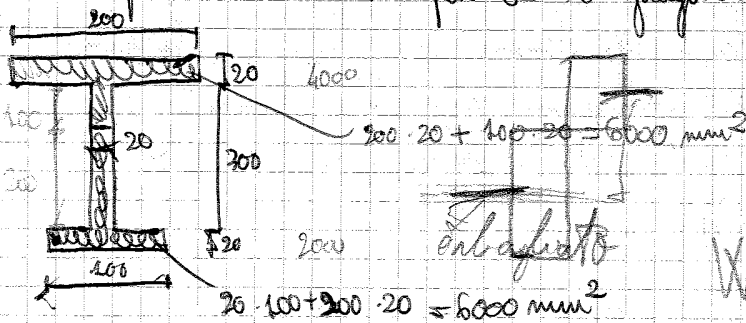
$$y_G = 196,67 \text{ mm}$$


$$M_e = \sigma_p \cdot W_{el} = \sigma_p \cdot \frac{I_x}{y_{max}}$$

$$I_x = \frac{200 \cdot 20^3}{12} + (200 \cdot 20) \cdot (143,3 - 10)^2 + \frac{20 \cdot 300^3}{12} + (20 \cdot 300) \cdot (143,3 - 110)^2 + \frac{100 \cdot 20^3}{12} + (100 \cdot 20) \cdot (196,7 - 10)^2 = 190266680 \text{ mm}^4$$

$$M_e = 250 \cdot \frac{190266680}{196,67} = 241,9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Il momento plastico si trova imponendo l'uguaglianza delle aree:

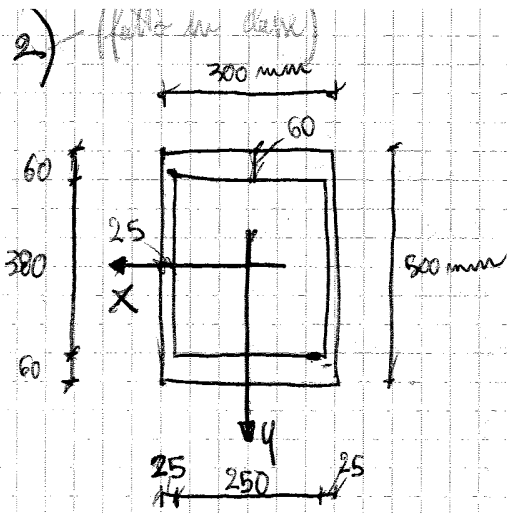


Si potrebbe anche mettere una coordinata \$x\$ che parte dall'origine e trovare un'equazione di uguaglianza tra le aree.

$$W_p = 2,36 \cdot 10^6$$

$$M_p = 2 \cdot \sigma_p \cdot S_x = 2 \cdot 250 \cdot \left( (200 \cdot 20) \cdot 110 + (100 \cdot 20) \cdot 50 \right) = 240 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

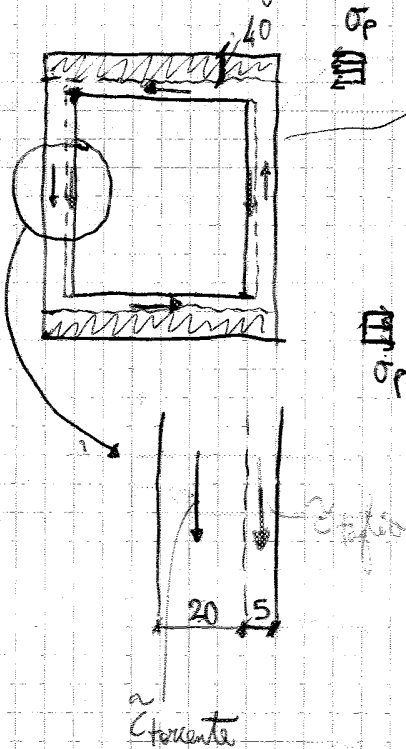
$$\Rightarrow M_e/M_p = 1,42 = 1,4$$



ipotizziamo una distr. di tensioni, se era equilibrata e non viola il criterio di rottura  $\rightarrow$  sicuramente la sezione porterà quei carichi (perché ottengo un limite inferiore della soluzione!!!).

Per il momento torcente si deve avere una accentrazione e per questo che  $\sigma_p$  non lo faccio su tutta la parte superiore ma solo su un pezzettino.

Se riusciamo, la cosa migliore è dire:



prendiamo ad esempio  $T$ , lo dividiamo per  $\tau_p$  e trovo la minima area necessaria a portare il taglio. Le soluzioni sono quelle a matita.

$$T = 2 \cdot 5 \cdot 300 \cdot \tau_{\text{taglio}} = 500 \cdot 10^3 \Rightarrow \tau_T = 131,6 \text{ MPa} < \tau_p \Rightarrow \text{OK!!!}$$

$$M_y = \left[ \sigma \cdot 300 \cdot 40 \cdot (250 - 20) \right] \cdot 2 = 4,35 \cdot 10^9 \Rightarrow \sigma = 244,6 \text{ MPa} > 2\sigma_p \Rightarrow \text{OK!!!}$$

braccio rispetto al baricentro

Il torcente lo vedo come due coppie di forze.

$$M_T = \tau \cdot 20 \cdot (300 - 40 - 40) \cdot (500 - 80 - 20) + \tau \cdot 20 \cdot 400 \cdot (200) = 600 \cdot 10^6$$

braccio

$$\Rightarrow \tau_{\text{mom}} = 133,9 \text{ MPa} < \tau_p \Rightarrow \text{OK!!!}$$

la superficie è uguale al braccio per il 1° addendo

il braccio è uguale alla lunghezza del 2° addendo

# PLASTICITÀ E FRATTURA

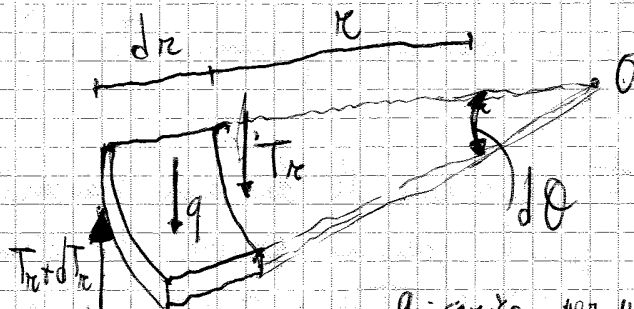
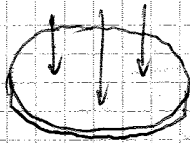
21-03-2013

## ANALISI LIMITE DI LASTRE PIANE INFLESSE (ultime slide della LEZ. 3)

Nelle lastre circolari riesce a determinare, applicando i ↓ statico e cinematico, il valore esatto del carico di collasso (è l'UNICO CASO!)

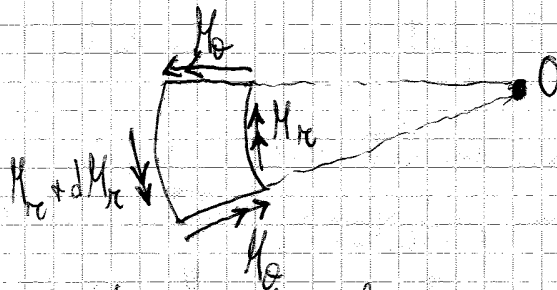
Nelle altre lastre (es. rettangolari) riesce solo a determinare una forchetta di valori, non il valore esatto.

### Lastre circolari



$$\begin{aligned}
 & \uparrow T_r \cdot r d\theta + q r d\theta \cdot \frac{r d\theta}{2} - (T_r + dT_r) \cdot (r + dr) d\theta = \\
 & = T_r \cdot r d\theta + q r d\theta \cdot \frac{r d\theta}{2} - T_r \cdot r d\theta - T_r \cdot dr d\theta - dT_r \cdot r d\theta - dT_r \cdot dr d\theta = \\
 & \text{Dall'alto la:}
 \end{aligned}$$

$q$ : carico per unità di superficie

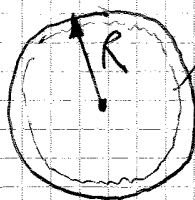
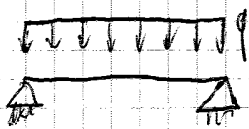


Nelle lastre piane lo stato membrana è disaccoppiato da quello flessionale. (Nei gusci i due stati sono accoppiati).

Studiamo dunque solo lo stato flessionale (come sopra)

Faccio gli equilibri e trovo le eq. indefinite di equilibrio 10.155a e 10.155b.

