



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 698

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Sannipoli

MATERIA: Geomatica
Prof. Cina

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

GEOMATICA - A.A. 2012-2013

1. INFORMAZIONI GENERALI

Corso:	Ingegneria Civile - 03FMCMX
Anno e p.d.:	2° anno 2° semestre
Orario:	lunedì: 11.30 – 14.30 aula 7N (1 modulo da 1.5 ore per sq.) martedì: 14.30 – 17.30 aula 7B Esercitazioni: LAIB 4D come da orario
Per un totale di:	6 crediti
Docente lezioni ed esercitazioni:	Prof. Alberto Cina – DIATI - tel.011.0907630 alberto.cina@polito.it
Squadre di esercitazione:	1° squadra: lettere M-Q 2° squadra: lettere R-Z
Ricevimento studenti:	mercoledì 10.30 presso DIATI su prenotazione via e-mail

2. MODALITÀ D'ESAME

L'esame consiste in una prova orale con una serie di domande riguardanti l'intero programma svolto nelle lezioni e nelle esercitazioni.

3. TESTI DI RIFERIMENTO

Testi consigliati:

- Cina, A. (2000). GPS. Principi, modalità e tecniche di posizionamento. CELID, Torino.
- Cina, A. (2000). Trattamento delle misure topografiche. CELID, Torino
- Comoglio, G. (2008). Topografia e cartografia. CELID, Torino.
- Manzino, A. (2001). Lezioni di Topografia – Otto Editore. In: <http://ebook.polito.it/pubbl.html>.
- Dispense e slides fornite durante il corso, reperibili sul sito della didattica

Per approfondimenti:

- Bellone T. (2006) – Appunti di trattamento delle osservazioni – Torino, Politeko.
- Inghilleri, G. (1970) - *Topografia Generale* - UTET – Torino.
- Kraus, K., 1994. Fotogrammetria. Vol.1 – Teoria e applicazioni. Traduzione di Sergio Dequal. Torino, Levrotto & Bella, 518 pp.
- Hofmann-Wellenhof et al (2008) – GNSS Global Navigation Satellite system. Springer – New York.
- Leick (2003) - Gps Satellite Surveying - J. Wiley – Canada. III Edizione.

4. NOTE ORGANIZZATIVE

Le esercitazioni saranno organizzate in 2 squadre. Si richiede, per motivi organizzativi, di attenersi rigorosamente alla suddivisione proposta. Le esercitazioni pratiche di misura si tengono all'esterno, ma il ritrovo è sempre presso il Laboratorio di Topografia del DIATI per ricevere le attrezzature. Per le esercitazioni su calcolatore il ritrovo è al LAIB 4D o LAIB DIATI (vedi calendario).

5. CALENDARIO E PROGRAMMA del corso di GEOMATICA - a.a. 2012-2013

Set.	Data	ore	L/E	Argomento
1	Lu 04/03/2013	11.30-13	L	Presentazione del corso. Trattamento delle misure: richiami di statistica, variabile statistica e casuale 2D e nD.
	Ma 05/03/2013	14.30-17.30	L	Correlazione lineare. Richiami su stima di parametri con minimi quadrati. Minimi quadrati: scarto teorico e stimato. Stima matrice varianza covarianza parametri.
2	Lu 11/03/2013	11.30-13	E sq.1	Es1 LAIB4D: esercizi mq - cambio sistema riferimento
	Lu 11/03/2013	13-14.30	E sq.2	Es1 LAIB4D: esercizi mq - cambio sistema riferimento
	Ma 12/03/2013	14.30-17.30	L	Affidabilità teorica, errori 1° e 2° tipo, data-snooping. Test adeguatezza del modello e numero di condizione.
3	Lu 18/03/2013	11.30-13	L	Matrice di ridondanza e relazione tra osservazioni e residui
	Ma 19/03/2013	14.30-17.30	L	Problemi di mq: equazioni delle reti geodetiche , loro linearizzazione e condotta dei calcoli. Ellissi d'errore, simulazione di reti e grandezze progettabili.
4	Lu 25/03/2013	11.30-13	L	Principi su minimi quadrati sequenziali e su filtro di Kalman



POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria dell'Ambiente, del Territorio e delle Infrastrutture

Introduzione al corso di GEOMATICA

Alberto CINA

*e-mail: alberto.cina@polito.it
Tel. 011-090 7630*

a.a. 2012-2013

Cosa è la GEOMATICA?

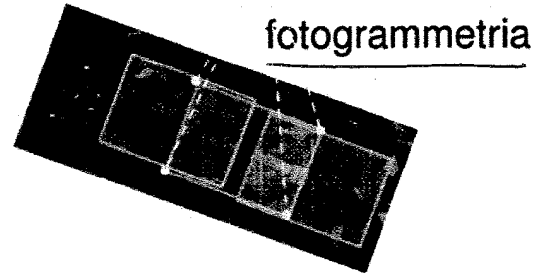
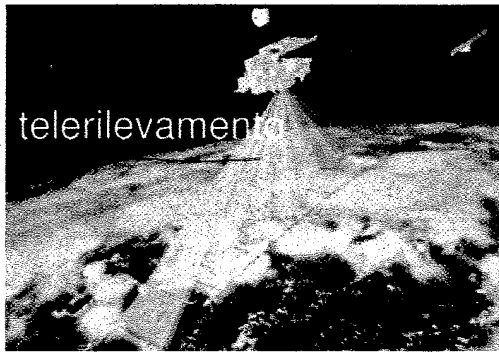
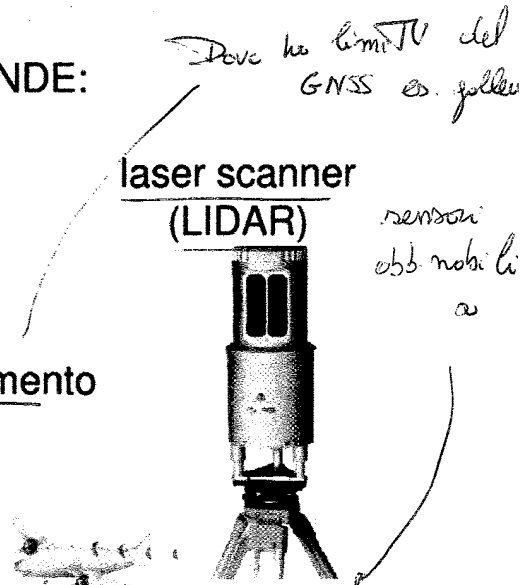
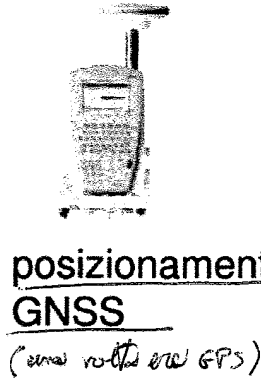
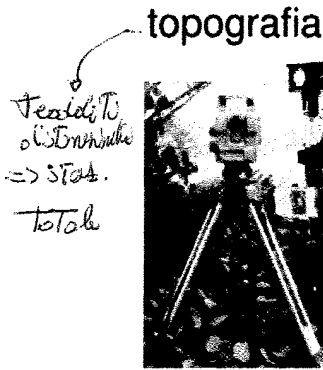
Geomatica: è la scienza che acquisisce, modella e analizza dati geografici spaziali **georeferenziati**

Geomatica: integra varie discipline come geodesia, cartografia, trattamento delle misure, topografia, fotogrammetria e telerilevamento, posizionamento GNSS e posizionamento inerziale, laser a scansione ...

Esse sono usate per produrre e gestire informazioni spaziali per operazioni tecniche, scientifiche, politico amministrative, legali ...

L'80% delle decisioni politiche sono prese in base a rilevanti considerazioni su dati spaziali!

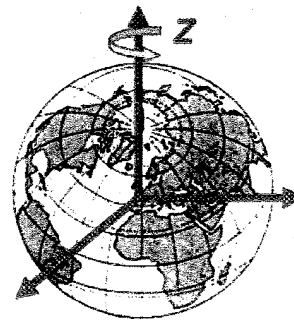
LA GEOMATICA COMPRENDE:



Arrivo a pixel con risoluzione a Terra di ~ 60 um

LA GEOMATICA COMPRENDE:

Cartografia numerica e SIT (Sistemi Informativi Territoriali)



PER DARE WORD. DEI DARE UN S.R.

documenti prendere misure dire. adottare e rullamento I.S.K.

Geodesia e sistemi di riferimento

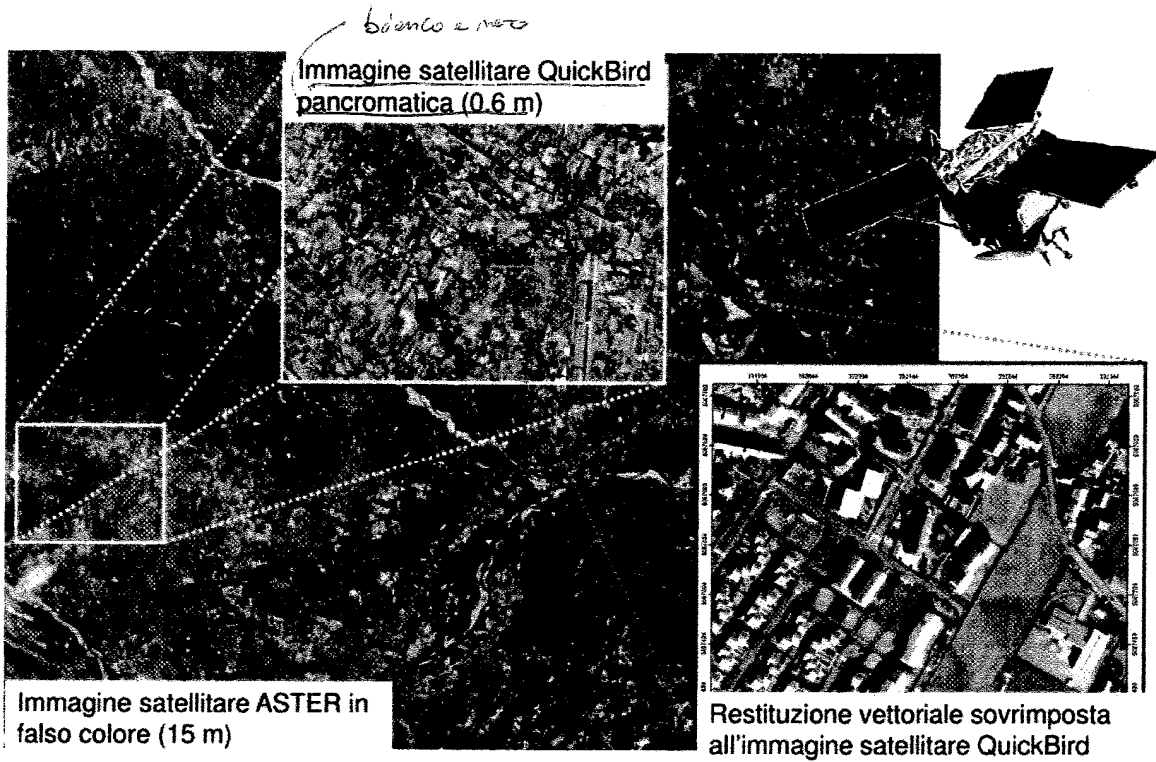
Trattamento statistico delle misure

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -F_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_3 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -F_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \\ b_1 \\ -b_2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ \epsilon_0 \\ c_1 \\ \epsilon_1 \\ c_2 \\ \epsilon_2 \\ \dots \\ \epsilon_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

Quando mett. assieme misure di origine X Met. ...

di nostra misura sono multiscale e multi-temporali

La conoscenza e la rappresentazione del territorio



INTEGRAZIONE DI SENSORI È:

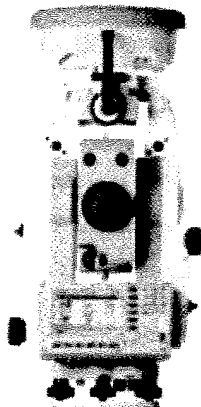
Accoppiamento intelligente delle misure che danno al loro posto col loro SP

Geomatica e sensori integrati

vecchi strumenti ottico-meccanici

• T2 + AGA14: basso grado d'integrazione

• Stazione totale: alto grado d'integrazione



• GPS + Total Station: SMARTSTATION

risolvere il DETALIO (integrazione) sensori x risolvere con uno le loro dell'alt

*Con in + GPS ho risolto il problema dell'appoggio in tempo reale
di problemi che nelle soluzioni*

Doppia COSTELLAZIONE GPS + GLONASS → oggi è facile

ad acquistare ricevitori con

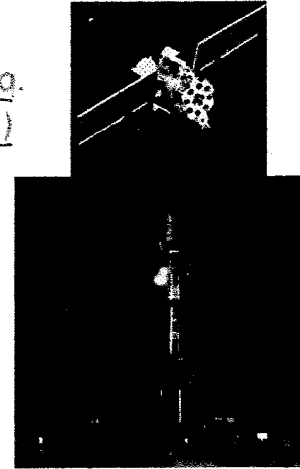
GNSS (Global Navigation Satellite System)

GPS: costellazione completa e operativa autonomamente
modernizzazione (nuovi codici e 3° frequenza) in atto

GLONASS: rilancio - (completamento 2011)
prevista modernizzazione (codici, 3° freq.
maggior longevità e precisione orbite ...)
oggi come integrazione al GPS

GALILEO: in costruzione (per ora sat. GIOVE A)
prevista 3° frequenza e servizi integrità
applicazioni standard e commerciali
Luci e ombre (ritardi) sull'esecuzione

COMPASS: costellazione cinese (prossima attivazione)
prima di GALILEO ?



QZSS: costellazione giapponese (integrazione a GPS)

Servizi Augmentation: -) reti stazioni GNSS a Terra e erogazione servizi
-) via satellite (EGNOS, WAAS, OMNISTAR)

*Non posso prescindere dai sistemi di miglioramento a Terra onde
su mezzi 100 stelle.*

Cosa offre oggi il mercato GNSS

Leica **Trimble** **Sokkia**

Ashtec-Magellan **Topcon** **Javad**

Novatel

NEW! **GMS-2**

Receivers **Software** **Antennas** **OEM Boards** **Heading & Attitude**

... e tanti altri ancora ...

*Tutti questi a breve non en' saranno
più a tent'anni se non verranno*

GEOMATICA

04/03/'13

Prof. ALBERTO CINA

Prenotazione ricevimento con e-mail.

EXAM: discussione delle esercitazioni

LUNEDÌ	18/3	STAZIONI TOTALI	} 13 ÷ 14,30
"	25/3	LIVELLI	

Possono usare Matlab o Excel

PAG. 4

TRATTAMENTO STATISTICO DELLE MISURE

Faccendo misure commetto 3 errori:

- GROSSOLANO errore nella registrazione dei dati. (Oggi non ho + x trascrizione ma lo strumento può commetterlo).
 Con 3 misure lo correggo → la 2ª è l'inverso della 1ª e la 3ª l'ovvero.

Lo ELIMINO E PROCEEDO AL TRATTAMENTO.

→ metodi automatici basati sulla statistica

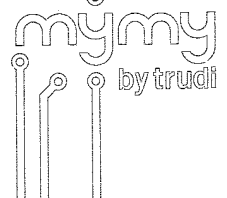
- SISTEMATICI (BIAS) hanno segno sempre e entità (es. deve eliminare quelli legati alla RETTIFICA)

Oggi sono + legati a effetti di rifrazione dell'atmosfera.

Mi è capitato a fare posizionamenti RELATIVI.

Misuriamo differenze di posizioni e non coord.

" di livelli e non quote.



F = FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

$F' = f$

②

↓ è comodo xché spesso è Tabulare

Devono sussistere le 2 condizioni (però affinché f possa definirsi funzione densità di probabilità)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \end{array} \right.$$

PAG. 15

MOMENTI DI VARIABILE CASUALE

$$m_k(x) = \sum_{i=1}^m x_i^k p_i$$

$1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{3}{6} + \frac{8}{6} + \frac{9}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$

1° ORDINE

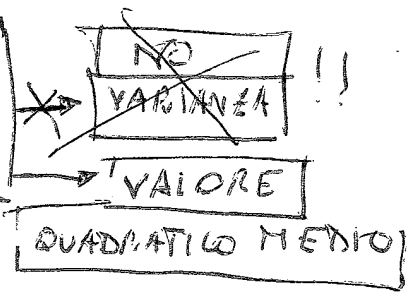
$$m_{1,x} = \sum_{i=1}^m x_i p_i = M(x) \rightarrow \text{MEDIA}$$

che è uguale a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

2° ORDINE

$$m_{2,x} = \sum_{i=1}^m x_i^2 p_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$



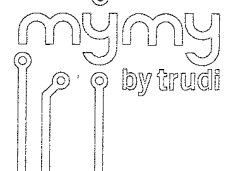
VARIANZA $\sigma^2 = \sum_{i=1}^m (x_i - m_{1,x})^2 p_i = M(v^2)$ è la media degli scarti al quadrato!
 $V_i = x_i - m_{1,x} \Rightarrow$ SCARTI $M(v) = M(v) = 0$
 $\sigma = \sqrt{\sigma^2} =$ sc. quad. medio

Se variando x variò anche y ho una variabile a 2 dimensioni;

Se aggiungo lo spazio ho una variabile a 3D; nel GPS ho

anche il Tempo \Rightarrow ho una variabile casuale a 4D.

Però arrivare a $n \rightarrow \infty$



GEOMATICA

05-03-2013

→ PAG. 19
 Consideriamo una variabile casuale a 2 dimensioni → la distribuzione di probabilità sarà in \mathbb{R}^2 (piano):

	X	X_1	X_2	X_3	...	X_n	
Y							
Y_1		P_{11}	P_{21}	P_{31}		P_{n1}	μ_1
		P_{12}	P_{22}	P_{32}		P_{n2}	μ_2
		...					
Y_5		P_{15}	P_{25}	P_{35}		P_{n5}	μ_5
		V_1	V_2	V_3		V_n	

condizioni affinché sia una dist. di probabilità

$$\begin{cases} P_{ik} \geq 0 \\ \sum_i \sum_k P_{ik} = 1 \end{cases}$$

DISTRIBUZIONE MARGINALE della X

DISTRIBUZIONE MARGINALE della Y: mi dice come si distribuisce l'attributo Y, indipendentemente dai valori di X.

DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA della X per $Y = Y_5$

→ DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA della Y per $X = X_1$

PAG. 25

Quando 2 VARIABILI sono indipendenti l'una dall'altra?

2 variabili sono indipendenti, se sono indipendenti tra loro le distribuzioni condizionate.

Se due distribuzioni sono indipendenti, vale il teorema della probab. composta:

$$P(X=X, Y=Y) = P(X=X) \cdot P(Y=Y) \text{ se } X \text{ e } Y \text{ INDIPENDENTI}$$

$$P(X=X, Y=Y) \neq P(X=X) \cdot P(Y=Y) \text{ se } X \text{ e } Y \text{ DIPENDENTI}$$

anche se un solo punto (faccio caso per caso, cioè: moltiplichiamo V_i per μ_j e verifichiamo che sia pari a P_{ij} . Facciamo tutto ciò per tutte le celle e, anche se in una sola cella si ha che $X_i \cdot Y_k \neq P_{ik}$ → le variabili X e Y saranno dipendenti tra loro)

La differenza rispetto al caso di variabile casuale 1D si ha a partire dai momenti di 2° ordine (perché possiamo definire un momento misto del 2° ordine):
 per variabili 2D

$$m_{xy} = \sum_i \sum_k x_i y_k p_{ik}$$

$$\sigma_{xy} = \sum_i \sum_k (x_i - m_{1x}) (y_k - m_{1y}) p_{ik} \quad \text{COVARIANZA} \quad (\text{è una misura della correlazione delle variabili})$$

Vediamo che significato attribuire a VARIANZA e COVARIANZA.
 anche alle 2 dimensioni → si passa da uno scalare ad una matrice.

$$\sigma^2 = \mathcal{H}(v^2)$$

↓
media degli scarti al quadrato

varianza

con \bar{x} la media? dati $a, b, c \Rightarrow m = \frac{a+b+c}{3}$
 definiamo un vettore:
 $V^T = (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$

$$m = \frac{V^T \cdot V}{3} = \frac{(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \\ \sqrt{c} \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} (a+b+c)$$

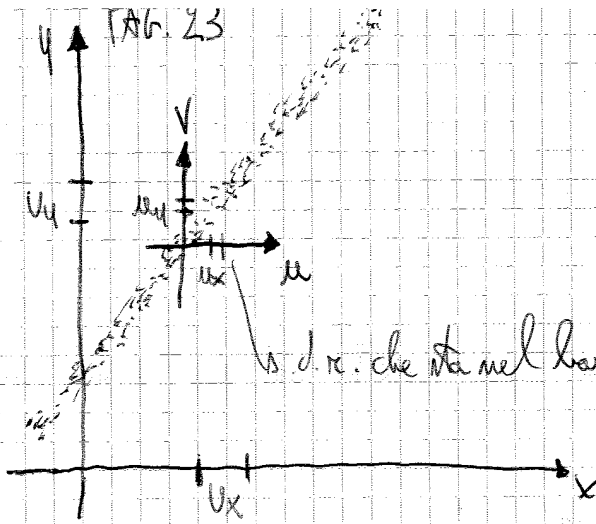
$$m_{3D} = \frac{V \cdot V^T}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \\ \sqrt{c} \end{pmatrix} \cdot (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} a & \sqrt{ab} & \sqrt{ac} \\ \sqrt{ab} & b & \sqrt{bc} \\ \sqrt{ac} & \sqrt{bc} & c \end{bmatrix}$$

SIMMETRICA

$$\sigma^2 = \mathcal{H} \left[(X - m_{1x}) \cdot (X - m_{1x})^T \right]$$

definiamo $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 ↓
 vettore

$$\sigma^2 = \mathcal{H} \left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} x - m_{1x} \\ y - m_{1y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - m_{1x} & y - m_{1y} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1^a \text{ colonna} & 2^a \text{ colonna} \\ \begin{pmatrix} (x - m_{1x}) & (y - m_{1y}) \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 2 \times 2 \end{matrix} \end{matrix} \end{matrix} \right] =$$



Se esiste correlazione lineare tra queste variabili x e y , continua ad esistere anche se cambio s.d.r.? S.

s.d.r. che sta nel baricentro della distribuzione

$$u = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$$

$$v = \frac{y - m_y}{\sigma_y}$$

la correlazione rimane lineare anche se trasformo il s.d.r. trasformo nel baricentro. Rimane lineare anche se stabilisco il s.d.r. \rightarrow dividiamo per σ .

Costruiamo un indice

$$r = \frac{\sum_i u_i v_i}{N}$$

la correlazione lineare non dipende nemmeno dalla numerosità del campione \rightarrow normalizziamo rispetto a N

se considero la distribuzione del disegno in alto avrà una sommaria fortemente positiva (perché i punti stanno quasi tutti tra il 2° e il 3° quadrante).

$$= \frac{\sum_i (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{N \sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

(diviso per N)
media delle variabili scarto moltiplicate = σ_{xy}

quindi r viene definito:
INDICE DI CORRELAZIONE LINEARE

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,1 & 5 \\ 0,1 & 2 & 10 \\ 5 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$



NO C_{xx} - vediamo perché:

$$R_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0,1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{2}} \approx 0,04 \quad (\text{variabili quasi incorrelate linearmente})$$

$$R_{yz} = \frac{10}{\sqrt{3} \sqrt{2}} > 1 \Rightarrow \underline{\underline{NO}} \text{ matrice di varianza-covarianza}$$

la matrice di varianza-covarianza ha risvolti anche pratici (chi fa misure catastali).

▶ Pg. 31

LEGGE DI PROPAGAZIONE DI VARIANZA E COVARIANZA

Cosa ci serve propagare varianza e covarianza? Io non sono capace di misurare le coordinate, ma solo misure funzionali (angoli, distanze...) → abbiamo propagare la varianza delle misure per trovare la varianza delle grandezze che mi interessano.

Facciamo una dimostrazione:

Ipotesi: 1) X e Y variabili casuali ^{con} C_{xx} C_{yy}

2) $Y = AX$ (legame lineare tra X e Y)

Tesi: $C_{yy} = AC_{xx}A^T$

Dimostrazione:

$$C_{yy} \stackrel{\text{per definizione}}{=} M [(Y - m_{1y})(Y - m_{1y})^T] \quad \text{ma } Y = AX$$

ricordiamo che esiste il teorema della media: $m_{1y} = A \cdot m_{1x}$

è possibile farlo solo se il legame tra X e Y è lineare ($Y = AX$)

ricordiamo che: $(ABC) = (AB) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}\sigma_1^2 + a_{12}\sigma_{12}) & (a_{11}\sigma_{12} + a_{12}\sigma_2^2) \\ (a_{21}\sigma_1^2 + a_{22}\sigma_{12}) & (a_{21}\sigma_{12} + a_{22}\sigma_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}^2\sigma_1^2 + 2a_{11}a_{12}\sigma_{12} + a_{12}^2\sigma_2^2) & / \\ / & / \end{bmatrix} =$$

dunque (noto caso ad 1 sola dimensione):

$$Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2$$

$$\sigma_{Y_1}^2 = a_{11}^2\sigma_1^2 + a_{12}^2\sigma_2^2 + 2a_{11}a_{12}\sigma_{12}$$

CASO VARIABLE

1D.

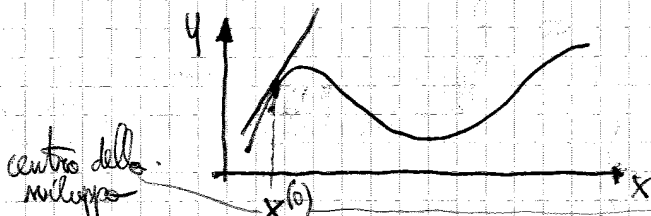
se le variabili fossero incorrelate (covarianza = 0) \Rightarrow la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze, ognuna moltiplicata per il quadrato del coefficiente.

La varianza di una differenza è la SOMMA delle varianze SEMPRE

CASO NON LINEARE: \rightarrow PAG. 32

$$f(X_1, X_2, \dots, X_m)$$

supponiamo che la funzione sia regolare e linearizzabile \Rightarrow in un punto possiamo sviluppare la funzione in serie al 1° ordine.



è importante ricordare questo, perché al variare di un valore di molto la tangente alla curva.

Quindi, la σ_x^2 nel caso non lineare \bar{x} :

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_n^2 +$$

somma delle varianze moltiplicate per i coeff. al quadrato
se variabili correlate

$$+ 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \sigma_{12} + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \sigma_{13} + \dots$$

PRINCIPIO DEI MINIMI QUADRATI → PAG. 45

Cominciamo dalla misura di una sola grandezza eseguita con strumento con stessa precisione e stesso operatore.

$$O \rightarrow (O_1, O_2, \dots, O_m)$$

↑
popolazione delle osservazioni

il teorema centrale della statistica ci dice che queste osservazioni si distribuiscono secondo una distrib. normale (N.B. il prove. dei minimi quadrati non richiede l'ipotesi di normalità per essere dimostrato)

$$dp(O_i) = f(O_i) dO$$

facciamo l'ipotesi che O_1, \dots, O_m INDIPENDENTI (non c'è correlazione):

$$dp(O_1, \dots, O_m) = (f(O_1) f(O_2) \dots f(O_m)) dO^m$$

ricordiamo che $f(O_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(O_i - m)^2}{2\sigma^2}}$ distrib. normale di Gauss

$$f(O_1, \dots, O_m) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}} \cdot e^{-\frac{\sum_i (O_i - m)^2}{2\sigma^2}}$$

FUNZIONE DI VEROSIMIGLIANZA
 ↓

Introduciamo un coeff. di omogeneizzazione:

$$PESO = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} = p_i \quad (\text{il peso è proporzionale al reciproco della varianza})$$

σ_0^2 è una costante che rappresenta la varianza che attribuiamo ad una popolazione che ha peso unitario.
 varianza dell'unità di peso

↑ peso ↑ precisione misura ↑ importanza che la misura dia alla stima

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i}$$

$$\rightarrow f(\theta_1) = \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{2\pi} \sigma_0} e^{-\frac{p_1(\theta_1 - m)^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$\rightarrow f(\theta_1, \dots, \theta_n) = \frac{\sqrt{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}}{(2\pi \sigma_0^2)^{n/2}} e^{-\frac{\sum_i p_i (\theta_i - m)^2}{2\sigma_0^2}} = \text{MAX} \rightarrow$$

↓
voglia che sia

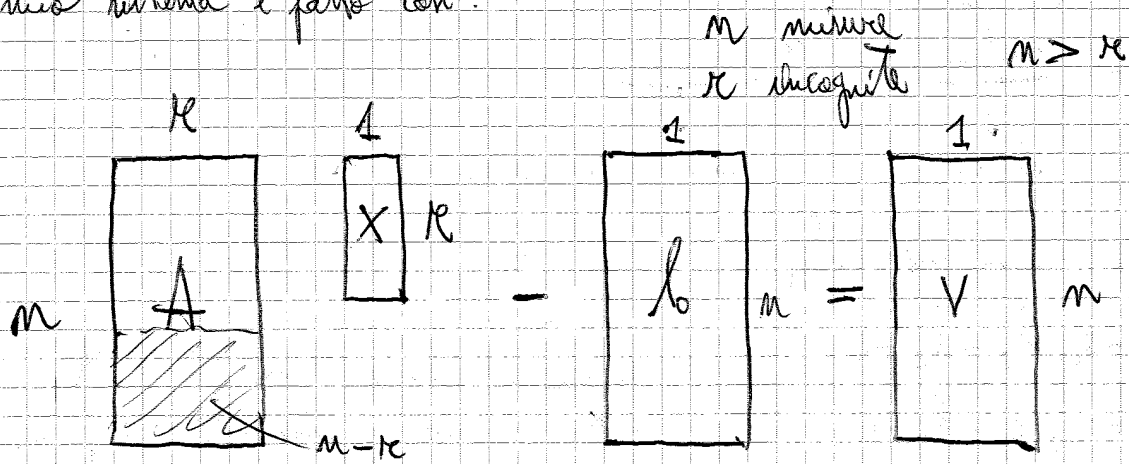
$$\rightarrow \text{devo fare una derivata: } \frac{\partial \sum_i p_i (\theta_i - m)^2}{\partial m} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cancel{p} \sum_i (\theta_i - m) \cdot p_i = 0 \rightarrow m \sum p_i = \sum p_i \theta_i \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{m} = \frac{\sum_i p_i \theta_i}{\sum_i p_i}$$

MEIA PONDERATA
(o MEIA PESATA).

Il mio sistema è fatto con:



Ho un sistema con k incognite più v scarti incogniti → alla fine ho più incognite che equazioni!

Per determinare gli scarti applico il principio dei minimi quadrati:

k componenti di scarti, conoscere le misure tecniche!!!

$$\sum p_i v_i^2 = \text{minimo}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sum_i p_i v_i^2}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \sum_i p_i v_i^2}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \sum_i p_i v_i^2}{\partial x_k} = 0 \end{cases}$$

SISTEMA
NORMALE $k \times k$

Se non abbiamo singolarità → la matrice, essendo quadrata, è invertibile, dunque:

$$N X = T_m \Rightarrow \hat{X} = N^{-1} T_m$$

è una X stimata al principio dei minimi quadrati (⇒ 1)

Scriviamo in forma di matrice:

$$\begin{bmatrix} (a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2) & (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}) \\ \text{simmetrica} & \\ & (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}l_{01} + a_{12}l_{02} + a_{13}l_{03} \\ a_{12}l_{01} + a_{22}l_{02} + a_{32}l_{03} \end{bmatrix} \Rightarrow X = N^{-1} \cdot T_m$$

Vogliamo come possiamo esprimere N e T_m in funzione della matrice A :
 prendiamo la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad l_0 = \begin{pmatrix} l_{01} \\ l_{02} \\ l_{03} \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{01} \\ l_{02} \\ l_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2) & (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}) \\ \text{sim.} & (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow N = A^T \cdot A$$

$$T_m = A^T \cdot l_0$$

$$\text{Dunque: } AX - l_0 = v \Rightarrow X = N^{-1} \cdot T_m = (A^T A)^{-1} \cdot (A^T l_0)$$

$$R = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos R_x & \sin R_x \\ 0 & -\sin R_x & \cos R_x \end{bmatrix}}_{R_x} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos R_y & 0 & -\sin R_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin R_y & 0 & \cos R_y \end{bmatrix}}_{R_y} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos R_z & \sin R_z & 0 \\ -\sin R_z & \cos R_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_z}$$

Nei cambi di s.d.r. le rotazioni sono di qualche manciata di secondi $\Rightarrow R$ piccolo \Rightarrow

$\Rightarrow \sin R \approx R$
 $\Rightarrow \cos R \approx 1$

$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_z & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ scio prima $\begin{bmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ & 1 & R_x \\ & & 1 \end{bmatrix}$ e poi mi ricordo che

la matrice in 3D è simmetrica con il segno cambiato \Rightarrow non ande la restante parte.

Come stimo i 4 parametri? Devo avere un certo numero di punti noti: quanti me ne servono? Almeno 3 punti (\Rightarrow 3 equazioni in 4 incognite \Rightarrow minimi quadrati).

$$X_R = T + \lambda R X_W$$

diciamo che $T = T^{(0)} + \Delta T$ *approssimato*

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \Delta \lambda = 1 + \Delta \lambda$$

$$R = I + \Delta R$$

matrice identità
piccola variazione ΔR
fuori diagonale (vedi sopra come è fatta R!)

relativamente quando cambio i s.d.r. ho fattori di scala (distorsioni, ...) molto piccoli (relativamente circa 1,0001...)

$$\Rightarrow X_R = T^{(0)} + \Delta T + (1 + \Delta \lambda) (I + \Delta R) X_W = T + \Delta T + X_W + \Delta R X_W + \dots$$

trascurabile

GEOMATICA

12-03-2013

(TEST per valutare la bontà delle osservazioni (vedremo i TEST più avanti))
 (Ad es: i test consentono di misurare il problema del mal condizionamento)

Ripartiamo da:

$$AX - l_0 = v$$

Minimo quadrati: $\sum p_i v_i^2 = \min \Rightarrow \hat{X} = N^{-1} T_m$

arriva a

$N = A^T A$

$T_m = A^T l_0$

Facciamo il caso di misure con diversa precisione (cioè le misure sono estratte tutte da popolazioni diverse (cambio strumento, operatore...)).

a) $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$

$\sigma_0^2 \rightarrow$ varianza dell'unità di peso

$\sigma_i^2 \rightarrow$ varianza della misura (es. nelle misure di livellazione, la varianza è inversamente proporzionale alla lunghezza).

Quando vedo in n-dimensioni, ho una MATRICE DEI PESI:

$P = \begin{pmatrix} p_1 & & \\ & p_2 & \\ & & \dots \\ & & & p_n \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \equiv 0 & \text{le misure INCORRELATE (es. misure angoli con teodolite e distanze con distanziometri per trovare poi le coordinate).} \\ \neq 0 & \text{le misure CORRELATE (le faccio misure dirette).} \end{cases}$

$A_p = \begin{bmatrix} a_{11} \sqrt{p_1} & a_{12} \sqrt{p_1} \\ a_{21} \sqrt{p_2} & a_{22} \sqrt{p_2} \\ a_{31} \sqrt{p_3} & a_{32} \sqrt{p_3} \end{bmatrix}$

$l_p = \begin{bmatrix} \sqrt{p_1} \cdot l_{01} \\ \sqrt{p_2} \cdot l_{02} \\ \sqrt{p_3} \cdot l_{03} \end{bmatrix}$

(vedi fine pag. 53 libro)

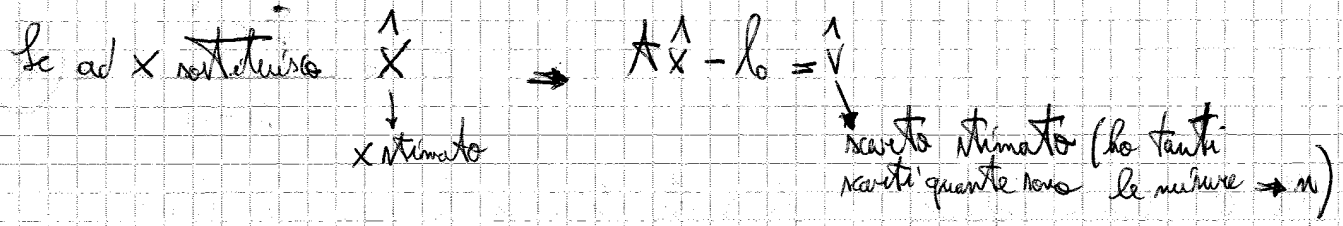
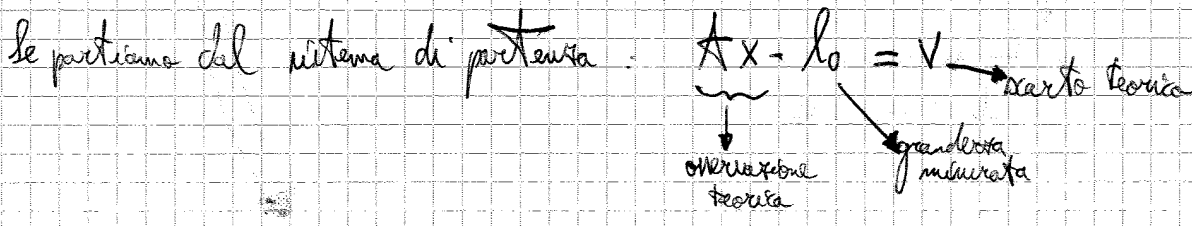
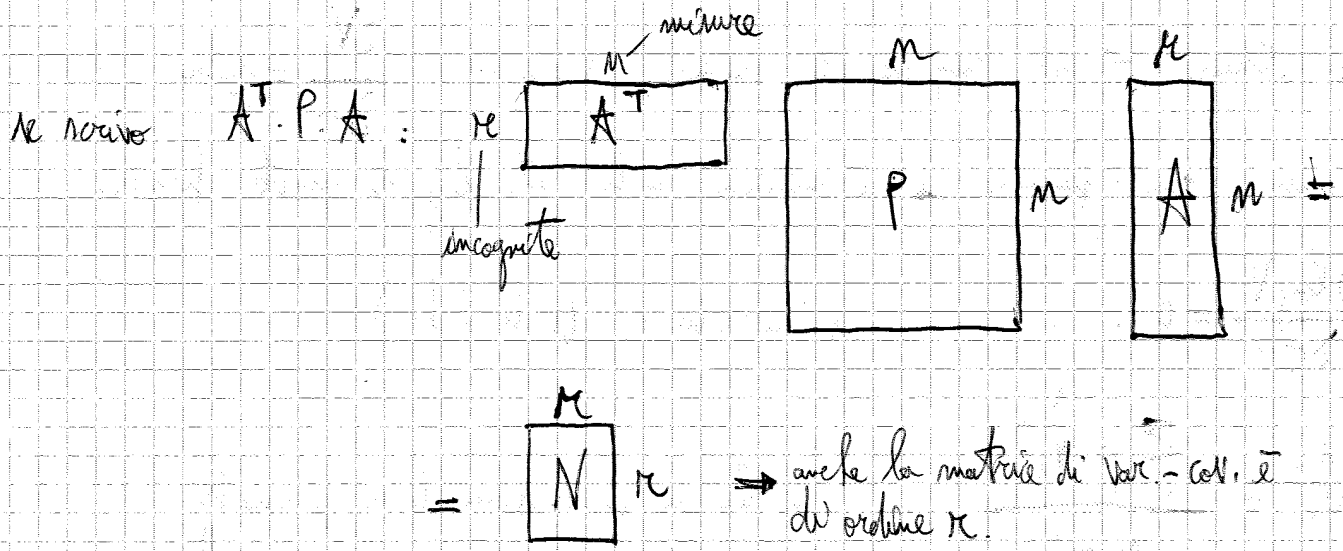
$$\hat{X} = \underbrace{(A_p^T A_p)^{-1}}_N \cdot \underbrace{A_p^T l_p}_{T_m}$$

$$= \sigma_0^2 N^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$N^{-1} = Q_{xx}$$

MATRICE DEI COFATTORI DEI PARAMETRI



I minimi quadrati mi servono sì per fare una compensazione degli errori accidentali, ma mi servono anche per accorgermi degli errori grossolani.