Facciamo una sezione diametrica della lastra sempl. appoggiata:



tratteggio interno: vincolo di appoggio

particolarizziamo le costanti di integrazione nell'integrale generale

→ Ottengo  $M_x = \frac{qr^2}{6} + M_p$  ~~XXXXXXXXXX~~

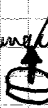
la scrivo su  $x=R$  (ove  $M_x=0$ ) e dunque:

$\frac{qR^2}{6} + M_p = 0$  → ricavo la  $q$  che, secondo l'ipotesi di stato tensionale che ho fatto, mi porta alla plasticizzazione. (18.141)

Ottengo, in pratica, un  $\lambda^-$  (ho operato secondo il t. statico, dunque ho un limite inferiore del carico di collasso).

È giusto che otteniamo un  $q$  con segno -? E che significato ha ciò?

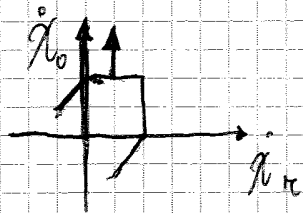
Abbiamo assunto un  $q$  diretto verso il basso, ma secondo la teoria dei quasi di rivoluzione, si assume come verso positivo quello uscente, dunque si ottiene  $q$  con segno -.

(in questo caso, dunque, quello verso l'alto: )

non applichiamo il t. cinematico, ma da ammissibile

Ora andiamo a vedere se c'è un cinematico associato a quella distribuzione di tensioni. Se c'è → vuol dire che quella ipotizzata è la soluz. esatta, prima ipotizzata

Abbiamo detto che al massimo nel tratto B-C → la  $\dot{\chi}_x$  è sempre nulla, perché la componente di deformazione è solo e sempre la  $\dot{\chi}_\theta$ .



Le equazioni cinematiche sono:

$\chi_x = -\frac{d^2 w}{dx^2}$   
 $\chi_\theta = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dx}$

stituito su esse  $\dot{\chi}_x = 0$  e  $\dot{\chi}_\theta \neq 0$  si ottengono le 18.144.



# PLASTICITÀ E FRATTURA

26-03-2013

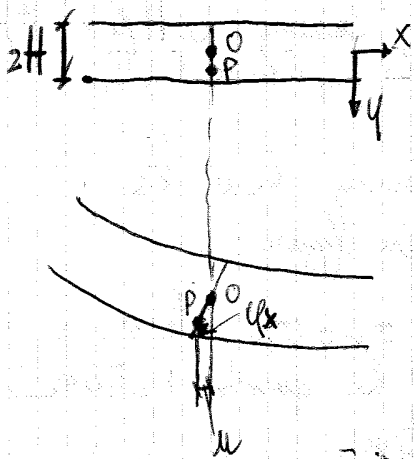
## LASTRE RETTANGOLARI

Equazioni indefinite di equilibrio (ci servono, perché, quando parliamo di  $\phi$  statico, esse devono essere soddisfatte)

L'equazione s.a. è di eq. alla rotazione attorno a  $y$  perché c'è  $T_x$  che ha braccio intorno a  $y$ .

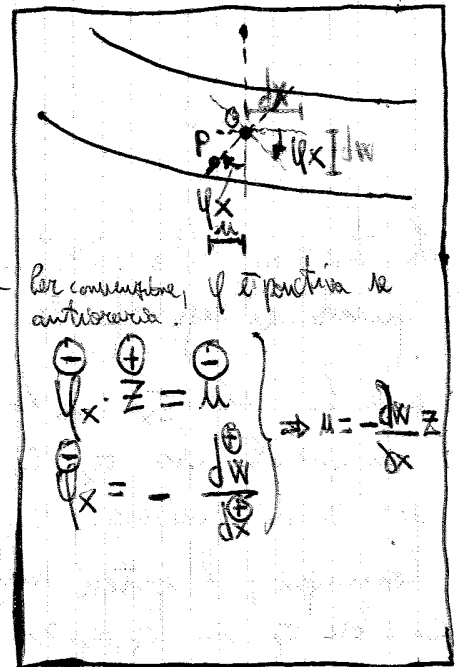
Dalle ipotesi cinematiche di Kirchhoff si ha:

$U, V, W$  indicano gli spostamenti.  $\epsilon_i$ , dividendoli per il lato (e adimensionando), sono  $u, v, w$ .



$$U = - \frac{\partial W}{\partial x} z$$

perché è opposta al verso positivo delle  $x$



è ciò che abbiamo sempre indicato con

$$K_x = \dot{\chi}_x$$

La potenza dissipata per unità di area è: tensione  $\cdot$  vel. di def. corrispondente

lavoro compiuto dalle forze interne (lo chiamiamo potenza perché abbiamo tensione  $\cdot$  velocità di def.)

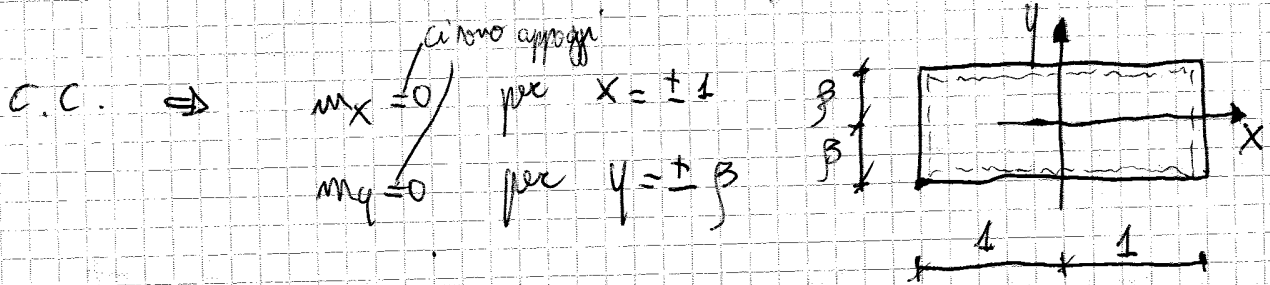
Nello spessore  $2H$  la curvatura è costante (per l'ipotesi di Kirchhoff), infatti la curvatura è la derivata della rotazione  $\phi$ , ma  $\phi$  è costante lungo uno stesso segmento di altezza  $2H$ .

→ la potenza  $D$  vera:

$$D = \underbrace{M_x}_{\text{momento curvatura}} \cdot K_x + M_y \cdot K_y + M_{xy} \cdot K_{xy}$$

Trova: in termini di momenti principali  
 ⇒ usando Von Mises.   
 poiché tale criterio è definito sia con  $m_x, m_y, m_{xy}$  che con  $m_1, m_2, m_{12}$

**ESEMPIO APPLICATIVO**: piastra rettangolare appoggiata soggetta a carico uniforme  $P$ .



### Applicazione del $\nabla$ statico

• condizione di compat. plastica: cioè in nessun punto si supera lo scorrimento  
 In letteratura si vede che, usando  $m_x$  e  $m_y$  e  $m_{xy}$  con quelle espressioni, si ottiene la soluzione.

$m_x, m_y, m_{xy}$ : verificare che soddisfanno la C.C. e l'equazione indefinita di equilibrio.

Ora dobbiamo verificare che in nessun punto si esca dal dominio di resistenza (condizione di compatibilità statica)

$\phi$  è quella che abbiamo chiamato con  $F$  (funzione di scorrimento):  
 usando Von Mises.

Da  $\phi$  dobbiamo determinare le costanti  $C_1, C_2, C_3$ .

Facciamo una sezione lungo la direzione  $y$  (cioè con piano di equazione  $x = \text{cost}$  (coste parallela a  $y$ )).

Da  $\phi$  è definita da  $-\infty$  a  $+\infty$ , ma la lastra ha  $-1 \leq x \leq 1$   
 ⇒ dobbiamo imporre che, all'interno dei limiti della lastra, si ha il rispetto ~~del~~ del non superamento della condizione di scorrimento.

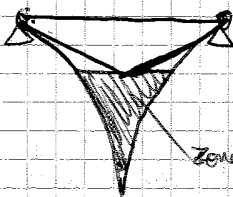
Stiamo cercando un legame tra def. e momenti  $\Rightarrow$  (22).

$D$  è la potenza per unità di superficie  $\Rightarrow$  per ottenere la potenza di tutta la lastra fare l'integrale doppio  $\Rightarrow$  ricavare  $L_i$ .

Ci serve poi anche la potenza esterna  $L_e = \int_{-A}^A \int_{-B}^B P \cdot W \, dx dy$   
 $\downarrow$   
 P. velocità

$P \cdot L \cdot V \Rightarrow L_i = L_e$

È difficile risolvere gli integrali  $\Rightarrow$  ragioniamo con: facciamo un'analogia con la trave.