STIMA DI $\hat{\sigma}_0^2$ dal campione di misure: PAG. 54

il σ_0^2 iniziale è un σ_0^2 a priori "ARBITRARIO" perché non modifica la stima dei parametri, perché:

$$X = (\underbrace{A^T P A}_{\sigma_0^2 \text{ (el)}^{-1}})^{-1} \underbrace{A^T P l_0}_{\sigma_0^2 \text{ (el)}^{-1}}$$

si elidono a vicenda quindi σ_0^2 può essere arbitrario

SILMA DELLA MATRICE DI RIDONDANZA PAG. 57
 Vediamo ora che relazione c'è tra misure e scarti:

Partiamo dall'espressione dello scarto stimato:

$$\hat{v} = \hat{x} - l_0 = A \cdot \underbrace{(N^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot l_0)}_{\substack{\text{grandezza realmente} \\ \text{osservata}}} - l_0 =$$

\downarrow grandezza stimata: $A \hat{x}$

$$= \underbrace{(AN^{-1}A^T P - I)}_{\substack{\text{preziosi la} \\ \text{per convenzione la chiamiamo con}}}} \cdot l_0 = -R$$

R: MATRICE DI RIDONDANZA

$$\rightarrow R = I - AN^{-1}A^T P \quad (aa)$$

La matrice di ridondanza ha dimensione $(m \times m)$ ed ha queste caratteristiche:
 Intanto diciamo che i ci interesseranno solamente i valori sulla diag. principale:

$$R = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \dots & \kappa_{1j} \neq 0 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \kappa_{mn} \end{bmatrix}$$

Questa matrice non è necessariamente simmetrica.

ni ha sempre: $0 \leq \kappa_{ii} \leq 1$

ridondanze locali

- TRACCIA (R) = $\sum_{i=1}^m \kappa_{ii} = \underbrace{m - r}_{\substack{\text{RIDONDANZA} \\ \text{GLOBALE}}}$

STIMA DELLA MATRICE DI VARIANZA-COVARIANZA DEGLI SCARTI C_W

PAG. 58

$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \Rightarrow$ vogliamo ottenere $\sigma_{v_i}^2$ (cioè la varianza dei residui), che si troverà nella matrice C_W :

riappiamo che: $\hat{V} = -R b_0$

↓
(co (nota))

$C_W =$ $(n \times n)$ $\begin{bmatrix} \sigma_{v_1}^2 & \sigma_{v_1 v_2} & \dots \\ \sigma_{v_1 v_2} & \sigma_{v_2}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sigma_{v_m}^2 \end{bmatrix}$

matrice di var. cov. degli scarti V C_W (da determinare)

Propagazione della varianza:

$$C_W = (-R) C_{ll} (-R)^T = (AN^{-1}A^T P - I) \cdot \sigma_0^2 \cdot P^{-1} \cdot (AN^{-1}A^T P - I)^T =$$

↓
 $\sigma_0^2 \cdot P^{-1}$

$$= \sigma_0^2 \cdot (AN^{-1}A^T - P^{-1}) \cdot (P \cdot A \cdot N^{-1} \cdot A^T - I) =$$

$$= \sigma_0^2 \cdot (AN^{-1}A^T P AN^{-1}A^T - AN^{-1}A^T - AN^{-1}A^T + P^{-1}) =$$

$$= \sigma_0^2 \cdot (A \cdot N^{-1} \cdot A^T - AN^{-1}A^T - AN^{-1}A^T + P^{-1}) =$$

$$= \sigma_0^2 \cdot (AN^{-1}A^T + P^{-1}) = \sigma_0^2 \cdot Q_W$$

Q_W

↓
MATRICE DEI COFATTORI DEGLI SCARTI V

che relazione c'è tra Q_W e la R ?

$$Q_W = (P^{-1} - AN^{-1}A^T), \quad R = I - AN^{-1}A^T P$$

\Rightarrow $R \cdot P^{-1} = Q_W$

→ $N = A^T P A$ PROGETTABILE (perché P e A lo sono)

→ N^{-1} PROGETTABILE

→ $C_{XX} = \sigma_0^2 N^{-1}$ è PROGETTABILE se ipotizzo un σ_0^2 a priori

Insomma anche le reti che dovremo fare si progettano (dopo aver capito quali misure saranno le più o le meno produttive).

Se si progettano tutte le matrici di cui sopra, allora:

$R =$ PROGETTABILE (e ci servirà progettabile per l'affidabilità, cioè per poter in anticipo progettare reti affidabili controllate sotto l'aspetto degli errori grossolani)

PICCOLO APPROFONDIMENTO RELATIVO ALLA MATRICE A SCRITTA NELLA PAG. PRECEDENTE:

esempio:

$$d_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

è un'equazione non lineare, quindi posso moltiplicarla in serie

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{approssimato}}{=} d_{12}(0) + \left(\frac{\partial d_{12}}{\partial x_1}\right) x_1 + \left(\frac{\partial d_{12}}{\partial x_2}\right) x_2 + \left(\frac{\partial d_{12}}{\partial y_1}\right) y_1 + \\ &+ \left(\frac{\partial d_{12}}{\partial y_2}\right) y_2 \end{aligned}$$

sono i termini che metto nella matrice al posto delle crocette

WILCOXSON: sottoponiamo a test il RESIDUO NORMALIZZATO:

$$W_i = \frac{V_i - \bar{\mu}}{\sigma_{V_i}}$$

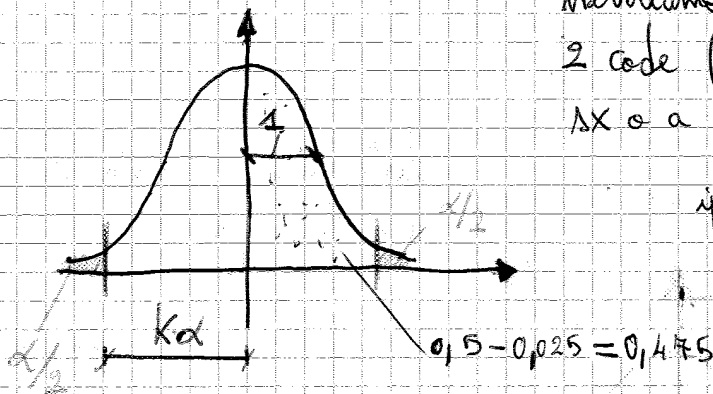
media

$W_i \in N(0, 1)$ (questi li posso confrontare, perché \in alla stessa distr.)

per calcolare la probabilità dei valori all'interno di un certo intervallo:

$\alpha\%$ = livello di significatività $\rightarrow K_\alpha$ = intervallo di confidenza
 ↓
 devo ricavare un

prendiamo questa distr. normale standardizzata:



stabiliamo $\alpha\%$, il quale individua 2 code (l'errore può scappare a $\pm x$ o a $\pm x$)

ipotizziamo $\alpha = 5\%$

$$W_i = \frac{V_i}{\sigma_{V_i}} \leq K_\alpha$$

ovvero il mio scarto deve cadere all'interno dell'intervallo $\pm K_\alpha$ di ampiezza

se accade che $W_i > K_\alpha$ (casi rari, ricade, all'interno di una delle 2 aree verdi) possono essere successi 2 casi: (non so con certezza quale) delle 2 mi giustifica

1) $W_i \notin N(0, 1)$ ho commesso un errore grossolano

2) $W_i \in N(0, 1)$ ma ho un evento raro con $\alpha\%$ di probabilità

Se accetto la 1) \Rightarrow elimino la misura ma permangono $\alpha\%$ di probabilità di aver escluso una misura corretta
ERRORE DEL 1° TIPO (errore che si commette quando si rigetta una misura corretta)

$$S_0 = K_\alpha + K_\beta$$

Esempio: calcoliamo S_0 ipotizzando

(α e β me li forniscono il capitato di appalto)

$$\alpha = 5\% \rightarrow \alpha/2 = 2,5\% \Rightarrow K_\alpha = 1,96$$

$$\beta = 10\% \Rightarrow K_\beta = 1,28$$

nella tab. 2 devo cercare $0,5 - 0,1 = 0,40$

$$\Rightarrow S_0 = 3,24$$

mi serve per definire il THEORETICAL RELIABILITY (affidabilità teorica o esterna): minimo errore che può essere rilevato dal test sul residuo normalizzato; viene indicato con:

MDB: minimum detectable bias

(il test aveva una soglia al di sopra della quale "sì" e al di sotto "no")

$$MDB = \Delta L_{oi} = \frac{S_0}{K_{ii}} \sigma_i = S_{oi} \cdot \sigma_i$$

↓
affidabilità teorica

quindi
non rilevo errori pari alla precisione della misura (σ_i),
ma più grandi (moltiplica σ_i per un valore $S_{oi} > 1$)
class. per errore =

Vogliamo che la ridondanza locale delle misure sia il più possibile elevata (sempre nel rispetto dell'economicità) $\Rightarrow K_{ii}$ deve essere sempre maggiore di 0,2 - 0,3 (dobbiamo cercare di fare ciò)

non superiore a tali valori

Apprendici sui MINIMI QUADRATI:

possiamo dimostrare tale principio senza l'ipotesi di normalità:
 - minimizzazione di una norma → (DISTANZA AL²)
 - possiamo dimostrarlo come

$$- AX = l \rightarrow X = \text{inv}(A) \cdot l$$

anche se A non ha rango massimo, non è detto che A non sia invertibile, ma, anzi, se possiamo calcolare la pseudo inversa $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$

$$\rightarrow X = A^+ l_0 = (A^T A)^{-1} A^T l_0$$

(ritroviamo la stessa formula che troviamo dall'applicazione dei minimi quadrati)

Vediamo ora un altro TEST:

TEST di ADEGUATEZZA del MODELLO: PAG. 60

$$AX - l_0 = V, \quad \text{Cov} \rightarrow P = \sigma_0^2 \cdot \text{Cov}^{-1}$$

$$\frac{1}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_i p_i v_i^2}{n-k} = \frac{V^T P V}{n-k}$$

RIGUARDO (D)

Se lo fatto le misure bene → il $\frac{1}{\sigma_0^2}$ sarà piccolo
 " " " male " " grande

metto a TEST l'ipotesi H_0 :

$$H_0: \frac{1}{\sigma_0^2} = 1$$

ipotesi che cioè è vero che il $\frac{1}{\sigma_0^2}$ (quello fidei) sia pari a quello ipotizzato (σ_0^2)

cioè quello ottenuto alla fine del procedimento di stima

a priori naturalmente

stabiliscono $\alpha\% \rightarrow K_\alpha$

se è vero che $V_i \in N \rightarrow V_i^2 \in \chi^2$
 allora...

$$\left(\sum_{i=1}^m V_i^2 \in \chi_m^2 \right)$$

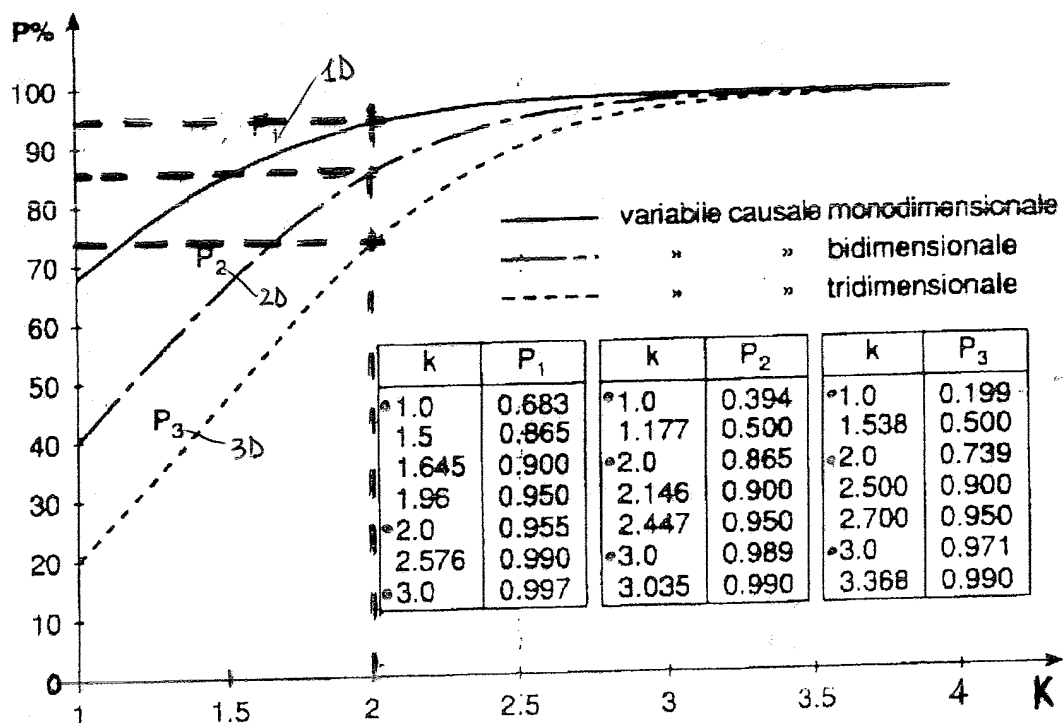
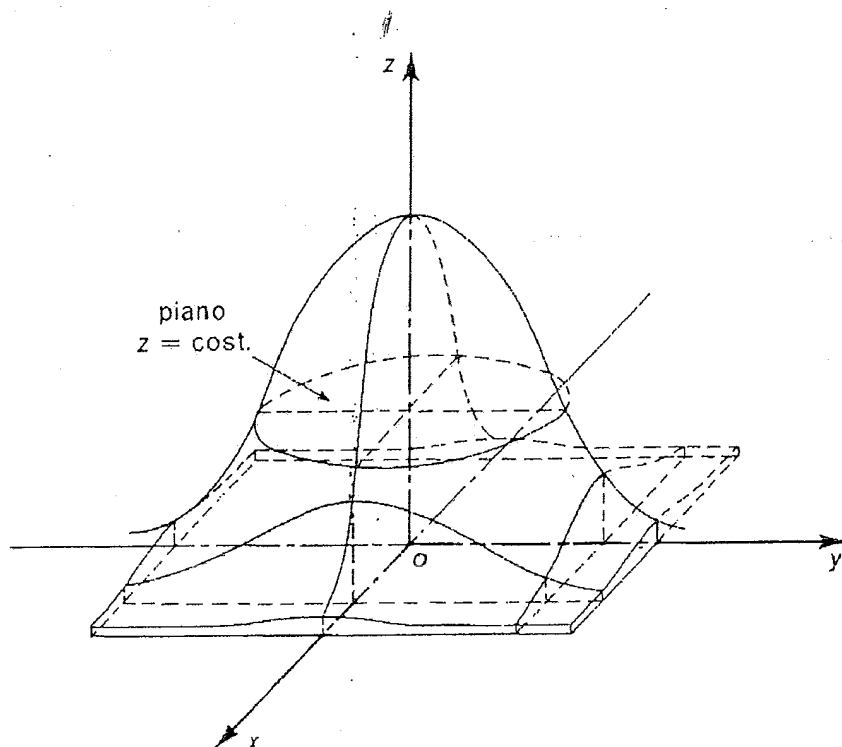
di questo con 24

(i motivi vanno ricercati tutti nel riquadro 1) pag. 24 appunti

- Vediamo i motivi per i quali il test sarebbe potuto non passare:
- 1 ho sbagliato a compilare la matrice A ($Ax - b_0 = v$)
 - 2 errori grossolani \Rightarrow scarti v elevati $\Rightarrow \frac{v^2}{\sigma_0^2} = \sum_i p_i v_i^2$ elevato \Rightarrow
 \Rightarrow mi andrò a trovare a destra del limite linee di destra
 - 3 sottostima o sovrastima (a seconda di dove esce il test) di C_{ff} , cioè errore nella matrice P , ovvero la precisione che ho raggiunto nelle misure non è quella che mi aspettavo.

Primo escludere 1, possiamo individuare 2 con i test, mentre 3 è molto frequente (non sovrastima, ma sottostima è molto frequente).
 La 3 non influenza sulla stima dei parametri, ma sulla stima della matrice di var. - cov. dei parametri.

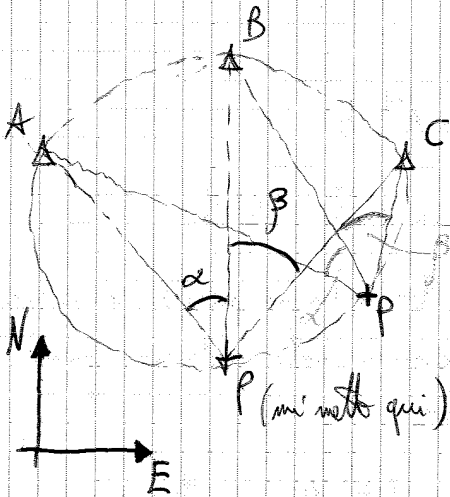
Variabile a due dimensioni: distribuzione normale



$$P_{(M-k\sigma, M+k\sigma)}$$

Comporta un grande errore nella stima dei parametri del piano.

Esempio:

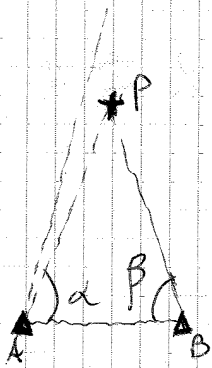


Rafforzamento per intersezione (vecchio metodo in topografia).

Per 3 punti passa una circonferenza. Supponiamo, per sfortuna, che la circonferenza passi anche per P (nesso).
 Se prendiamo P e lo spostiamo lungo la circonferenza, noteremo che gli angoli α e β non sono cambiati \Rightarrow il problema è indeterminato (la matrice non si inverte, perché $\chi_{\infty} = 0$).

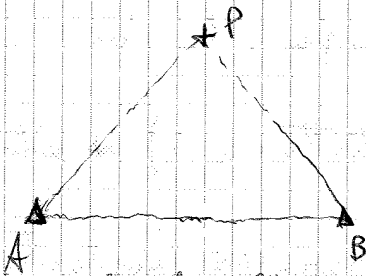
Esempio:

intersezione in avanti



P è incognita.

Misuro α e β a partire da A e B

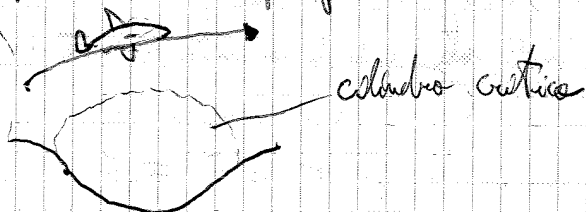


Triangolo equilatero

(triangolo isoscele)

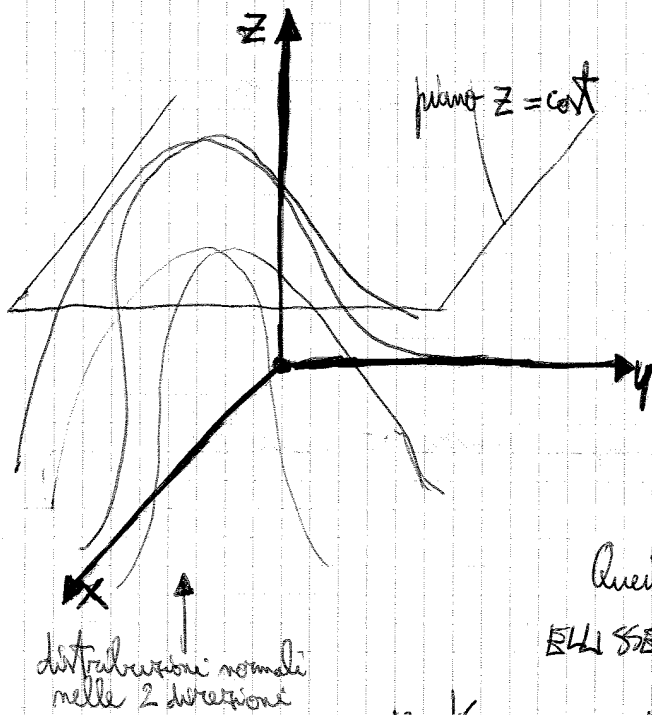
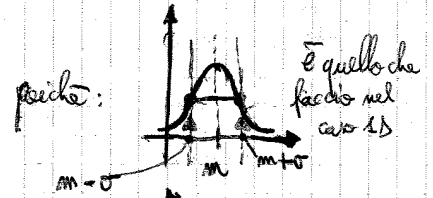
Se sopra / sbaglia anche di poco la misura di un angolo, sbaglia di molto la posizione di P (line rosse). Sotto invece (tr. equilatero), ho un sistema ben condizionato. Tanto più la base $\rightarrow 0 \Rightarrow$ tanto più $\chi_{\infty} \rightarrow 0$.

Esempio: fotogrammetria



Se $\kappa \neq 0 \rightarrow$ ritroviamo l'espressione precedente.

~~Se~~ $f(x,y)$ è una funtz. a 2 variabili:



Intersechiamo la superficie con piani $z = c$; ciò equivale a fare:

$$\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} - 2\kappa \frac{x-m_x}{\sigma_x} \cdot \frac{y-m_y}{\sigma_y} \right] = K$$

Se studiamo questa equazione, è proprio l'equazione di una conica:

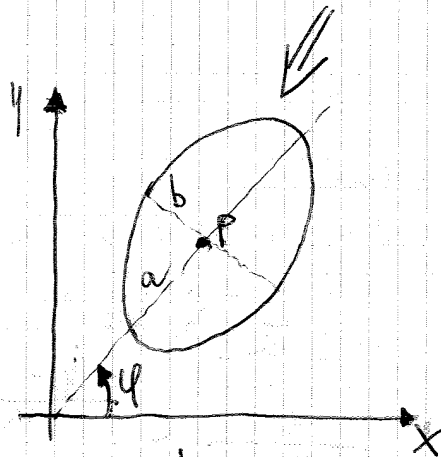
$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Questa conica, se la studiamo, è un'ellisse:

ELLSSE DI ERRORE:

se $K=1 \rightarrow$ **ELLSSE STANDARD**

(è una regione di ugual probabilità di trovare un certo valore sperimentale)



P: punto ove vedo a calcolare l'ellisse

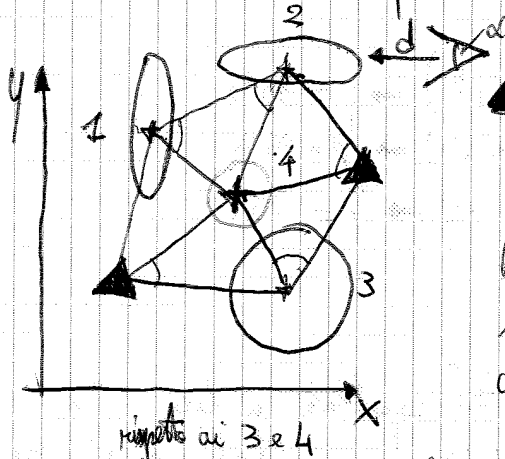
a: semiasse maggiore
b: semiasse minore

$$a^2 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) + 4\sigma_{xy}^2}$$

$$b^2 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) + 4\sigma_{xy}^2}$$

$$f_y(2y) = - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Supponiamo di avere una rete fatta così:



▲ : punti noti

mettiamo quelle ellissi d'errore (1, 2, 3, 4).
 Poiché l'ellisse d'errore è un'area di incertezza, ci piacerebbe avere il 4 (o quello con minore dispersione).

Gli ellissi 1 e 2 sono più "disomogenei" (a e b diversi) \Rightarrow l'ellisse 4 è venuta più precisa nella diraz. x rispetto alla y.

Esempio nell'ellisse 2:

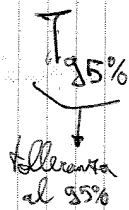
- se misura d nella direzione x, mi faccio tutta l'incertezza nella direzione x
- se misura $d \Rightarrow 0d$! perché mi faccio l'incertezza nella diraz. y (che è piccola).

- se il movimento franco avviene così $\Downarrow\Downarrow\Downarrow \Rightarrow$ posso utilizzare tranquillamente l'ellisse d'errore 2 (perché in quella direzione va bene).
 (così ho piccola incertezza)

(Generalmente, in cartografia le operazioni si collaudano al 95% (il 100% non può essere (perché $\bar{x} = -\infty \div +\infty$!!!)) -

Consideriamo:

variabile 1D



$T_{95\%} = \pm 2 \text{ cm} = 2\sigma \Rightarrow$ dobbiamo avere $\sigma = \pm 1 \text{ cm}$

quando misuriamo con il nostro strumento, che:

quando si parla di tolleranza bisogna sempre chiedere: "a che livello di significatività?"

Lo stesso può essere fatto in 2D con l'ellisse d'errore (le %, però, non diverse).

GEOMATICA

19-03-2013

Costo dei calcoli nell'ipotesi di seguire schemi di misura **RIDONDANTI**.

Quali sono gli schemi che possiamo compensare? Tipicamente compensiamo le reti (anche se
non possiamo compensare qualsiasi schema di misura).

RETI GEODETICHE

def. insieme di punti inoperti e noti, collegati da misure che identificano schemi ridondanti

Un sistema di riferimento viene detto **DATUM**. Non possiamo misurare coordinate se non facciamo un S.D.R.

FRAME: struttura portante

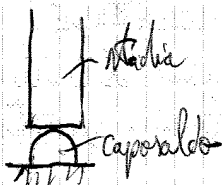
La rete geodetica, di per sé, è la realizzazione pratica di un S.D.R.

Classificazione reti:

- 1D (monodimensionali): reti di livellazione (misuriamo dislivelli)
- 2D (bidimensionali): reti planimetriche (misuriamo angoli (azimutali, ...)
e distanze)

Queste 2 reti venivano separate a parte, perché:

- un punto di livellazione richiede questo caposaldo:



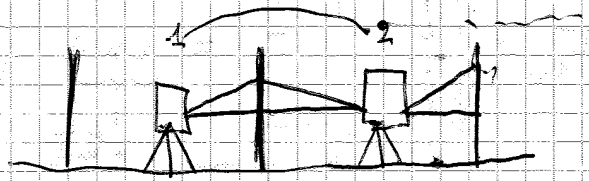
- un punto di rete planimetrica richiede ad es. stazione totale

- 3D (sistema di posizionamento tridimensionale): GPS / GNSS, reti classiche (con misura distanze, angoli zenitali e compensazione in modo classico)
global navigation satellite system

Max distanza livello - stadia = 100 m (di solito ang. si pone a circa 50 m)

$$\Delta_{AB} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n$$

se abbiamo più battute di livellazione, avremo la somma dei dislivelli



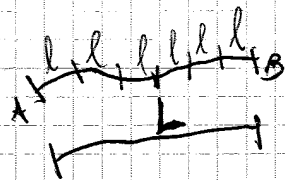
qual è il peso da attribuire ad ogni dislivello? $P_{\Delta_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta_i}^2}$

stendiamo un valore di peso in funzione della distanza; otteniamo questo proprio dalla propagazione della varianza:

ipotizziamo che ogni dislivello della battuta ha la stessa precisione σ_{Δ} (stesso strumento, operatore...), quindi:

$$\sigma_{\Delta_{AB}}^2 = \sigma_{\Delta}^2 + \sigma_{\Delta}^2 + \dots + \sigma_{\Delta}^2 = n \sigma_{\Delta}^2 = (*)$$

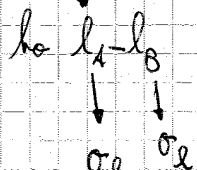
ipotizziamo che la distanza stadia - livello sia sempre $\approx 100m$ per tutta la battuta di livellazione:



$$\rightarrow n = \frac{L}{l}$$

$$(*) = \frac{L}{l} \sigma_{\Delta}^2$$

$$\sigma_{\Delta}^2 = 2 \sigma_l^2$$



la varianza di una diff. è la somma delle varianze

sono uguali: stessa stadia, stessa lunghezza di battuta, stesso operatore...

DIAMO VALORI DI σ_l :

$$\sigma_l = \pm 1 \text{ mm (stadia } 100m)$$

$$\pm 0,1 \div 0,01 \text{ mm (per livelli di tipo di micrometro o livelli elettronici)}$$

Equazione alle distanze:

$$\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} - d_{ij} = 0$$

Se entrambi i punti i e j sono incogniti \Rightarrow questa equazione presenta 4 incognite

l'equazione è non lineare \Rightarrow linearizzandola nell'intorno di valori approssimati i valori approssimati sono i valori $x_i^{(0)}$ tali che:

$$x_i = \underbrace{x_i^{(0)}}_{\text{valore reale}} + \underbrace{\alpha_i}_{\text{correzione}}$$

$$y_i = \underbrace{y_i^{(0)}}_{\text{se non abbiamo ipotizzabile}} + \underbrace{\beta_i}_{\text{correzione}}$$

Supponiamo di avere già queste coord. approssimate; allora:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{(0)} \alpha_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{(0)} \alpha_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_{(0)} \alpha_n + \text{trasc.} = (*)$$

$f(0)$ \rightarrow funzione calcolata nei valori approssimati
 $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{(0)}$ \leftarrow derivata nel valore approssimato

Se ho ipotizzato bene le coordinate approssimate \Rightarrow le correzioni saranno piccole \Rightarrow i loro quadrati ancora più piccoli \Rightarrow trascurabili

1^a iterazione: $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha^{(1)}$
correzione di 1^a tentativo

se $|x^{(1)} - x^{(0)}|$ è "grande", utilizzo tale $x^{(1)}$ e faccio una correzione $\alpha^{(2)}$ e trovo $x^{(2)}$...

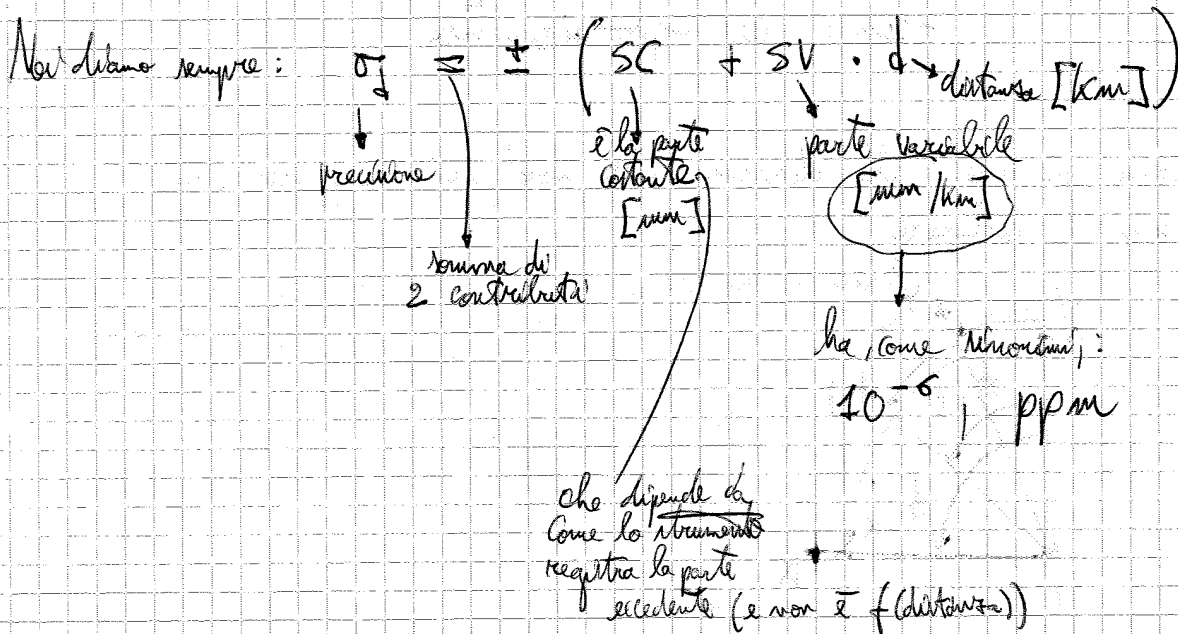
$$\Rightarrow x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha^{(2)}$$

$$\Rightarrow x^{(3)} = x^{(2)} + \alpha^{(3)}$$

Per misurare distanze con distanziometri ad onde EDM:

2 aspetti da considerare:

- quanto è precisa la lunghezza d'onda (dipende dalla distanza)
- quanto eccedenza mi aspetto (la parte frazionaria non dipende dalla distanza).



la precisione σ dei nostri distanziometri è:

$$SC \cong 2 \div 5 \text{ mm}$$

$$SV \cong 10^{-6} \text{ [ppm]}$$

Esempio

$$SC = 3 \text{ mm}, \quad SV = 2 \text{ ppm}, \quad d = 5 \text{ km}$$

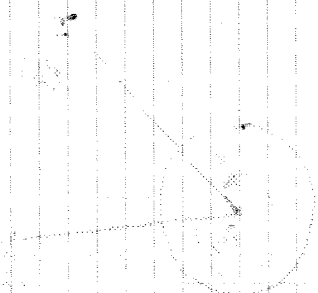
$$\Rightarrow \sigma_d = \pm \left(3 \text{ mm} + 2 \frac{\text{mm}}{\text{km}} \cdot 5 \text{ km} \right) = \pm 13 \text{ mm}$$

non me li trovo nessuno! → se dovessi misurare una distanza di pochi m, potrebbe essere un metro!!!

equazioni alle direzioni angolari:

$$\theta_{ij} + \cos - \Delta_{ij} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arctan \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} - \theta_{ij} - \cos = 0$$

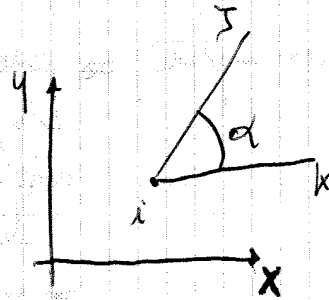
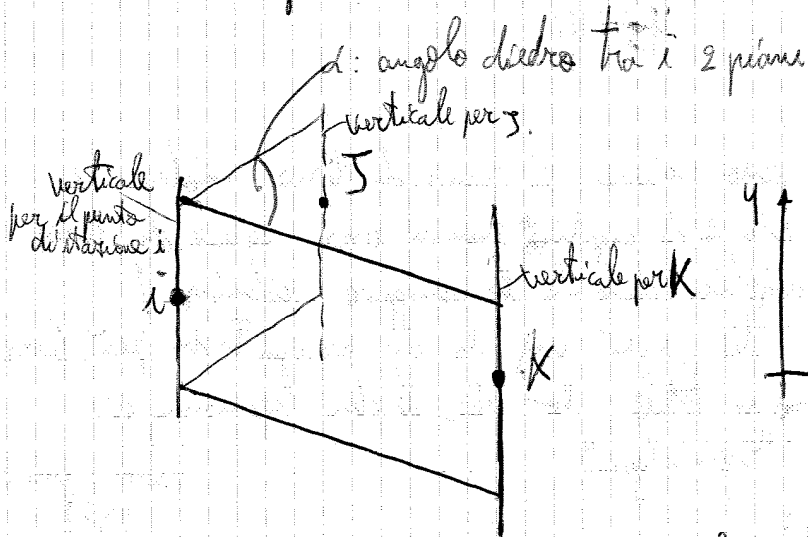


In ogni strato, perché cambia sempre la posizione nel luogo nel cerchio

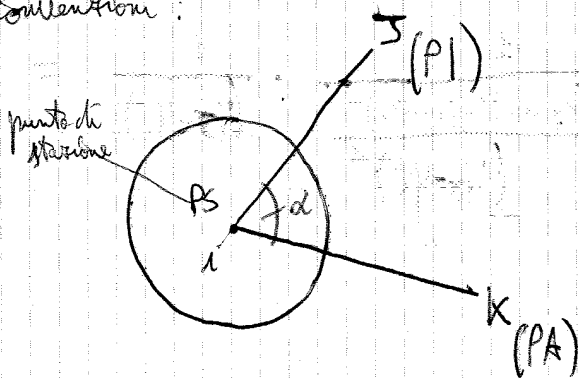
(regola di Bessel \Rightarrow letture compensate)

Nel metodo a strati (per eliminare l'errore di tracciamento dei cerchi) ho una diversa correzione di orientamento (e anche l'errore, un'incognita da stimare). (cos)

Molto meno preferiamo riferirci agli angoli azimutali, con la differenza tra 2 letture angolari:



Convenzioni:



letture nel punto avanti $\alpha = l_{PA} - l_{PI} \Rightarrow \alpha$ è la rotazione del PI nel PA (casi che bisogna dare al PI per farlo sovrapporre nel PA)

$$\frac{\partial A_{iS}}{\partial x_i} = - \frac{y_S - y_i}{d_{iS}^2}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = -f(x)^{-2}$$

$$\frac{\partial A_{iS}}{\partial y_S} = \frac{1}{1 + \frac{x_S - x_i}{y_S - y_i}} \cdot \frac{-(x_S - x_i)}{(y_S - y_i)^2} =$$

$$= \frac{-(x_S - x_i)}{(x_S - x_i)^2 + (y_S - y_i)^2} \cdot \frac{1}{(y_S - y_i)^2} = - \frac{x_S - x_i}{d_{iS}^2}$$

$$\frac{\partial A_{iS}}{\partial y_i} = + \frac{x_S - x_i}{d_{iS}^2}$$

Le stesse derivate sono uguali nell'equaz. alla direz. angolare. In più ho solo:

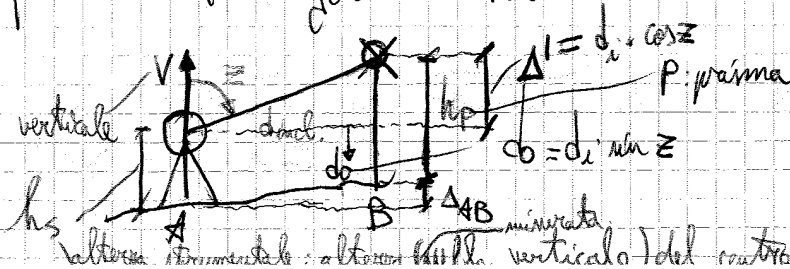
$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = -1$$

Nell'equaz. agli angoli azimutali ho $\alpha = A_{iK} - A_{iS} \rightarrow$ avrò la differenza delle derivate fatte prima.