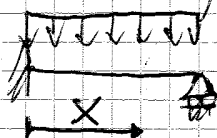
zona in cui  $\kappa > \kappa_c$ : noi però facciamo una semplificazione: concentriamo tutta la def. plastica nella cerniera plastica, mentre tutte le altre regioni rimangono in campo elastico.



Stessa cosa facciamo ora nel caso 2D: tutta la def. plastica si concentra in una linea (cerniera plastica cinematica) e tutta la parte restante rimane in campo elastico ( $\Rightarrow$  rettilineo)  $\Rightarrow$  tutto il contributo elastico entra in gioco nel calcolo della potenza dissipata, perché, essendo elastico, quando nasce recupera tutto.

Il lavoro esterno è il carico  $\cdot$  volume individuato dalla deformazione della lastra.

La lunghezza della cerniera plastica non la facciamo a priori, ma la determiniamo genericamente  $\mu \cdot l$  in  $\mu$  come facevamo per la trave:



cerchia generica  $x$  della posizione della cerniera plastica

mi di esercizio!!

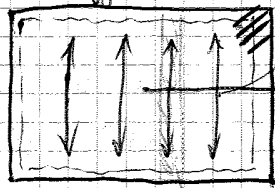
**YIELD LINE THEORY**: si basa nel  $t$ , cinematico  $\Rightarrow$  bisogna avere esperienza per determinare la posizione delle cricche plastiche, altrimenti si rischia di mettere il carico più colosso.

**IL SIMPLE** vale solo per il colosso in flessione; non considera taglio e punzonamento e torcente

fare verifiche di punzonamento locali per i pilastri

è un po' come dire: sto applicando il  $t$  statico  $\Rightarrow$  la lista di termini la ipotizzo io  $\Rightarrow$  ipotizzo  $q_y = 0$

Consideriamo una lastra soggetta a carico distribuito:

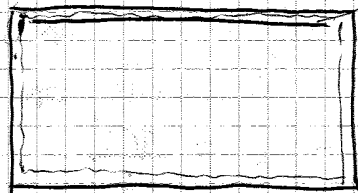
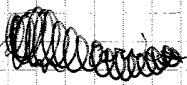


ipotizzo che il carico venga portato solo da queste strisce verticali  $\Rightarrow$  ho solo  $q_x$ .

in base alla simmetria di momento  $\Rightarrow$  (lo riprendo dalla soluzione elastica)

Nei vertici il momento torcente è massimo / (e  $q_x = q_y = 0$ )  $\Rightarrow$  dovremo mettere armatura (a matita) lungo la direzione principale (che è quella data da  $q_y$ , cioè la diagonale). Se non metto questa armatura (e dunque non considero  $q_y$  nello sviluppo  $\rightarrow$  arco fessure in esercizio).

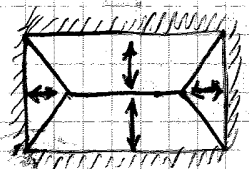
Lo STRIP vale se gli appoggi della lastra sono continui; se invece sono puntuali (come pilastri)  $\Rightarrow$  ADVANCED STRIP METHOD.

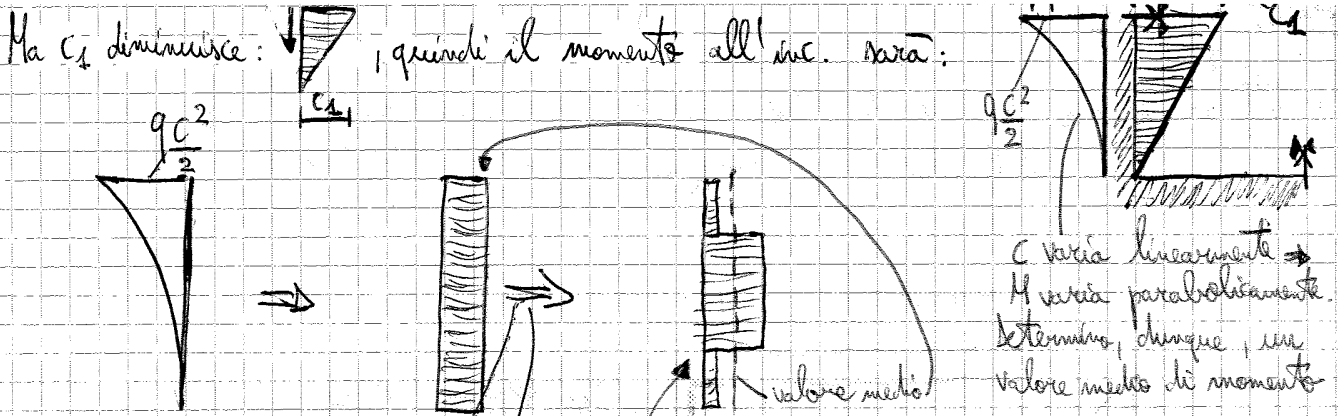



vicino al lato superiore il carico è portato solo verticalmente, non orizzontalmente, perché orizzontalmente sono vicino all'appoggio  $\Rightarrow$  le sollecitazioni sono limitate, perché gran parte del carico si lo prende l'appoggio stesso!

**LINEE DISCONTINUITÀ STATICHE**: ipotizziamo che lungo queste linee il taglio è nullo (con al vincolo)

noi diciamo che il carico è portato da strisce verticali e orizzontali, individuando linee di discontinuità statiche






la trave è così  , quindi ripartisco il momento così:

la trave ha una zona con  $M+$  alto e un'altra con  $M+$  basso  $\Rightarrow$  vedo al armare di meno le zone laterali (che comunque sono le meno sollecitate) e di più quelle centrali, poiché sono più vicine ai vincoli.

**RISUMENDO:**

data la trave  $\Rightarrow$  sta a noi decidere come ripartire  $M_f$  e  $M_b$  e poi sta a noi decidere come ripartire il momento medio nella trave trasversale



$\frac{m_{02}}{m_{01}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$  range "standard"

Dalla relazione elastica vediamo qual è il rapporto tra  $M_{incastro}$  e  $M_{campata}$ . È meglio stare tra 1.5 e 3.

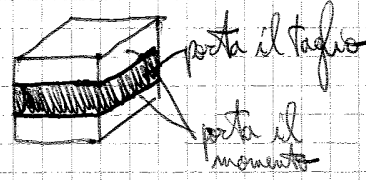
Il rapporto tra  $M_{inc}$  e  $M_{CH}$  è 2  $\Rightarrow$  se armo con 1.5, comunque il rapporto in fase elastica è comunque 2  $\Rightarrow$  avrò più fessurazione all'incastro e meno in campata (in campo elastico).

Se armo considerando il rapporto tra  $M_{inc}$  e  $M_{CH} = 3 \Rightarrow$  in campo elastico avrò più fessurazione in campata e meno all'incastro.

**Da ricordare:**

- se armo di più l'incastro, si plasticizza prima la campata
- se armo con  $\frac{1}{2}$ , con il rapporto in fase elastica è 2  $\Rightarrow$  avrò più fessurazione all'incastro e meno in campata
- se metto il rapporto  $\frac{1}{3} \Rightarrow$  in campo elastico avrò più fessurazione in campata e meno all'incastro

**[ Kello a sandwich:**



È un'applicazione del T. Matrici!

# **PLASTICITÀ & FRATTURA**

**prof. A. Carpinteri**



**Politecnico di Torino**  
Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica

## **LEZIONE 1**

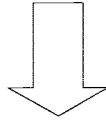
### **INTRODUZIONE AL CORSO; FLESSIONE ELASTO-PLASTICA**

#### **Struttura del Corso**

- (A) PLASTICITÀ**
- (B) ELASTICITÀ PIANA**
- (C) MECCANICA DELLA FRATTURA ELASTICA LINEARE**  
(Linear Elastic Fracture Mechanics, LEFM)
- (D) MECCANICA DELLA FRATTURA NON-LINEARE**  
(Nonlinear Fracture Mechanics, NLFM)
- (E) APPLICAZIONI AVANZATE**

*Al corso di base* 1

## Concentrazione delle tensioni



## Intensificazione delle tensioni (approccio tensionale o locale vs. approccio energetico o globale)

### STRENGTH, DUCTILITY, FRACTURE ENERGY

Structural materials are traditionally catalogued, on the basis of the characteristics of the  $\sigma(\epsilon)$  curve, into two distinct categories:

- Ductile materials.
- Brittle materials.

Whereas the former show large portions of the  $\sigma(\epsilon)$  diagram that are not linear, before they reach the fracture point, the latter break suddenly, when the response is still substantially elastic and linear.

A second characteristic which distinguishes them is the ratio between tensile strength and compressive strength: for ductile materials this ratio is close to unity, for brittle materials it is equal to  $10^{-1}$  or  $10^{-2}$ .

The differences in behaviour depend on the microscopic mechanisms of damage and fracture.

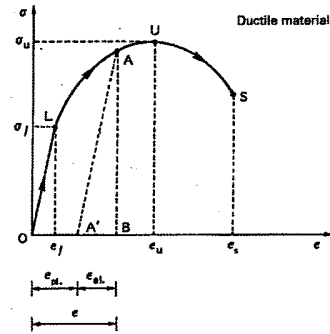
In metal alloys, sliding takes place between the planes of atoms and crystals which gives rise to a behaviour of a plastic and ductile kind, with considerable permanent deformations.

In concrete and rock the microcracks and debondings between the granular components and the matrix can extend and combine to form a macroscopic crack which splits the structural element suddenly into two parts. This unstable fracturing process causes the material to behave in a brittle manner.

When the specimen is unloaded, there is a permanent deformation  $\epsilon_{pl}$ : a part of the strain energy is recovered (triangle  $ABA'$ ), whereas the remainder is dissipated plastically (area  $OLAA'$ ).

When the test specimen is loaded again, once more it covers elastically the path  $A'-A$ , which is parallel to the path  $O-L$ . When it arrives at  $A$ , the specimen yields again at a stress  $\sigma > \sigma_l$ .

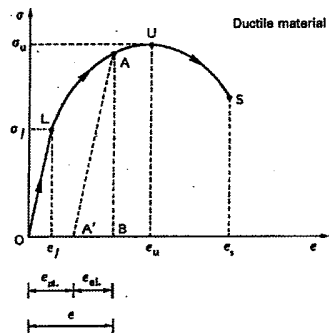
This phenomenon is referred to as *hardening*.



When the applied force  $F$  is further increased, the curve ceases to be linear ( $A-U$ ).

The increase in stress per unit increase in dilation (tangential stiffness) continues to diminish, until it vanishes at point  $U$ .

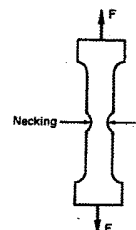
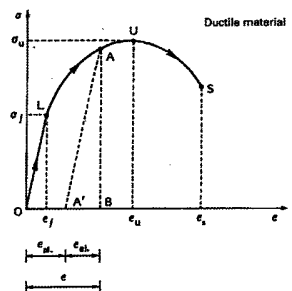
When the point  $U$  is reached, if the loading process is controlled by the external force  $F$ , the specimen breaks, because  $F$  cannot increase any further.



If the loading process is controlled by the variation in distance  $\Delta l$ , it is possible to investigate the behaviour of the material beyond the point of ultimate strength  $U$ .

Beyond the point  $U$ , the tangential stiffness becomes negative. This is due to the phenomenon of plastic transverse contraction or necking.

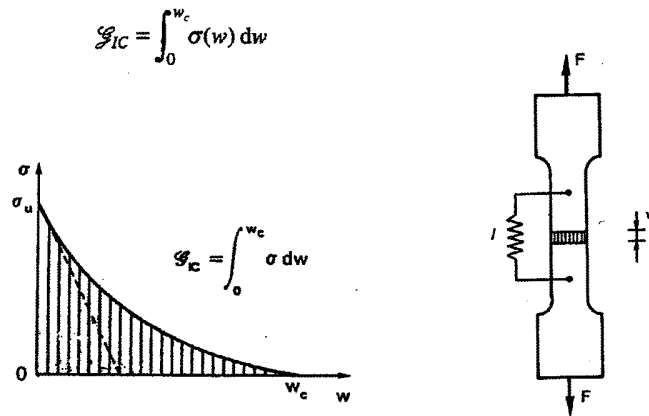
Finally, once a terminal point  $S$  is reached, the specimen fails suddenly, even though the loading process is deformation-controlled.



ud



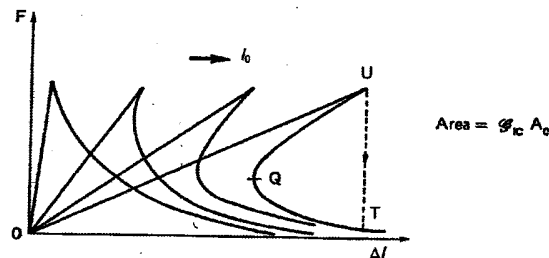
Since the cohesive law  $\sigma(w)$  is a characteristic of the material, the fracture energy is also an intrinsic property of the material:



The energy dissipated over the crack surface is equal to  $G_{IC}A_0$ , since  $G_{IC}$  is a work per unit surface and thus force per unit length,  $[F][L]^{-1}$ .

The energy dissipated in the volume  $A_0l_0$  is still equal to  $G_{IC}A_0$ .

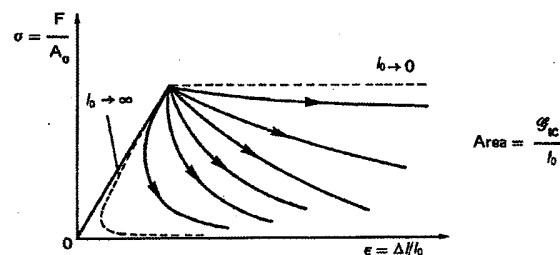
If the response curves are then plotted on the plane  $F-\Delta l$  as functions of  $l_0$ , then we obtain elastic portions of the curves with a decreasing stiffness and softening portions having a growing negative slope. Beyond a certain limit, they have a positive slope. The area under each curve must in fact be constant and equal to  $G_{IC}A_0$ .



On the  $\sigma-\epsilon$  plane the transition is represented by a single linear elastic curve and by a number of softening branches, as the length  $l_0$  varies. The area under the curve in this case varies with  $l_0$ , as it is equal to  $G_{IC}/l_0$ .

For  $l_0 \rightarrow 0$  the softening branch becomes horizontal and represents a perfectly plastic structural response.

For  $l_0 \rightarrow \infty$  the area between the  $\sigma(\epsilon)$  curve and the  $\epsilon$ -axis tends to zero, and the softening branch tends to coincide with the elastic portion.



## 18. TEORIA DELLA PLASTICITÀ

In base alle ipotesi di comportamento elastico lineare del materiale e di piccoli spostamenti, il problema del solido elastico è risolvibile, come si è riscontrato nei Capitoli 8,9 e 10, tramite l'equazione operatoriale di Lamé, il cui operatore è in ogni caso *lineare*.

Se cioè  $\{F\}$  è il vettore delle forze esterne ed  $\{\eta\}$  è il corrispondente vettore degli spostamenti, ottenuto risolvendo l'equazione (8.52.a), qualora si moltiplichino le sollecitazioni per una costante  $c$ , anche gli spostamenti, e quindi le deformazioni e le caratteristiche statiche, risulteranno moltiplicati per la stessa costante:

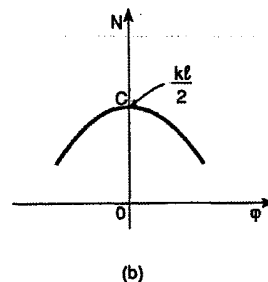
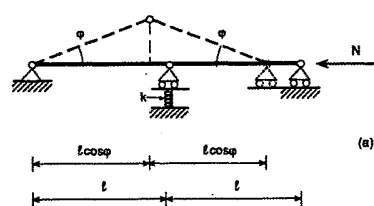
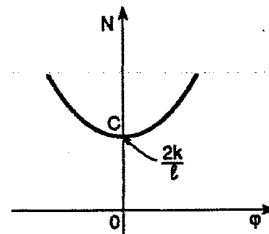
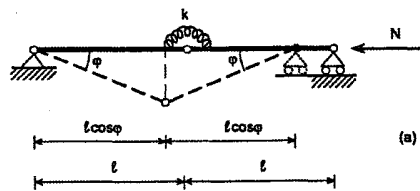
$$[\mathcal{L}]\{c\eta\} = -\{c\mathcal{F}\}. \quad (18.1)$$

Inoltre, se  $\{F_a\}$ ,  $\{F_b\}$  sono due diversi vettori delle forze esterne, ed  $\{\eta_a\}$ ,  $\{\eta_b\}$  i relativi campi di spostamento, nel caso di sovrapposizione delle forze anche per gli spostamenti varrà il Principio di Sovrapposizione degli Effetti:

$$[\mathcal{L}]\{\eta_a + \eta_b\} = -\{\mathcal{F}_a + \mathcal{F}_b\} \quad (18.2)$$

Un primo caso di non linearità è stato esaminato nel capitolo precedente, ove si è visto come le sollecitazioni esterne non sempre crescano proporzionalmente agli spostamenti indotti (figg. 17.1.b, 17.2.b, 17.8.b, 17.9.b), nel caso in cui tali spostamenti non si possano considerare piccoli. Un secondo caso di non linearità sarà invece esaminato nel presente capitolo, ove si considererà esplicitamente il comportamento duttile del materiale, come già si è introdotto al Paragrafo 8.10. Nel primo caso si tratta di *non linearità geometrica*, mentre nel secondo di *non linearità costitutiva del materiale*.