Ora consideriamo gli angoli zenitali; ci servono per:

- ridurre all'orizzonte una distanza inclinata
- calcolare in dislivello.

Equazione dell'angolo zenitale:



angolo zenitale: angolo tra la verticale e la direzione di osservazione.

altitudine strumentale: altezza visibile verticale del centro della strumento del punto a terra

- angoli azimutali: faccio una differenza di letture, quindi gli angoli sono confrontabili tra loro, faccio dunque la media:

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m}{m} = \frac{\alpha_1}{m} + \frac{\alpha_2}{m} + \dots + \frac{\alpha_m}{m}$$

|
media
di n letture

ipotizziamo di misurare angoli con stessa precisione σ_0 , dunque la σ della media sarà:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma_0^2}{m^2} + \frac{\sigma_0^2}{m^2} + \dots + \frac{\sigma_0^2}{m^2} = m \frac{\sigma_0^2}{m^2} = \frac{\sigma_0^2}{m}$$

(che dipende dalle
precisione che ho
fatto)

con $\sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{\sum (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}{n-1}}$ → sommatoria degli scarti al quadrato (la matrice che per i angoli con stessa precisione σ_0)
→ verifico che questo σ_0 sia confrontabile con la precisione fornita dal produttore

infine:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_0}{\sqrt{m}} = \pm \sqrt{\frac{\sum (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}{m(n-1)}}$$

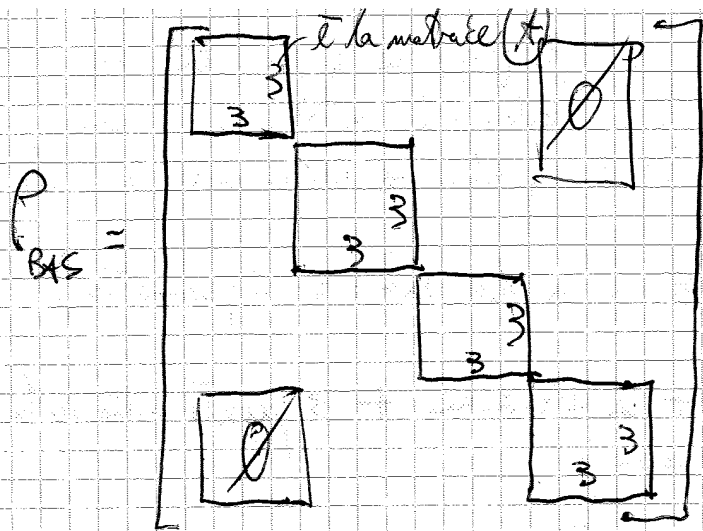
Se faccio più misure → poiché σ_m va con $\sqrt{\frac{1}{m}}$ → posso ottenere una precisione migliore di quella fornita dallo strumento (σ_0).
(σ_m)

Esempio:

supponiamo di utilizzare uno strumento con $\sigma_0 = \pm 4$ mgon.
Io però voglio una precisione di $\sigma_m = \pm 0,2$ mgon.

Quante misure dovrò fare? $m = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_m^2} = \left(\frac{4}{0,2}\right)^2 = 25$

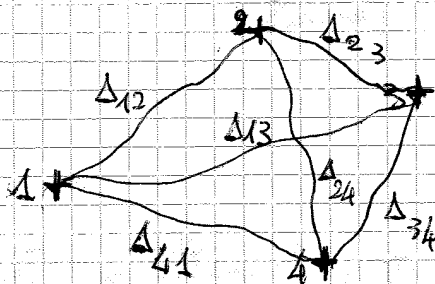
- stessa cosa degli angoli azimutali posso fare per quelli zenitali



Ogni blocco 3×3 sulla diagonale è una matrice di var. - cov.

Le base line sono tra loro **INCORRELATE** (termini fuori diagonali nulli), mentre le componenti di ogni base sono **correlate** tra loro.

Le equazioni che abbiamo scritte finora sono tutte date da **DIFFERENZE** (facciamo sempre misure differenziali, mai assolute).



- 4 incognite
- 6 misure
- 2 ridondanza

Non c'è S.D.C.!!! Con sole misure relative non posso avere coordinate assolute se non c'è almeno un punto di quota nota!

⇒ la matrice diventa singolare (anche se imp. ha ridondanza) (ha deficienza di rango).

Il S.D.R. mi serve a fissare i gradi di libertà lasciati liberi dalle misure ⇒ significa mettere dei vincoli.

Supponiamo di fissare minimi vincoli:

- caso 1D (rete di livellaz.): il minimo vincolo è fissare un punto di quota nota (± capotela)

- caso 2D (rete planimetrica): 1 punto di coordinate x-y + 1 direzione (0) nota
 (un piano ha 3 g.d.l. ⇒ serve fissare 3 parametri)
 [se mettessi 2 punti di coordinate note non è più minimo vincoli a meno che...]

Per la pesatura si avrà:

$$peso = \sigma_0^2 \cdot C_{ll}^{-1} \quad \text{con} \quad C_{ll} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

Ho dunque introdotto 3 nuove incognite, ma ho anch' 3 equazioni che posso risolvere con la matrice di var. - cov.

Per far diventare un vincolo assoluto basta dare un peso enorme (10^{12}).

b) VINCOLO DI ROTAZIONE

supponiamo di avere 2 D. l. r. (xy) e $(x'y')$
 chiedo che i; abbiano la stessa deriv. angolare nei 2 s. d. r. :
 $\arctan \frac{x_s - x_i}{y_s - y_i} = \arctan \frac{x'_s - x'_i}{y'_s - y'_i}$ scrivendo un'equazione del genere vincolo al lato i-j

possiamo decisamente togliere arctan a x e a y dell' = !!

(con 3 angoli posso risolvere un triangolo solo a meno di un fattore di scala)
 (con 3 lati riesco a risolvere 3 angoli!)

c) VINCOLO DI SCALA

consideriamo sempre i due s. d. r. (xy) e $(x'y')$.

debbiamo dire che la distanza tra 2 punti nei 2 s. d. r. è sempre la stessa:

$$\sqrt{(x_s - x_i)^2 + (y_s - y_i)^2} = \sqrt{(x'_s - x'_i)^2 + (y'_s - y'_i)^2}$$

questo vincolo serve a sanare la deficienza di rango in una rete solo di angoli.

$$\begin{array}{ccc|c}
 Q_1 & Q_2 & Q_3 & \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & \left. \begin{array}{l} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{array} \right\} \\
 -1 & 1 & 0 & \downarrow \\
 0 & -1 & 1 & X \\
 0 & 0 & +1 & \\
 -1 & 0 & 1 &
 \end{array}
 \quad - \quad
 \begin{array}{c}
 Q_{CS} + \Delta_{CS-1} \\
 \Delta_{12} \\
 \Delta_{23} \\
 Q_{CS} + \Delta_{CS-3} \\
 \Delta_{13}
 \end{array}
 = V$$

\downarrow
 A

(ci vanno le coordinate approssimate; qui le equazioni sono lineari quindi non è necessario mettere le quote approssimate)

\downarrow
 l_0

$$N = A^T \cdot P \cdot A$$

$$T_m = A^T \cdot P \cdot l_0$$

con

$$P = \begin{bmatrix} 1/l_{CS-1} & & & 0 \\ & 1/l_{12} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & 1/l_{13} \end{bmatrix}$$

proportionale al reciproco della distanza

le misure sono tra loro incorelate

N.B.: i pesi che ho messo non sono i reciproci delle varianze. Per fare il test χ^2 devo usare le varianze, quindi, ricordiamo che:

$$\sigma = \pm emk \sqrt{l}$$

$$\sigma_{\Delta} = emk \sqrt{l}$$

$$p = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta}^2} = \frac{1}{emk^2 \cdot l} \quad \rightarrow$$

$$l = \frac{1}{emk^2} \quad \left[\quad \right]$$

$$\hat{x} = N^{-1} T_m$$

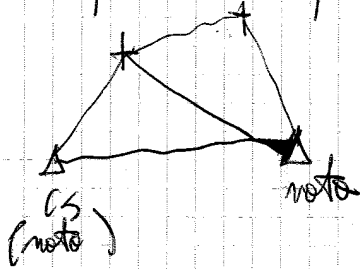
$$\hat{v} = A \hat{x} - l_0$$

Se facciamo l'analisi della ridondanza locale:

$$R = I - AN^{-1}ATP$$

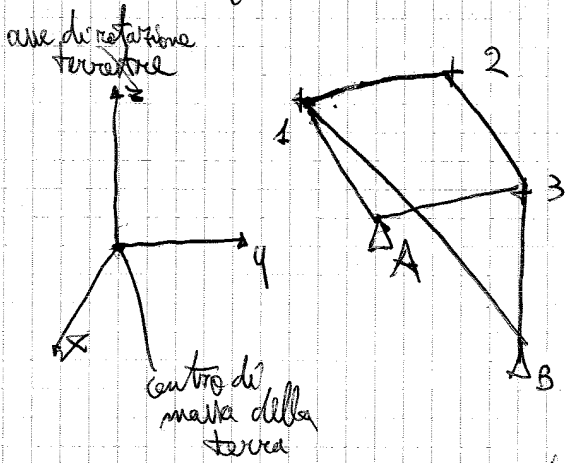
~~Quanto~~ che ridondanza avrebbe l'equazione di vincolo della quota di caposello? Tale equazione non porta ridondanza (ma sanaamente la deficienza di rango: se metto 100, 1000... m non cambia niente \rightarrow ridondanza locale = 0).

Se invece ho un secondo vincolo, non ho più una rete a minimi vincoli \rightarrow posso scrivere più equazioni di vincolo.



piccole osservazioni: sono note le componenti $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ di un vettore che unisce un punto di coordinate note ad uno di coordinate incognite:
BASELINE GPS

Sistema di riferimento geocentrico in cui facciamo una rete tridimensionale (rete BASELINE GPS):



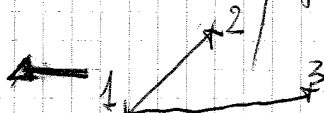
$\Delta_{1,0}$: punti di coordinate note

1, 2, 3: punti di coord. incognite.

di stazione con ricevitori GPS nei i punti di cui voglio calcolare le coordinate ~~incognite~~

il vettore 2-3 è linearmente dipendente dagli altri due (è comb. lineare degli altri due)

ho sempre $n-1$ vettori di base rispetto agli n punti in cui molti stanno i ricevitori



usare solo i vettori LINEARMENTE INDIPENDENTI

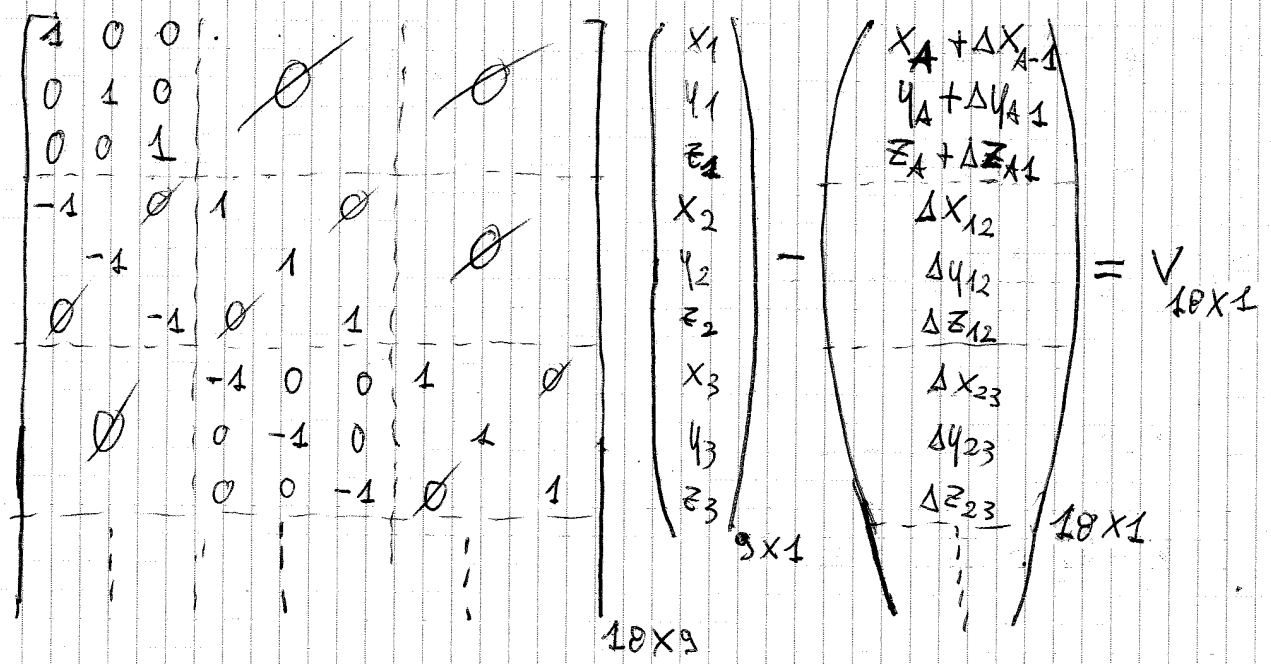
Vediamo, invece, se avessimo le equazioni di vincolo (case X e B non sono prici di essere, ma hanno una loro matrice di var. - cov.): *derivante da una precedente compensazione*

$n = 5 \times 3 = 15$ incognite

$n = 18 + 2 \cdot 3 = 24$ equazioni
 ↓
 3 eq. di vincolo x ogni punto
 2 punti (X-B)

→ il bilancio equazioni - inequities non cambia

Impartiamo la matrice DISEGNO (nel caso senza equazioni di vincolo):



Matrice dei PESI: la impartiamo, nota la matrice di var - covarianza delle basi.
 PROCEDIMENTO PER "SINGOLA BASE"
 ipotesi: BASI INCORRELATE, ma componenti correlate.

Ogni base lineare sarà pesata da una matrice 3x3:

$C_{X_i, j} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta X}^2 & & \\ \sigma_{\Delta X \Delta Y} & \sigma_{\Delta Y}^2 & \\ \sigma_{\Delta X \Delta Z} & \sigma_{\Delta Y \Delta Z} & \sigma_{\Delta Z}^2 \end{bmatrix}_{i, j}$ *simmetrica*

Se abbiamo eq. non lineari \Rightarrow nella matrice A , al posto dei ± 1 avremmo i coeff. approssimati. \leftarrow se usi lo stesso s.d.r. puoi aggiungere misure di angoli (ad es.) e altri di linearizzabili e sono applicabili alla matrice A di due pagine precedenti mettendo però i coeff. approssimati (e non i ± 1) per queste equazioni di angoli.

RETE PLANIMETRICA

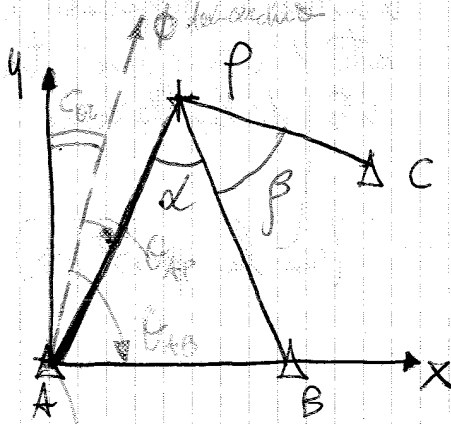


Figure che facciamo:

$$d_{AP}, d_{BP}, d_{CP}$$

$$\alpha, \beta, \theta_{AB}, \theta_{AP}$$

Le altre misure (cos) le fanno mettere lo strumento in P.

Non sappiamo mai dove è la ϕ del cerchio (non lo possiamo impostare al nord geografico con \bullet sufficiente approssimazione) \Rightarrow \cos è incognita

$$n(\text{equazioni}) = 7$$

$$n(\text{incognite}) = 3 (x_P, y_P, \cos) \Rightarrow \text{stimare } x_P, y_P$$

N.B. θ_{AB} è di fatto un vincolo.

$$\text{ovvero } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \text{ovvero } \frac{y'_B - y'_A}{x'_B - x'_A} = k$$

questa equazione di vincolo ci dice che: con lato nel s.d.r. $x-y$ ha la direzione uguale al lato nel s.d.r. $x'-y'$.

\downarrow
è una costante (le coordinate di A e B sono note)

Il problema è non lineare \Rightarrow linearizzare nell'intorno dei valori approssimati:

$$x_P = x_P^{(0)} + x_P$$

$$y_P = y_P^{(0)} + y_P$$

$$\cos = \cos^{(0)} + c$$

stante la linearità della correz. di orientamento (che è un qualcosa che si somma quindi lineare) \Rightarrow è indifferente linearizzare \cos o usare \cos stesso. (con questa espressione)

Equazioni linearizzate

$$\underbrace{(x_P^{(0)} - x_A)^2 + (y_P^{(0)} - y_A)^2}_{d_{AP}^{(0)}} + \underbrace{\frac{-(x_A - x_P)^{(0)}}{d_{AP}^{(0)}}}_{\left(\frac{\partial d_{AP}}{\partial x_P}\right)^{(0)}} x_P + \underbrace{\frac{-(y_A - y_P)^{(0)}}{d_{AP}^{(0)}}}_{\left(\frac{\partial d_{AP}}{\partial y_P}\right)^{(0)}} y_P - d_{AP} = 1$$

$AX - b_0 = V$
 ↓ in questo caso \bar{x}

$b = d_{AP} - d_{AP}^{(0)}$

Il termine noto, tanto più piccolo è, tanto più le coordinate sono ben approssimate. (Se non è piccolo → devono fare più iterazioni).



la ricerca dei valori approssimati è sempre molto importante, perché se fossero molto esatenti → le α diventano sempre più grandi (durante le iterazioni) e non sempre più piccole → non si arriva mai a convergenza, ma a divergenza.

Per avere le coordinate approssimate: o cartograficamente o anche con un semplice ricevitore che usa un rtfu.

Facciamo la nostra matrice disegno:

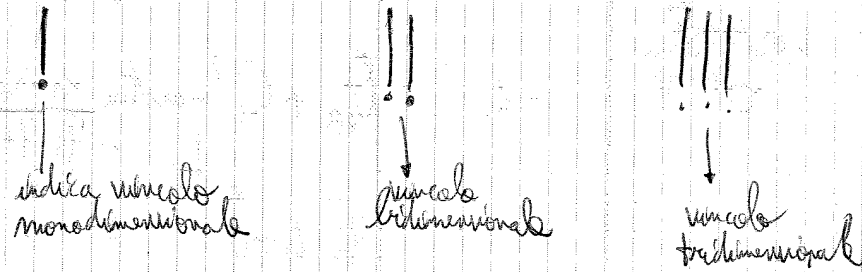
Software

STARNET:

C A	0	0	!!!	queste saranno punti pesati (con peso enorme)
C B	100	0	!!!	
C C	50	100	0,01 0,015	
C P	45	200	!!!	

li mette in un file di testo
 (questo sarà un punto pesato con 15qm): stando potrà avere che C vari le proprie coordinate
 questo è un punto incognito

Angolo dei vettori:



D	A-P	125,65
D	B-P	134,62

precisione del distanziometro (la metto se ho cambiato distanziometro rispetto alla prima misura) 0,002

direction bearing: orientamento

- DB stazione A
- DN la 2 misura P
- DN B
- DA fine

87,4523
87,4944

richiede questo, il computer scrive la riga della matrice A associata a P.

GEOMATICA

26-03-2013

MINIMI QUADRATI SEQUENZIALI PAG. 80

I sistemi GNSS sono in continuo aggiornamento (giornalmente) \Rightarrow le soluzioni vengono continuamente aggiornate.

Quando aggiorni i dati poni:

- aggiungere tali dati alla matrice disegna \Rightarrow mi serve sempre tutta la serie storica dei dati.
- aggiornare i parametri già calcolati (senza necessità di conoscere le vecchie misure)

Cominciamo ad affrontare il problema in maniera statica, cioè i parametri rimangono fissi (la rete che indag. non varia nel tempo).

Trasportiamo il problema dei minimi quadrati come calcolo sequenziale. L'idea di base è quella di AGGIORNARE le vecchie soluzioni X_{old} con le nuove misure l_{new} (senza ripetere ogni volta dal ricrearsi tutta la matrice disegna) in forma ricorsiva.

$$\hat{X}_{new} = L \hat{X}_{old} + K l_{new} =$$

\hat{X}_{new} (stima dei parametri con le nuove misure)
 L (operatore lineare)
 \hat{X}_{old} (il vettore dei parametri non varia)
 K (matrice che mi dà il contributo delle nuove misure alla vecchia soluzione)
 l_{new} (nuove misure)

K è una matrice che mi dà il contributo delle nuove misure alla vecchia soluzione.

$$= \hat{X}_{old} + K (A_{new} - A_{new} \cdot \hat{X}_{old})$$

A_{new} (sono le nuove misure calcolate con i vecchi parametri stimati)
 $A_{new} \cdot \hat{X}_{old}$ (il vettore dei parametri non varia)

con $L = (I - K A_{new})$ \rightarrow START (REBETTO)

K: MATRICE GUADAGNO. MATRICE DI KALMAN

[Filtro di Kalman: stima dei parametri in moto]

è questa la definizione del problema "statico"

I_p : $\{X\}$ il vettore X non varia in dimensione (cioè stimo sempre lo stesso n° di parametri)

Il concetto sarà: se riusciamo a determinare $K \Rightarrow$ riusciamo ad ottenere \hat{X}_{new} da \hat{X}_{old} (1).

\Rightarrow il punto focale è calcolare questa matrice K

$$\Rightarrow \hat{X}_1 = N_1^{-1} (A_0^T P_0 l_0 + A_1^T P_1 l_1) \quad \textcircled{M}$$

quella espressione si tratta poco al calcolo sequenziale perché devo memorizzare le vecchie misure l_0

Fino a qui non ho fatto niente per il calcolo ricorsivo (sequenziale) perché devo tenere in conto tutte le misure precedenti

dunque
 ricordiamo che:

$$\underbrace{A_0^T P_0 l_0}_{T_{m_0}} = N_0 \hat{X}_0 = (N_1 - A_1^T P_1 A_1) \hat{X}_0$$

\downarrow
 \textcircled{A}

Sostituendo questa nella \textcircled{M} si ha:

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= N_1^{-1} ((N_1 - A_1^T P_1 A_1) \hat{X}_0 + A_1^T P_1 l_1) = \\ &= \hat{X}_0 - N_1^{-1} A_1^T P_1 A_1 \hat{X}_0 + N_1^{-1} A_1^T P_1 l_1 = \\ &= \hat{X}_0 + \underbrace{N_1^{-1} A_1^T P_1}_{K} (l_1 - A_1 \hat{X}_0) = \end{aligned}$$

formula dalla quale siamo proprio partiti, cioè la $\textcircled{1}$

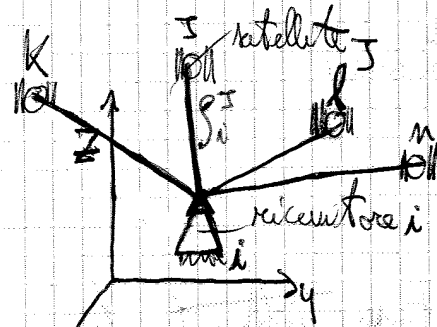
$$= \hat{X}_0 + K (l_1 - A_1 \hat{X}_0) \quad \textcircled{F}$$

Chiamiamo $\hat{X}_0 = \hat{X}_{old}$ e $\hat{X}_1 = \hat{X}_{new}$ (ad ogni iterazione, aggiornamento, aggiorniamo \hat{X}_0 e \hat{X}_1 (cioè \hat{X}_{old} e \hat{X}_{new}))

Nella scrittura \textcircled{F} non ho bisogno di ricordarmi le vecchie misure, ma solo \hat{X}_0 .

Calcoliamo ora $\hat{X}_{xx_{new}}$ (che mi serve poi per arrivare a $\hat{X}_{xx_{new}}$): PAG. 83

POSIZIONAMENTO GNSS



triangolazione di satelliti di coordinate note per trovare le coordinate del ricevitore i

— distanze ρ

$$\rho_i^j = \sqrt{(x^j - x_i)^2 + (y^j - y_i)^2 + (z^j - z_i)^2}$$

minicato

termini noti

incognite

Per risolvere il problema scriviamo più equazioni di ρ : più ridondante che è meglio \bar{x} (più il metodo minimi quadrati). Vedremo che le minime equazioni di ρ che possiamo scrivere non sono 3, ma 4.

Il GALILEO è l'analogo del GPS europeo.

Beidou o BDS (una volta era chiamato COMPASS).

Ogni costellazione ha un suo SDR \Rightarrow fattori di conversione tra un sistema e l'altro.

Un sistema GNSS per funzionare bene ha bisogno di ≥ 3 parti (SEGMENTI) segmento spaziale: un'orbita MEO (a 20000 km circa).

Solo il centro di controllo può inviare informazioni ai satelliti (es: parametri orbitali per fornire la posizione del satellite). Noi possiamo solo ricevere informazioni, non inviare.

Il tempo si misura con orologi atomici.

Sonno e periodo orbitale dei satelliti.

velocità media $n \rightarrow 3^a$ legge di Keplero:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$

\Rightarrow il cubo del semiasse è proporzionale al quadrato del periodo.

periodo che impiega il satellite per fare un giro completo (l'orbita è praticamente circolare) alcune costanti definite per il WGS 84: (bambina eccentricità)

parametri orbitali che ci consentono di definire il posizionamento dei satelliti:

X, Y, Z : sistema ECEF (acronimo di "earth centered earth fixed")

è centrato nel centro della terra e segue la terra nei grandi movimenti (rotazioni, non precessioni).

X^0 = axe inerziale (è un axe fisso in un sistema inerziale)

Z, X_0, Y è un S.D.R. fisso

Z, X, Y è un S.D.R. che ruota

Θ = tempo universal (rotazione tra l'axe X_0 e l'axe definito dal meridiano di Greenwich)

PARAMETRI ORBITALI:

$a =$ semiasse

$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ eccentricità

definiscono dimensione e forma

punto nell'orbita più vicino al geocentro

3 angoli $\left\{ \begin{array}{l} \omega = \text{argomento del perigeo} \\ \Omega = \text{ascensione retta} \\ i = \text{inclinazione dell'orbita rispetto all'equatore} \end{array} \right.$

piano orbitale sistema apparente (non sulle slide)

$M_0 =$ anomalia media all'epoca t_0

posizione piano dell'orbita

non possono sapere il satellite solo variazione l'angolo f .

f in figura

• Componente messaggi:

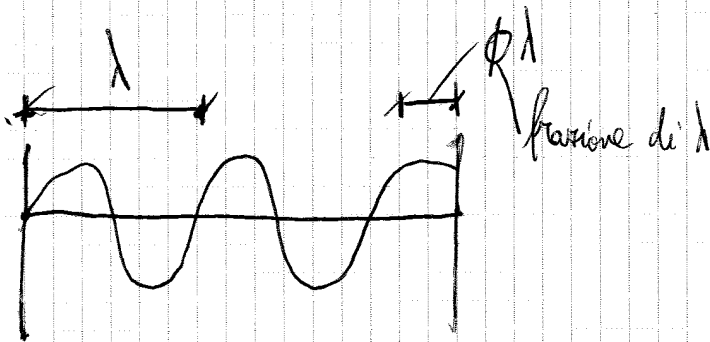
Effemeridi

9: parametri dell'orbita di Keplero

porta le informazioni indispensabili per il posizionamento

Componente impulsiva: trasmissioni di ± 1 che modulano la portante producendo uno sfasamento di π nella fase.

9 codici vengono sommati, e poi vanno a moltiplicare la portante.



Nei distanziometri: emette un'onda al prima e poi la riceve, poi stima il numero intero di cicli e lo sfasamento

↓ - nei GNSS non è così

ritorna ad "una via" (il ricevitore non conosce niente → non può mai determinare il numero intero di cicli)

(Per avere il minimo di equazioni non servono 3 satelliti, ma 4).

Il sistema GNSS

SOMMARIO

1. IL SISTEMA GNSS	3
1.1. Struttura dei sistemi GNSS.....	4
1.2. Principi sui segnali GNSS.....	5
2. LE COSTELLAZIONI GNSS	7
2.1. Il sistema GPS.....	7
2.1.1. Il sistema di riferimento WGS84.....	9
2.1.2. Le scale di tempo.....	10
2.1.3. Il segnale GPS.....	11
2.2. Il sistema GLONASS.....	13
2.2.1. Il sistema di riferimento PZ90.....	14
2.2.2. Il segnale GLONASS.....	15
2.3. Il sistema GALILEO.....	15
2.3.1. Il sistema di riferimento GTRF.....	16
2.3.2. Il segnale GALILEO.....	16
2.4. Il sistema BeiDou.....	18
2.4.1. Il sistema di riferimento CGCS2000.....	19
2.4.2. Il segnale BeiDou.....	20

Il sistema GNSS

Altre costellazioni sono previste in futuro e lo scenario sarà quindi in costante evoluzione per un posizionamento autonomo e integrato. Prima di affrontare i principi di posizionamento, verranno affrontate le principali caratteristiche delle costellazioni globali, del sistema e del segnale trasmesso.

1.1. Struttura dei sistemi GNSS

Ogni costellazione del sistema GNSS prevede per lo meno 3 parti o “segmenti” così articolati (Figura 1):

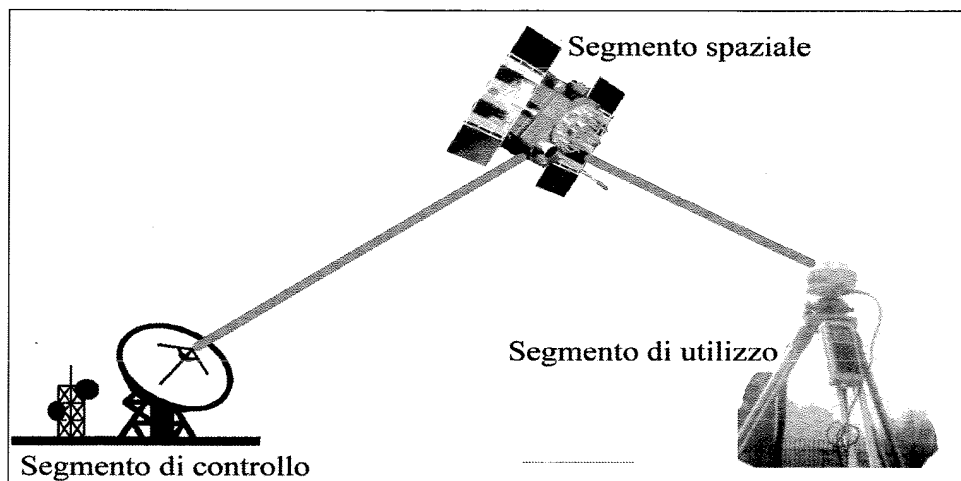


Figura 1- i segmenti dei sistemi GNSS

1) *Segmento spaziale*: costituito da satelliti MEO (*Medium Earth Orbit*), in orbita pressochè circolare intorno alla Terra ad altezza variabile, a seconda della costellazione, da circa 19.100 km a circa 23.200 km dalla superficie terrestre. In alcuni sistemi sono presenti satelliti geostazionari GEO (*Geostationary Earth Orbit*). Ogni satellite ha una vita media prevista di circa 7 anni; per i più recenti si prevede un tempo di 10 anni. Ogni costellazione globale, se completa, permette la visibilità di almeno 4 satelliti in qualunque luogo e ora, a partire da un'elevazione di 15° sull'orizzonte, requisiti fondamentali per il posizionamento. Ogni satellite porta a bordo orologi atomici al Cesio e al Rubidio per garantire un costante e stabile riferimento temporale.

Le funzioni dei satelliti possono essere così sintetizzate:

- trasmettere informazioni agli utilizzatori mediante un segnale radio piuttosto complesso;
- mantenere un riferimento di tempo accurato, grazie agli orologi atomici di bordo;
- ricevere e memorizzare informazioni dal segmento di controllo;

2) *Segmento di controllo*: è l'insieme delle stazioni a terra che gestiscono il sistema e i cui compiti sono:

- “tracciare” ovvero seguire in maniera continua i satelliti ed elaborare i dati ricevuti per calcolarne la posizione spazio-temporale (effemeridi);
- controllare gli orologi dei satelliti e modellarne gli errori;
- imporre manovre e correzioni d'orbita
- memorizzare nuovi dati sui satelliti: fra i più importanti ci sono le “effemeridi” previste per le successive ore, che vengono trasmesse agli utilizzatori del sistema.

Il sistema GNSS

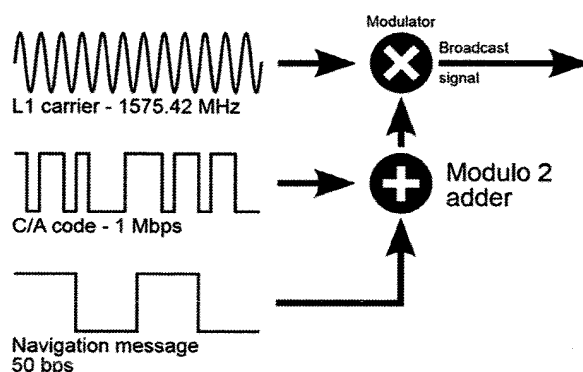


Figura 3- modulazione della portante con codici

Alcuni sistemi includono la possibilità, da parte del gestore del sistema, di liberalizzare o “criptare” alcuni di questi codici, in maniera da renderli accessibili rispettivamente a tutti gli utenti o solo a quelli autorizzati. Questa procedura è detta *Anti Spoofing (A-S)* e consiste nel criptare il codice con un codice noto solo agli utenti abilitati (generalmente utenza militare o assimilata).

La misura della distanza tra i centri di fase delle antenne del ricevitore e del satellite (più sinteticamente parleremo di distanza “satellite-ricevitore” o *range*), necessaria per il posizionamento, viene ricavata secondo due modalità:

- 1) **misure di codice:** a partire dal tempo di propagazione del segnale dal satellite al ricevitore, misurato sui codici che modulano le portanti;
- 2) **misure di fase:** a partire dal numero di cicli interi e dalla parte frazionaria dell’onda sinusoidale.

Diversi sono i motivi che giustificano la complessità dei segnali GNSS:

- i satelliti delle costellazioni GNSS devono “dialogare” con un numero imprecisato di utenti e questi a loro volta non debbono rivelare la loro posizione con l’emissione di segnali che possono rendere individuabile la stazione di misura. Non è dunque praticabile, per motivi di segretezza militare, un sistema “a due vie” tipo distanziometro ad onde.
- Le misure di codice servono per un posizionamento di tipo istantaneo ma di bassa precisione,
- le misure di fase si utilizzano per posizionamenti di precisione, spesso in post-elaborazione.
- L’utilizzo di due o più frequenze è indispensabile per contenere e/o modellizzare l’effetto legato alla rifrazione del segnale attraverso lo strato ionosferico. Ancora, applicazioni di precisione in tempo reale possono trarre vantaggio dalla presenza di più frequenze.

Analizziamo ora le caratteristiche delle varie costellazioni e dei segnali trasmessi.

Il sistema GNSS

periodicamente il messaggio di navigazione, assicurandosi della salute e dell'accuratezza del satellite.

Oltre queste 2 stazioni master, esistono altre 16 stazioni di monitoraggio dotate di sofisticati ricevitori GPS, disposte in tutto il mondo col compito di "tracciare" i satelliti. Esse acquisiscono dati atmosferici e di *range* che inviano alla stazione Master. In esse sono comprese le 6 stazioni dell'*Air Force* e le 10 del *National Geospatial-Intelligence Agency* (NGA)

12 antenne di terra vengono utilizzate per la comunicazione con i satelliti e per scopi di controllo. Esse possono ricevere e trasmettere dati di navigazione e comandi ai satelliti.

Il segmento spaziale è costituito dalla costellazione satellitare. Essa deve garantire la disponibilità di almeno 24 satelliti per il 95% del tempo, in orbita pressochè circolare intorno alla Terra ad altezza di circa 20.200 km (satelliti MEO - *Medium Earth Orbit*). L'inclinazione del piano dell'orbita rispetto al piano equatoriale è di 55° (Figura 5) e il periodo orbitale di ogni satellite è di 12 ore siderali (11 ore 56 minuti locali). Ogni satellite ha una vita media prevista di circa 7 anni. Attualmente i satelliti disponibili sono in numero di 31, superiore ai 24 previsti, cosa che migliora le performance del sistema di posizionamento.

La costellazione permette la visibilità di almeno 4 satelliti (ma più spesso da 6 a 10) in qualunque luogo e ora, a partire da un'elevazione di 15° sull'orizzonte, requisiti fondamentali per il posizionamento. Ogni satellite porta a bordo orologi atomici (Cesio e Rubidio) per garantire un costante e stabile riferimento temporale.