### Esempi di non-linearità geometrica



La plasticizzazione delle bielle laterali, d'altra parte, avviene per:

$$F_2 = 2\sigma_p A, \tag{18.5.a}$$

$$\delta_2 = \frac{\sigma_p \ell_{II}}{E}, \tag{18.5.b}$$

indicando con il pedice 2 le caratteristiche di seconda e ultima plasticizzazione. Per  $\delta > \delta_2$ , infatti, la reazione delle bielle non può aumentare e resta stazionaria al valore di plasticizzazione  $F_2$ .

Ricapitolando, si ottiene pertanto un comportamento globalmente elastico per  $0 < \delta < \delta_1$ :

$$F = EA \left( \frac{1}{\ell_I} + \frac{1}{\ell_{II}} \right) \delta, \tag{18.6.a}$$

un comportamento globalmente incrudente per  $\delta_1 < \delta < \delta_2$

$$F = \sigma_p A + \frac{EA}{\ell_{II}} \delta, \tag{18.6.b}$$

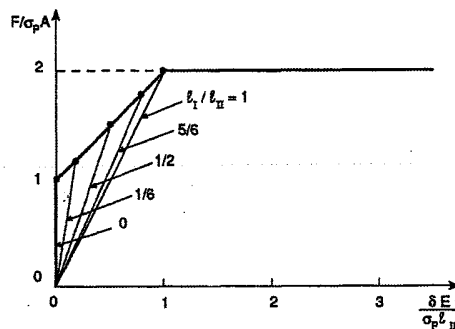
e un comportamento perfettamente plastico (flusso plastico) per  $\delta > \delta_2$

$$F = 2\sigma_p A. \tag{18.6.c}$$

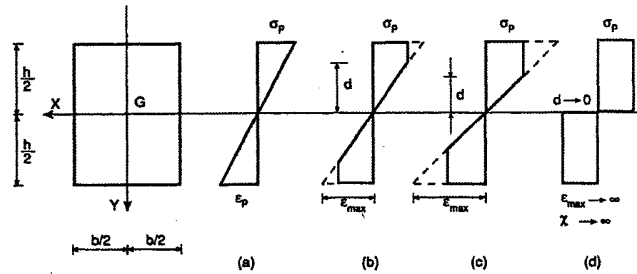
*questa espressione la possiamo vedere come limite superiore della fase plastica  
 se volessi scrivere la 18.6.a e la 18.6.c partendo dalla stessa espressione base e vedendo la 18.6.a come caso limite inferiore e la 18.6.c come caso limite superiore → tale relazione base che vorrei scrivere sarebbe quella elastoplastica,*

In fig. 18.2 si sono riportate in forma adimensionale le curve forza-spostamento per diversi valori del rapporto  $\ell_I / \ell_{II}$ . Per  $\ell_I \rightarrow 0$ , la forza è sostenuta in fase elastica interamente dalla biella centrale, che quindi si plasticizza per  $F = \sigma_p A$ .

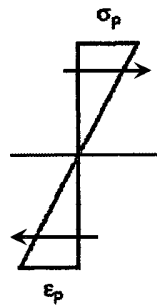
Quando  $\ell_I = \ell_{II}$  la fase incrudente non è presente poiché le bielle si plasticizzano tutte e tre contemporaneamente. Si può osservare come la retta a cui appartiene il tratto incrudente del diagramma di fig. 18.2, non dipenda dal rapporto  $\ell_I / \ell_{II}$ . Ciò è dovuto al fatto che, una volta plasticizzatasi la biella centrale, la sua lunghezza  $\ell_I$  non entra più nell'analisi.



Si assuma che, all'aumentare del momento flettente applicato, la sezione della trave rimanga piana, pur plasticizzandosi parte di essa. Ciò equivale a considerare variazioni lineari della dilatazione assiale  $\epsilon_z$  lungo l'altezza della trave (fig. 18.3.a). La tensione assiale  $\sigma_z$ , d'altra parte, non potrà superare il suo valore limite  $\sigma_p$ , e mostrerà quindi, una volta superato il momento di prima plasticizzazione  $M_p$ , una variazione lineare nella parte centrale della sezione e due pianerottoli nelle parti esterne (figg. 18.3.b, c). Nei diagrammi della fig. 18.3 è stata riportata la successione degli andamenti che assumono lungo l'altezza sia  $\epsilon_z$  che  $\sigma_z$ , uniformando le scale rispettivamente con i valori allo snervamento,  $\epsilon_p$  e  $\sigma_p$ .



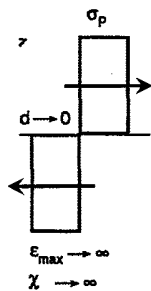
Da tali diagrammi appare quindi chiaro come la massima dilatazione  $\epsilon_{max}$ , che si raggiunge ai lembi estremi della trave, superi la dilatazione  $\epsilon_p$ , che è quella che corrisponde allo snervamento. Quando  $\epsilon_{max} \rightarrow \infty$ , e quindi a flusso plastico avvenuto, la variazione della tensione è bi-rettangolare, mentre l'estensione  $2d$  del cuore elastico della trave si annulla (fig. 18.3.d).



Il momento di prima plasticizzazione (ovvero il momento elastico massimo) è facilmente ottenibile tramite la relazione tra  $M_x$  e  $\sigma_z$ :

$$M_e = \sigma_p \frac{I_x}{h/2} = \sigma_p b \frac{h^2}{6}, \quad (18.7.a)$$

mentre il momento di ultima plasticizzazione o momento plastico è valutabile tramite il diagramma di fig. 18.3.d:



$$M_p = \sigma_p \left( \frac{b}{2} \right) \frac{h}{2} = \sigma_p b \frac{h^2}{4}, \quad (18.7.b)$$

essendo esso pari a quello di una coppia di forze  $\sigma_p$  ( $bh/2$ ) con braccio  $h/2$ .

Il momento plastico  $M_p$  risulta pertanto uguale a  $3/2 M_e$ , fatto questo che permette uno sfruttamento ulteriore delle prestazioni dei materiali metallici, con sollecitazioni sostanzialmente superiori a quelle che soddisfano il criterio delle tensioni ammissibili.

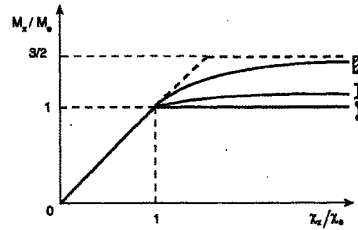
(d)

Tramite  $M_e = \sigma_P \frac{I_x}{h/2} = \sigma_P b \frac{h^2}{6}$ , si ha infine:

$$\frac{M_x}{M_e} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_e}{\chi_x} \right)^2 \quad (18.13)$$

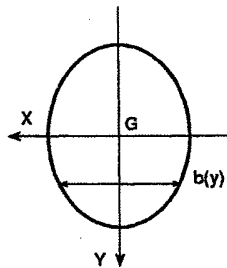
ove con  $\chi_e$  si è indicata la curvatura all'atto della prima plasticizzazione.

Il diagramma di fig. 18.4 rappresenta quindi una legge lineare per  $\chi_x < \chi_e$ , ovvero  $M_x < M_e$ , e la legge iperbolica (18.13) per  $\chi_x > \chi_e$ , ovvero  $M_x > M_e$ . Tale legge incrudente viene sostituita nella pratica dalla legge elastica-perfettamente plastica tratteggiata nella stessa figura.