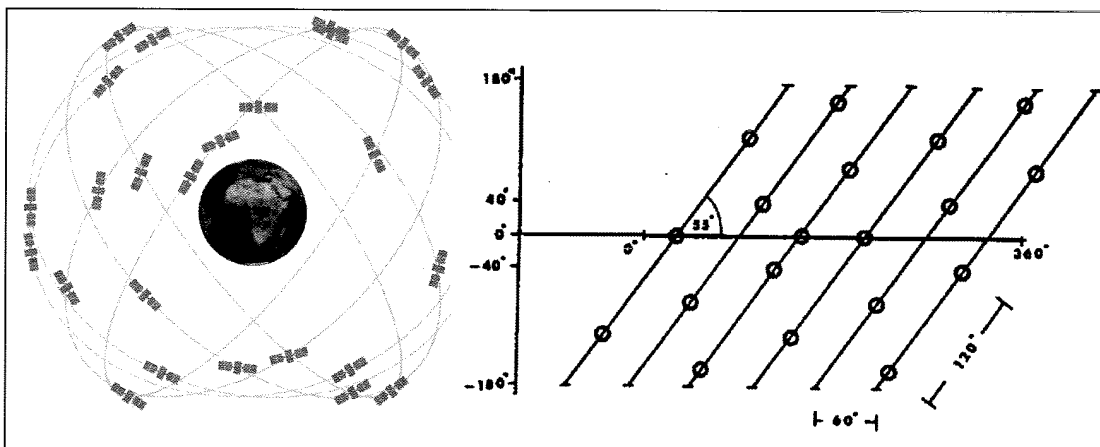


Figura 5 – configurazione satelliti GPS e piani orbitali

Le funzioni dei satelliti possono essere così sintetizzate:

- trasmettere informazioni agli utilizzatori mediate un segnale radio piuttosto complesso;
- mantenere un riferimento di tempo accurato, grazie agli orologi di bordo;
- ricevere e memorizzare informazioni dal segmento di controllo;
- eseguire manovre e correzioni d'orbita.

I satelliti sono stati lanciati in varie epoche e appartengono a diversi blocchi:

- *Satelliti blocco I*: sono i primi satelliti lanciati, con la primitiva organizzazione delle orbite che comprendeva 3 piani orbitali inclinati di 63° sul piano equatoriale. Sono stati lanciati nel periodo 1978÷1995

Il sistema GNSS

- P (*Precision*): ha una lunghezza di $6.1871 \cdot 10^{12}$ bit ed è trasmesso con una frequenza $f_P = f_0 = 10.23 \text{ MHz}$. Risulta una lunghezza d'onda $\lambda_P = \frac{c}{f_P} \cong 30 \text{ m}$ e si ripete periodicamente ogni settimana.
- L2C: diversamente dal C/A ha due distinte componenti PRN trasmesse entrambe alla frequenza $f_{L2C} = f_0 / 20 = 0.5115 \text{ MHz}$. Esse sono:
 -) CM (*Civilian Moderate length*): ha lunghezza 10230 bit e si ripete ogni 20 ms;
 -) CL (*Civilian Long length*): ha lunghezza 767250 bit e si ripete ogni 1500 ms

Il codice C/A è disponibile per uso civile e modula la sola portante L1. Esso fornisce anche l'identificativo del satellite.

Il codice P è riservato ad uso militare e altri utenti autorizzati e modula entrambe le portanti L1 e L2, sfasate però di $\pi/2$.

Il sistema GPS include la possibilità, da parte del gestore del sistema (*Department of Defence* o DoD) di liberalizzare o "criptare" il codice P, in maniera da renderlo accessibile rispettivamente a tutti gli utenti o solo a quelli autorizzati. Questa procedura è detta *Anti Spoofing* (A-S) e consiste nel criptare il codice P con un codice $W(t)$, noto solo agli utenti abilitati: la somma dei due moduli P e W viene chiamata codice Y. Quando è attivo l'A-S, il codice P sulle portanti L1 e L2 è rimpiazzato dal codice Y. Dopo alcuni periodi di test, l'A-S è stato definitivamente reso attivo dal 31 gennaio 1994.

Il codice L2C è trasmesso sulla sola frequenza L2 dei satelliti del blocco II-RM. Rispetto agli altri codici è migliorata l'accuratezza di navigazione, la velocità d'acquisizione e la robustezza alle interferenze ~~di segnale.~~

È previsto un segnale civile L1C sulla frequenza L1 mentre poco si sa del nuovo codice militare M, che modulerà entrambe le frequenze e sarà trasmesso con frequenza $f_M = f_0 / 2 = 5.115 \text{ MHz}$.

Il **codice Messaggio** o di navigazione è detto anche codice D o **NAV**. Esso ha una frequenza $f_D = f_0 / 204800 = 50 \text{ Hz}$. Contiene importanti informazioni quali le effemeridi dei satelliti, ovvero i parametri per il calcolo della loro posizione, il loro stato di salute e informazioni sugli orologi di bordo.

Il **nuovo codice di navigazione** è detto **CNAV** e rappresenta un aggiornamento del segnale di navigazione NAV. È composto da una sequenza di pacchetti di 300 bit e si ripete ogni 12 secondi. Oltre le informazioni già contenute nel codice NAV, abbiamo in più informazioni sull'asincronismo delle scale di tempo (GNSS time offset) per l'interoperabilità con altre costellazioni GNSS. L'extrabanda contiene una parte di correzione differenziale SBAS (*Satellite Based Augmentation System*) ed è progettato per supportare 63 satelliti, invece dei 32 del messaggio NAV. Contiene un Flag di allertamento se un satellite non è usabile a lungo (importante per *safety of life*). Una sintesi delle componenti del segnale GPS è riportata in Tabella 2.

*utile per chi fa
atterraggi di precisione
strumentati*

Il sistema GNSS

una corrispondenza con i sistemi ITRF e prendono il numero della settimana GPS alla quale sono riferiti:

- G730 (GPS week 730) corrispondente a ITRF92;
- G873 corrispondente a ITRF94;
- G1150, introdotto nel 2002 e corrispondente a ITRF2000 a livello centimetrico.

Per queste realizzazioni non ci sono parametri di trasformazione ufficiali e ciò significa che consideriamo oggi WGS84 e ITRF2000 coincidenti a livello di 10 cm.

2.1.2. Le scale di tempo

Il tempo è una delle principali osservabili nel posizionamento satellitare e ogni sistema GNSS ha una sua scala temporale. Esistono parecchi standard con i quali possiamo definire le scale di tempo.

Il **TAI (Tempo Atomico Internazionale)** è una scala di tempo molto accurata definita dalla radiazione dell'atomo di cesio e mantenuta da 200 orologi atomici dislocati in oltre 70 laboratori nel mondo. L'istante zero è fissato il 1 gennaio 1958 e in un giorno TAI ci sono esattamente 86400 secondi.

Il **tempo solare medio di Greenwich GMT (Greenwich Medium Time)** si basa su osservazioni celesti ed è legato al tempo di rotazione terrestre. La variazione della velocità di rotazione terrestre, legata a forze di attrazione gravitazionali di Sole, Luna e altri pianeti, fanno però ritardare il GMT rispetto al tempo mantenuto dagli orologi atomici. Un giorno di rotazione terrestre non è quindi esattamente 86400 secondi TAI ma oscilla lievemente da un giorno all'altro, mantenendosi vicino a 86400.002 s. *è indipendente dalla rotazione terrestre!!!*

Il **tempo UTC (Tempo Universale Coordinato)**, adottato per la definizione dei fusi orari, deriva dal tempo GMT ma non è basato sull'osservazione di fenomeni celesti bensì è mantenuto con orologi atomici. La differenza tra le due scale di tempo è mantenuta applicando periodiche correzioni in modo tale che il Sole sia sul meridiano di Greenwich alle ore 12:00:00 UTC con uno scarto massimo di 0.9 secondi. Ciò avviene con periodici allineamenti secondo le indicazioni dello IERS (*International Earth Rotation Service*) che si occupa anche della misura del tempo di rotazione terrestre. Tale allineamento viene fatto in pratica con l'introduzione, quando necessario, di un "secondo intercalare" o "*leap second*", considerando quindi che un giorno abbia una durata di 86401 secondi. Generalmente questa correzione viene applicata ogni 18 mesi alla mezzanotte tra il 31 dicembre e 1 gennaio e tra il 30 giugno e 1 luglio. L'applicazione del *leap second* parte dal 1972 e il suo valore al 2013 è di 16 secondi.

La scala di tempo TAI che si origina al 1958, differisce dal tempo UTC, che parte dal 1972, di ulteriori *leap second* e la differenza tra le due scale, al 2013, è di 36 secondi.

Rispetto ad un sistema inerziale, l'asse di rotazione terrestre non è però fisso nel tempo ma compie un percorso chiamato "moto del polo" e monitorato dallo IERS. Nel **tempo UT1**, che deriva dal tempo UTC, sono considerate le correzioni dovute al moto dei due poli che definiscono il vero asse di rotazione terrestre. Tuttavia, data la velocità non uniforme della rotazione terrestre, UT1 ha un'incertezza di ± 3 millisecondi al giorno.

La **scala di tempo GPS** è mantenuta dall'orologio atomico della *Master Control Station* del Centro di Controllo, senza apportare alcuna correzione astronomica per la rotazione terrestre. L'istante zero è alla mezzanotte del 6 gennaio 1980, data alla quale esso coincideva perfettamente col tempo UTC. A causa delle correzioni per il *leap second*, esso si discosta dal tempo UTC, alla data del 2013, di 16 *leap second*.

Il sistema GNSS

la prima stazione GLONASS fuori dal territorio russo, posta in Brasile nella città di Brasilia (<http://www.gpsworld.com/first-glonass-station-outside-russia-opens-brazil/>). La stazione, coprendo l'emisfero Est, dovrebbe migliorare l'accuratezza del posizionamento GLONASS

Il **segmento spaziale** comprende 24 satelliti MEO (*Medium Earth Orbit*) in orbita a circa 19100 km dalla superficie della Terra, disposti su 3 piani orbitali inclinati di 64.8° rispetto all'equatore. Il periodo di ogni satellite è approssimativamente di 11 ore 15 minuti. Questa configurazione consente un posizionamento con copertura continua e globale.

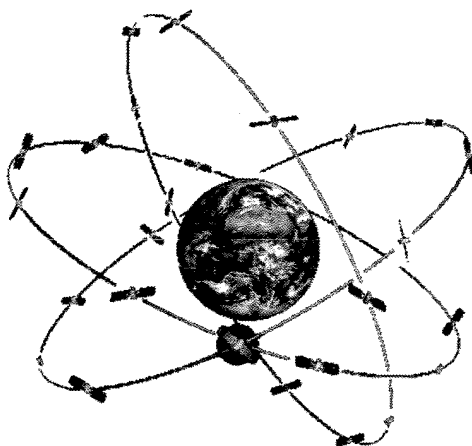


Figura 6 - Costellazione GLONASS

I satelliti GLONASS appartengono a tre blocchi. Il primo blocco (1982-2007) era formato da satelliti con vita media di 3-4.5 anni, equipaggiati con orologi di bordo con stabilità della frequenza di $5 \cdot 10^{-13}$.

Ad essi sono seguiti i satelliti del blocco M (2003-2015) con una vita media di 7 anni ed orologi di bordo con stabilità $1 \cdot 10^{-13}$. Sui satelliti del blocco M è presente il 2° segnale Civile.

L'ultima generazione è quella dei satelliti del blocco K (2008-2015), con maggiore durata (vita media 10 anni). Essi presentano migliorate effemeridi e un 3° segnale civile, presente a partire dal satellite lanciato il 7 aprile 2011. L'accuratezza della mutua sincronizzazione tra i satelliti GLONASS è non peggiore di 20 ns ed è di 8 ns per i satelliti del blocco K.

La scala di tempo dei satelliti GLONASS è periodicamente comparata con la scala del CS time. Vengono calcolate le correzioni rispetto alla scala UTC(SU) che vengono caricate sui satelliti 2 volte al giorno.

Ogni satellite è contrassegnato da un numero di canale K che permette di determinare la frequenza con cui trasmette il segnale. Satelliti sullo stesso piano orbitale possono avere stesso valore di K se in posizione diametrale opposta, in maniera da non essere tracciati contemporaneamente.

Il **segmento utente** è costituito infine dagli utenti finali, dotati di ricevitore.

2.2.1. Il sistema di riferimento PZ90

La posizione fornita dal sistema GLONASS è riferita al **sistema di riferimento PZ90** (*Parametry Zemli*, 1990) o PE90 (*Parameter Earth*, 1990). Come il WGS84 anche il PZ90 è un sistema ECEF ed è in questo DATUM che viene determinata la posizione istantanea dei satelliti e di conseguenza del ricevitore. Dal 2007 il PZ90 è stato aggiornato con una

La parametri dell'ellissoide \neq da quelli del WGS84

Il sistema GNSS

Il primo satellite GIOVE A (*Galileo In-Orbit Validation Element*) è stato lanciato il 26/12/2005 per assicurare l'uso delle frequenze, validare le tecnologie di posizionamento e il segnale. Il secondo satellite GIOVE B è stato lanciato il 27 aprile 2008 allo scopo di dimostrare l'uso di un orologio PHM (*Passive Hydrogen Maser*) con stabilità migliore di 1 ns al giorno. Galileo prevede un servizio SAR (*Safety And Rescue*) di ricerca e di salvataggio. I servizi forniti sono i quattro seguenti:

- OS (*Open Service*): servizio aperto e gratuito;
- CS (*Commercial Service*): servizio criptato;
- SoL (*Safety of Life Service*): include dati sull'integrità;
- PRS (*Public Regulated Service*): accesso controllato.

Esistono già ricevitori che possono acquisire contemporaneamente le informazioni dalle 3 diverse costellazioni (GPS, GLONASS, GALILEO)

2.3.1. Il sistema di riferimento GTRF

Come il GPS, anche GALILEO avrà un sistema di riferimento dedicato, chiamato GTRF (*Galileo Terrestrial Reference Frame*). Ad esso sono riferite le posizioni dei satelliti calcolabili a partire dalle effemeridi. Esso, è realizzato dal consorzio GGSP (*Galileo Geodetic Service Provider prototype*), (in <http://www.ggsp.eu>) e comprende stazioni permanenti GALILEO (GSS – *Galileo Sensor Station*) ed una selezione di stazioni IGS per l'allineamento col sistema ITRF. In Figura 7 vediamo l'attuale configurazione delle stazioni, 13 GSS e 131 IGS (<http://ggsp.eu>) che realizzano il sistema GTRF ed una previsione futura. Pur se indipendente, esso sarà allineato con i sistemi ITRF con differenze di coordinate non eccedenti i 3 cm (2σ). La versione GTRF07 v01 è coerente con ITRF05.

IGSS: ente preposto al controllo dei movimenti delle zelle e al mantenimento dei S.D.R.

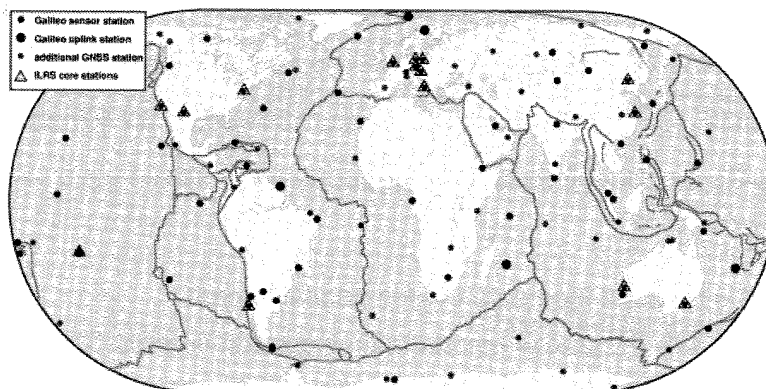


Figura 7 – configurazione del sistema GTRF (http://www.ggsp.eu/ggsp_gtrf.html)

La scala di tempo GALILEO prende il nome di GST (*Galileo System Time*): essa ha inizio all'ora 00:00 del 22 agosto 1999. Nel messaggio di navigazione sono contenuti i coefficienti per calcolare l'offset tra la scala GST e le scale UTC e GPS, per un interoperabilità tra le costellazioni.

2.3.2. Il segnale GALILEO

Il segnale GALILEO è trasmesso su quattro frequenze denominate E1, E5a, E5b, E6, indicate in Figura 8. I segnali E5a e E5b sono parte del segnale E5 e stanno nella sua larghezza di banda.

Il sistema GNSS

Messaggio NAV	Servizio Galileo	Componente
F/NAV	OS	E5a-I
I/NAV	OS / CS / SoL	E5b-I E1-B
C/NAV	CS	E6-B

Tabella 4 – I segnali di navigazione GALILEO (ICD Galileo, 2010)

Il segnale completo è trasmesso su ogni componente da una sequenza di frame composti da sotto-frame di alcune pagine, che sono la struttura base del segnale di navigazione. I dati possono essere trasmessi in tre categorie suddivise in base all'urgenza: urgenti, per informazioni come l'integrità, mediamente urgenti ad esempio per il posizionamento a freddo o con bassa velocità come quelli richiesti per il posizionamento a freddo

2.4. Il sistema BeiDou

Il sistema di posizionamento cinese è detto *BeiDou System*, abbreviato con BDS. Il sistema **BeiDou-1** consiste in 3 satelliti geostazionari inclinati, lanciati dal 2000 al 2003, per scopo dimostrativo e per porre le basi e la validazione del sistema di navigazione cinese.

Nel 2006 la Cina annuncia il sistema **BeiDou-2** noto anche come COMPASS, basato su principi di posizionamento simili a quelli di GPS, GLONASS e GALILEO. Sono previste due fasi: la prima, tutt'ora in corso, con copertura del territorio cinese e aree limitrofe e la seconda (2015-2020) con copertura globale. In BeiDou-2 i satelliti hanno tre differenti tipi di orbite e la costellazione, una volta completa sarà composta da:

- 5 satelliti geostazionari (GEO) ad un'altezza di 35786 km dalla superficie terrestre che incorporano quelli BeiDou-1. Ne sono stati lanciati 4 nel 2010.
- 3 satelliti IGSO (*Inclined Geosynchronous Satellite Orbit*) ad un'altezza di 35786 km dalla superficie terrestre, in tre piani orbitali inclinati di 55° rispetto all'equatore. Lanciati dal dicembre 2010 ad aprile 2011, il loro scopo è orbitare sul territorio cinese permettendo un posizionamento anche in presenza di edifici o ostacoli.
- 27 satelliti MEO (*Medium Earth Orbit*) sono previsti ad un'altezza di 20528 km su 3 piani orbitali inclinati di 55° rispetto al piano equatoriale, con un periodo di 12 ore 53 minuti. Il primo satellite è stato lanciato nell'aprile 2011.

sono molto alti e quindi permettono il posizionamento anche in presenza di edifici (che non sono alle case) su vallate... (ogni cosa ved. meglio i satelliti).

Alla fine del 2012 erano in orbita già 5 satelliti GEO, 4 satelliti MEO e 5 satelliti IGSO. La configurazione del sistema BeiDou-2 è rappresentata in Figura 9.

Il sistema GNSS

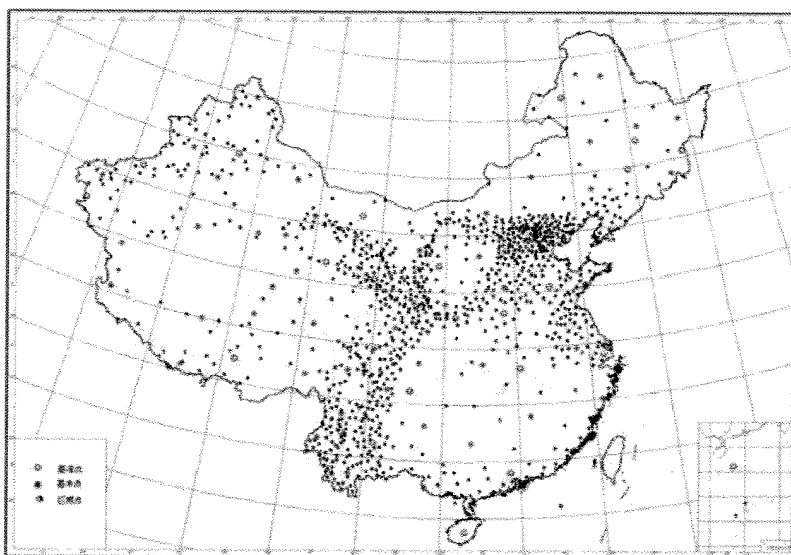


Figura 10 – rete Cinese CORS e altre reti nazionali

La scala di tempo del sistema BeiDou e detta BDT (*BeiDou navigation satellite system Time*). L'epoca d'inizio è l'ora 00:00:00 del 1 gennaio 2006 del tempo UTC e il tempo si conta in secondi nella settimana (*SOW = Secon Of Week*). La scala di tempo BDT è controllata per avere un offset rispetto al tempo UTC inferiore a 100 ns e il *leap second* è trasmesso nel messaggio di navigazione. Per una interoperabilità con i sistemi GPS GLONASS e GALILEO, è misurato e trasmesso l'offset tra le scale di tempo della costellazioni.

2.4.2. Il segnale BeiDou

molto vicini a quelli del GPS

BeiDou-2 trasmette un segnale su tre frequenze nei ranges: 1559.052-1591.788MHz; 1166.22-1217.37MHz e 1250.618-1286.423MHz. La modulazione del segnale è di tipo QPSK (*Quadrature Phase Shift Keying*). Alcune frequenze sono in comune con GPS e GALILEO. Sono previste due fas di completamento (Unavco: <http://facility.unavco.org/data/glossary.html>), (Tang, J. et al. 2011):

- nella prima fase, che prevede 14 satelliti (5 GEO, 5 IGSO e 4 MEO), le portanti (*B*) saranno centrate sulle frequenze riportate in *Tabella 5*:

Componente	Frequenza MHz	Chip rate Mbit/s	Modulazione	Servizio
B1 / E2	1561.098	2.046	QPSK	Aperto
		2.046		Autorizzato
B2 / E5b	1207.14	2.046	QPSK	Aperto
		10.23		Autorizzato
B3 / E6	1268.52	10.23	QPSK	Autorizzato

Tabella 5 – segnale BeiDou nella prima fase

- nella seconda fase, che prevede 35 satelliti (5 GEO, 3 IGSO, 27 MEO), le portanti (*B*) saranno centrate sulle frequenze:

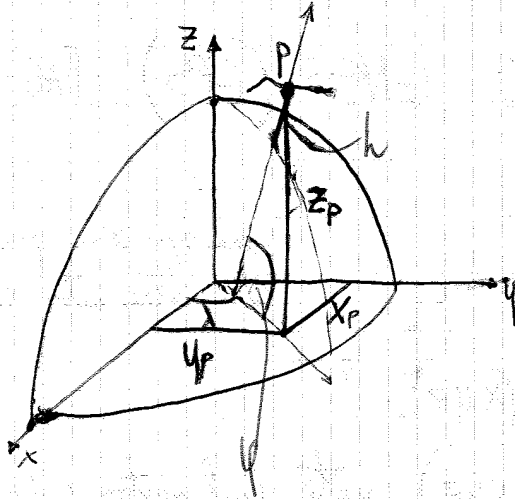
$B1/L1=1575.42 \text{ MHz}$
 $B3/E6=1268.52 \text{ MHz}$
 $B2/E5b=1191.795 \text{ MHz}$

GEOMATICA

09-04-2013

IL SISTEMA GPS

Il sistema di riferimento GPS è il WGS84:



Il s.d.r. ^{vertici} è materializzato da punti a terra (della rete terra). Inizialmente in quei punti a terra per dire che sono nel s.d.r. WGS84)

UTC: la differenza tra le due scale di tempo è mantenuta con uno scarto massimo di 0,5 s, applicando ^{ogni} 1,5 anni la correzione di 1 secondo intercalare o leap second, a partire dal 1972

Proviamo pensare di computare il numero intero di lunghezze d'onda e poi moltiplicare la parte eccedente.

componente impulsiva: onda quadra generata da un algoritmo pseudo random noise (PRN) che modula le portanti e si ripete periodicamente nel tempo.

Codice P (Precursor): è un codice non noto (per decifrare la portante devo conoscere tale codice!) anche se poi è stato reso noto per un certo tempo.
 Poi si è sommato un codice ignoto Wal P:
 $P + W = Y$ (solo l'intensità militare lo conosce!)

In un caso CINEMATICO (il ricevitore si muove (o su una macchina per monitorare il percorso))

$$\Downarrow$$

$$x_i(t), y_i(t), z_i(t)$$

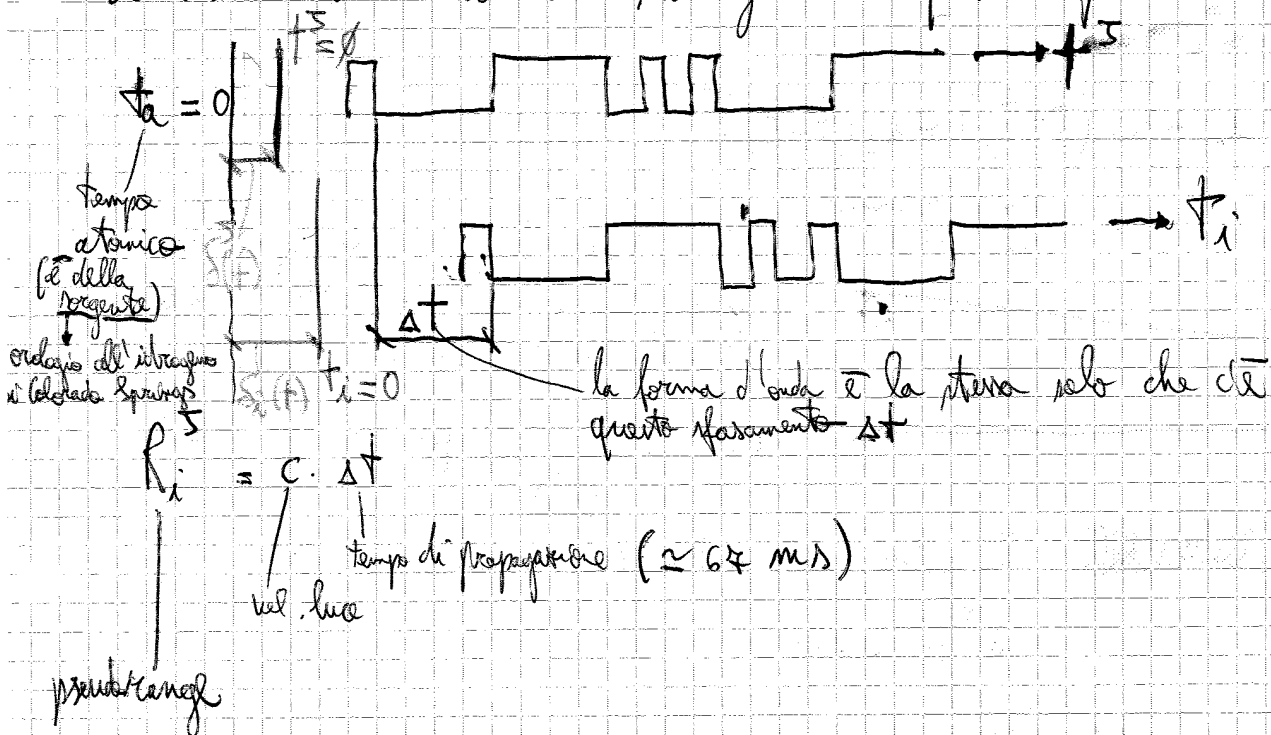
Note $(x, y, z)^T$ e misurato f_i^T devo calcolare $(x, y, z)_i$. dunque devo misurare il range. Lo posso fare in 2 modi:

- 1) MIS. DI CODICE: basato sul tempo di propagazione del segnale del satellite al ricevitore
- 2) MIS. DI FASE: basato sul computo del numero intero di cicli e dello sfasamento ϕ .

- 1) basato su onde quadre di 300 m
 - 2) basato su onde di ≈ 20 cm
- } \rightarrow sono più precise le misure di fase

Vediamo come si fa il POSIZIONAMENTO DI CODICE: ^{PAG. 16} permette di misurare dei range non veri e propri \Rightarrow li chiameremo pseudo range.

Il satellite emette un codice; immaginiamoci questa forma d'onda; che dopo un po' arriva al ricevitore



$$\Delta m \cdot c = 10^{-9} \text{ s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 30 \text{ cm}$$

4) ^{dunque} ipotizziamo che i satelliti sono sincronizzati con $t_a = 0$ con l'errore iniziale, che ci teniamo, di 30 cm.

$$\delta_i(t) \approx 1 \text{ m/s}$$

Se considero sincronizzati anche gli orologi dei ricevitori sceglierei di:

$$10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 300 \text{ km}$$

Molte volte questo $\delta_i(t)$ non è costante ma fluttua (vedi figura precedente), dunque in generale non è noto \Rightarrow è un'incognita in più!!! \Rightarrow le incognite sono 4 non 3, dunque minimo ci servono 4 satelliti (e non 3) perché 4 sono le incognite del posizionamento \Rightarrow per fare minimo qualche cosa mi servono 5 satelliti.

Dunque la (2) diventa:

$$\underbrace{\rho_i^J(t) + c \delta_i(t)}_{\text{incogniti}} = \underbrace{R_i^J(t)}_{\text{la misurazione con i codici}} + c \delta^J(t) \quad (m)$$

$$x_i = x_i^{(0)} + \alpha_i, \quad y_i = y_i^{(0)} + \beta_i, \quad z_i = z_i^{(0)} + \gamma_i$$

Linearizzando (m), diventerà:

$$\begin{aligned} \rho_i^J(t)^{(0)} + \left(\frac{\partial \rho_i^J}{\partial x_i} \right)_{(0)} \alpha_i + \left(\frac{\partial \rho_i^J}{\partial y_i} \right)_{(0)} \beta_i + \left(\frac{\partial \rho_i^J}{\partial z_i} \right)_{(0)} \gamma_i + c \delta_i(t) &= \\ &= R_i^J(t) + c \delta^J(t) \end{aligned}$$

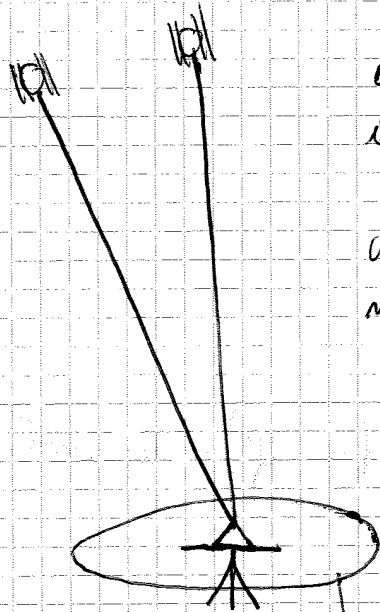
ricordiamo che $\rho_i^J = \sqrt{(x^J - x_i)^2 + (y^J - y_i)^2 + (z^J - z_i)^2}$; malgrado le derivate qui sopra posso scrivere la matrice di Jacobiano.

(Le matrici della pag. precedente vanno bene per il CASO CINEMATICO)

Facciamo una tabellina per il caso statico:

M_S	M_T	
1	3	non esiste il posizionamento con 1 solo satellite
2	3	esiste ma non è in tempo reale perché con 2 satelliti mi servono 3 epoche di misura
4	1	

non esiste una certa configurazione perché:
 (qualcosa è possibile)



non alla precisione
 c'è un problema legato alla geometria:
 il satellite percorre un tratto di orbita troppo breve nelle 3 epoche di misura per poter dare un risultato non costante

Caso CINEMATICO

$$m_{\text{due}}^0 = 3M_T + M_T = 4M_T$$

(x4z) δ_i

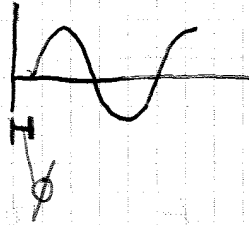
$$M_S \cancel{M_T} \geq 4 \cancel{M_T} \Rightarrow M_S \geq 4$$

con 2 satelliti
 il caso di posizionamento non è possibile nel caso cinematico. Il cinematico è più esigente perché il ricevitore si muove

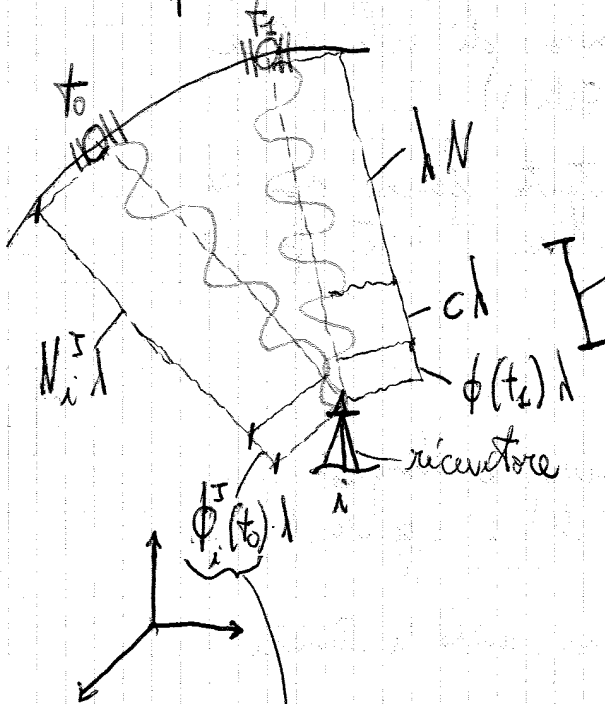
$$d = \phi \lambda + N \lambda$$

lo posso misurare

non lo posso misurare, ma posso solo calcolarlo:
 AMBIGUITÀ DI FASE



Come funziona il GPS:



il ricevitore misura tutto questo

lo misura lo strumento (ricevitore)
 comparando (effettuando
 una comparazione)

$$\phi_i^J(t) \lambda = \rho_i^J(t) + N_i^J \lambda + c \delta^J(t) - c \delta_i(t)$$

posso mettere - c + tanto è uguale,
 perché non sono INCOGNITE!!!

CASO STATICO

n° equaz: $M_+ M_J$

n° incognite: $M_{inc} = 3 + M_+ + M_J$
 (x4z) (Si) (N)

tante quante sono le epoche
 tante quante sono i satelliti

$$M_+ M_J \geq 3 + M_+ + M_J \Rightarrow M_+ (M_J - 1) \geq 3 + M_J$$

$$\boxed{M_+ \geq \frac{3 + M_J}{M_J - 1}} \quad \text{PAG. 21}$$

M_J	M_+
1	1
2	5
5	2

5 epoche di minima (conq. valgono le stesse limitazioni
 volte prima)
 2 epoche (quindi non è in tempo reale!)

non riusciremo mai ad arrivare a $M_+ = 1$, quindi questo posizionamento NON è mai in TEMPO REALE!!!

CASO CINEMATICO:

n° incognite = $3M_+ + M_+ + M_J = 4M_+ + M_J$
 (x4z) (Si) (N)

$$M_+ M_J \geq 4M_+ + M_J \Rightarrow M_+ (M_J - 4) \geq M_J \Rightarrow$$

Matrice disegno:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{x^1 - x_i}{\rho_i^1} & -\frac{y^1 - y_i}{\rho_i^1} & -\frac{z^1 - z_i}{\rho_i^1} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x^2 - x_i}{\rho_i^2} & \frac{y^2 - y_i}{\rho_i^2} & \frac{z^2 - z_i}{\rho_i^2} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ C \delta_i \\ N_1^1 \\ N_2^1 \\ \vdots \\ N_n^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_i^1 + C \delta_i - \rho_i^1(0) \end{pmatrix} = V$$

Quando ho accumulato un numero suff. di equazioni \rightarrow posso calcolare i coeff. N e dunque posso togliere le N dalle incognite \Rightarrow il modello linearizzato diventa uguale a quello di primo range.
 Se però l'ambiguità di fase devo rimettere in gioco la colonna relativa all'incognita che ho perso.

può essere ritenuta pari a
 Precisione misura $\approx 1\%$ PAG. 22

$$\sigma_L = 1\% \cdot 20 \text{ cm} = \pm 2 \text{ mm}$$

$L_{1,2}, L_3$ (punti \Rightarrow misura di fase)

$$\sigma_{C/A} = 1\% \cdot 300 \text{ m} = \pm 3 \text{ m}$$

La misura di fase è π più complicata, ma la precisione è millimetrica!!

GEOMATICA

15-04-2013

SLIDES

Modello linearizzato per il posizionamento di fase cinemático

Lo pseudorange ρ_i sarebbe il range se i ricevitori fossero fra di loro sincronizzati.

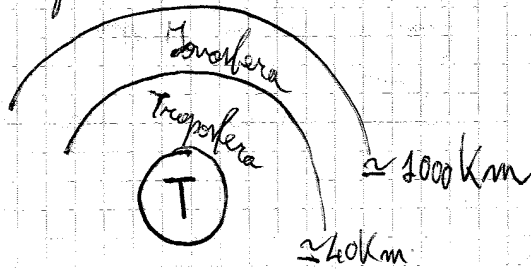
$$\Delta t$$

$c \Delta t_i$ è l'errore dell'orologio del ricevitore

In tutti i casi non è possibile calcolare le coordinate del ricevitore in tempo reale (cioè istantaneamente) se prima non determiniamo l'ambiguità di fase N . Una volta nota, la porta nei termini noti e dunque mi riconduco al caso di pseudorange.

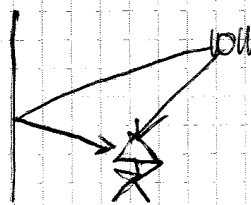
PRINCIPALI BIAS NEL GPS (Chaias) PAG. 22

- l'errore d'orologio del satellite è piccolo ($\approx 300m \rightarrow$ è $\frac{1}{1000}$ della lunghezza d'onda)
- errore effemeridi (il satellite non è dove noi vogliamo esattamente che sia). $\approx 200m$



- riflessione \Rightarrow misure automaticamente più lunga o più corta.
- Una volta nel ricevitore abbiamo (come errori):

- multipath:



- errore orologio ricevitore

- variazione centro fase antenna \rightarrow punti teorici che variano in funzione della posizione del satellite.