Quando la sezione retta della trave è a doppia simmetria (fig. 18.5), pur non essendo rettangolare, gran parte delle argomentazioni che precedono possono venire ripetute. La relazione (18.11) deve presentare la larghezza  $b(y)$  sotto il segno di integrale:

$$M_x = 2 \sigma_P \left[ \frac{\chi_x}{\epsilon_P} \int_0^{\epsilon_P/\chi_x} y^2 b(y) dy + \int_{\epsilon_P/\chi_x}^{h/2} y b(y) dy \right] \quad (18.14)$$



Il momento plastico vale dunque:

$$M_P = \lim_{\chi_x \rightarrow \infty} M_x = 2 \sigma_P \int_0^{h/2} y b(y) dy, \quad (18.15)$$

ove l'integrale rappresenta il momento statico  $S_x^{A/2}$  di mezza sezione rispetto all'asse X.

$$\frac{M_P}{M_e} = \frac{2 S_x^{A/2}}{I_x / \frac{h}{2}}, \quad (18.16)$$

Per quanto riguarda le altre caratteristiche interne, il momento torcente applicato ad una sezione circolare mostra un comportamento del tutto analogo a quello descritto in precedenza per il momento flettente retto. Il momento torcente di prima plasticizzazione vale infatti, in base alla (9.85):

$$M_{ze} = \frac{I_p}{R} \tau_P = \frac{\pi}{2} R^3 \tau_P, \quad (18.19.a)$$

ove, secondo il Criterio di Tresca,  $\tau_p = 1/2 \sigma_p$ . Il momento torcente plastico risulta, d'altra parte, uguale al prodotto della tensione di snervamento  $\sigma_p$  per il momento statico polare della sezione:

$$M_{zP} = \frac{2\pi}{3} R^3 \tau_P. \quad (18.19.b)$$

Il rapporto  $M_{zP}/M_{ze}$  vale pertanto 4/3.

Il caso dello sforzo normale centrato è banale ed è stato già anticipato al Paragrafo 18.1.

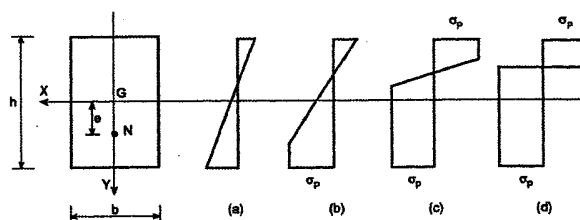
Lo sforzo normale plastico vale naturalmente:

$$N_P = \sigma_P A, \quad (18.20)$$

mentre il caso del taglio retto andrebbe considerato assieme a quello della flessione retta, sebbene in genere l'influenza di tale caratteristica sia trascurabile nell'ambito del calcolo plastico.

Per quanto riguarda le sollecitazioni composte, notevole è il caso dello sforzo normale eccentrico. Per una sezione rettangolare sollecitata dallo sforzo normale  $N$ , applicato sull'asse  $Y$  con eccentricità  $e$  (fig. 18.7), si susseguono quattro diverse fasi all'aumentare di  $N$ . Tali fasi sono relative alle condizioni sequenzialmente rappresentate in fig. 18.7:

- (a) elastica;
- (b) elasto-plastica, con snervamento solo ad un lembo;
- (c) elasto-plastica, con snervamento ad entrambi i lembi;
- (d) di completa plasticizzazione.



# ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI



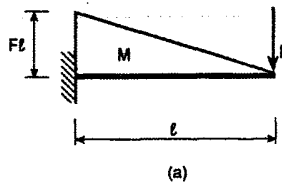
**Politecnico di Torino**  
Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica

## ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

Si consideri una mensola di lunghezza  $l$ , sollecitata da una forza ortogonale  $F$  all'estremità (fig. 18.10.a). All'aumentare della forza, il collasso plastico della mensola si raggiunge non appena il momento d'incastro uguagli il momento plastico:

$$F_P l = M_P, \quad (18.25)$$

e quindi per  $F_P = M_P / l$

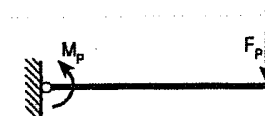


A quel punto si produce una rotazione localizzata nella sezione d'incastro mentre il momento d'incastro non può crescere ulteriormente e resta stazionario al suo valore limite  $M_P$ . Si usa allora rappresentare questa situazione inserendo una cerniera al posto dell'incastro e applicando un momento  $M_P$  nelle adiacenze della cerniera (fig. 18.10.b). La cerniera permette infatti rotazioni localizzate, mentre il momento  $M_P$  rappresenta la reazione rotazionale esplicita dalla sezione d'incastro. Il sistema è quindi diventato labile, ma è in equilibrio per la particolare condizione di carico.

Si noti che si ha:

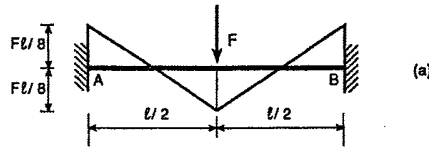
$$F_P = \frac{3}{2} F_e, \quad (18.26)$$

se con  $F_e$  si indica la massima forza applicabile nell'ambito del criterio delle tensioni ammissibili. Il rapporto 3/2 rappresenta quindi una sorta di fattore di sicurezza nell'ambito del criterio delle tensioni ammissibili, nei confronti dello stato ultimo plastico.



*non può sopportare ulteriori incrementi di carico.*

Si consideri ad esempio la trave doppiamente incastrata di fig. 18.13.a. Come si è già messo in evidenza al Paragrafo 13.3, i momenti di incastro e il momento in mezzzeria sono pari a  $F\ell/8$ , e tendono rispettivamente le fibre superiori e inferiori. Le sezioni d'incastro e quella di mezzzeria raggiungono pertanto contemporaneamente la plasticizzazione completa:



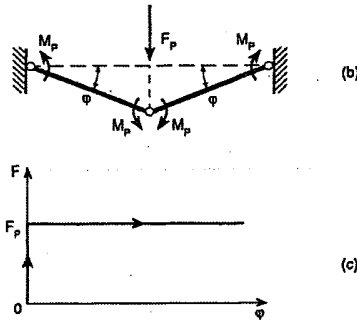
$$\frac{1}{8} F_P \ell = M_P \quad (18.28)$$

da cui si ottiene il carico di collasso  $F_P = 8 M_P / \ell$ .

Applicando il Principio dei Lavori Virtuali al meccanismo di collasso di fig. 18.13.b, è possibile riottenere il precedente valore:

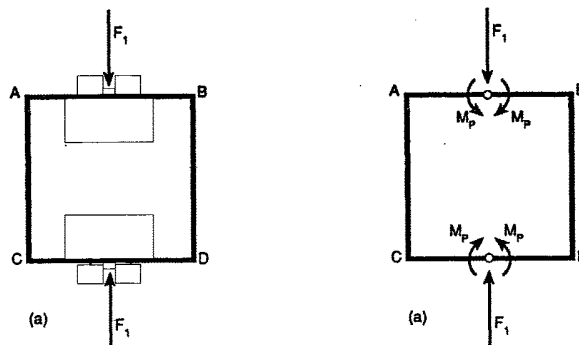
$$F_P \varphi \frac{\ell}{2} - 4 M_P \varphi = 0. \quad (18.29)$$

L'assenza di una fase incrudente nel processo di carico (fig. 18.13.c) è dovuta alla sostanziale isostaticità della struttura (v. Paragrafo 13.3)



Nel caso della maglia chiusa di fig. 15.8.a, il massimo momento flettente in fase elastica è quello che si ha nelle sezioni sollecitate. Esso vale  $3/16 F\ell$ , per cui il carico che produce le prime due cerniere plastiche (fig. 18.14.a) vale:

$$F_1 = \frac{16 M_P}{3 \ell}. \quad (18.30)$$



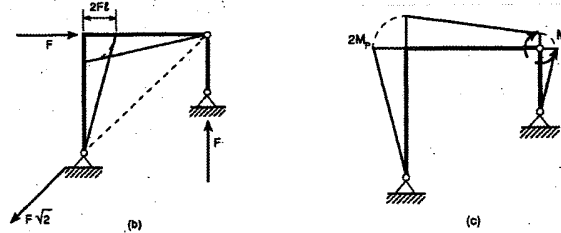


Per  $F > F_1$  il portale si trasforma in un arco a tre cerniere, caricato dalla forza esterna  $F$  e dai due momenti plastici  $M_p$ . I diagrammi parziali del momento relativi alle due sollecitazioni sono riportati nelle figg. 18.15.b, c. Il diagramma relativo ai momenti plastici  $M_p$  è virtuale, poiché mostra sul traverso valori  $M > M_p$ . Si forma una seconda cerniera plastica quando il momento globale nel nodo sinistro diventa uguale a  $M_p$  (tendendo le fibre interne):