Abbiamo trascurato l'errore legato alla variazione del centro di fase dell'antenna del satellite.

$$R_{01} = R_i^I - B_1 / f_1^2$$

range moltiplicato nella frequenza 1

range teorico

$$R_{02} = R_i^I - B_1 / f_2^2$$

Uguagliamo i due B_1 :

$$B_1 = (R_i^I - R_{01}) f_1^2 = (R_i^I - R_{02}) f_2^2$$

minuati

condizioni della precisione dell'orologio del sistema

unità sincrona è R_i^I

$$\Rightarrow R_i^I (f_1^2 - f_2^2) = R_{01} f_1^2 - R_{02} f_2^2$$

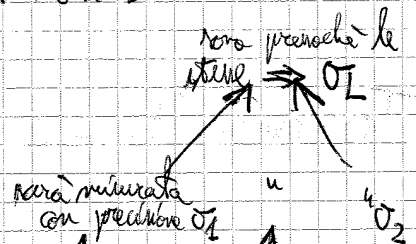
$$\Rightarrow R_i^I = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} R_{01} - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} R_{02} =$$

è una comb. lineare dei 2 range, con coeff. noti.
 ricordiamo che $f_1 = 154 f_0$ e $f_2 = 120 f_0$

COMBINAZIONE IONO-FREE

dunque si ha:

$$= \frac{154^2}{154^2 - 120^2} R_{01} - \frac{120^2}{154^2 - 120^2} R_{02} \approx 2,5 R_{01} - 1,5 R_{02}$$



Il prezzo da pagare per fare ciò è avere ricevitori a doppia frequenza (costano il doppio di quelli a singola frequenza).

ricordiamo la propagaz. della varianza:

$$\sigma_{\text{IONO-FREE}} = \sqrt{1,5^2 + 2,5^2} \sigma_I = \pm 3 \sigma_I$$

la var. di un'ora dell'è di un'ora dalla iono

la combinazione IONO-FREE elimina in l'errore ionosferico, ma è 3 volte più rumorosa \Rightarrow la ionosferica è meno precisa dell'errore 40 nella ionosferica come risultato

Il errore lo modelliamo, ma cui ho un errore di modello.

Capitolati dicono di acquisire misure da satelliti di elevazione non maggiore di 15° sull'orizzontale.

per il posizionamento

se voglio modellare la troposfera e stimare l'errore \Rightarrow faccio misure con satelliti di elevazione $> 15^\circ$.

EFFEMERIDI ^{PAG. 23}: il satellite si trova in una posizione errata, poiché oggetto di una stima (minimi quadrati) errata.

$$\frac{20 \text{ m}}{20'000'000} \approx 10^{-7}$$

errore che commetterebbe un buon distanziometro terrestre

20'000 km (distanza terra-sole)

- effemeridi broadcast: trasmesse dal satellite in tempo reale (posizionamento in tempo reale). Sono effemeridi predette

ogni 4 ore: sono calcolate da un'extrapolazione dei dati precedenti e forniscono la posizione per le prossime 4 ore. Se non fossero predette non potrei fare posizionamento in tempo reale.

- effemeridi precise: sono calcolate a posteriori in base a dove realmente il satellite si è trovato

- effemeridi "ultra precise" predette: le effemeridi vengono predette qualche ora prima.

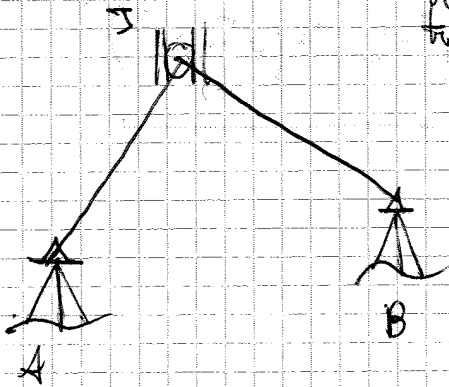
le coordinate di B basterà misurare λ anche angoli azimutali e Zenit.
 continuo dell'eq. questa misura di fase: PAG. 20

$$\phi_A^S(t) - f^S \delta^S(t) = \frac{p_A^S(t)}{\lambda} + N_A^S \lambda + c \delta_A^S(t) + I_A^S +$$

$+ T_A^S + E_A^S + E_A^S$ → contiene tutti gli errori (renduti non misurabili: l'oscillazione del centro di fase della antenna, multipath, ...)

propagazione tra A e S

effemeridi tra A e S



$$\phi_B^S(t) - f^S \delta^S(t) = \frac{p_B^S(t)}{\lambda} + N_B^S \lambda + c \delta_B^S(t) + I_B^S +$$

$$+ T_B^S + E_B^S + E_B^S$$

Facciamo la differenza tra le 2 osservazioni:

$$\phi_A^S(t) - \phi_B^S(t) = \frac{1}{\lambda} (p_B^S(t) - p_A^S(t)) + \lambda (N_B^S - N_A^S) + \cancel{\Delta I} +$$

$$+ c (\delta_B^S(t) - \delta_A^S(t))$$

$\cancel{\Delta I}$ → si elimina l'errore dell'ora legato dai satelliti

$\cancel{\Delta I}$ → non è la stessa perché misurati in base alle ricevitori che considero

$\cancel{\Delta I}$ → questi termini sono nulli

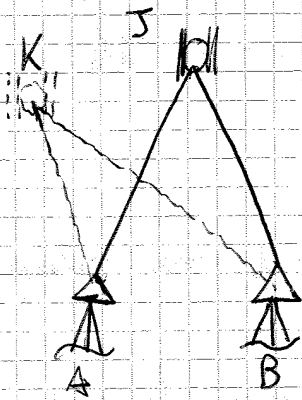
⇒ in questa DIFFERENZA PRIMA (o SINGOLA) si elimina l'errore legato all'orologio dei satelliti.

Le queste ricevitori A e B sono vicini fra loro (max. 15 km), il ritardo ionosferico e troposferico sono gli stessi sui due satelliti, quindi: e le effemeridi

GEOMATICA

16-04-2013

Ripartiamo dalle DIFFERENZE PRIME o SINGOLE: PAG. 28



l'equazione scritta in forma compatta è:

$$\phi_{AB}^S(t) = \frac{P_{AB}^S(t)}{\lambda} + N_{AB}^S + f^S \delta_{AB}(t)$$

Ora immaginiamo di scrivere la stessa eq. di diff. prime rispetto ad un ricevitore K (noi abbiamo tante eq. di diff. prime quanti sono i satelliti o i ricevitori considerati):

es. se ho 4 satelliti e 2 ricevitori \rightarrow posso scrivere 4 equazioni alle differenze prime

[osservazione: ne faccio un'osservazione fondamentale:

$$\phi_A^S \lambda = f_A^S + N_A^S \lambda + c \delta^S - c \delta_i \quad \text{è in metri}$$

$$\phi_A^S = \frac{f_A^S}{\lambda} + N_A^S + f^S \delta^S - f^S \delta_i \quad \text{è in cicli}$$

$$\frac{c}{\lambda} = f$$

Facciamo la differenza di diff. prime (cioè la doppia differenza): PAG. 29

Ⓢ

$$\phi_{AB}^K(t) - \phi_{AB}^S(t) = \phi_{AB}^{SK}(t) = \frac{1}{\lambda} \left[P_{AB}^K(t) - P_{AB}^S(t) \right] + N_{AB}^K - N_{AB}^S$$

Nel GPS $f^S = f^K$ (ma anche nel Galileo e Beidou) \Rightarrow possiamo eliminare l'errore d'orologio dei ricevitori ^{a terra}. Il Glonass ha diverse frequenze per ogni satellite \Rightarrow l'errore d'orologio ^{dei ricevitori a terra} non può essere eliminato.

N.B. Ciò che elimino è la combinazione di Bias $(\delta_B - \delta_A)$, non il bias singolo (proprio perché sto facendo delle differenze).

Le differenze TERZE, ^{esistono in tutti gli errori (quasi) per numero di "punti",} però hanno alcuni difetti:

1) Noi abbiamo differenziato 3 volte \Rightarrow abbiamo fatto 8 osservazioni \Rightarrow queste differenze terze sono molto correlate

\downarrow
la matrice di var. cov. contiene termini molto grandi \Rightarrow le differenze terze sono poco precise

\downarrow
che precisioni centimetriche (non è il max. che possiamo ottenere) per le nostre applicazioni

2) RIDONDAZZA: per scrivere un'eq. alla differenza TERZA ho bisogno di 2 misure di range. Ho 2 equazioni di misura di fase per 4 differenze terza. Ho, cioè, grave ridondanza

perché ci vanno 2 misure per scrivere 4 sola equazione (basta pensare che, stabilizzando ogni singola misura della ϕ (senza fare differenze), potrei scrivere 8 equazioni).

\downarrow
non va bene per un procedimento ai min. quadrati

3) Ho bisogno di almeno 2 epoche per fare una misura alle differenze terze \Rightarrow non posso fare cinematica (poco misurazioni!)
Potrei farlo solo se ipotizzo un modello di moto (moto rettilineo uniforme, accelerato, ... i cui parametri sono stimati all'interno della soluzione).

Qual è la procedura per arrivare, ^{a calcolare} alla fine, una BASELINE GPS?

o altre caratteristiche simili

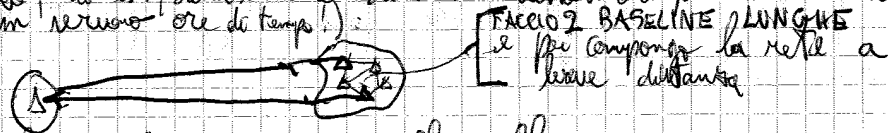
trascurare.

Una baseline con dimensioni di 10-15 km \Rightarrow richiede un tempo di acquisizione di ≈ 15 minuti.

" 100 km \Rightarrow "

" alcune ore.

Se differenze singole nel campo di fatto il disegno della rete (compongo le baseline con il criterio, ad es., della minima distanza unita) che per una baseline di 100 o più km servono ore di tempo.



3) la soluzione che calcoleremo sarà quella alle DIFFERENZE TERZE:

$$\phi_{AB}^{JK}(t_2) - \phi_{AB}^{JK}(t_1) = \frac{1}{\lambda} \left[\rho_{AB}^{JK}(t_2) - \rho_{AB}^{JK}(t_1) \right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\Delta x \Delta y \Delta z)$ alle differenze triple \Rightarrow in pratica è come il calcolo ρ_{AB}^{JK} .

Otteniamo dunque una precisione centimetrica, ma non è la migliore che possiamo avere. Facciamo quindi:

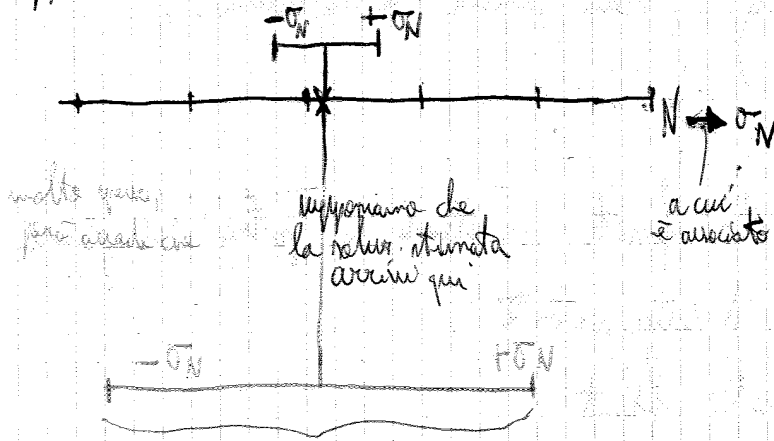
4) DOUBLE DIFFERENZE FLT (float)

Stimo $\rho_{AB}^{JK} \Rightarrow (\Delta x \Delta y \Delta z)$ FLT
 da una stessa
 caso in virgola mobile

Stimo $N_{AB}^{JK} \in \mathbb{R}$
 caso con ambiguità non fissata ad intero
 l'ambiguità di fase sarà in virgola mobile

In realtà la natura di N è un numero intero (sono io che, a causa dei vari errori, avrò $N \in \mathbb{R}$)

Supponiamo di avere il dominio delle soluzioni di N_{AD}^{JK} :



All'interno di questo intervallo cadono 4 possibili valori di $N \Rightarrow$ per sapere qual è il valore migliore devo provare tutte le soluz. possibili

perché sono 4 i valori di N da tentare

(in questo caso) \downarrow oppure
 M soluzioni / caratterizzate dalla rispettiva varianza dell'uni-
 tà di peso σ_0^2 :
 $\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot 2$ (I), $\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot 2$ (II), ..., $\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot 2$ (m)



l'ordine in ordine crescente

Faccio il test statistico RATIO / PAG. 46 per vedere se ho fatto bene l'ambiguità per le 2 soluzioni

TEST RATIO = $\frac{\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot 2 \text{ (II)}}{\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot 2 \text{ (I)}}$

se fosse = 1 \Rightarrow ho fatto la stessa ambiguità \Rightarrow non posso dire niente.
 Invece se tale RATIO fosse il più grande possibile varrebbe dire che $\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot 2 \text{ (II)}$ sarebbe il più piccolo possibile \Rightarrow (xx più piccola \Rightarrow 0/0/0)

si impone:

$\frac{\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot 2 \text{ (II)}}{\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot 2 \text{ (I)}} >$

1,5 STATICI

\Rightarrow CINEMATICI

sono sempre più difficili

con la variazione grande discordanza tra la soluzione 1 e 2 \Rightarrow dunque varrebbe dire che la soluz. 1 è quella "buona".

Se consideriamo $\lambda \approx 86 \text{ cm}$

quanti interi candidati ci sono in $\pm 4 \text{ m}$, con $\lambda \approx 86 \text{ cm}$? Ce ne sono 3 (interi candidati).

n° combinazioni = $3^4 = 81 \Rightarrow$ se avessi $\lambda \approx 106 \text{ cm} \Rightarrow$ dovrei fare solo 81 volte il calcolo.

Come la otteniamo $\lambda \approx 106 \text{ cm}$?

Però abbiamo visto una comb. delle misure di fare detta **IONO FREE** per eliminare l'err. ionosferico. PAG. 47
 Oppure abbiamo la combinazione **WIDE LANE** (maggiorata):

$$f_{WL} = f_{L1} - f_{L2} = (154 - 120) \cdot f_0 = 34 \cdot (40,23 \text{ MHz}) = 34 \cdot 40,23 \text{ MHz} = 1367,82 \text{ MHz}$$

La lunghezza d'onda **WIDE LANE** è dunque:

$$\lambda_W = \frac{c}{f_W} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1367,82 \cdot 10^6} \approx 86 \text{ cm}$$

per avere Hz

Da un po' di tempo esiste la **L5** \Rightarrow la **WL** può essere combinata in diverse possibilità:

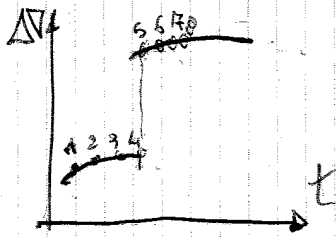
- WL: $L_1 L_2$
- $L_1 L_5$
- $L_2 L_5$

Ci sarà una micro e macro WL.

Si può dimostrare che $\sigma_{WL} = 5 \sigma_L \Rightarrow$ la WL è molto poco precisa \Rightarrow

\Rightarrow serve solo al fissaggio rapido del numero di interi candidati.

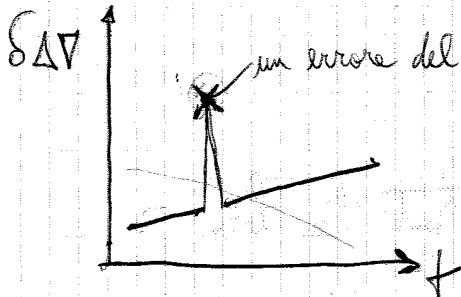
Alle doppie differenze lo:



Quello che è un grosso nelle differenze doppie diventerà un outlier nelle differenze terze,

Alle differenze terze lo:

differenza di 2 diff. doppie, quindi faccio la differenza tra 2 punti alla volta e 2 a 2 del grafico sopra (la differenza tra 6-5, 7-6, 8-7 sarà parallela circa a 2-1, 3-2, 4-3. La differenza tra 5-4 mi dà l'outlier).



un errore del genere non è difficile da eliminare; se faccio la compens. min. quadr. è il classico outlier (errore grossolano) facilmente individuabile (con test polinomio di basso grado)

test sul punto normalizzato

differenze

POSIZIONAMENTO DIFFERENZIALE

DGPS PAG. 40

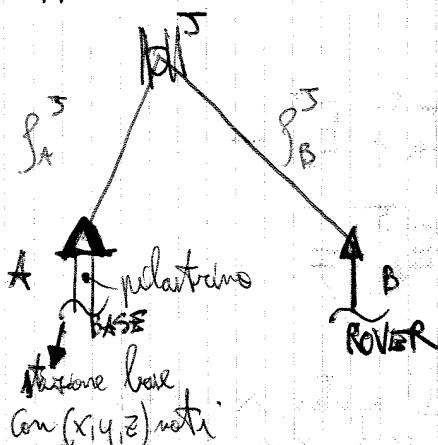
Lo applichiamo ma a misure di fase che di codice.

PRECISIONI:

- punti stamb. 5-10 m
- punti differ. su misura di codice: ≈ 1 m
- punti differ. su misura di fase: centimetriche

Però avere anche rilevazioni in tempo reale (perché in quel punto voglio picchettare perché da lì partirà il viadotto, ...)

Supponiamo di avere:



Sulla stazione base avremo:

$$S_A^J = \sqrt{(x^J - x_A)^2 + (y^J - y_A)^2 + (z^J - z_A)^2}$$

tutti i termini sono noti

Ma misura lo pseudorange, non il range, perché c'è l'errore di orologio.

ficcino, altrimenti, rimarrebbe un residuo
(se d_{AB} è grande)

$$= \int_B^S(A) + C \delta_{AB}(A)$$

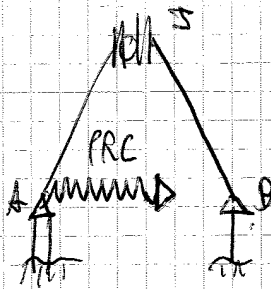
non appare i 2 orologi (d_A e d_B) ma
rimane un errore medio di 2 orologi

ho solo più l'errore di orologi dei ricevitori

Questo posticciamente differenziabile equivale ad una singola differenziale
del punto relativo.

Quando è che sono diversi?

Ammettiamo che il ricevitore in A sia in grado di inviare a quello
in B le correzioni differenziali PRC (grazie a internet, ad es.). Il
ricevitore in B è anche lui dotato di un modem e può andare
su internet: → ricevere la PRC, e fa la correzione in
automatico (⇒ tempo reale) ⇒ precisione
di ± 1 m con ricevitori anche molto
semplici (200-300 €).



è l'inviechiamento che subisce la
correz. differenziale nel
passare da A a B

$$PRC(t) = \underbrace{PRC(t_0)}_{\substack{\text{di calcolo nel} \\ \text{ricevitore A}}} + \underbrace{RRC(t-t_0)}_{\text{latenza}}$$

\swarrow nel ricevitore B

Il punto diff. e relativo sarebbero uguali se la latenza fosse
nulla.

Sono uguali in post elaborazione, ma in tempo reale no.

sarebbero uguali
solo se latenza = 0

PRINCIPI BASE DEI POSIZIONAMENTI

Nel relativo si usano le basiline.

Nel differenziale si correggono i range e si fa il posizionamento con i range corretti.

N.B.

Il ricevitore fatica per risolvere N_{+B} (perché anche se conosco N in A , quello in B è diverso!!!)

La precisione del posizionamento dipende anche dalla qualità della COSTELLAZIONE.

Le misure le andiamo a fare quando abbiamo il maggior numero di satelliti visibili.

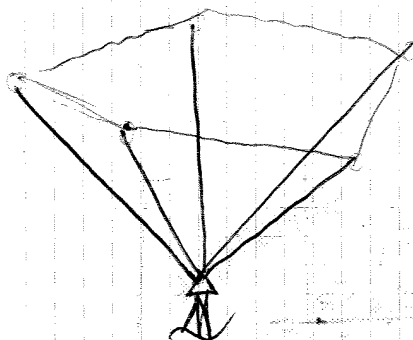
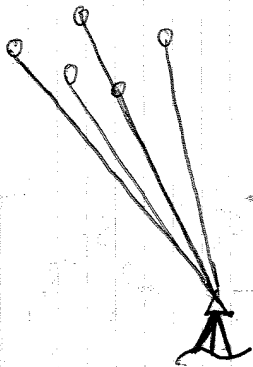
Dagli almanacchi delle effemeridi riusciamo a prevedere la posizione dei satelliti per i tempi che verranno.

DOP

Tempi:

5 satelliti:

— range misurati



Questa geometria è migliore della prima.

radice di 207 quadrato;

$$\text{FDOP}_{\text{global}} = \sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_m^2 + \sigma_u^2 + \sigma_s^2}$$

PAG. 117

dire che è proporz. al volume equivalente a dire che è proporz. alla traccia della matrice

L'indice più usato è:

$$\text{PDOP} = \sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_m^2 + \sigma_u^2}$$

Se voglio fare solo la planimetria:

$$\text{HDOP} = \sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_m^2}$$

horizontal

Se altimetria:

$$\text{VDOP} = \sqrt{\sigma_u^2}$$

vertical

Per la metrologia (interessa più il tempo):

$$\text{TDOP} = \sqrt{\sigma_s^2}$$

time

Questi indici possono essere calcolati in simulazione: non c'è bisogno di fare le misure (basta conoscere solo le efficienze e il punto P)



POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria dell'Ambiente, del Territorio e delle Infrastrutture

Posizionamento GNSS
(*Global Navigation Satellite System*)

Alberto CINA

GEOMATICA - a.a. 2012-2013

4

Il sistema GNSS

Il **GNSS (Global Navigation Satellite System)** è il sistema di posizionamento e navigazione basato sulla ricezione di segnali radio trasmessi da **diverse costellazioni di satelliti** artificiali.

- **GPS (Global Positioning System)**, realizzato e controllato dal Dipartimento della Difesa degli Stati Uniti (DoD)
- **GLONASS (GLObalnaya NAVigatsionnaya Sputnikovaya Sistema)** è il sistema di posizionamento russo del *Russian Aerospace Defence Forces*
- **GALILEO** è il sistema di posizionamento Europeo
- **BeiDou o BDS (BeiDou Navigation Satellite System)** è il sistema di posizionamento cinese
- **QZSS (Quasi-Zenith Satellite System)** è il sistema di posizionamento regionale Giapponese
- ... altre costellazioni previste ...

Completano il sistema GNSS alcuni servizi di *augmentation* quali satelliti geostazionari e componenti locali di terra

2

Parti del sistema GNSS (segmenti)

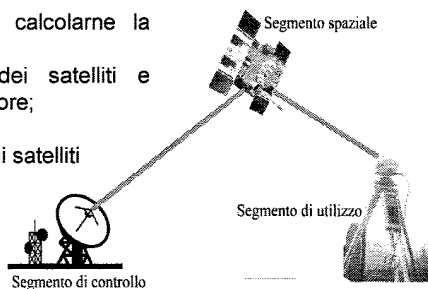
Segmento spaziale: costituito da satelliti MEO (*Medium Earth Orbit*), in orbita pressochè circolare intorno alla Terra ad altezza variabile, a seconda della costellazione, da circa 19.100 km a circa 23.200 km

- trasmettere agli utilizzatori un segnale radio
- mantenere un riferimento di tempo accurato,
- ricevere e memorizzare informazioni dal segmento di controllo

Segmento di controllo: stazioni a terra con compiti:

- "tracciare" i satelliti per calcolarne la posizione (effemeridi);
- controllare gli orologi dei satelliti e calcolare un modello d'errore;
- imporre correzioni d'orbita
- memorizzare nuovi dati sui satelliti

Segmento di utilizzo: è costituito dall'utenza dotata di ricevitori con antenna



3

Principi sul segnale GNSS

componenti del segnale sono controllate da orologi atomici, con stabilità a lungo termine pari a $10^{-12} \pm 10^{-14}$

Gli orologi producono una frequenza fondamentale f_0 a cui corrisponde una lunghezza d'onda: $\lambda = \frac{c = 3 * 10^8 \text{ m/s}}{f_0}$

Da essa si originano le 3 parti del segnale:

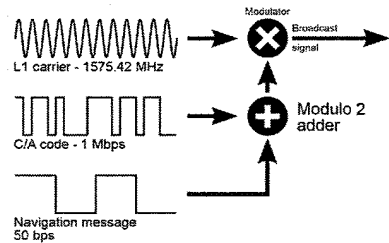
- **componente portante:** onde sinusoidali generate moltiplicando la frequenza fondamentale per coefficienti noti;
- **componente impulsiva (codici):** onde quadre formate da transizioni di valori +1 e -1, generati da un algoritmo che si ripete periodicamente nel tempo. Vengono detti, per questo motivo, "pseudo casuali" o PRN (*Pseudo Random Noise*).
- **Componente messaggio** (codice di navigazione): contiene importanti informazioni tra le quali le effemeridi per il calcolo della posizione dei satelliti

Le componenti del segnale GNSS

componente sinusoidale: hanno lunghezza d'onda di circa 20 cm, a seconda della frequenza

componente impulsiva (codici): transizioni di +1 e -1 che modulano le portanti, producendo uno sfasamento di π sulla fase

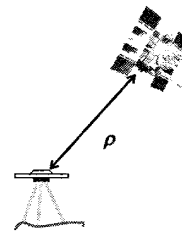
Il segnale trasmesso (Broadcast signal) che ne risulta è dunque quello della portante modulata dai vari codici:



Misura del «range» ρ

La distanza tra i centri di fase del satellite e del ricevitore (range) può essere misurata con:

- 1) **misure di codice:** a partire dal tempo di propagazione del segnale dal satellite al ricevitore;
- 2) **misure di fase:** a partire dal numero di cicli interi e dalla parte frazionaria dell'onda sinusoidale.



Perché i segnali GNSS sono così complessi:

- Sistema militare → segretezza della posizione del ricevitore: sistema ad «una via»;
- **misure di codice:** posizionamento istantaneo di bassa precisione;
- **misure di fase:** posizionamento di precisione;
- **Più frequenze:** contenere e/o modellare l'effetto legato alla rifrazione del segnale e per posizionamento tempo reale di precisione

Le scale di tempo

Il tempo è una delle principali osservabili nel posizionamento satellitare e ogni sistema GNSS ha una sua scala temporale. Esistono parecchi standard: tra i principali:

GMT (Greenwich Medium Time) si basa su osservazioni celesti legate al tempo di rotazione terrestre. La variazioni della velocità di rotazione fa ritardare il GMT rispetto al tempo degli orologi atomici.

UTC (Tempo Universale Coordinato), adottato per la definizione dei fusi orari. Deriva dal GMT ma non è basato sull'osservazione di fenomeni celesti bensì è mantenuto con orologi atomici. La differenza tra le due scale di tempo è mantenuta con uno scarto massimo di 0.9 s, applicando ogni 1.5 anni la correzione di 1 secondo intercalare o *leap second*, a partire dal 1972

tempo GPS è mantenuta dall'orologio atomico della *Master Control Station*, senza alcuna correzione astronomica per la rotazione terrestre. Al 6 gennaio 1980, coincideva perfettamente col tempo UTC. A causa delle correzioni esso si discosta oggi dal tempo UTC di 16 *leap seconds*.

13

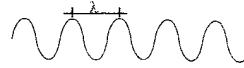
IL SEGNALE GPS – componente portante (Fasi)

Il segnale si origina da una frequenza fondamentale $f_0=10.23$ MHz

- Il tipo di modulazione del segnale GPS è CDMA (*Code Division Multiple Access*)
- Tutti i satelliti hanno la stessa frequenza, a differenza dei satelliti delle costellazioni GLONASS

COMPONENTE PORTANTE SINUSOIDALE L1 L2

- $f_{L1} = 154 f_0 = 1575.42$ MHz ($\lambda = c/f_{L1} \approx 19$ cm)
- $f_{L2} = 120 f_0 = 1227.60$ MHz ($\lambda = c/f_{L2} \approx 24$ cm)
- **Nuova portante L5:** $f_{L5} = 115 f_0 = 1176.45$ MHz ($\lambda = c/f_{L5} \approx 25$ cm)
Disponibile sui satelliti del blocco IIRM-L5 (2009) e sul nuovo blocco IIF

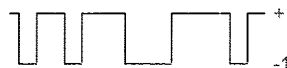


14

IL SEGNALE GPS – componente impulsiva (Codici)

COMPONENTE IMPULSIVA: CODICI C/A, P: onda quadra generata da un algoritmo pseudo random noise (PRN) che modula le portanti e si ripete periodicamente nel tempo

- $f_{C/A} = f_0 / 10 = 1.023$ MHz ($\lambda = c/f_{C/A} \approx 300$ m)
- $f_P = f_0 = 10.23$ MHz ($\lambda = c/f_P \approx 30$ m)



- **Nuovo codice civile L2C sulla portante L2, formato da 2 distinti PRN (CM, CL):** trasmesso su L2 dei satelliti blocco IIRM. Migliora l'accuratezza di navigazione ed è più robusto alle interferenze. Diversamente dal C/A ha due distinti PRN trasmessi a $f_0/20$:

- **CM** (Civilian Moderate length)
- **CL** (Civilian Long length)

Nuovi codici militari M

Futuro codice su L1 chiamato L1C (2014?)

15

DATUM GLONASS: PZ90 (Parametry Zemli 1990)

- è il DATUM nel quale sono fornite le posizioni dei satelliti GLONASS, attraverso le effemeridi
- detto anche PE90=Parameters of the Earth 1990
- come il WGS84 è un sistema ECEF
- con decisione governativa del 20 giugno 2007 il sistema **PZ90.02** è il nuovo sistema di riferimento GLONASS

Parametri PZ90	Ellipsoid		
	Semi-major axis of the ellipse	a	6 378 136.0 m
	Flattening factor	f	1/298.257839303
	Earth angular velocity	ω_E	$7\,292\,115.0 \cdot 10^{-11}$ rad/s
	Gravitational constant	μ	$3\,986\,004.4 \cdot 10^8$ m ³ /s ²
	Speed of light in a vacuum	c	$2.99792458 \cdot 10^8$ m/s
	Second zonal harmonic coefficient	J_2^0	$1\,082\,625.75 \cdot 10^{-9}$

49

Il segnale GLONASS

- Il GPS ha modulazione CDMA (Code Division Multiple Access) e le frequenze sono tutte uguali
- Il GLONASS ha modulazione FDMA (Frequency Division Multiple Access) La banda di frequenza è suddivisa in un numero di sottobande (sottocanali) che occupino, in frequenza, una banda più piccola

• Le frequenze GLONASS risultano diverse e dedotte da una frequenza fondamentale $f_0=5\text{MHz}$:

$$f_1 = 1602 + 0.5625 K \text{ (MHz)}$$

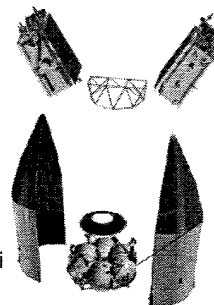
$$f_2 = 1246 + 0.4375 K \text{ (MHz)} \quad \text{Con } f_1/f_2 = 9/7$$

con K variabile da -7 a 8

• sui satelliti blocco k prevista 3° frequenza e sperimentazione CDMA $f_3 = 3/4 f_1$

Le sottoportanti L1 e L2 sono modulate da codici:

- **PR ranging code:** velocità 511 Kbit/s che si ripete periodicamente ogni 1 ms.
- **Messaggio di navigazione**



20

Il sistema Galileo

La costellazione completa sarà composta da 27 satelliti più 3 di riserva, su tre piani orbitali inclinati di 56° rispetto al piano equatoriale. Il semiasse dell'orbita è 29601.297 km.

Il completamento, previsto per il 2012, ha subito un ritardo per l'allontanarsi delle industrie private dal progetto.

Il primo satellite GIOVE A (Galileo In-Orbit Validation Element è stato lanciato il 26/12/2005) per assicurare l'uso delle frequenze, validare le tecnologie di posizionamento e il segnale.

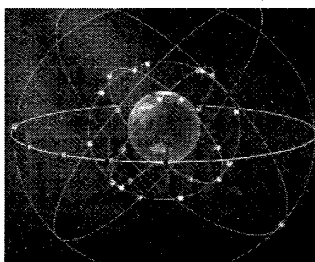
Il secondo satellite GIOVE B è stato lanciato il 27 aprile 2008 e sta trasmettendo il primo segnale GALILEO agli utenti dotati di ricevitori abilitati a queste frequenze. Tale missione ha lo scopo di dimostrare il possibile uso di un orologio PHM (Passive Hydrogen Maser)

21

I satelliti BeiDou

In BeiDou-2 i satelliti hanno tre differenti tipi di orbite:

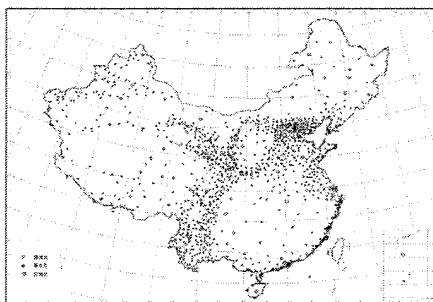
- **5 satelliti geostazionari (GEO)** ad un'altezza di 35786 km dalla superficie terrestre che incorporano quelli BeiDou-1. Ne sono stati lanciati **4 nel 2010**.
- **3 satelliti IGSO (Inclined Geosynchronous Satellite Orbit)** ad un'altezza di 35786 km dalla superficie terrestre, in tre piani orbitali inclinati di 55° rispetto all'equatore. Lanciati dal dicembre 2010 ad aprile 2011, il loro scopo è orbitare sul territorio cinese permettendo un posizionamento anche in presenza di edifici o ostacoli.
- **27 satelliti MEO (Medium Earth Orbit)** sono previsti ad un'altezza di 20528 km su 3 piani orbitali inclinati di 55° rispetto al piano equatoriale, con un periodo di 12 ore 53 minuti. **Il primo satellite è stato lanciato nell'aprile 2011.**



25

Il sistema di riferimento Cinese CGSS

Dopo l'unificazione delle reti geodetiche, il 1° luglio 2008 il governo cinese annuncia l'adozione del nuovo sistema di riferimento chiamato **CGCS2000 (China Geodetic Coordinate System 2000)**,



Esso è costituito inizialmente da 210 stazioni permanenti GNSS che diventano circa 500 nel 2013, con interdistanza 150 km. È un sistema ECEF a cui è associato l'ellissoide **CGCS2000**

26

Il segnale BeiDou

BeiDou-2 trasmette un segnale su **tre frequenze** nei ranges:

- 1559.052-1591.788MHz
- 1166.22-1217.37MHz
- 1250.618-1286.423MHz

Alcune frequenze sono in comune con GPS e GALILEO.

Attualmente sono documentate le specifiche della sola frequenza **B1I=1561.098 MHz**.

La portante è poi modulata dai codici:

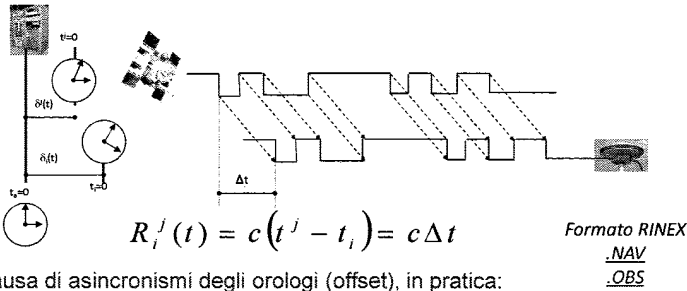
- "ranging code" C_{B1i} : con lunghezza 2046 bit ed è trasmesso alla frequenza di 2.046 MHz;
- *Messaggio di navigazione NAV*

27

MISURA DEL RANGE CON CODICI

Onde quadre: codice C/A, P o L2C

- si ripetono periodicamente
- ricerca massimo di correlazione tra segnale ricevuto e generato localmente dal ricevitore



causa di asincronismi degli orologi (offset), in pratica:

$$R_i^j(t) = c[(t^j - \delta^j(t)) - (t_i - \delta_i(t))] = c[(t^j - t_i) - \delta^j(t) + \delta_i(t)] = \rho_i^j - \delta^j(t) + \delta_i(t)$$

31

Modello linearizzato posizionamento pseudorange di codice

l'equazione dello pseudorange tra il satellite j e il ricevitore i :

$$R_i^j(t) = \rho_i^j(t) - c(\delta^j(t) + \delta_i(t))$$

$$\rho_i^j = \sqrt{(X^j - X_i)^2 + (Y^j - Y_i)^2 + (Z^j - Z_i)^2}$$

Posto t^j il tempo di trasmissione del segnale dal satellite, il tempo va corretto secondo: $\delta^j(t) = a_0 + a_1(t - t_{oc}) + a_2(t - t_{oc})^2 + \Delta t_r - T_{GD}$ $t^j = t^j - \delta^j(t)$

Separando incognite e termini noti: $R_i^j(t) + c\delta^j(t) = \rho_i^j(t) - c\delta_i(t)$

Da linearizzare nei valori approssimati: $X_i^{(0)} Y_i^{(0)} Z_i^{(0)}$

$$X_i = X_i^{(0)} + x_i; \quad Y_i = Y_i^{(0)} + y_i; \quad Z_i = Z_i^{(0)} + z_i;$$

x_i, y_i, z_i correzioni

32

Modello linearizzato per il posizionamento pseudorange cinematico

Il posizionamento avviene epoca per epoca.

Nel caso di 5 satelliti (apici) il modello linearizzato sarà:

$$\begin{bmatrix} \frac{X_i^{(0)} - X^{(1)}}{\rho_i^{1(0)}} & \frac{Y_i^{(0)} - Y^{(1)}}{\rho_i^{1(0)}} & \frac{Z_i^{(0)} - Z^{(1)}}{\rho_i^{1(0)}} & -1 \\ \frac{X_i^{(0)} - X^{(2)}}{\rho_i^{2(0)}} & \frac{Y_i^{(0)} - Y^{(2)}}{\rho_i^{2(0)}} & \frac{Z_i^{(0)} - Z^{(2)}}{\rho_i^{2(0)}} & -1 \\ \frac{X_i^{(0)} - X^{(3)}}{\rho_i^{3(0)}} & \frac{Y_i^{(0)} - Y^{(3)}}{\rho_i^{3(0)}} & \frac{Z_i^{(0)} - Z^{(3)}}{\rho_i^{3(0)}} & -1 \\ \frac{X_i^{(0)} - X^{(4)}}{\rho_i^{4(0)}} & \frac{Y_i^{(0)} - Y^{(4)}}{\rho_i^{4(0)}} & \frac{Z_i^{(0)} - Z^{(4)}}{\rho_i^{4(0)}} & -1 \\ \frac{X_i^{(0)} - X^{(5)}}{\rho_i^{5(0)}} & \frac{Y_i^{(0)} - Y^{(5)}}{\rho_i^{5(0)}} & \frac{Z_i^{(0)} - Z^{(5)}}{\rho_i^{5(0)}} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ c\delta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_i^{(1)} + c\delta^{(1)} - \rho_i^{1(0)} \\ R_i^{(2)} + c\delta^{(2)} - \rho_i^{2(0)} \\ R_i^{(3)} + c\delta^{(3)} - \rho_i^{3(0)} \\ R_i^{(4)} + c\delta^{(4)} - \rho_i^{4(0)} \\ R_i^{(5)} + c\delta^{(5)} - \rho_i^{5(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ v^{(3)} \\ v^{(4)} \\ v^{(5)} \end{pmatrix}$$

È conveniente stimare l'offset dell'orologio del ricevitore in metri, moltiplicandolo per la velocità della luce, per evitare possibili mal condizionamenti della matrice normale

33

Bias e loro Correlazioni

I *bias* possono essere **correlati nello spazio** e nel tempo (solitamente la correlazione più forte è nello spazio), dipendenti o meno dalla frequenza del segnale (diversi su L1 e L2).

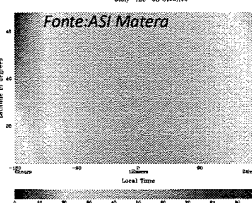
Natura bias	Tipo di bias	Correlazione spaziale
Non dispersivi (indipendenti dalla frequenza)	Effemeridi	elevata su grandi distanze (>100 km)
	Troposfera	Regionale (decine di km)
Non dispersivi ma dipendenti da un errore sulla freq.za	Orologio ricevitore	Identici sulla stessa stazione
	Orologio satellite	Identici sullo stesso satellite
Dispersivi (dipendenti dalla frequenza e diversi su L1 o L2)	Ionosfera	Regionale (decine di km)
	Multipath	Non correlati, dipendenti dal sito
	Variazione centro fase delle antenne	Non correlati, dipendenti dal sito

37

Bias di natura dispersiva - Ritardo IONOSFERICO

Il **ritardo ionosferico** si ha nella parte alte dell'atmosfera (da 50 a 1000 km circa) e varia:

- con la posizione e le ore del giorno
- con il livello di attività solare e il contenuto elettronico (TEC);
- può variare da pochi mm/s a 2 cm/s.



Il ritardo ionosferico può essere stimato attraverso il modello di Klobuchar:

- La sua applicazione riduce (non elimina!) del 50% del ritardo
- si basa sulla conoscenza di 4 coefficienti chiamati *ION_ALPHA* e altri 4 chiamati *ION_BETA*
- essi rappresentano i coefficienti di un polinomio di 3° grado per la determinazione rispettivamente del ritardo allo zenit e del periodo del modello.
- *ION_ALPHA* e *ION_BETA* si trovano nell'Header del file di navigazione

38

Ritardo Ionosferico: modello di Klobuchar

```

2.10      N:  GPS NAV DATA      RINEX VERSION / TYPE
TPS2RIN 7.12      GPSLOMBARDIA  06-APR-12 09:17      PGM / RUN BY / DATE
RXN2RXN 1.0o      2012-04-06 10:23      COMMENT
build Jan 23 2008 (c) Topcon Positioning Systems      COMMENT
.1676D-007 .1490D-007 -.1192D-006 -.5960D-007      ION ALPHA
.1085D+006 .3277D+005 -.2621D+006 -.6554D+005      ION BETA
-.279396772385D-08 -.532907051820D-14 61440      1683 DELTA-UTC: A0,A1,T,W
15      LEAP SECONDS
      END OF HEADER
    
```

il procedimento di calcolo richiede la determinazione della posizione di un "punto ionosferico", proiettato sulla superficie di riferimento, per il calcolo del ritardo allo zenit:

- Latitudine e longitudine di tale punto sono dette "geomagnetiche" (ϕ_i, λ_i)
- esse possono essere determinate dalla posizione ϕ_u, λ_u del ricevitore, dall'elevazione *E* e azimut *A* del satellite.
- Una volta calcolato il ritardo zenitale, occorre riportarlo all'elevazione del satellite con una «mapping function» $1/\cos(z)$ con *z* angolo zenitale
- Tutte le grandezze angolari vanno espresse in semicircoli (1S.C.=180°).

→ procedura di calcolo:

39

bias di natura dispersiva: variazione centro fase antenne

Wubbena et al, (2000) propone una procedura di calibrazione con movimento antenna e valori dipendenti da azimut e zenit :

```

TYPE= LEIATS03
NO OF FREQUENCIES=2
OFFSETS L1=-0.00055 0.00046 0.06083
OFFSETS L2=-0.00012 0.00019 0.08499
ELEVATION INCREMENT=5
AZIMUTH INCREMENT=5
VARIATIONS L1=
-0.00799 -0.00513 -0.00260 -0.00026 0.00189 0.00374 0.00511 0.00588 ...
-0.00790 -0.00502 -0.00247 -0.00012 0.00204 0.00388 0.00524 0.00598 ...
-0.00782 -0.00492 -0.00236 0.00001 0.00217 0.00402 0.00536 0.00608 ...
-0.00777 -0.00484 -0.00226 0.00011 0.00229 0.00413 0.00545 0.00615 ...
-0.00774 -0.00477 -0.00218 0.00020 0.00238 0.00421 0.00553 0.00621 ...
-0.00772 -0.00472 -0.00211 0.00027 0.00244 0.00427 0.00557 0.00624 ...
-0.00772 -0.00467 -0.00206 0.00031 0.00247 0.00429 0.00558 0.00625 ...
-0.00772 -0.00463 -0.00203 0.00033 0.00247 0.00427 0.00556 0.00623 ...
-0.00774 -0.00461 -0.00202 0.00031 0.00243 0.00422 0.00552 0.00619 ...
-0.00775 -0.00461 -0.00203 0.00027 0.00236 0.00415 0.00544 0.00613 ...
-0.00777 -0.00463 -0.00208 0.00019 0.00227 0.00405 0.00535 0.00605 ...
    
```

43

Bias di natura non dispersiva: troposfera

- Troposfera - natura: non dispersiva;**
- parte bassa dell'atmosfera (0-40 km)
 - ritardo del segnale in funzione di parametri atmosferici ed elevazione del satellite ($1/\cos z$) *
 - componente secca e idrostatica;
 - valore allo zenit: 2-3 m. Varia con una "mapping function" in funzione di $1/\cos z$;
 - varia più lentamente della ionosfera → correzione da aggiornare (e trasmettere) ogni 10-30 secondi;
 - difficilmente separabile dall'errore di effemeride e spesso trattata assieme come bias di natura geometrica.

44

Troposfera: modello di Hopfield

modellizzabile (modello Hopfield, Saastamoinen ...)

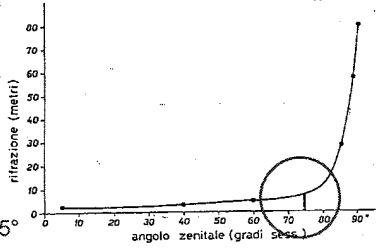
1/cos z^2 non è poi così "lento" da 1/cos z.

$$\delta R_{trop} = \frac{K}{\sqrt{\cos(z^2 + 6,25^\circ)}} + \frac{L}{\sqrt{\cos(z^2 + 2,25^\circ)}}$$

Contributo "componente secca": $K = 155.28 * 10^{-7} \frac{P}{T_K} (40136 + 148.72 T_K)$

Contributo "componente idrostatica": $L = (-0.028512 T_K + 817.96) \frac{e_p}{T_K^2}$

$\delta R_{trop} = (R_0 - R)$ errore troposferico
 R = percorso rettilineo
 R₀ = range misurato
 P = pressione [millibar];
 T_K = temperatura [gradi K]
 e_p = pressione parziale vapore [millibar]



Sconsigliabili misure con elevazione > 15°

45

GEOMATICA

23-04-2013

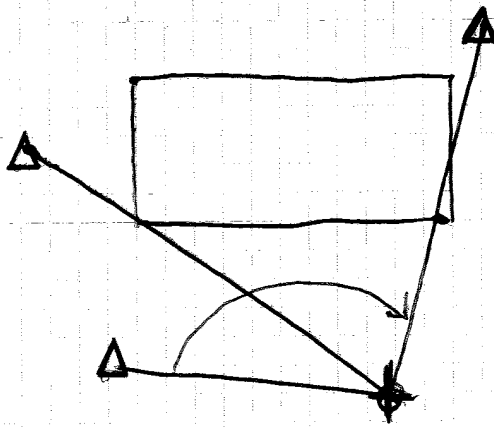
L'oggetto della prossima **ESERCITAZIONE ALL'APERTO** sarà:

RILIEVO DI APPOGGIO DI UNA PARETE

per rilievo
fotogrammetrico e di laser a nanometri → sacco di punti in pochissimo tempo
facciata di una parte del politecnico

Ci serve un s.d.r. che è la rete che abbiamo compensato al lab.

↓
punti di rete



RILIEVO
DI APPOGGIO

⊕ : sono le STAZIONI in cui misureremo le distanze
Δ : punti trigonometrici
angolari.

⊕
⊕
punti numerati con 1000 e qualcosa.

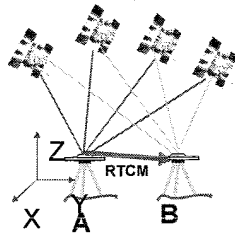


Qui, nelle finestre della parete, faremo il RILIEVO DI DETTAGLIO (utilizzeremo
due stazioni totali sulla prima, cioè distanzionometri o impulsi)
(non vale col primo al 3° piano!)

Principi di posizionamento differenziale DGPS

Posizionamento **stand alone**: insufficiente ai fini topografici
 $\sigma_{95\%} = \pm 5 \text{ m}$

Posizionamento **Differenziale DGPS**: applicato alle misure di codice e fase: richiede una stazione "base" A e "rover" B.



Correzione differenziale calcolata in A

$$PRC(t_0) = \rho_A^j(t_0) - R_A^j(t_0)$$

applicata in B su ogni range satellite ricevitore:

$$\rho_B^j(t) = PRC(t) + R_B^j(t)$$

con la trasmissione di correzioni differenziali

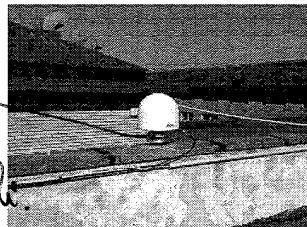
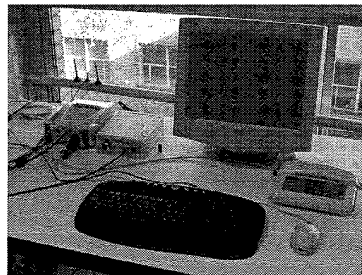
$$PRC(t) = PRC(t_0) + RRC(t-t_0)$$

→ Riduzione di vari bias

52

Chi fornisce le correzioni differenziali? Stazioni permanenti GNSS, come le stazioni base A

- Ricevitore geodetico multi frequenza e multi costellazione
- Materializzazione stabile
- Posizione nota con precisione millimetrica in vari SR



SPGPS Politecnico di Torino

ricevitore STARNET che si trova in un punto di coordinate note e tramite internet, diventa le correzioni differenziali.

Acquisisce dati in continuo e li rende disponibili per:

- post elaborazione
- tempo reale

53

DGPS di codice - da singola stazione

Il **range di codice** all'epoca t_0 può essere modellato nella **stazione base** secondo la:

$$R_A^j(t_0) = \rho_A^j(t_0) + c\delta^j(t_0) - c\delta_A^j(t_0) + E_A^j(t_0) + I_A^j(t_0) + T_A^j(t_0) + \epsilon_A^j$$

$$\rho_A^j(t) = \sqrt{(X^j(t) - X_A)^2 + (Y^j(t) - Y_A)^2 + (Z^j(t) - Z_A)^2} \quad \text{range geometrico}$$

$E_A^j(t_0)$ Errore di effemeride

$\delta^j(t_0), \delta_A^j(t_0)$ Errori orologio satellite e ricevitore

$I_A^j(t_0), T_A^j(t_0)$ Ritardi ionosferici e troposferici

ϵ Errori vari (elettronica ricevitore, multipath, centri fase antenne)

Calcolo **correzione differenziale** pseudorange PRC (Pseudo Range Correction) per ogni satellite j all'epoca t_0 :

$$PRC^j(t_0) = \rho_A^j(t_0) - R_A^j(t_0) = -c\delta^j(t_0) + c\delta_A^j(t_0) - E_A^j(t_0) - I_A^j(t_0) - T_A^j(t_0)$$

54

DGPS di fase - tecnica RTK da singola stazione

Nella tecnica RTK solitamente si fa un'ulteriore differenza rispetto ad un altro satellite k . Il posizionamento diventa analogo a quello alle doppie differenze

$$\lambda\phi_B^j(t)_{correct} = \rho_B^j(t) + c\delta_{AB}(t) + \lambda N_{AB}^j + \Delta E_{AB}^j(t) + \Delta I_{AB}^j(t) + \Delta T_{AB}^j(t) + \epsilon_{AB}^j$$

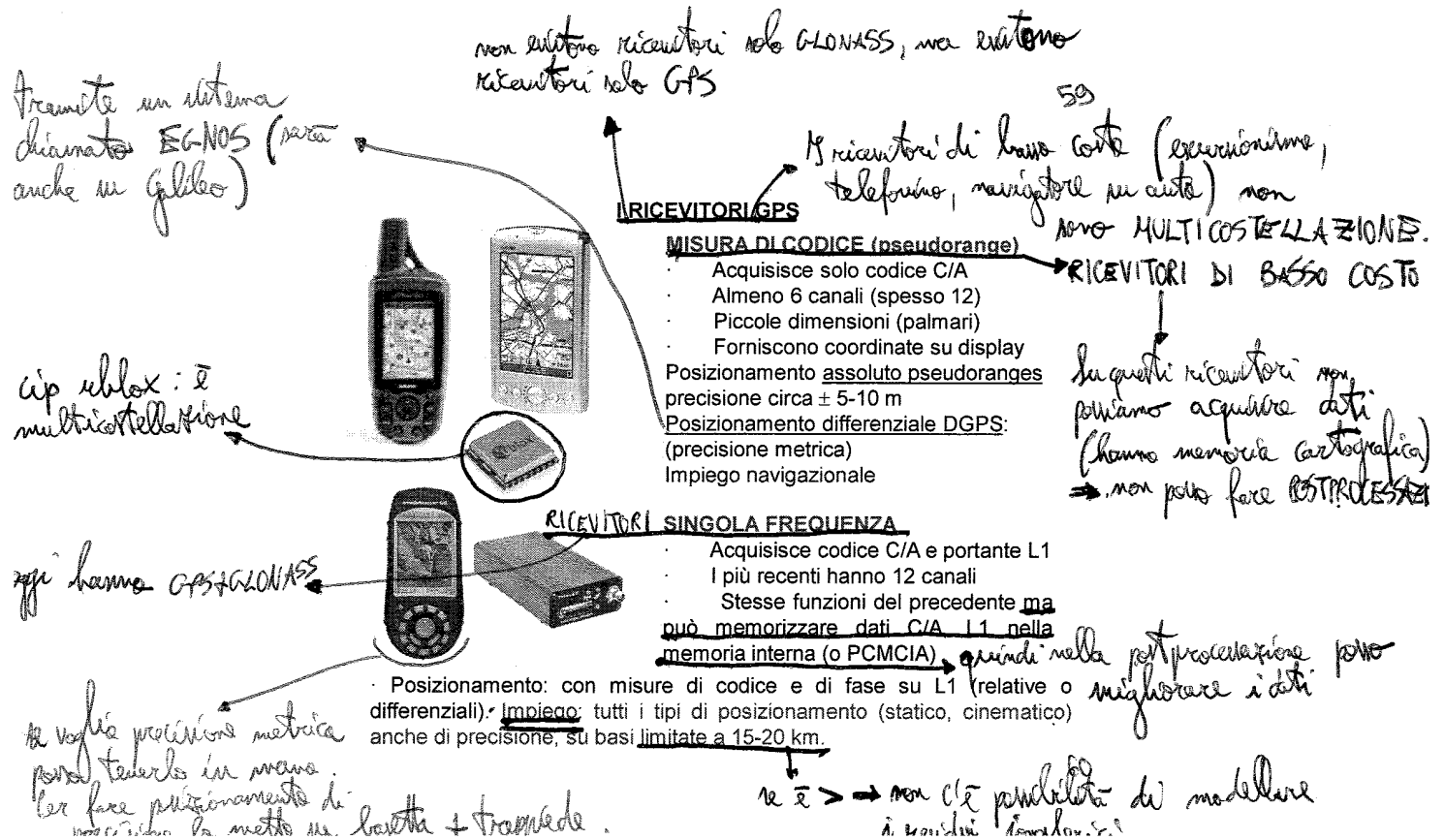
$$\lambda\phi_B^k(t)_{correct} = \rho_B^k(t) + c\delta_{AB}(t) + \lambda N_{AB}^k + \Delta E_{AB}^k(t) + \Delta I_{AB}^k(t) + \Delta T_{AB}^k(t) + \epsilon_{AB}^k$$

$$\lambda\phi_{AB}^{jk}(t)_{correct} = \rho_{AB}^{jk}(t) + \lambda N_{AB}^{jk} + \nabla\Delta E_{AB}^{jk}(t) + \nabla\Delta I_{AB}^{jk}(t) + \nabla\Delta T_{AB}^{jk}(t) + \epsilon_{AB}^{jk}$$

- Vengono **eliminati** gli errori d'orologio dei ricevitori e ancora differenziati quelli ionosferici, troposferici, d'orbita.
- Il rover deve risolvere la combinazione di interi N_{AB}^{jk} tra i satelliti jk e i ricevitori $AB \rightarrow$ **inizializzazione**
- L'equazione è equivalente a una **differenza seconda**.

Ricevitori, tecniche di acquisizione e formati di scambio dati GNSS

LEZ. 23-04-2013 / PAG. 69



KAG 81

discriminanti
principali tra i 4 tipi

POSIZIONAMENTO RELATIVO - TECNICHE DI ACQUISIZIONE

• Relative: si determina il vettore base-line tra i vertici occupati dalle stazioni. L'elaborazione è fatta a posteriori, normalmente sui dati di fase, con il metodo alle doppie differenze. I metodi principali sono:

Metodo	Tempo di misura	Lunghezza Base	Precisione	Rate [sec]	Note
Statico	> 1/2 ora 1 ora 3-4 ore	10 km 20-30 km >100 km	10 ⁻⁸ - 10 ⁻⁹	15-60	Doppia frequenza se con basi maggiori di 20 km
Rapido-statico	20-30 min (L1) 6-8 min (L1+L2)	<10-15 km singola frequenza	10 ⁻⁶	5-15	Necessita di buona configurazione satellitare Richiede contatto continuo con satelliti. Inizializzazione
Cinematico Stop and go	< 1 minuto (almeno due epoche)	Qualche km	Centimetrica	1-5	Fino a 30 min → L1 5-6 min → L1+L2 al volo (OTE) → L1+L2
Cinematico continuo	Continuo	Qualche km	Centimetrica	1-5 20 Hz	Idem come stop and go se vuoi in piedi

non è detto che dobbiamo compensare il secondo. In il punto statico il tempo di compensazione standard è di 3
il più statico ha la migliore precisione
è quella di un altro distanziometro (1 mm al km)
quindi è importante l'operazione di planning (scegliere quando (a che ora dell'giorno) i satelliti sono visibili)
non vanno mai fissati l'ambiguità di fase ad intero

è una rete di 2° ordine
ciò mi ferma un'ora nel punto da rilevare
è una rete di raffinemento
in doppia freq. il tempo è minore perché è minore il tempo necessario a fare l'ambiguità di fase.
è una rete rilevata di affoglia

IL TRATTAMENTO DEI DATI E LA COMPENSAZIONE
Esempio di soluzione di base GPS - singola base

estratto di un tabellato di una soluzione alle doppie differenze di fase:

From Station	To Station	Solution	Slope	Ratio
3: M... ..	903: M... ..	iono free fixed	23087.240	19.0
Occupation Time Meas. Interval (seconds): 03.54.00,00				
Solution Type: Iono free fixed double difference				
Solution Acceptability: Passed ratio test				
Ephemeris: Broadcast				
Baseline Slope Distance): 23087.240 0.000444				
Baseline Components (meters): dx -10446.327 dy 19061.009 dz 7782.855				
Standard Deviations (meters): 0.000839 0.000408 0.000918				
dn 10981.645 de 20308.205 du -31.431				
0.000624 0.000404 0.001077				
dh 10.314				
0.001077				
Aposteriori Covariance Matrix:				
7.038408E-007				
4.756531E-008 1.662718E-007				
3.904630E-007 -2.534002E-009 8.433269E-007				

componenti del vettore nel sistema WGS84

simmetrica

giusto che deve rimanere fermo per acquisire un po' di epoche per stabilizzare i cambi quanti di fase
se mi muovo velocemente → si vuole un compromesso molto più fatto (20 Hz, così 20 rilievi al secondo).
è tutto il tempo dell'ambiguità è affidabile a intero, perché ho stazionato per 3h e 5/4 min

ci si rinforna sul punto da rilevare solo per le poche epoche di misura che è necessario fare.
STOP: quando sto nel punto da rilevare.
GO: quando mi sposto da un punto a un altro.
riconoscibile alle coord. del punto 3 ottenuto quello del punto 303

dall'ambiguità di fase (altrimenti era solo free float)

LA PROGETTAZIONE DELLE MISURE GPS

È NECESSARIA QUANDO SI VUOLE OTTIMIZZARE:

- precisione e affidabilità delle coordinate
- risolvere aspetti logistici e organizzativi

DIFFERISCE DALLE MISURE CLASSICHE IN QUANTO:

- non è necessaria l'intervisibilità tra punti di stazione → (nelle misur. topografiche classiche l'intero è necessario)
- raramente la geometria delle reti GPS è critica (contrariamente a quanto avviene nelle misure classiche)

UTILE PER APPLICAZIONI DI PRECISIONE (ES. RETI DI CONTROLLO)
NON È FONDAMENTALE PER APPLICAZIONI "CORRENTI" DOVE:

- l'obiettivo finale non è sempre la massima precisione
- la logistica delle operazioni può essere risolta direttamente sul terreno

Come avviene la codifica?

XXXX YYY S.130 (o. 13N)
FORI 135 4

come del conteggio
punto (e al giorno
precedente (da 0 a 365)
dall'inizio dell'anno)

- OBS oppure • 130
- NAV oppure • 13 N

anno 2013

verrà a va (continuamente) fare più di 40 acquisizioni in una giornata di misura

sono i cosiddetti DATI GREZZI

GPS - formati dei dati

PAG. 43

IL RICEVITORE GPS PUÒ FORNIRE IN INPUT / OUTPUT:

Dati di codice e fase (per postprocessamento)
formato proprietario della casa costruttrice (binario)
formato indipendente RINEX (Receiver INdependent Exchange) (ASCII)

file osservazioni .OBS

File navigazione con effermeridi .NAV

Coordinate in tempo reale: tramite protocollo NMEA (National Marine Electronics Association) via seriale

RTCM (Input/output) per tempo reale: correzioni differenziali di codice o di fase (Radio Technical Commission for Maritime [Service]).

è un formato
per navigazione
per gli altri

è un file molto piccolo. Il grande delle osservazioni sta nel file .OBS.

PAG. 74

RINEX: file di osservazione

OBSERVATION DATA		RINEX VERSION / TYPE	
2	OBSTORNX	Version 2.2	20-JAN-99 19:57 PGM / RUN BY / DATE
4			MARKER / AGENCY
4			MARKER NAME
4			MARKER NUMBER
4	2768	SR399	5.2 REC # / TYPE / VERS
4	273467	internal	ANT # / TYPE
4	4472972.4191	589974.7476	4493753.9778
4	1.1360	0.0000	0.0000
4			ANTENNA: DELTA H/E/N
4			WAVELENGTH FACT L1/2
4			# / TYPES OF OBSRV
4	1999	1	20
4			8
4			43
4			50.000000
4			TIME OF FIRST OBS
4			END OF HEADER
4	99	1	20
4	8	43	50.000000
4	0	6	6276106
4	0	2	6136266
4	9		0.000000775
4	22072589.3178	115991799.54248	22072502.737
4	90383182.28148		
4	22567385.190	118697483.21348	22587378.809
4	92491508.22748		
4	21286934.351	11863594.40749	21286927.321
4	87166406.58949		
4	22688201.632	119227282.66748	22688194.752
4	92904338.34748		
4	21018852.455	110454811.58948	21018845.507
4	86068652.12349		
4	23729842.380	124690652.73946	23727836.874
4	97161523.91947		
4	99	1	20
4	8	43	50.000000
4	0	6	6276106
4	0	2	6136266
4	9		0.000000745
4	22074744.605	116003545.67348	22074737.364
4	90392335.09848		
4	22590498.560	118713844.18348	22590492.194
4	92504256.95548		
4	21287317.873	11865609.82749	21287310.588
4	87167977.04548		
4	22690815.190	119241016.82148	22690808.358
4	92915040.26747		
4	21017277.537	110446535.35048	21017270.592
4	86062203.11048		
4	23724887.293	124675123.77546	23724881.813
4	97149423.43746		

numero seriale del ricevitore

4 tipi di osservazione

posizione approssimata (in coord. geocentriche) del centro in cui viene posto il ricevitore

è lo stesso range in m del range

il campionamento è a 5 secondi

ogni riga è relativa ad un satellite (riga 4: satellite 24 - ultima riga: satellite 5)

NB: esiste oggi anche una recente versione compressa (RINEX formato Hatanaka)

RINEX: file di navigazione

NAVIGATION DATA		RINEX VERSION / TYPE	
2	DAT2RIN	2.35a	Polito 011/5647630 11OCT00 1:25:44 GMT/PGM / RUN BY / DATE
4			COMMENT
4			ION ALPHA
4			ION BETA
4			59 DELTA-TIME A0,A1,T,W
4			LEAP_SECONDS
4			END OF HEADER
4	1	0	10
4			8
4			0
4			0.0
4			1.48013234138D-03
4			1.70530256582D-11
4			0.00000000000D+00
4			0.00000000000D+00
4			-2.26000000000D+03
4			-6.16250000000D+02
4			4.466983737461D-08
4			2.285302438067D+01
4			-3.29688191414D-05
4			4.91300632711D-02
4			4.15742397308D-05
4			5.15366060638D+04
4			2.01600000000D+06
4			3.35276126862D-07
4			1.56408352384D+01
4			-2.42143869400D-07
4			9.61530482141D+00
4			2.99687500000D+03
4			-1.74198327438D+01
4			-8.21141346690D-08
4			-2.47153152064D-09
4			1.00000000000D+01
4			1.08300000000D+04
4			0.00000000000D+00
4			2.00000000000D+01
4			0.00000000000D+00
4			3.25962901115D-08
4			4.82000000000D+03
4			1.94400000000D+06
4			0.00000000000D+00
4			2
4			0
4			10
4			8
4			0
4			0.0
4			2.81410291791D-03
4			5.22955453519D-11
4			0.00000000000D+00
4			0.00000000000D+00
4			1.00000000000D+02
4			6.91562500000D+02
4			5.33307928702D-08
4			-1.10913876712D+01
4			4.00468707085D-05
4			2.03917853904D-01
4			7.18049705029D-05
4			5.15367755508D+04
4			1.94400000000D+06
4			2.83122062683D-06
4			-2.71779085682D+01
4			4.73111867905D-06
4			9.93397259833D+00
4			2.26562500000D+03
4			-2.08694281873D+01
4			-8.56285667735D-08
4			4.68233789531D-09
4			1.00000000000D+01
4			1.08300000000D+04
4			0.00000000000D+00
4			2.00000000000D+01
4			0.00000000000D+00
4			-1.39698386192D-08
4			2.26600000000D+03
4			1.87200000000D+06

è un ciclo a questa colonna moltiplicata per (1 ± 10^-10) - la prima colonna / mi da 0

è la lunghezza di fase... la misura della 20 colonna è ambigua, quella della 10 colonna no,

in questo file troviamo i 6 elementi di Keplero (semil. orbita, argomento perigeo, ascensione orbita, m)

richiede (con tali coeff.) la ionosfera di circa il 50%.

$$\delta T = a_0 + a_1(t-t_{oc}) + a_2(t-t_{oc})^2$$

10 ott. 2000

ore 6

bore di orologio dei satelliti

coeff. di correzione dell'orologio dei satelliti

è un protocollo molto importante: mi permette di trasferire le misure di codice e di fase e le correzioni differenziali (PRC, ...)

Il formato RTCM Radio Technical Commission for Maritime Services
<http://www.rtcmm.org>



RTCM è una organizzazione non-profit, USA, di tipo scientifico e educativa, che si occupa di tutti gli aspetti di comunicazioni marittime radio, per la navigazione, nata nel 1946.

I lavori si organizzano per mezzo di "Special Committees" che li documenta attraverso delle "RTCM Recommendations".

Una di queste è "Rtcm recommended standards for differential GNSS (Global Navigation Satellite Systems Service), **versione 2.2** sviluppata dal comitato speciale n° 104 del 15/1/1998, a cui è seguita la versione **2.3** (RTCM Paper 136-2001/SC104-STD). Ora la versione **RTCM 3.0**.



The Radio Technical Commission for Maritime Services (RTCM) Completes New Standard for Differential Global Navigation Satellite Systems

Summary: RTCM Special Committee 104 has just completed a new standard for Differential Global Navigation Satellite Systems Service. Like its predecessor, the standard supports very high accuracy navigation and positioning through a broadcast from a reference station to multiple receivers. Incorporated as Differential GNSS standard Version 1.0, the standard is available from RTCM in its secure online publication site. Visit www.rtcmm.org and click on "Publications."

La versione 3.0:

- maggior efficienza rispetto alla 2.3 (carico trasmissivo minore del 70%)
- volto alla trasmissione dati GPS e Glonass per reti RTK
- disponibile solo sui ricevitori recenti

è l'ultima versione RTCM!

sono le misure di fase e codice, cioè le correzioni, per le quali si riferisce alle sole misure di codice

contiene una serie di parole organizzate in una struttura organizzata

TCM 2.0

Type 1-17

RTCM 2.x - in sintesi

ver. 2.2 e 2.3: 63 messaggi con parole da 30 bit. I più usati sono:

- **Type 1 e 2:** contengono le correzioni pseudorange e le variazioni nel tempo (base PRC)
- **Type 3:** contiene le coordinate della stazione (sistema riferimento) (cioè, in pratica, contiene il)
- **Type 18 e 19:** contengono misure di fase e codice non differenziate (cioè quelle che non sono le correzioni)
- **Type 20 e 21:** contengono le differenze di fase e di codice (cioè le correzioni)

N.B: non si usano entrambe le coppie: o gli uni o gli altri

- **Type 59:** messaggi proprietari (CMR o altro ...)

le cose contraddittorie ci mettano informati, non standard (ogni ora mette quello che vuole)

programma che permette di vedere le correzioni in tempo reale.

Type 1	Type 2	Type 3+22	Type 9	Type 16	Type 18	Type 19	Type 20	Type 21	other Type	Raw Data
26	fine	... 1	-11.04	-0.002	185	63712.8				
29	fine	... 1	-8.70	0.002	106	63712.8				
28	fine	... 1	-9.80	-0.002	96	63712.8				
27	fine	... 1	-6.78	-0.002	3	63712.8				
8	fine	... 1	-3.34	0.002	35	63712.8				
10	fine	... 1	8.04	0.000	24	63712.8				

RANGE RATE CORRECTION

contiene gli errori sono le tre periferie

correzione molto piccola sono allo zenit

Diffusione della correzione differenziale - RTCM

Radiomodem (1 via):

• economico ma portata pochi km;

• disponibile ad un numero imprecisato di utenti che hanno la radio collegata alla stessa frequenza

Modem GSM (2 vie):

• meno economico ma portata elevata (copertura GSM);
• utenza pari al n° di linee telefoniche.

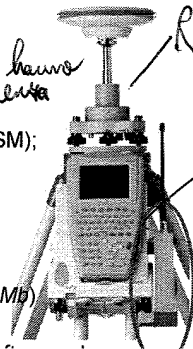
Sottoportanti segnale radio modalità DARC (Data Radio Channel) o DAB (Digital Audio Broadcasting):

Internet IP (2 vie):

• economico (es: contratti "flat" 8-20 € / mese o 500 Mb)
• elevata portata (copertura GSM per internet)
• accesso ad un numero imprecisato di utenti con software che:

→ lato **SERVER**: trasmissione su porta IP (2101) delle correzioni differenziali provenienti dalla seriale di un ricevitore;
→ lato **CLIENT**: ricezione in campagna con PC, delle correzioni via IP e trasmissione sulla seriale del rover

ha lo stesso software, ma lato client.



RICEVITORE ROVER

questo ricevitore può funzionare come stat. (gli dà le coord. e esso fornisce le correz. differenziali) che come rover (gli dà le correz. differenziali) modem GSM (è niente altro che un cellulare)

non ho limiti di copertura perché sia nella copertura del cellulare.

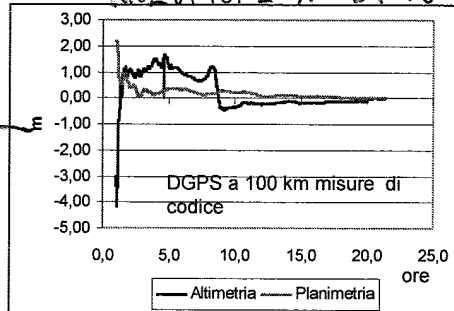
rende le correz. differenziali che erano del ricevitore inviato al ricevitore

Prestazioni DGPS di codice RealTime

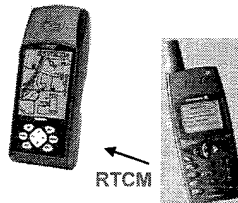
Precisione metrica o sub-metrica:

• poco dipendente della distanza con le SP;
• errori < 1m in planimetria e < 1.5 in altimetria, mediando in RT dati per pochi minuti, anche con ricevitori "basso costo" (200-300 €).

RICEVITORE A BASSO COSTO:



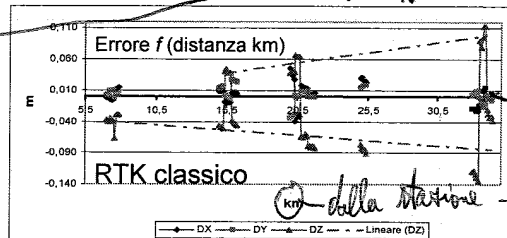
ancora rispetto a un punto di coordinate note



83

Prestazioni DGPS di fase (RTK classico)

Precisione centimetrica ma...



RICEVITORE GEODETICO con la tecnica RTK

sopra certe distanze non si riesce più a fissare l'ambiguità di fase.

all'aumentare della distanza, le precisioni peggiorano (perché la correz. diff. è calcolata nella stazione, ma se mi porto oltre bias di seno / troposfera)

N.B.: la correzione degrada all'aumentare della distanza base-rover
→ Distanza ~ 15-30 km dalla stazione base (oltre, i vari bias non permettono il fissaggio degli interi in maniera affidabile)

Idea: modellare i bias all'interno di una rete e creazione di una stazione virtuale VRS, in corrispondenza del ricevitore rover

(quelli spazialmente correlati)

84

reti di staz. permanenti (non si lavora con staz. permanenti singole) finalizzate per RTK

Network GNSS per RTK

Idea: modellazione del *bias* all'interno di una rete di SPGPS

Obiettivo: precisione centimetrica con basi di 40-80 km (stesse performance che in *single base* RTK a 10 km)

non mettiamo una foresta di staz. permanenti.

- Richiede:**
- Centro di controllo per la raccolta dati e elaborazione delle varie stazioni permanenti GNSS;
 - sistemi di trasmissione osservazioni o correzioni;
 - fissaggio ambiguità di fase tra le stazioni GPS in RT (solo allora si può generare il messaggio di correzione);

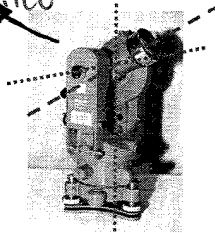
- Maglia rete:**
- In funzione della possibilità di modellare gli errori con precisione sufficiente al fissaggio dell'ambiguità di fase;
 - dipendente dalla posizione geografica e dal livello di attività ionosferica.

tra stazione base e stazione rover

Considerazioni sui bias

- Il posizionamento **differenziale** da singola stazione elimina solo la **parte comune** dei *bias*: permane una parte non differenziabile Δ . Essa, su lunghe distanze, può impedire il corretto **fissaggio** dell'ambiguità di fase.
- I *bias* hanno **diversa natura e dimensione**
- La loro **legge di variazione** è diversa e ciò condiziona la loro frequenza di "aggiornamento" e "trasmissione".

TEODOLITE OTTICO
MECCANICO



Analogia classica: rettifica teodolite per gli errori di collimazione, inclinazione e verticalità:
 → procedure diverse per ogni errore, che va quantificato e rettificato separatamente.
 Solo alcuni errori sono separabili (es. quello di collimazione).

i miei bias sono legati agli errori di rettifica (errore di collimazione, di rotazione...)

Anche nel GPS cerchiamo di trattare i *bias* **separatamente**, quando si riesce.

poiché non possono essere modellati assieme perché hanno natura diversa e leggi di variazione diversa.

DGPS da singola stazione e con tecniche di rete

Raggruppiamo i *bias* B secondo la loro natura:

$$\delta B_i^k = \delta C_i^k + \delta S_i^k + \delta D_i^k$$

$$\delta C_i^k = \delta_i + \delta^k$$

orologio satellite k e ricevitore i

$$\delta S_i^k = M_i^k + A_i^k$$

Multipath M e variazioni centri fase antenne A (dipendenti dal sito)

$$\delta D_i^k = E_i^k + I_i^k + T_i^k$$

Spazialmente correlati, dipendenti dalla distanza (Effemeridi, Ionosfera, Troposfera)

ϵ Errori sito dipendenti (elettronica ricevitore, ritardi *hardware*)

Possiamo riscrivere con questa notazione la correzione da una singola stazione. Il termine λN è presente nelle misure di fase

$$PRC_i^k = (\rho_i^k - R_i^k) = \delta B_i^k + \epsilon_i^k + (\lambda N_i^k)$$

Come variano nel tempo e nello spazio queste correzioni?

range geometrico rete di staz. di i e k .

solo δD_i^k (che è facilmente modellabile). È invece opportuna combinazione (es. ionosferica) per eliminare ϵ I I T.

questo bias sarà tanto maggiore quanto maggiore è la distanza tra stazione e ricevitore. Quindi questo bias è il meno modellabile.

se faccio misura di fase è praticamente presente: il lamb. di

a cui sono afflitte le misure di range
 legge completa dei bias: è dato dalla combinazione di 3 famiglie di bias

Si sta per rete (cambia il sito) → cambia il bias (es. multipath: presenza o meno di superfici riflettenti)

contiene tutta l'informazione

DGPS di fase - RTK da rete di SPGPS

CPC da singola stazione contengono le ambiguità della "base"
 → Il rover calcola la combinazione di interi N_{AB}^j "rover" e "base".