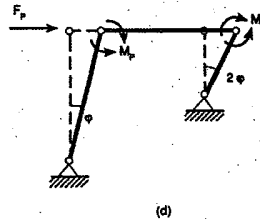
$$2 F_2 \ell - 2 M_p = M_p \quad (18.35)$$

da cui segue:

$$F_2 = F_p = \frac{3 M_p}{2 \ell} \quad (18.36)$$



Il valore di  $F_p$  si può trarre alternativamente dall'applicazione del Principio dei Lavori Virtuali al meccanismo di collasso di fig. 18.15.d:



$$F_p(2\ell\phi) - M_p\phi - M_p(2\phi) = 0 \quad (18.37)$$

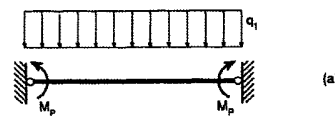
Il fattore di sicurezza vale in questo caso:

$$\frac{F_p}{F_e} = \frac{F_2}{\frac{2}{3}F_1} = \frac{3}{2} \frac{\frac{3 M_p}{2 \ell}}{\frac{23 M_p}{18 \ell}} = \frac{81}{46} \quad (18.38)$$

Sin qui si sono considerati esclusivamente carichi concentrati. Un primo semplice esempio di carico distribuito è fornito dallo schema di trave doppiamente incastrata di fig. 13.10.a. È noto dal Paragrafo 13.3 che il massimo momento in regime elastico è quello d'incastro, che vale  $q\ell^2/12$  (fig. 13.10.C). Quando perciò il carico esterno raggiunge il valore:

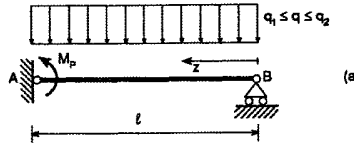
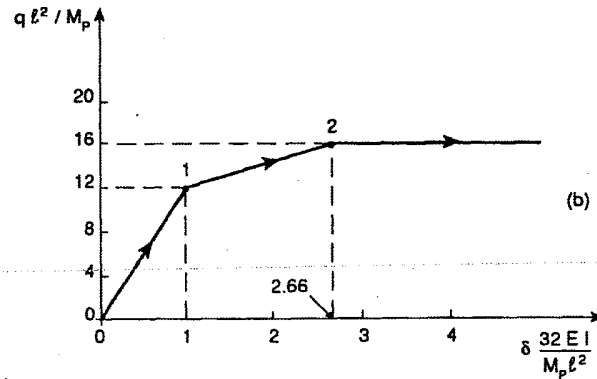
$$q_1 = 12 \frac{M_p}{\ell^2}, \quad (18.39)$$

si formano due cerniere plastiche agli incastri. Conformemente allo schema di fig. 18.16.a, la formazione della terza cerniera plastica in mezzeria avviene quando:



$$q_2 \frac{\ell^2}{8} - M_p = M_p; \quad (18.40)$$

Riportando i punti  $(\delta_1, q_1)$  e  $(\delta_2, q_2)$  sul piano adimensionalizzato di fig. 18.16.b, è immediato ricavare la curva  $\delta(q)$ , e cioè la risposta strutturale all'aumentare del carico esterno. Si può rilevare come tale risposta sia elastica tra i punti 0 e 1, incrudente tra i punti 1 e 2, e infine perfettamente plastica per  $\delta > \delta_2$ .



In regime elastico, il massimo momento flettente si ha all'incastro e vale  $q l^2 / 8$ .

Si forma quindi una prima cerniera plastica all'incastro per  $q_1 = 8(M_p / l^2)$ . A questo punto la struttura diventa isostatica e a comportamento globalmente incrudente, sino alla formazione della seconda e ultima cerniera plastica (fig. 18.17.a).

Mentre nel caso di sollecitazioni concentrate è semplice l'individuazione della posizione delle susseguenti cerniere plastiche, con i carichi distribuiti tale individuazione non è solitamente immediata. Ad esempio nel caso in questione, che non presenta neppure particolari simmetrie, è necessario calcolare il massimo della funzione momento in fase incrudente e determinare il valore  $q_2$  che rende questo massimo uguale al momento plastico  $M_p$ . In formule:

$$M(z) = -\frac{M_p}{l}z + \left( \frac{1}{2}q\ell z - \frac{1}{2}qz^2 \right) \quad (18.47.a)$$

$$T(z) = \frac{dM}{dz} = -\frac{M_p}{l} + \frac{1}{2}q\ell - qz. \quad (18.47.b)$$

Il taglio si annulla per:

$$z = \frac{\ell}{2} - \frac{M_p}{q\ell}, \quad (18.48)$$

da cui si ottiene:

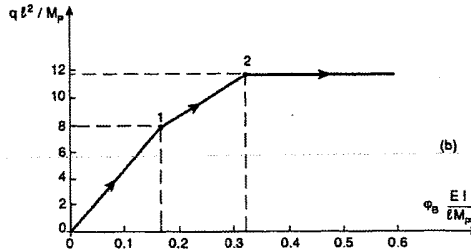
$$M_{\max} = \frac{1}{8}q\ell^2 \left( 1 - \frac{2M_p}{q\ell^2} \right)^2 \quad (18.49)$$

Le rotazioni quindi relative ai carichi notevoli  $q_1$  e  $q_2$  valgono rispettivamente:

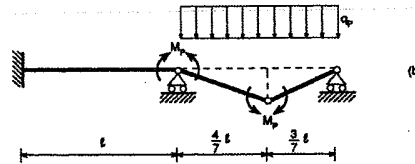
$$\varphi_{B1} = \frac{1}{6} \frac{M_P \ell}{EI}, \quad (18.56.a)$$

$$\varphi_{B2} = \frac{11.6568 - 4}{24} \frac{M_P \ell}{EI} \simeq 0.319 \frac{M_P \ell}{EI}. \quad (18.56.b)$$

Il diagramma  $\varphi_B(q)$  è riportato in forma adimensionale in fig. 18.17.b. Tra i punti 0 e 1 il comportamento globale della struttura è elastico, tra 1 e 2 esso è incrudente, mentre oltre risulta essere perfettamente plastico.



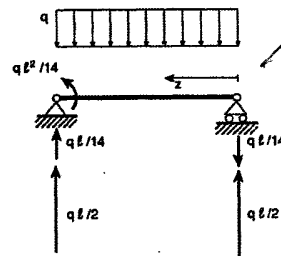
*La prima cerniera si forma nell'appoggio centrale.*



Nel caso della trave continua di fig. 13.33.a, il massimo momento flettente si raggiunge nella campata di destra, e sarà pertanto in corrispondenza di tale sezione che si formerà la prima cerniera plastica. Isolando la campata di destra (fig. 18.18.a) si ottiene:

$$M(z) = \frac{3}{7} q \ell z - \frac{1}{2} q z^2, \quad (18.57.a)$$

$$T(z) = \frac{dM}{dz} = \frac{3}{7} q \ell - q z. \quad (18.57.b)$$



*La cerniera nell'appoggio centrale si è già formata.*

Il taglio si annulla per  $z = 3/7 l$ , ove si verifica:

$$M_{\max} = \frac{9}{98} q \ell^2 \quad (18.58)$$

Ponendo  $M_{\max} = M_P$ , si ottiene il carico che produce la prima cerniera plastica:

$$q_1 = \frac{98}{9} \frac{M_P}{\ell^2} \simeq 10.89 \frac{M_P}{\ell^2}. \quad (18.59)$$

Dalla precedente relazione si ottiene:

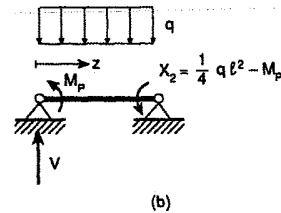
$$X_2 = \frac{1}{4}q\ell^2 - M_P. \quad (18.65)$$

L'equilibrio alla rotazione del traverso attorno al nodo di destra, fornisce il taglio  $V$  trasmesso al traverso dal piedritto di sinistra (fig. 18.19.b):

$$V\ell - \frac{1}{4}q\ell^2 - \frac{1}{2}q\ell^2 = 0, \quad (18.66)$$

Da cui si ottiene:

$$V = \frac{3}{4}q\ell. \quad (18.67)$$



Il taglio sul traverso si annulla, e pertanto il momento è massimo, per  $V=qz$ , e quindi per  $z = \frac{3}{4}l$

$$M_{\max} = M\left(\frac{3}{4}\ell\right) = \frac{3}{4}V\ell - M_P - \frac{1}{2}q\left(\frac{3}{4}\ell\right)^2 \quad (18.68)$$