Nella rete ogni SPGPS ha diverse ambiguità: esse devono essere determinate dal centro di controllo per omogeneizzarle e calcolare una correzione differenziale di rete.

Il problema è analogo a quello degli orologi: anche qui si deve arrivare ad un "livello comune di ambiguità".

la calcolo quando tutti i ricevitori hanno lo stesso livello di ambiguità (essendo uguale per tutti, riesco ad eliminarla)

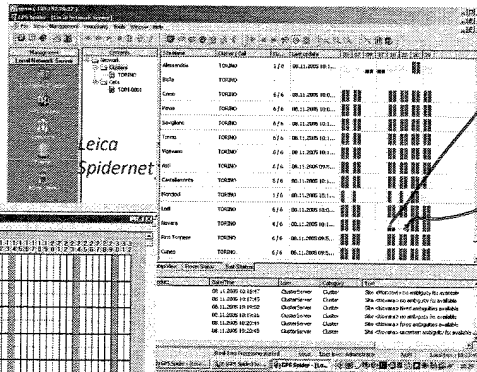
$$CPC(t)_{rover} = \lambda \phi_A^j(t) - \rho_A^j(t) + c \delta_A^j(t) + \lambda N_A^j = +E_A^j(t) + I_A^j(t) + T_A^j(t) + \varepsilon_A^j$$

ρ è il range geometrico inclusa la variazione centro fase antenna (A)
 CPC è l'ammontare complessivo della correzione differenziale di fase. Separiamo la componente dispersiva (essenzialmente ionosfera) da quella non dispersiva (effemeridi e troposfera), per modellarle separate.

Note
 l'ambiguità dipende da quel ricevitore e quel satellite. Non è un bias!! (C'è modo per interpolare nella maglia di quella rete)

RTK di rete - Ambiguità fissata ad intero

La condizione per creare una correzione di rete è il fissaggio dell'ambiguità di fase nel centro di controllo, su tutti i satelliti da tutte le stazioni.



Note: ogni stazione ancora, la soluzione con le misure di fase ma solo di codice

già: l'ambiguità di fase non è stata fissata ad intero (soluzione float)

mentre software calcolano in tempo reale la rete (cioè i ricevitori) e fissano l'ambiguità di fase. Ora si può del ricevitore applicare questo modello di errore.

Stazioni

satelliti presenti

questa incertezza (è verde nella scheda) significa che questi satelliti è stata fissata ad intero, dal programma, l'ambiguità di fase, cioè è stato calcolato il termine λN^j della scheda in alto.

Un esempio di calcolo dei bias con approccio "non differenziato" e "combinato"

errore che dipende dalla frequenza

Ricordiamo la natura dispersiva della ionosfera:

$$I_{L1} = \frac{\partial I_{iono}}{\partial f_1}; \quad I_{L2} = \frac{\partial I_{iono}}{\partial f_2}$$

δI_{iono} errore ionosferico dipendente dalla frequenza. Scriviamo per L1:

$$CPC_{A,L1}^j = \frac{\partial I_{iono}^j}{\partial f_1} + E_A^j + T_A^j + \varepsilon_A^j$$

Analogamente per L2.

I termini dispersivi e non possono essere separati con le combinazioni:

$$CPC_{A,L1}^{j, dispersiva} = \frac{f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} CPC_{A,L1}^j - \frac{f_1^2}{f_2^2 - f_1^2} CPC_{A,L2}^j = \frac{\partial I_{iono}^j}{\partial f_1} = I_{A,L1}^j \approx -1.54 CPC_{A,L1}^j + 1.54 CPC_{A,L2}^j$$

Geometry free

$$CPC_{A,L1}^{j, non-dispersiva} = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} CPC_{A,L1}^j - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} CPC_{A,L2}^j = (E_A^j + T_A^j + \varepsilon_A^j)$$

iono free

è libera da tutto quello che è geometrico (contiene unicamente la ionosfera).

utilizzando le effemeridi precise, questo errore è trascurabile (circa 10 cm) rispetto al transmittore che alla

RETI DI STAZIONI PERMANENTI E LORO SCOPI

1) Mantenimento del Sistema di Riferimento

- **Sistema di riferimento:** contiene teoria fisica e le approssimazioni per la definizione degli assi coordinati: *come è il geocentro, dove passa l'asse Z...*
 - **Frame:** realizzazione pratica di SR costituita da una rete di punti di cui sono note coordinate e velocità.
 - **Realizzazione WGS84 - ETRF2000:** Rete Dinamica Nazionale (RDN) *S.R. gravitazionale* inquadrata nelle reti Euref e IGS *è quella che mantiene il S.R. (cioè è una serie di stazioni che mantengono il FRAME)*
- N.B.: l'utente finale potrebbe non essere il fruitore diretto delle stazioni permanenti GNSS che materializzano il DATUM in quanto o **troppo lontane**, o con campionamento **30 s** o senza prodotti RTK.

è l'ovattura portante del S.R.: è una rete di stazioni permanenti di cui sono note le posizioni nel S.R. voluto.

è la velocità di spostamento (la Zolla litosferica si sposta di qualche cm all'anno)

2) Network RTK (NRTK)

costituiscono il naturale collegamento tra il sistema di riferimento e l'utente finale con servizi di posizionamento in post elaborazione o RT.

l'utente finale si avvale di ciò.

100

Le Reti RTK portano a riconsiderare alcuni principi ...

Fruizione del sistema di riferimento:

non solo reti statiche ma *stream* di dati in RT (es. RTCM) con coordinate, misure, correzioni, da reti "dinamiche" di SP → precisioni centimetriche con ricevitori geodetici.

Le misure:

- prima:**
- funzionali delle coordinate (angoli distanze e dislivelli)
 - ma anche sfasamenti onde elettromagnetiche e misure di tempi) o baseline GPS
- ora:**
- produzione diretta in campagna di coordinate XYZ in tempo reale *in un S.R. assoluto*
 - dall'acquisizione al prodotto direttamente: il processo è regolato dallo strumento di misura ⇒ (XYZ) nuova misura?

ciò che c'è dietro è tutt'altro (misure di fase, codice, immagine)

101

Possibili architetture di reti RTK

In una rete GPS per misure RT, un "centro di controllo" riceve i dati da tutte le stazioni ed elabora un modello di correzioni degli errori spazialmente correlati.

Il centro di controllo è indipendente dalle singole stazioni.

Riguardo alla diffusione la comunicazione può avvenire:

- 1) tra Centro di controllo e le varie stazioni permanenti GPS;
- 2) tra Centro di controllo e i singoli utenti.

Riguardo all'implementazione Network RTK:

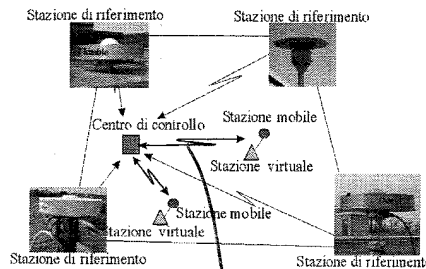
- 1) Virtual Reference Station (VRS);
- 2) Multi Reference Station (MRS) con trasmissione di correzioni;
- 3) Network RTK con trasmissione di osservazioni da celle: Master Auxiliary (MAX).

102

una volta il S.R. era il cluster interno, punto di coordinate note in cui fare stazione. oggi il S.R. viaggia da tempo reale → non è più elemento al punto a terra, ma è uno stream di dati.

Generazione di Virtual Reference Station (VRS)

Il centro di controllo "interpola" le correzioni differenziali della rete GPS in una posizione prossima a quella del rover, ottenendo ciò che si avrebbe in una stazione (virtuale) nella posizione del chiamante.



Il rover vede una stazione base "virtuale" a pochi metri, (o meno di 1 metro) che realizza una baseline pressochè nulla e annullando così gli errori spazialmente correlati

di riferimento
Tutte le stazioni/misurano dati al centro di controllo. Questo li riceve (li memorizza anche) e calcola in tempo reale la rete (calcola il livello d'errore dell'orologio, fissa l'ambiguità, interpola i vari bias) e calcola il modello di errore utilizzabile dagli utenti.

frase doppia: il rover manda la propria posizione al centro di controllo; con il suo modello di errore, elabora la correzione differenziale con il modello di errore della posizione del rover (cioè interpolando nella maglia della rete). Come se in quel punto c'è il rover e si fosse una stazione virtuale di cui il rover ha la correzione differenziale.

Generazione di Virtual Reference Station (VRS)

- Sistema di comunicazione a 2 vie (internet o GSM) → necessita la posizione (approssimata) del rover.
- Accessi limitati dalla capacità del server (carico trasmissivo e computazionale): → n° utenti = n° calcoli di correzione di rete!
- forzata "reinizializzare" del rover, superata una certa distanza dalla sua posizione iniziale, in quanto la stazione virtuale deve essere spostata per mantenere la qualità della correzione di rete.
- È utilizzabile il formato RTCM 2.x (messaggi Type 18&19 o 20&21) anche con ricevitori di non recente costruzione (in grado però di fornire la posizione via NMEA in output).

è il vecchio formato

di riferimento
Tutte le stazioni/misurano dati al centro di controllo. Questo li riceve (li memorizza anche) e calcola in tempo reale la rete (calcola il livello d'errore dell'orologio, fissa l'ambiguità, interpola i vari bias) e calcola il modello di errore utilizzabile dagli utenti.

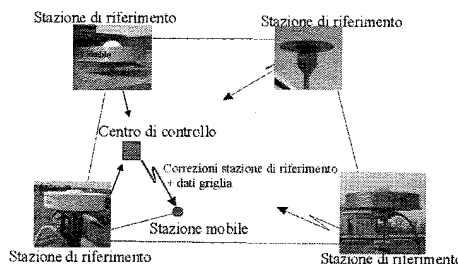
IN ALTERNATIVA:

il centro di controllo "interpola" le correzioni creando un numero limitato di stazioni virtuali di "raffittimento". Il rover applica le correzioni della stazione più vicina (reale o virtuale).

- Non è più necessario conoscere la posizione del rover
- minor carico trasmissivo e computazionale (ma precisioni inferiori).

Multi Reference Station (MRS)

Nell'approccio MRS vengono generate le correzioni (termini dispersivi e non) delle misure di fase per ogni satellite su ogni stazione della rete usando tutti i dati del network.

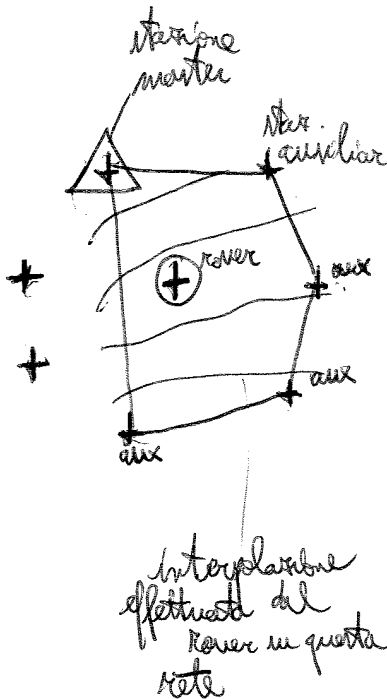


Le correzioni vengono usate per generare un modello interpolativo, applicato localmente dal rover e gneralmente diffuso attraverso il formato FKP.

Il ricevitore rover non ha più bisogno di rendere nota la sua posizione (no doppia precisione). Il centro di controllo elabora una griglia di correzione che viene mandata al rover ed è lui stesso a calcolare le correzioni.

107

108



Stazioni principali e ausiliarie: Il concetto di Master Auxiliary (MAX)

Basato su RTCM 3.0 proposto da Leica e GEO++ nel 2001, per la trasmissione delle correzioni tra master e rover in formato compatto.

Trasmissione possibile se raggiunto un **livello comune d'ambiguità** di fase (interi fissati su qualunque range di fase tra satelliti e stazioni) → **modellare termini dispersivi e non.**

Per ridurre il volume dei dati trasmessi sono inviate le osservazioni di fase e le coordinate di una stazione **MASTER**. Per le altre stazioni della rete (**AUXILIARY**) sono inviate le differenze prime di fase e delle coordinate rispetto alla master. Banda divisa in termini **dispersivi e non.**

Il **rover** può usare le correzioni della master e auxiliary secondo:

- 1) **Semplice interpolazione** (posizionamento singola base)
- 2) Ricostruzione osservazioni e posizionamento **multi-base RTK**

Sul centro di controllo fa ancora meno: fissa l'ambiguità e manda i dati ai ricevitori rover → il calcolo è molto spostato sulle capacità di calcolo del ricevitore rover.

112

Considerazioni su Master Auxiliary (MAX)

- Approccio di calcolo (multi base o singola base da stazione vicina) dipendente dalla **"capacità"** di calcolo del rover.
- Approccio **MAX RTCM 3**: si basa su **stazioni "reali"** (riconoscibili rintracciabili e ripetibili) e non virtuali.
- La stazione **master** non è necessariamente quella più vicina al rover e non gioca ruoli particolari. Essa **può essere sostituita da una qualunque** altra delle auxiliary (importante in caso "caduta").
- Il **rover** può fare un **posizionamento già a partire dai dati della master** (RTK da singola stazione), anche se non ha ancora o non sa interpretare il messaggio di rete contenuto nelle auxiliary.

Per ragioni pratiche di processamento in una rete consideriamo:

- **CLUSTER**: sottorete processata in blocco con livello comune d'ambiguità
- **CELLE**: selezione nel cluster di master e auxiliary per generare la correzione MAX

113

Correzioni Master Auxiliary (MAX) - Leica Spidernet

Il **rover** può utilizzare:

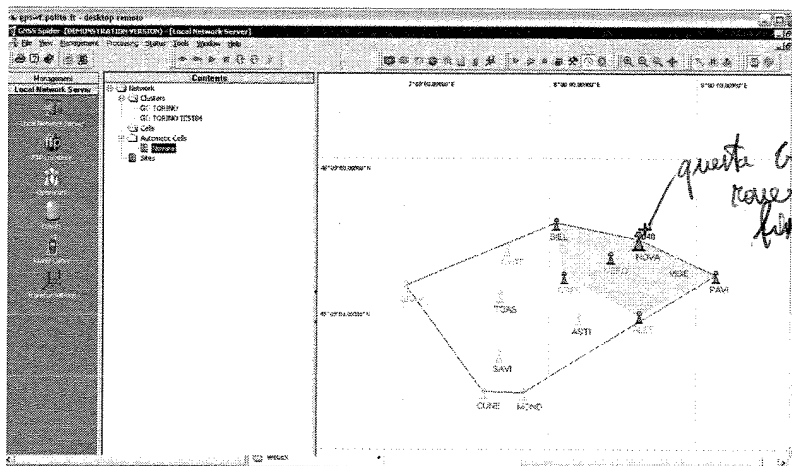
- 1) **Celle predefinite** create manualmente dall'operatore che inviano le correzioni divise nei termini dispersivi e non → sufficiente un sistema di comunicazione **1 via**. **L'utente decide** a quale cella collegarsi
- 2) Servizio **Auto MAX** che crea **automaticamente** la cella (**master e auxiliary**) ottimale per il rover, di cui deve essere nota la posizione al centro di controllo → **comunicazione 2 vie**.

Non ci sono limiti al numero di accessi, in teoria, utilizzando la trasmissione via internet IP e comunicazione 2 vie.

Richiede che il **rover** possa interpretare il formato RTCM 3 → i ricevitori di vecchia concezione non possono applicare questo calcolo

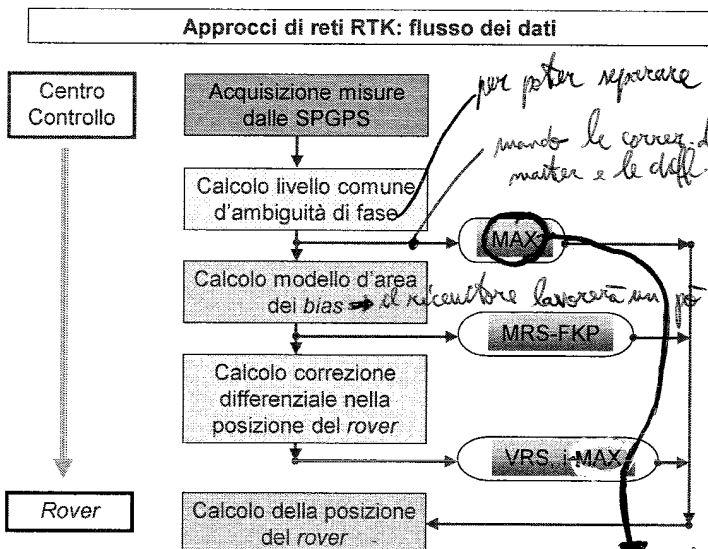
114

Master auxiliary – Fissaggio ambiguità (condizioni critiche)



questa braccetta indica che il rover è ad ambiguità fissa al intero

118



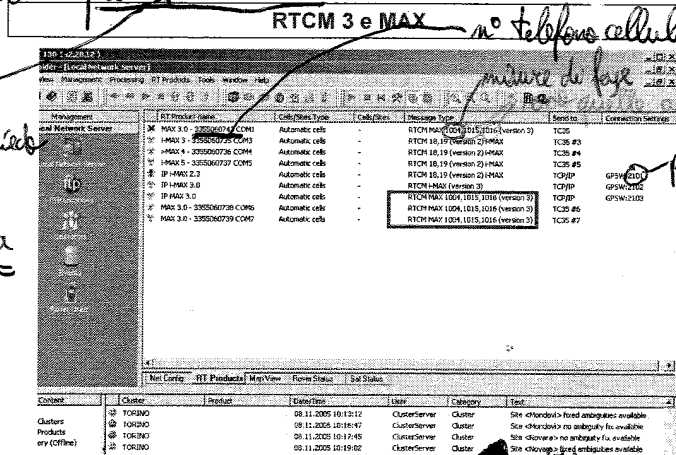
per poter riparare gli errori
mando le correz della master e le diff delle aux.

di meno perché il modello di errore è qui stato fatto, quindi il rover dovrà applicare solo la formula

grande capacità di calcolo richiesta al ricevitore

Serie di prodotti di rete:

119



le coordinate (X, Y, Z) richieste al centro di controllo di generarmi un file virtuale (VIRTUAL RINEX)

RTCM 3 e MAX n° telefono cellulare

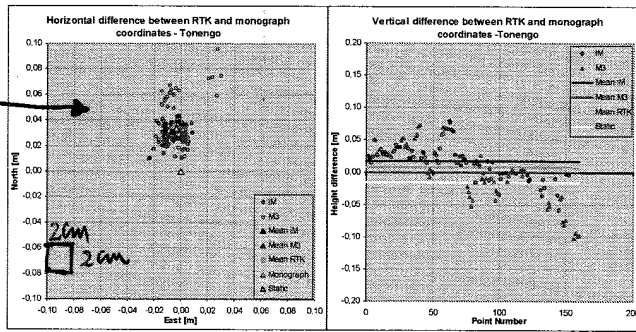
misure di fase

porta 2501: quella ufficiale per le correzioni

I record standardizzati in RTCM 3.0 trattano della sola master. Record aggiuntivi contengono le differenze delle auxiliary rispetto alla master. Record 1015 - 1017.

120

Risultati con MAX - IGM95 Tonengo



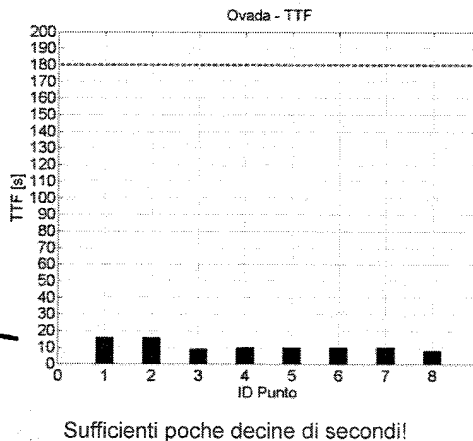
	East	North	h
Mean [m]	0,000	0,000	0,000
Std.Dev. [m]	0,011	0,018	0,039

se facciamo la media di
pochi punti, viene che la
media è tralata verso
Nord di 3,5 cm

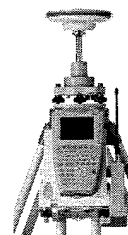
la precisione IGM95
viene dichiarata di
4 cm → oggi ho
precisioni addirittura

migliori (3,5 cm) e sono in tempo reale (non con
sessioni di misura di 3-4 ore come in passato!!).

Test e risultati: tempi di "fissaggio" dell'ambiguità di fase



TTF: Time To Fix: tempo
per il raggiungimento del
fissaggio ambiguità di
fase con ricevitore doppia
frequenza



se i tempi sono
magiori, è perché
c'è difficoltà di
comunicazione del
cellulare/modem (comuni
caso via modem).

tempo meno di 20 s si
avvicina al fissaggio
l'ambiguità di fase
10 anni fa ci voleva
molto più tempo).

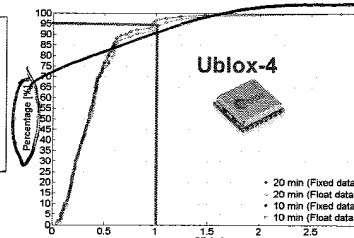
punti su cui si è misurato il
tempo di fissaggio dell'ambiguità
di fase.

ricevitori basso costo in post processing

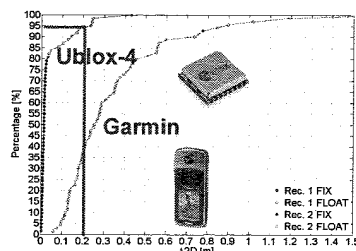
Test: un giorno di acquisizione suddiviso in sessioni di lunghezza da
5, 10, 30 minuti post-elaborate con stazione base "reali" e "virtuali" VRS

Stazione base reale: CRES a 30 km
Accuratezza al 95% = 1.0 m

non si osservano miglioramenti della
precisione usando sessioni di 20 o 10
min. 10 minuti sono sufficienti



percentuale degli
errori cumulativi.
Al 95% l'accuratezza
è di 1 m.



Stazione base Virtuale (V. Rinex)
Accuratezza al 95%: Garmin: 0.9 m
Ublox-4: 0.2 m

% Fix: Garmin: 3% - Ublox-4: 80%

ricevitori mass market possono avere
in PP performances molto diverse, in
relazione alla qualità delle fasi

è un punto virtuale
→ non esiste, quindi
non verrà interessato
da fenomeni
frangenti.

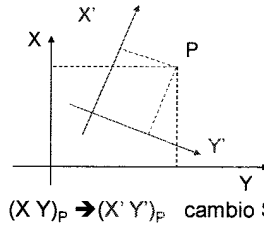
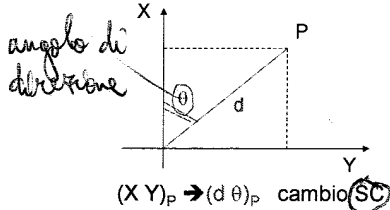
I sistemi di riferimento e i sistemi di coordinate

Il sistema di riferimento definisce la teoria fisica per la definizione degli assi coordinati

All'interno di un sistema di riferimento possiamo esprimere le posizioni dei punti attraverso sistemi di coordinate (SC)

I sistemi di coordinate sono legati puramente analiticamente (sempre reversibili) utili per operare in riferimenti più vicini alla realtà ingegneristica o fisica (ad es. coordinate geocentriche ECEF ↔ coordinate Geografiche ↔ coordinate piane locali)

$X Y Z$ geocentrici $\leftrightarrow \varphi \lambda$
 $\leftrightarrow N E h$
 NO TUTTI CAMBI
 il SC.



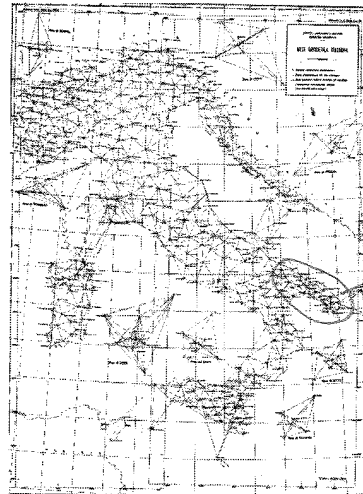
perché il S.R. è la coppia d'assi che non varia.

ho bisogno di parametri di trasformazione (da questo caso: origine nuovo S.R. e angolo di X' rispetto a X)

Realizzazione di FRAME: le reti geodetiche IGM

sono triangoli molto vicini a triangoli equilateri (cioè per evitare il mal condizionamento dovuto alla geometria)

- Rete di triangolazione di 1° ordine:**
- materializza il S.R. Roma 1940 (ellissoide Hayford orientato Monte Mario)
 - 1909-1919 (e successivi riordini)
 - circa 350 vertici
 - interdistanza circa 60 km
 - geometria a triangoli equilateri
 - rilievo per angoli e poche distanze (10 basi geodetiche)
 - la rete di 1° ordine è raffinata con reti di ordine inferiore: 2° 3° e 4° ordine

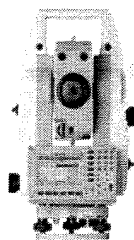
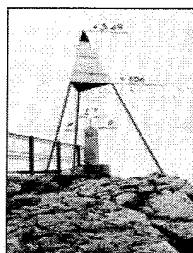


VE MO VE

Materializzazione e monografia vertici 1° ordine

Rete di triangolazione di 1° ordine:

- Requisiti di intervisibilità per misure angolari → posizioni elevate
- possibilità di stazionamento con teodolite e distanziometro



Comando Regione Militare Nord-Ovest - Torino																																	
Staz. G.C. Torino																																	
Calture Torino																																	
Proprietario Demanio																																	
() Cupola della Basilica di Superga. Asse geometrico della lanterna sulla cupola. FCP: Segno con vernice indelebile sulla copertura dello spigolo Nord della balaustra sovrastante il frontone. Le differenze delle coordinate dal CT al FCP sono: $\Delta N = -3,50$; $\Delta E = -51,04$.																																	
<table border="1"> <tr> <th colspan="2">Coordinate geografiche</th> <th colspan="2">SUPERGA (Basilica)</th> </tr> <tr> <td>φ</td> <td>λ</td> <td>Ord. I</td> <td>N. 056206</td> </tr> <tr> <td>45°04'48"308</td> <td>-4°41'03"307</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th colspan="2">Coordinate Gauss-Bosgra</th> <td colspan="2"></td> </tr> <tr> <td>N</td> <td>E</td> <td colspan="2"></td> </tr> <tr> <td>4 982 678,14</td> <td>1 403 036,83</td> <td colspan="2"></td> </tr> <tr> <td colspan="2">Quota al PP H= 727,35</td> <td colspan="2"></td> </tr> <tr> <td colspan="2">PP= Base lanterna</td> <td colspan="2"></td> </tr> </table>		Coordinate geografiche		SUPERGA (Basilica)		φ	λ	Ord. I	N. 056206	45°04'48"308	-4°41'03"307			Coordinate Gauss-Bosgra				N	E			4 982 678,14	1 403 036,83			Quota al PP H= 727,35				PP= Base lanterna			
Coordinate geografiche		SUPERGA (Basilica)																															
φ	λ	Ord. I	N. 056206																														
45°04'48"308	-4°41'03"307																																
Coordinate Gauss-Bosgra																																	
N	E																																
4 982 678,14	1 403 036,83																																
Quota al PP H= 727,35																																	
PP= Base lanterna																																	
<table border="1"> <tr> <th>Trig. Nord</th> <th>Ord.</th> <th>N°</th> </tr> <tr> <td>SUPERGA (Basilica)</td> <td>I</td> <td>056 206</td> </tr> </table>		Trig. Nord	Ord.	N°	SUPERGA (Basilica)	I	056 206																										
Trig. Nord	Ord.	N°																															
SUPERGA (Basilica)	I	056 206																															

NE va bene!

quota dedotta per livellazione trigonometrica (precisazione centimetri)

sistemi di riferimento - tipologie

non è il più comodo

Tipologie dei SR:

- 1) **Inerziale**: in moto rettilineo uniforme rispetto alle stelle fisse;
- 2) **ECEF**: Earth Centered Earth Fixed (SR Geocentric);
- 3) **di navigazione** (piano locale).

centrato nel centro di massa della Terra
 Terra
 forza fisica per realizzare il sistema
 realizzazione pratica del sistema.

Sistema inerziale (SI): solidale al centro della terra, in moto rettilineo uniforme e senza rotazione rispetto alle stelle fisse.

Definito dallo **IERS** (*International Earth Rotation Service*) che mantiene l'**ICRS** (*International Celestial Reference System*) realizzato attraverso la stima delle coordinate di un set di stelle fisse che realizzano l'**ICRF** (*International Celestial Reference Frame*)

142

sistema inerziale e ECEF

visto da un S.I.R. Inerziale non è un sistema fisso (perché c'è il moto del polo)

Sistema ECEF: centrato nel centro di massa della Terra. La direzione dell'asse Z, vista da un SI, è soggetta a moti di precessione e nutazione (moto del polo). Definiamo un sistema convenzionale terrestre (**CTS**) che segue la Terra nei grandi moti:

moto a forma di seno

è un POLO CONVENZIONALE.
 In cui, ad una certa data, si stabilisce che l'asse Z passa per questo punto.

- **Origine**: centro di massa delle Terra;
- **Asse Z**: orientato nella direzione di un polo medio ad una certa data (**CIO** = *Conventional International Origin* studiata dallo IERS);
- **Asse X**: complanare col meridiano convenzionale di Greenwich;
- **Asse Y**: completa la terna destrorsa.

Per passare da SI a ECEF occorre conoscere ω (v. rotazione) e **GM**

143

La rete di stazioni permanenti dell'IGS
 (*International GNSS Service*)

Definisce e monitora il sistema di riferimento terrestre globale come quel sistema nel quale 350 stazioni GPS hanno coordinate e velocità note.

Monitora le deformazioni crostali terrestri a livello globale (cambiano le coordinate delle SPGPS).

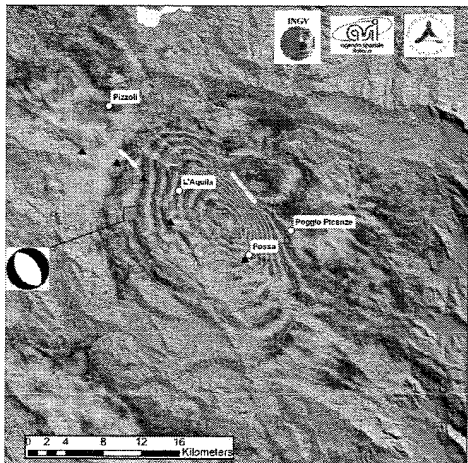
Definisce, in questo sistema di riferimento, prodotti quali:

- effemeridi precise
- parametri correzione orologi satelliti
- modelli di ionosfera e troposfera
- ~~modelli di~~ moto del polo

Per avere la massima precisione nell'utilizzo di questi prodotti, bisogna usare il sistema di riferimento nel quale sono stati calcolati.

144

Perché cambiano i sistemi di riferimento?



Deformazioni locali

Esempio: terremoto in Abruzzo.
interferogramma SAR ENVISAT - ogni frangia d'interferenza rappresenta uno spostamento quasi verticale di 2.5 cm
Fonte: INGV

All' Aquila si sono registrate deformazioni altimetriche di quasi 15cm e planimetriche di 10cm. Dopo il terremoto è cambiato anche il S.R. all' Aquila.

148

ITRF2005

ITRF2005 usa come dati di input soluzioni GPS settimanali e sessioni 24 ore VLBI e serie di Earth Orientation Parameter (EOPs)

Il vantaggio serie temporali di posizioni di stazioni è poter monitorare moti non lineari e discontinuità.

L'origine dell'ITRF2005 è definita in pratica con traslazioni nulle rispetto al centro di massa della Terra, mediato con serie di misure SLR di 13 anni. La scala è definita annullandola, con il suo rate, rispetto alle misure d'interferometria VLBI, con serie di 26 anni d'osservazione.

sono tecniche di misure LASER.

ITRF 2005 è riferito all'epoca 2000.0 ed è allineato a ITRF 2000 usando 70 stazioni permanenti geodetiche di alta qualità. Il livello di consistenza rispetto a ITRF2000 è pari a:

	X	Y	Z
Posizioni	0.1 mm	0.8 mm	5.8 mm
velocità	0.2 mm/y	0.1 mm/y	1.8 mm/y

con errori formali di 0.3 mm è 0.3 mm/y nelle componenti ECEF

149

La trasformazioni fra vari ITRFxx

ITRF è un sistema basato su parecchie tecniche di geodesia GPS, VLBI, SLR, e altri. Abbiamo dal 1988 ad oggi 11 realizzazioni che includono posizioni e velocità delle stazioni

La trasformazioni fra i vari ITRF avviene con 14 parametri: 7 di rototraslazione e scala e 7 relativi alle loro velocità di variazione.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D & -R_3 & R_2 \\ R_3 & D & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

D: fattore di scala
R: rotazioni
T: traslazioni

del nostro S.R. a cui faccio la misura

$P(t) = P(epoca) + P^*(t - epoca)$
velocità di variazione del parametro
Parametri di trasformazione ITRF2000 a ITRF2005:

	T1	T2	T3	D	R1	R2	R3
	mm	mm	mm	mas	mas	mas	mas
	0.1	-0.8	-5.8	0.40	0.000	0.000	0.000
+/-	0.3	0.3	0.3	0.05	0.012	0.012	0.012
Rates	-0.2	0.1	-1.8	0.08	0.000	0.000	0.000
+/-	0.3	0.3	0.3	0.05	0.012	0.012	0.012

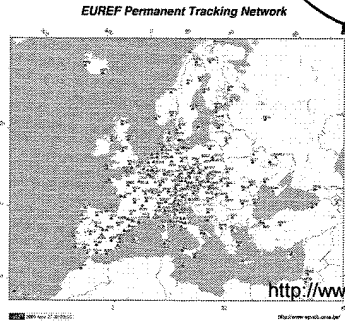
(10^{-9}) mm su 1000 km.

150

*S.R. voriamo di
alampi an all'anno.*

Definizione e realizzazione sistema ECEF - ETRS

In Europa una buona parte di questi spostamenti globali è seguita da tutte le nazioni; per questo si è deciso di istituire una rete "locale" Europea, le cui coordinate, depurate da questi spostamenti comuni, servissero da sistema di riferimento. Questo progetto, nato all'interno della IAG, si chiama **EUREF (European Reference Frame)**. La sua realizzazione consiste in un catalogo di punti di note coordinate e velocità denominate **ETRExx (ETRF89 ETRF2005)**



vengono filtrati gli spostamenti comuni (la placca eurasiatica si muove quasi tutta nella stessa direzione (a parte Italia))
ITRF e ETRF coincidono all'anno 1989 (ITRS89=ETRS89).
si fissa alla placca e vede il movimento, quindi si porta di un passo
 154

Reti STATICHE, DINAMICHE e loro S.R.

l'elevata precisione con la quale sono compensate le reti di SP richiede di adottare il più preciso S.R. in vigore (ITRF o IGS). Non è pratico aggiornare troppo sovente le coordinate delle reti statiche: per applicazioni topo-cartografiche si utilizza IGM95-ETRS89 → S.R. solidale alla placca eurasiatica (ETRS):

TORI	ITRF2005	ETRF2005	Δ [cm]
X [m]=	4472544.420	4472544.625	-20.5
Y [m]=	601634.253	601634.102	15.1
Z [m]=	4492545.140	4492544.981	15.9
vx [m/y]=	-0.0130	0.0006	-1.36
vy [m/y]=	0.0135	0.0004	1.81
vz [m/y]=	0.0121	0.0010	1.11

velocità di spostamento

all'89 in poi i due SR non sono più coincidenti

Le realizzazioni ITRF/IGS05 - ETRF89 differiscono di più di 40 cm in planimetria!

Oggi le coordinate IGM 95 sono state riportate nel S.R. ETRF 2000
 155

WGS84 e reti IGM: IGM95 e RDN

Rete IGM95:

- rete statica di circa 2000 vertici (centrini)
- inquadrata nel sistema ETRF89
- realizza praticamente la trasformazione tra i sistemi WGS84-ETRF89 e Roma 1940

Rete Rete dinamica nazionale IGM

- materializza il S.R. WGS84 in maniera "dinamica" (continua acquisizione e ricalcolo) con 100 stazioni permanenti GNSS
- inquadrata nei sistemi IGS05 e per scopi cartografici nel sistema ETRF2000.
- recentemente anche i vertici IGM95 possono essere trasformati nel sistema ETRF2000
- SR ufficiale epoca 1/1/2008 a partire dal 1 gennaio 2009

Use con tutti i dati accumulati fino all'1/1/2008.
 156

Sistemi di riferimento e superfici di riferimento

Nelle applicazioni ingegneristiche e nella progettazione il sistema ECEF (X, Y, Z) non è pratico. *Per le appl. ingegneristiche non avremo mai un sistema geocentrico, difficilmente faremo il progetto di una strada in un sistema geocentrico, ma lo faremo in uno planimetrico.*

Nella progettazione di opere, meccanica della locomozione e altro ancora, occorre fare riferimento a campi di forze che agiscono:

- in planimetria \rightarrow *ripariamo questi 2 mondi*
- in altimetria

È pratico allora fare ricorso a "superfici di riferimento", associate a sistemi di riferimento ECEF.