Ovvero:

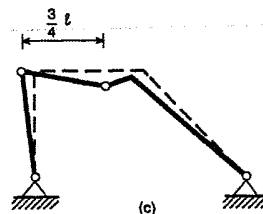
$$M_{\max} = \frac{9}{32}q\ell^2 - M_P. \quad (18.69)$$

La condizione di seconda e ultima plasticizzazione è  $M_{\max} = M_P$ , da cui si ricava il carico di collasso:

$$q_2 = q_P = \frac{64}{9}\frac{M_P}{\ell^2} \simeq 7.11\frac{M_P}{\ell^2} \quad (18.70)$$

mentre il meccanismo di collasso è costituito dal parallelogramma articolato di fig.18.19.c. Il fattore di sicurezza vale:

$$\frac{q_P}{q_e} = \frac{q_2}{\frac{2}{3}q_1} \simeq 1.93. \quad (18.71)$$



**LEGGE DI NORMALITÀ DELLA DEFORMAZIONE INCREMENTALE PLASTICA**

E' possibile evitare il laborioso calcolo incrementale plastico e fissare l'attenzione sulla condizione ultima di collasso, allorché l'intera struttura, o una parte di essa, subisca grandi incrementi di spostamento in seguito a piccoli incrementi di carico. Ciò può realizzarsi tramite i Teoremi dell'Analisi Limite Plastica, che verranno dimostrati nel paragrafo che segue.

Nel presente paragrafo verranno invece preliminarmente dimostrate due fondamentali proprietà, che devono rispettivamente possedere la superficie di plasticizzazione nello spazio delle tensioni principali:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (18.72)$$

e la deformazione incrementale plastica.

Come nella condizione uniassiale l'elemento di materiale è nello stato elastico per  $|\sigma| < \sigma_p$ , analogamente nella condizione biassiale (tensionale piana) l'elemento di materiale è nello stato elastico per  $F(\sigma_1, \sigma_2) < 0$ . La funzione  $F$  è stata ottenuta al Paragrafo 8.11, nell'ambito dei criteri di Von Mises:

$$F_M(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) - \sigma_p^2 = 0 \quad (18.73)$$

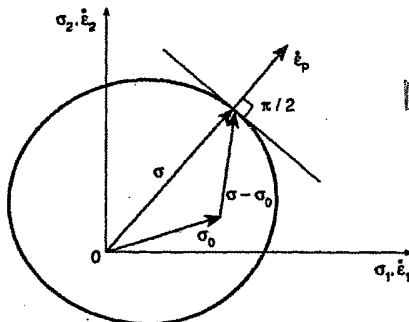
e di Tresca:

$$F_T(\sigma_1, \sigma_2) = \max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} - \sigma_p = 0 \quad (18.74)$$

Mentre nella condizione uniassiale le caratteristiche del flusso plastico sono evidenti, cioè si ha una dilatazione collineare alla tensione, nelle condizioni multiassiali è difficile intuire la meccanica della deformazione.

Si consideri un elemento di un solido bidimensionale soggetto ad uno stato tensionale (fig. 18.20):

$$\{\sigma_0\} = [\sigma_1, \sigma_2]^T \quad (18.75)$$



*da 0 applico sigma\_0  
poi applico sigma - sigma\_0  
poi torno a sigma\_0 in modo  
quasi statico.*

Il dominio elastico include l'origine,  $\vec{e}$  pertanto la disequazione (18.76), quando  $\{\sigma_0\} = \{0\}$ , diventa:

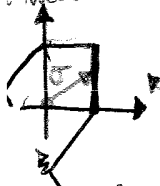
$$\boxed{\{\sigma\} - \{\sigma_0\}}^T \{\dot{\epsilon}_P\} \geq 0 \rightarrow \{\sigma\}^T \{\dot{\epsilon}_P\} = \Phi(\{\dot{\epsilon}_P\}) > 0, \quad (18.77)$$

Ove  $\Phi$  rappresenta l'energia dissipata nell'unità di volume e risulta essere una funzione soltanto della deformazione incrementale plastica.

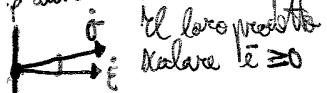
Questa considerazione resta valida anche quando la superficie di plasticizzazione presenta punti angolosi e tratti lineari. Perciò, la seguente asserzione è equivalente al Postulato di Drucker: l'energia dissipata nell'unità di volume è funzione soltanto della deformazione incrementale plastica.

Da questa asserzione, peraltro, è possibile dedurre la legge di normalità e la convessità della superficie di plasticizzazione.

indichiamo quale superficie incrementale la seguente:



materiale incrudente: a volta arrivato sul contorno (se materiale plasticizzato) non ancora aumentare la  $\sigma$  (case  $\dot{\sigma} > 0$ ) e la  $\dot{\epsilon}$  aumenterà anch'essa;



sono sup. di plasticizzazione naturale e elastico perf. elastico

una volta arrivato sul contorno non posso aumentare la  $\sigma \rightarrow$

$\dot{\sigma}$  rimane sul contorno, oltre la  $\dot{\epsilon}$  continua ad aumentare.

$\dot{\sigma}$  è prodotto reale = 0

materiale con softening a volta arrivato sul contorno  $\sigma$  diminuisce

è continua ad aumentare  $\dot{\epsilon}$  mentre  $\dot{\sigma}$  è negativo

non ad una prova di trazione uniaxiale  $\Rightarrow$  dato da la  $\sigma$  diminuisce, è come dire che il materiale si sta restringendo;



L'equazione (18.77) mostra infatti che ciascuno stato tensionale  $\{\sigma\}$  capace di produrre la deformazione incrementale plastica  $\{\dot{\epsilon}_P\}$ , deve trovarsi sul piano normale a  $\{\dot{\epsilon}_P\}$  e distante  $\Phi(\{\dot{\epsilon}_P\})$  dall'origine (fig. 18.22). Facendo ruotare  $\{\dot{\epsilon}_P\}$  attorno all'origine, tutti questi piani inviluppano la superficie di plasticizzazione, che risulta quindi essere convessa.

Se  $\{\dot{\sigma}\}$  è il vettore incrementale di tensione corrispondente alla deformazione incrementale plastica  $\{\dot{\epsilon}_P\}$ , si ha:

$$\{\dot{\sigma}\}^T \{\dot{\epsilon}_P\} \geq 0, \quad (18.78)$$

assumendo  $\{\sigma\}$  come stato tensionale iniziale e applicando la (18.76).

$$\boxed{\{\sigma\} - \{\sigma_0\}}^T \{\dot{\epsilon}_P\} \geq 0$$

Per un materiale elastico-perfettamente plastico si ha in particolare:

$$\{\dot{\sigma}\}^T \{\dot{\epsilon}_P\} = 0, \quad (18.79)$$

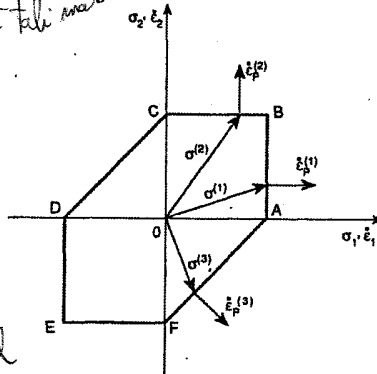
$> 0$  per materiali con incrudimento

mentre per un materiale ad incrudimento negativo (softening) risulta:

$$\{\dot{\sigma}\}^T \{\dot{\epsilon}_P\} < 0, \quad (18.80)$$

e il Postulato di Drucker è violato, cioè tali materiali non sono stabili secondo Drucker. In fig. 18.23 è rappresentato il criterio di Tresca in due dimensioni e i relativi meccanismi di flusso plastico (deformazioni incrementali plastiche). Lungo i lati AB, BC, DE, EF, si attiva solo una delle due dilatazioni principali, mentre lungo i lati CD ed FA, una dilatazione risulta positiva e l'altra negativa. Esse sono attivate contemporaneamente e con pari intensità.

è come dire che il



perché è funzione solo di  $\dot{\epsilon}_P$ .

automaticamente

Sappriamo che se data una certa  $\dot{\epsilon}_P \Rightarrow$  è definita anche  $\Phi(\dot{\epsilon}_P)$ .

Ma  $\Phi(\dot{\epsilon}_P) = \{\sigma\}^T \{\dot{\epsilon}_P\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  posso determinare quale, tra tutte le  $\sigma$ , è l'unica che produce per  $\dot{\epsilon}_P$  dati,  $\Phi(\dot{\epsilon}_P)$ .

proprio