- \rightarrow Geoide: riferimento altimetrico
- \rightarrow Ellissoide: riferimento planimetrico

NON PUÒ ESSERE MAI UTILIZZATO PER L'ALTIMETRIA

160

Le superfici di riferimento: geoide e ellissoide

Geoide: superficie equipotenziale della forza di gravità, passante per un punto convenzionale di derivazione delle quote

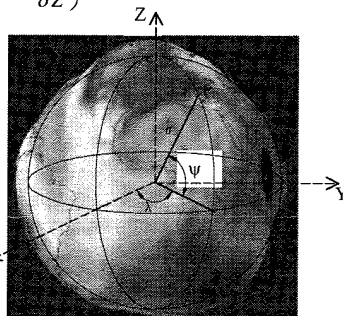
$\vec{g} = g(XYZ)$ ammette potenziale: $dW = \vec{g} \cdot d\vec{P}$ *partimenti*

$\vec{g} = grad(W) \Rightarrow \left(g_x = \frac{\delta W}{\delta X}, g_y = \frac{\delta W}{\delta Y}, g_z = \frac{\delta W}{\delta Z} \right)$

$W = costante \Rightarrow dW = 0 \Rightarrow \vec{g} \cdot d\vec{P} = 0$

P ortogonale alla forza di gravità g

Equazione geoide non risolvibile in forma chiusa: una buona approssimazione per la planimetria è l'ellissoide di rotazione. *In ambito più limitato, una sfera locale; in ambito ancora più limitato, un piano topografico.*



161

Ellissoide e potenziale normale

Equazione ellissoide di rotazione:

$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$

L'ellissoide è la superficie equipotenziale della gravità normale:

$\vec{\gamma} = grad(U) \Rightarrow \left(\gamma_x = \frac{\delta U}{\delta X}, \gamma_y = \frac{\delta U}{\delta Y}, \gamma_z = \frac{\delta U}{\delta Z} \right)$

Con a e c rispettivamente semiasse polare e equatoriale

$\vec{\gamma} = \vec{g} - \Delta g$ Con Δg anomalia di gravità

U è il potenziale normale e T il potenziale anomalo: $W = U + T$

La normale all'ellissoide non coincide più con la normale al geoide o verticale

Gli ellissoidi possono essere: **2 FAMIGLIE**:

- a orientamento locale;
- geocentrici

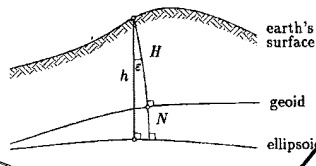
è una quantità approssimata (non reale). È come se, nell'ellissoide, un grave cadesse non verticalmente, ma un po' deviato.

nel geoide, la normale coincide con la verticale. Nell'ellissoide essi differiscono dell'angolo chiamato deviazione della verticale.

RAG-304

GPS e altimetria

Il GPS fornisce le coordinate XYZ: dopo le trasformazioni di coordinate si ricava l'altezza ellissoidica "h". Per scopi ingegneristici e di progettazione, le quote (H) sono riferite alla superficie del Geoide.



h = altezza ellissoidica
 H = quota ortometrica
 N = ondulazione del geoid
 (La formula è approssimata ma sufficiente: la deviazione della verticale è al massimo 30")

$h = H + N$

È dunque importante conoscere l'ondulazione del geoid N o la sua variazione a partire da un punto di note "H" e "h".

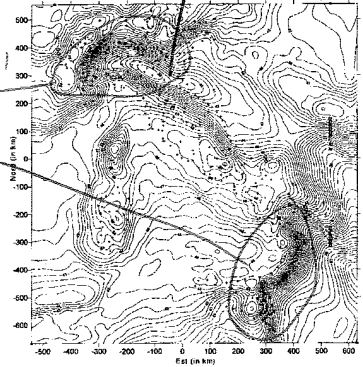
È valida anche la punta all'Everest, seppure non approssimata.

*in Italia:
 ≈ 37 m ÷ 50 m
 da Calabria all'Alto*

MODELLO DI GEOIDE reso dipendente dall'IGN.

GPS e altimetria: Geoide italiano ITALGEO99

Il geoid è più tormentato, è più irregolare, dove ci sono "contorni di mare".



Solo in ambiti ristretti (< 10 km) il geoid può essere approssimato da un "piano inclinato"

Per ambiti maggiori si può ricorrere ai "modelli globali".

Questi però contengono solo in parte l'effetto gravimetrico dovuto alle masse topografiche locali.

È stata eseguita una "stima locale del geoid" (dal Politecnico di Milano) con misure gravimetriche, denominato ITALGEO99, con precisione assoluta decimetrica e relativa di pochi cm su basi di diversi km.

La "localizzazione" del geoid

Il geoid italiano ITALGEO99 è un geoid gravimetrico indipendente ai valori di ondulazione ricavabili combinando livellazione e GPS. È dunque necessario provvedere ad una sua localizzazione.

Calcoliamo l'ondulazione sperimentale su punti di quota altezza ellissoidica e quota ortometrica nota:

$N_{WGSS4} = h - H$

E confrontiamola con quella fornita da ITALGEO:

$\delta N = N_{WGSS4} - N_{ITALGEO}$

Per zone limitate possiamo stimare la variazione δN a partire da una interpolazione piana con parametri stimati da almeno 3 punti di nota quota ortometrica ed ellissoidica, secondo il modello:

$a_1 X_i + a_2 Y_i + a_3 = \delta N_i$

NB: il nuovo modello di geoid dell'IGN tiene conto già di questa localizzazione

167

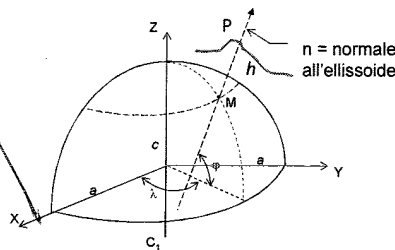
168

Trasformazione tra sistemi di coordinate

è s.l.p. vengono mantenuti in questo sistema geocentrico.

142

Coordinate geografiche e geocentriche ECEF



Formule inverse
(X, Y, Z) → (φ, λ, h)

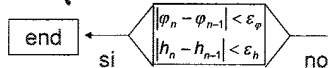
$$\lambda = \arctg \frac{Y}{X} \quad r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\phi = \arctg \frac{Z}{r} \quad (\text{valore appross.})$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$$

$$h = \frac{X}{\cos \phi \cos \lambda} - N$$

$$\phi = \arctg \frac{Z}{r \left(1 - \frac{e^2 N}{N+h} \right)}$$



Formule dirette (φ, λ, h) → (X, Y, Z)

equazioni parametriche dell'ellissoide

$$\begin{aligned} X &= (N+h) \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ Y &= (N+h) \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ Z &= [N(1-e^2) + h] \cdot \sin \phi \end{aligned}$$

è la formula completa, ripete, ha, di phi.

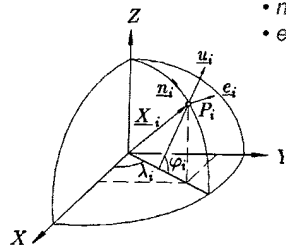
raggio principale di curvatura della superficie normale.

eccentricità

143

Da sistema ECEF (XYZ) a piano locale (Terna euleriana enu)

- Definiamo un sistema di riferimento che si origina dal punto P_i e con i seguenti assi:
- u coincide con la normale per il punto P_i
 - n coincide con la normale al meridiano per P_i
 - e completa la terna (tang. al parallelo verso est)



Date le coordinate ϕ, λ di P_i (origine) e X, Y, Z di un punto P , calcolare le coordinate e, n, u

1) Traslazione delle coordinate dell'origine:

$$\begin{cases} X_i = N \cos \phi_i \cos \lambda_i \\ Y_i = N \cos \phi_i \sin \lambda_i \\ Z_i = N(1 - e^2) \sin \phi_i \end{cases} \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$$

2) Rotazione degli angoli ϕ, λ :

$$\begin{pmatrix} e \\ n \\ u \end{pmatrix} = R(\phi, \lambda) \begin{pmatrix} X - X_i \\ Y - Y_i \\ Z - Z_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X - X_i \\ Y - Y_i \\ Z - Z_i \end{pmatrix}$$

qualche volta utile (ad esempio nel GPS per calcolare i DOP).

non quelle dell'origine, cioè di P_i .

144

Formule di Hirvonen inverse: da x, y a φ, λ

$$\lambda' = \arctan \frac{v_1 \operatorname{senh}\left(\frac{x}{d}\right)}{\cos \xi}$$

$$\varphi = \arctan[\tan \xi \cos(v_1 \lambda')]$$

$$v_1 = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 z} \quad (\text{come formule precedenti})$$

$$e_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$$

$$x = \frac{\text{Est} - x_0}{m_c} \quad y = \frac{\text{Nord} - y_0}{m_c} \quad \vartheta = \frac{y}{aA_1}$$

con x_0, y_0 origini convenzionali e m_c modulo di contrazione

$$\xi = \vartheta + B_1 \operatorname{sen} 2\vartheta + B_2 \operatorname{sen} 4\vartheta + B_3 \operatorname{sen} 6\vartheta + B_4 \operatorname{sen} 8\vartheta$$

$$B_1 = \left(\frac{3e_1}{2} - \frac{27e_1^3}{32}\right) \quad B_2 = \left(\frac{21e_1^2}{16} - \frac{55e_1^4}{32}\right)$$

$$B_3 = \frac{151e_1^3}{96} \quad B_4 = \frac{1097e_1^4}{512}$$

RICORDARE

148

Sistemi geodetici e cartografici di Gauss

	Sistema nazionale Roma40		Sistema internazionale ED50		Sistema WGS84	
Parametri ellissoide	Hayford: semiasse equatoriale a = 6378388 m Eccentricità e ² = 0.006722670022				WGS84: a=6378137 m e ² = 0.006694379990	
DATUM	Roma 1940		ED50		WGS84	
Origini longitud. λ	Roma Monte Mario (MM)		Greenwich (GW)			
Ampiezza fusi Δλ	6° per tutti i fusi					
Denominazione fusi	Ovest	Est	32	33	32	33
Meridiani centrali λ ₀	- 3°27'08.4 0" Est di MM	2°32'51.60" Est di MM	9° Est di GW	15° Est di GW	9° Est di GW	15° Est di GW
coordinate cartograf.	GAUSS-BOAGA		UTM		UTM-WGS84	
Falsa origine x ₀	1.500 km	2.520 km	500 km per tutti i fusi			
Falsa origine y ₀	0 km		0 km per l'emisfero Nord 10.000 km per l'emisfero Sud			
Modulo contraz. m _c	0.9996 per tutti i fusi					

ma STRF 99 o STRF 2000? Le conversioni sono le stesse, ma i numeri un po' diversi!

149

Ammodernamento GNSS

180

L'ARRIVO DI GALILEO

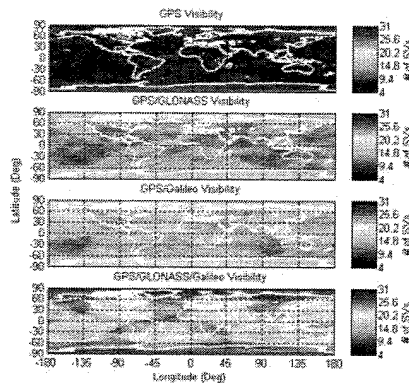
- Nato a scopi civili conterà 30 satelliti su tre piani orbitali
 - Il **completamento**, previsto per il 2012, ha subito un **ritardo** per l'allontanarsi delle industrie private dal progetto.
 - Il primo satellite **GIOVE A** (*Galileo In-Orbit Validation Element* è stato lanciato il 26/12/2005) per assicurare l'uso delle frequenze, validare le tecnologie di posizionamento e il segnale.
- Il secondo satellite **GIOVE B** è stato lanciato il 27 aprile 2008 e sta trasmettendo il primo segnale GALILEO agli utenti dotati di ricevitori abilitati a queste frequenze. Tale missione ha lo scopo di **dimostrare il possibile uso di un orologio PHM** (*Passive Hydrogen Maser*) con stabilità migliore di 1 ns al giorno

Dal 2/2/07 è pubblico il segnale di navigazione, inoltre è pubblico ogni segnale di Giove-A:

http://www.giove.esa.int/images/userpage/GIOVEA_SISICD.pdf

184

Visibilità satelliti GNSS



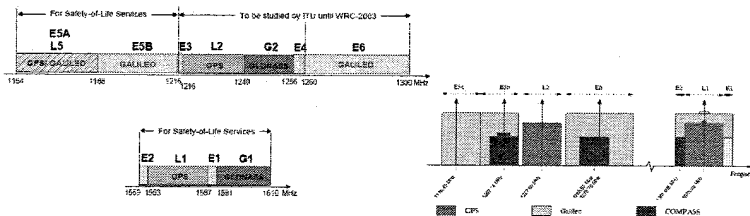
Quando avremo più di 30 satelliti contemporaneamente visibili, come sincronizzare i sistemi di riferimento spazio temporali, a cui le costellazioni GNSS sono riferite?

Le reti di Stazioni permanenti "multi-costellazione", rappresentano il modo di unificare i vari sistemi di riferimento. È avvenuto per il progetto **IGLOS** all'interno di IGS e può avvenire anche per Galileo.

In cui i ricevitori a doppia costellazione forniranno le correlazioni tra le 2 costellazioni.

185

GNSS e futuri ricevitori



Più costellazioni e frequenze → scelta in base all'applicazione, al tipo di ricevitori, alla "robustezza" del tracking e possibilità di combinazioni Probabili 4 classi:

multifrequenza e multiconstellazione

- 1) i ricevitori geodetici di alta precisione, tipicamente per **stazioni permanenti**,
- 2) i ricevitori geodetici per applicazioni **RTK**,
- 3) i ricevitori per applicazioni **GIS**;
- 4) i ricevitori da **includersi nei telefoni cellulari** o usabili sulle autovetture.

186



POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria dell'Ambiente, del Territorio e delle Infrastrutture

Rilevamento 3D integrato e quote

Alberto CINA

Corso di Geomatica – maggio 2013

1

COSA MISURIAMO ?

IN TEORIA angoli e distanze riferite alle GEODETICHE → linea di minore percorso tra A e B.
• Angoli tra geodetiche e distanze come lunghezze di geodetiche
• Dislivelli ortometrici

IN PRATICA:
• Angoli: i teodoliti: fanno riferimento alla verticale → sezioni verticali (oblique). Posso ridurre le sezioni verticali a sezioni normali nota la deviazione della verticale (riduzione per misure di elevata precisione) → angoli tra sezioni normali
• distanze: lunghezze di sezioni normali
• Dislivelli: ortometrici con livellazione geometrica e trigonometrica ma ellissoidici con GPS

Per le pratiche applicat. si confondono le sez. verticali con quelle normali.

Teoremi della Geodesia operativa: l'errore che si commette misurando angoli e distanze con riferimento a sezioni normali invece che a geodetiche è trascurabile nelle pratiche operazioni.
• Errori sulle distanze: al massimo 1 cm / 1000 km
• Errori sugli angoli azimutali al massimo 0.01" a distanza di 100 km

tra sez. normali e geodetiche

2

Tipologie di strumenti topografici

- Tradizionali:
- Livello
 - Teodolite
 - Distanziometro ad onde
 - Ricevitori GPS

- Evoluzioni recenti e nuovi strumenti:
- Strumenti Integrati motorizzati (a risposta diretta o ricerca del prisma)
 - Laser scanner terrestre (e aviotrasportato)
 - GPS per il posizionamento in tempo reale
 - piattaforme inerziali IMU (Inertial Measurement Unit) lavorano con un s.d.r. inerziale
- Principali errori connessi alle operazioni di misura, precisione e accuratezza

Il s.d.r. con cui misuro gli angoli (e la verticale) non è lo stesso del gps (ellissoide WGS84) → devono andare d'accordo

Precisione di una linea di livellazione geometrica

Esempio: linea di 1 km con 10 battute da 100 m:

Il dislivello totale è la somma di quello delle varie battute.
 Propagazione della varianza:

$$\Delta_{AB} = \Delta_b + \Delta_b + \dots + \Delta_b$$

$$\sigma_{\Delta}^2 = \sigma_b^2 + \sigma_b^2 + \dots + \sigma_b^2 = n\sigma_b^2 = 10\sigma_b^2 = \frac{L(km)}{l(km)} \sigma_b^2$$

Lo s.q.m. è proporzionale alla radice della lunghezza L della linea:

$$\sigma_{\Delta} = \pm emk \sqrt{L(km)}$$

l'abbiamo dimostrate a partire dalla propag. della varianza.

emk : errore medio kilometrico (0.3 - 2 - 5 mm) a seconda del livello, della stadia e delle modalità operative

Esempio: $emk = 2 \text{ mm}$ e $L = 9 \text{ km}$ $\sigma_{\Delta} = \pm 2 \text{ mm / km} * \sqrt{9} = \pm 6 \text{ mm}$

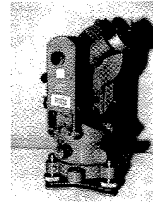
7

Misura di angoli

STRUMENTO : TEODOLITE

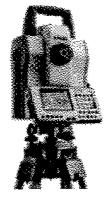
Ottico - meccanici

- Classe Wild T2: precisione 1" (angolo azimutale)
- Classe Wild T3: precisione 0.2"
- **Solo con**: rettifica, letture coniugate e numerose reiterazioni del cerchio azimutale (misure precisione)



Digitali

- Errori legati alla meccanica sono identici
- Errore di apprezzamento del cerchio non è più soggettivo
- Necessarie le letture coniugate
- Reiterazioni : il cerchio viene letto automaticamente in più zone
- Compensatore biassiale e valutazione dell'errore residuo di verticalità
- Maggiore efficienza, registrazione automatica, riduzioni, calcolo coordinate...



Sistema di riferimento: fisico (asse primario verticale)

*poiché l'asse primario è verticale
 che errore*

8

Errori nella misura di angoli

Errori grossolani e procedure operative:

- ripetizione delle misure e letture coniugate (differenza di 200 gon nelle misure azimutali e somma di 400 gon negli angoli zenitali)

Errori rettifica nelle direzioni azimutali:

$$\Delta\theta = \varepsilon_v + \varepsilon_c + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_v = v \sin A \tan \alpha \quad \text{errore verticalità (a}_1\text{)}$$

$$\varepsilon_i = i \tan \alpha \quad \text{errore inclinazione (a}_2\text{)}$$

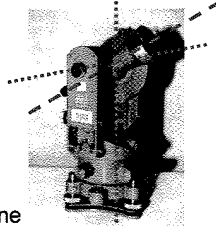
$$\varepsilon_c = \frac{c}{\cos \alpha} \quad \text{errore collimazione (a}_3\text{)}$$

v, i, c = residui errori verticalità collimazione inclinazione
 α = angolo elevazione

A = angolo tra piano collimazione e quello contenente a_1 e la verticale

NB1: per basse elevazioni ($\alpha=0$), si annullano gli errori di inclinazione, verticalità ma non collimazione

NB2: essi crescono all'aumentare dell'elevazione α



→ Regola di Bessel

9

116

Misura delle distanze con propagazione delle onde

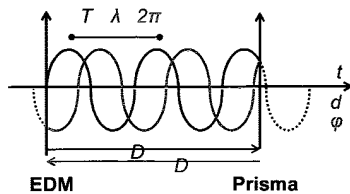
STRUMENTI : DISTANZIOMETRI (EDM)

- A risposta su prismi retroriflettenti (attenti alla costante!)
- A risposta diretta (dove riflette esattamente?)

Sistema di riferimento: la distanza inclinata è invariante per sistema di riferimento. Riduzione sup. di riferimento:

- misura **angolo zenitale**
- **quota** nota con precisione di 6 m (1 mm / km)

Principio misura EDM:

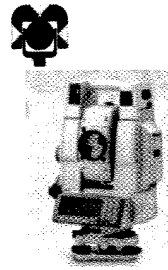


$$\frac{t}{T} = \frac{d}{\lambda} = \frac{\phi}{2\pi} \quad d = \frac{\lambda}{T} t = vt$$

$$d = \frac{\phi}{2\pi} \lambda = \Phi \lambda$$

$$2D = N\lambda + \Phi\lambda \Rightarrow D = N \frac{\lambda}{2} + \Phi \frac{\lambda}{2}$$

T=periodo [s] lambda= lunghezza d'onda [m]; phi sfasamento [angolo]



La distanza è invariante rispetto al S.d.R.

*sfasamento tra le onde in entrata e in uscita
numero intero di lunghezze d'onda: 13
il numero su cui si propaga N volte*

Misura delle distanze con propagazione delle onde

Errori grossolani: errato conteggio del numero di lunghezze d'onda (in pratica inesistente)

Errori sistematici :

- Rifrazione atmosferica: **propagazione curvilinea**, trascurabile (1 mm per distanze 20 km)
- influenza sulla **lunghezza d'onda lambda** → misura dell'indice di rifrazione tramite **T,P,e%**: errori di valutazione di: $\Delta T = 1^\circ C$ o $\Delta P = 3 \text{ mmHg}$ o $\Delta e = 20 \text{ mmHg}$ inducono un errore di **1 ppm D (km)**

Errori accidentali $\sigma_D = \pm(a[\text{mm}] + b[\text{ppm}] * D[\text{km}])$

Modello d'errore:

a e b sono le costanti del distanziometro:

- **a è indipendente dalla distanza** e dipende dalla precisione della misura di sfasamento tra onde
 - **b dipende dalla distanza** → precisione della lunghezza d'onda
- Valori tipici: *a= 1-5 mm, b=1-3 mm/km (o ppm o 10⁻⁶)*

Esempio: *D=3km, a= 3 mm, b= 2 ppm* $\sigma_D = \pm(3\text{mm} + 2 \text{ ppm} * 3[\text{km}]) = \pm 9\text{mm}$

Correzioni del distanziometro

Possono essere impostate nello strumento e calcolate a posteriori.

Rifrazione dell'aria sulla lunghezza d'onda: a causa della variazione della densità dell'aria lungo la traiettoria la lunghezza d'onda varia in funzione:

- **dell'umidità relativa**
- **della Pressione e Temperatura**

Le formule variano per onde luminose (infrarosso) usate negli EDM o per onde centimetriche usate nel GPS.

Un esempio: LEICA TPS1200: formula valida per l'infrarosso (0.78 um):

$$\Delta D = 283.04 - \left[\frac{0.29195p}{1 + \alpha t} - \frac{4.126 * 10^{-4} h}{1 + \alpha t} * 10^{\left(\frac{7.5e - t}{237.3 + t} + 0.785 \right)} \right]$$

*p = pressione atmosferica mbar
t = temperatura aria [°]
h = umidità relativa [%]
alpha = 1/273.16*

Esempio di riduzione della distanza

Ridurre al piano di Gauss (sistema Roma40) una distanza inclinata $D=2000$ m con angolo zenitale $\varphi=80$ gon, considerando:
 • pressione $p = 750$ mmHg, temperatura $t = 20^\circ$, umidità relativa 60%,
 costante prisma $c= 3$ cm, R sfera locale=6370 km, Quota = 600m,
 modulo deformazione lineare 0.99983:

dal grafico ricaviamo una correzione di 5 ppm:
 $D' = D (1 + 5 \text{ ppm} * 2 \text{ km}) = 2000.01 \text{ m}$

• costante prisma = 3 cm $\Rightarrow D'' = D' + 3 \text{ cm} = 2000.04 \text{ cm}$

• rifrazione atmosferica $K=0.14 \Rightarrow$ correzione φ

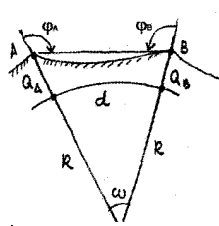
$$\varphi_c = \varphi + \frac{KD}{2R} = 80 + \frac{0.14 * 2000.04 * 200}{2 * 6370000 \pi} = 80.0014 \text{ m}$$

Riduzione all'orizzontale: $d_0 = D'' \sin \varphi = 2000.04 * \sin 80.0014 = 1902.16 \text{ m}$

Riduzione al piano di Gauss: $d_c = d_0 \left(1 - \frac{Q}{R}\right) = 1902.16 \left(1 - \frac{600}{6370000}\right) * 0.99983 = 1901.66 \text{ m}$

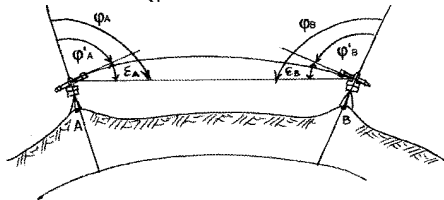
19

Livellazione trigonometrica reciproca



$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = d \left(1 - \frac{Q_m}{R}\right) \tan \frac{\varphi_B - \varphi_A}{2} + h_A - h_B$$

Se la misura degli zenitali da A e B è contemporanea è ragionevole ritenere che la traiettoria visuale sia simmetrica.



Gli errori di rifrazione in A e B, uguali, si eliminano \Rightarrow possiamo inserire gli angoli osservati senza correzioni di rifrazione. Analogamente per l'errore di sfericità.

Il s.d.r. che uso è quello del teodolite, cioè quello fisico, poiché mi rifaccio alla verticale.

20

Livellazione trigonometrica da un estremo

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = d \left(1 - \frac{Q_m}{R}\right) \cot \varphi'_A + \frac{(1-K)d^2}{2R} + h_A - h_B$$

φ'_A = angolo zenitale misurato (non corretto di rifrazione e sfericità)

Il termine: $\frac{(1-K)d^2}{2R}$ Può essere interpretato come:

$\frac{d^2}{2R}$ Correzione errore di sfericità

$-K \frac{d^2}{2R}$ Correzione errori di rifrazione

Per distanze di qualche km lo sqm (σ) del dislivello con livellazione trigonometrica può essere assunto proporzionale alla distanza:

$\sigma_{\Delta} = Cd$ $C = 1-2 \text{ cm/km}$ per livellazione reciproca
 $C = 2-5 \text{ cm/km}$ per livellazione da un estremo

21

Me

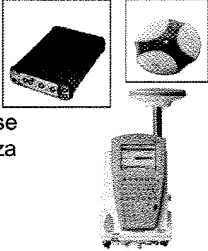
Baseline e coordinate GPS

STRUMENTI : RICEVITORI GPS/GNSS

Palmare – singola frequenza
 • precisione 5-10 m stand alone
 • precisione metrica con GPS differenziale
 • precisione centimetrica con misure statiche, limitate a 10-15 km



Geodetico doppia frequenza
 • precisione 5-10 m stand alone
 • precisione centimetrica in tempo reale RTK
 • precisione millimetrica con misure statiche, specie se con lunghe acquisizioni, senza limitazioni di lunghezza delle basi

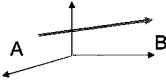


Sistema di riferimento: geometrico (cartesiano geocentrico ECEF)

25

Baseline GPS e modello d'errore

$$\underline{b}_{AB} = \begin{bmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X_{AB} \\ \Delta Y_{AB} \\ \Delta Z_{AB} \end{bmatrix}$$



Matrice di varianza covarianza delle componenti delle basi

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} & \sigma_{YZ} & \sigma_Z^2 \end{bmatrix}$$

Baseline Components (meters):	dx -10446.327	dy 19061.009	dz 7782.855
Standard Deviations (meters):	0.000839	0.000408	0.000918
Covariance Matrix:	7.038408E-007		
	4.756531E-008	1.662718E-007	
	3.904630E-007	-2.534002E-009	8.433269E-007

Nel GPS è difficile ipotizzare le covarianze: possiamo però ipotizzare ragionevolmente gli sqm planimetrici e altimetrici, analogamente a quanto si farebbe per i distanziometri: $\sigma = \pm (a [mm] + b [ppm] * d [km])$

26

Livellazione trigonometrica e GPS

Livellazione trigonometrica con misura di distanza: $\Delta H \cong d_c \left(1 + \frac{h}{R} \right) \cdot ctg \varphi_{AB} + \frac{1-K}{2R} d_c^2 \frac{1}{sen^2 \varphi_{AB}} + l_A - l_B$

Precisione livellazione trigonometrica: propagazione varianza. Ipotesi: $\sigma_d = 5 \text{ mm} + 3 \text{ ppm} * d[\text{km}]$ $\sigma_\varphi = 1 \text{ mgon}$ $\sigma_K = 0.02$
 d variabile da 500 e 3000 m; φ da 95 a 105 gon → ΔH tra 39 e 236 m

Precisione GPS rapido statico: $\sigma_{\Delta h} = 5 \text{ mm} + 1.5 \text{ ppm} * d[\text{km}]$

Precisione Geoide: $\sigma_{\Delta N} = 10 \text{ mm} + 5 \text{ ppm} * d[\text{km}]$

Precisione GPS RTK: $\sigma_{\Delta h} = 20 \text{ mm} + 1.5 \text{ ppm} * d [\text{km}]$

	8,4	10,6	8,0	14,1	15,4	25,2
	16,1	17,3	16,0	16,6	17,8	27,1
	31,8	32,4	32,0	21,7	22,6	31,3
	47,5	48,0	47,0	26,9	27,6	35,7

livellazione trigonometrica più precisa del GPS per brevi distanze

27

Verso un rilevamento 3D: le misure e i sistemi di riferimento

Le misure:

- GPS (basi o coordinate): riferite ad un ellissoide geocentrico (normale ellissoidica).
- Angolari: legate al campo della gravità (verticale).
- Distanze inclinate: invarianti per sistema di riferimento 3D.
- Poter conoscere "abbastanza bene" il geode (ondulazione e deviazione della verticale rispetto all'ellissoide considerato).

I sistemi di riferimento:

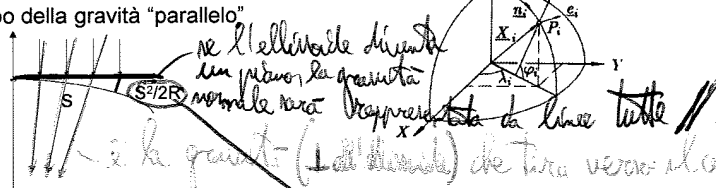
- Le misure topografiche classiche vengono ridotte ad un ellissoide locale (Hayford or. MM) per la planimetria e geode per l'altimetria. Scostamenti massimi tra geode e ellissoide di pochi metri.
- Le misure GPS sono riferite ad un ellissoide geocentrico (WGS84) di diversa forma (semiasse e schiacciamento), con maggiori differenze rispetto al geode (scostamenti anche superiori a 50 m).
- misure GPS e classiche (angoli e distanze) possono essere ridotte ad un piano locale, utilizzabile direttamente per progettazione e tracciamento limitatamente a certe estensioni (campo topografico)

34

Verso un rilevamento 3D: basta aggiungere una quota?

Approssimazione piana:

- piano tangente in P (φ, λ) e terna cartesiana euleriana (e, n, u) associata
- campo della gravità "parallelo"



Validità: planimetria: ~ 15 km
altimetria: errore = S²/2R
→ poche centinaia di metri!

S [km]	100 m	500 m	1 km	5 km
S ² /2R	1 mm	2 cm	8 cm	1.96 m

L'utilizzo di dislivelli e angoli zenitali limita la validità dell'approssimazione piana. → Essa non è in pratica utilizzabile per rilevamenti 3D!
... A meno di apportare correzioni ...

Campo topografico

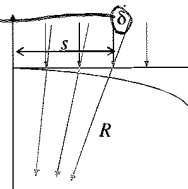
o un angolo zenitale per avere un rilevamento 3D

errore di sfericità trascurato dagli sviluppi di RUISELY-WEIN-ARBE

con un livello di alta precisione minimo il decimo / centesimo di mm → questo errore non si trascurabile!!

Da campo della gravità "normale" a campo "parallelo": le misure classiche

legato alla convergenza delle verticali. Esso aumenta tanto più mi allontano dal punto di tangenza.



Correzione delle osservazioni "classiche" per sfericità e "convergenza della normale"

- Angolo zenitale ζ
- azimut θ
- dislivello Δ

NB: 1.8 km corrispondono a 1' di convergenza delle verticali

$$C(\zeta) = \frac{1}{s \sin(\zeta_0)} [(e_i - e_j), (n_i - n_j), (u_i - u_j)]^T \delta'$$

$$C(\theta) = \frac{u_i - u_j}{s^2 \sin^2(\theta_0)} [(e_i - e_j), (n_i - n_j), (0)]^T \delta'$$

$$C(\Delta) = [(e_i - e_j), (n_i - n_j), (u_i - u_j)]^T \delta'$$

correzione negli angoli zenitali
Validità: ~ 20-25 km
azimutali

Correzioni da applicare alle misure

$$\delta' = \frac{1}{2\sqrt{e_i^2 + n_i^2}} \begin{bmatrix} e_i \delta \\ n_i \delta \\ 0 \end{bmatrix} ; \delta = s/R ; s = \sqrt{(e_i - e_j)^2 + (n_i - n_j)^2}$$

33

120

*hectolitri giroscopico: grazie ad una mappa rotante che li oppone alla rotazione della terra
 passo a definire il Nord => mi dà un azimut riferito non all'ellissoide,
 ma al geode: AZIMUT GEODICO:*

Da campo della gravità "reale" a campo "parallelo": le misure classiche

Differenza tra azimut "geoidico" A ed "ellissoidico" α , nel punto B, con la **formula di Laplace**:

$$A - \alpha = \eta \tan \varphi + (\xi \operatorname{sen} \alpha - \eta \operatorname{cos} \alpha) \cot \zeta$$

Con ζ angolo zenitale osservato e φ latitudine

Considerando uno zenitale $\zeta = \sim 100 \text{ gon}$, la formula si semplifica in:

$$A - \alpha = \eta \tan \varphi$$

Considerando ancora una latitudine $\varphi = 45^\circ$ ($\tan \varphi = 1$) la correzione di azimut risulta pari alla sola componente parallela η .

Calcoliamo ancora la correzione da apportare all'angolo zenitale osservato, per effetto delle componenti di deviazione della verticale, nella direzione con azimut α (Heiskanen - Moritz, 85):

$$\varepsilon = \xi \operatorname{cos} \alpha + \eta \operatorname{sen} \alpha$$

34

Da campo reale a campo normale della gravità: un esempio sulle pendici dell'ETNA

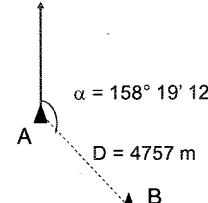
Quale ruolo gioca il passaggio da campo "reale" a "normale" nella:

- 1) Misura di angoli azimutali ?
- 2) Misura di dislivelli con livellazione trigonometrica ?
- 3) Riduzione della distanza ?

dal campo normale a parallelo l'abbiamo visto prima).

Consideriamo 2 punti di note coordinate e componenti di deviazione della verticale, nel sistema WGS84:

	Punto B	Punto A
$\varphi =$	37° 27' 36.000"	37° 30' 0"
$\lambda =$	15° 1' 12.000"	15° 0' 0"
$\xi =$	0.08"	3.50"
$\eta =$	11.55"	9.50"



deviaz. della verticale nei punti A e B.

il meridiano 15 papa proprio per l'ETNA.

angoli opposti galleria: se una traccia con livellazione geodetica e l'altro con angoli e distanze e non apportano questa correzioni NON si incontrano

30

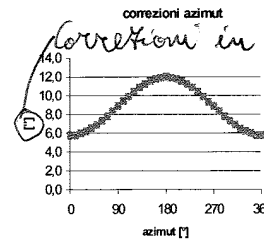
Da campo reale a campo normale della gravità deviazione della verticale e influenza su angoli azimutali

Differenza tra azimut "geoidico" A ed "ellissoidico" α , nel punto B, con la formula di Laplace:

$$A - \alpha = \eta \tan \varphi + (\xi \operatorname{sen} \alpha - \eta \operatorname{cos} \alpha) \cot \zeta$$

considerando un angolo zenitale $\zeta = 75^\circ$:

(A - α) è compreso tra i valori +5.8" e 12.0"



correzioni in secondi

Nell'**angolo azimutale** (differenza tra 2 azimut) possiamo avere un **errore** massimo pari a (12.0" - 5.8") = **6.2"** (2 mgon), tra l'angolo rilevato e quello riferito all'ellissoide. L'errore planimetrico corrispondente è $\sim 3 \text{ cm/km}$

39

19

La forza di gravità e il suo potenziale

- La definizione della quota si origina dalla forza di gravità g**
- Unità di misura di g : $1 Gal = 1 cm/s^2$ (sottomultiplo $1 mGal = 0.001 gal$)
 - La superficie terrestre ha un valore di g variabile da $9,823 m/s^2$ ($982.3 Gal$) ai poli e $9,789 m/s^2$ ($978.9 Gal$) all'equatore; il valore convenzionale è $980.665 Gal$

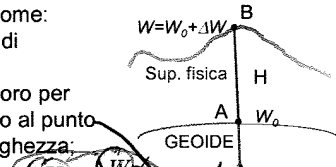
Il **lavoro** è il prodotto della forza g per lo spostamento ΔH di una massa da A a B nella direzione della forza

Potenziale W : è il lavoro cambiato di segno: $W = -g H$ [$Gal * m$]

La **quota** può essere misurata allora come:

- **Una lunghezza H** (tra la superficie di riferimento e il punto)
- **Un potenziale W** che esprime il lavoro per andare dalla superficie di riferimento al punto
- Il potenziale è esprimibile come lunghezza: noto g la «quota ortometrica sarà: $\Delta H = \frac{\Delta W}{g}$ »

Con la livellazione misuriamo ΔH ; ma se varia g ?



*diff. di g di potenziale
tra A e B
(ciò da A a B)
43*

La quota ha un significato fisico

Un liquido scorre verso punti con minor potenziale:
→ Utilizzo delle quote per la progettazione di canali, opere idrauliche ...

Un corpo cerca di arrivare a stati di potenziale inferiore:
→ Utilizzo delle quote per la meccanica della locomozione, progettazione pendenze ferroviarie, stradali in base al lavoro del veicolo, quote spianamenti per parcheggi, scali ferroviari ...

Per la quota non valgono superfici «geometriche» che si utilizzano nella planimetria (ellissoide, piano ...). In particolare:
→ Le quote ellissoidiche misurate dalla superficie dell'ellissoide non hanno significato fisico
→ L'approssimazione piana non è mai valida

→ **Definizione di una superficie di riferimento «fisica»: GEOIDE**

andrebbe bene se la gravità fosse costante, ma la gravità varia, quindi varia anche ΔH , e se due punti diversi nella sup. fisica hanno stessa W , ma g diversa → anche la loro ΔH cambia (e non dovrebbe cambiare ...)

livellette

non si legge quindi non si potenziale (che poi tramutano in quota)

anche per le livelline

Reti di livellazione IGM

Quote derivate dalla **compensazione dei dislivelli** con livellazione geometrica.

Dagli anni '70 **misure di gravità** sulle principali linee di livellazione, per partecipazione UELN (*United European Leveling Network*)

Anni '90: nuove misure e soluzioni UELN. Con l'istituzione della rete EUREF di Stazioni permanenti GPS è stato avviato il progetto EUVN (*European Vertical Network*) per collegare la **rete di livellazione europea** → istituzione del sistema **EVRS (European Vertical Reference System)**



Tolleranza

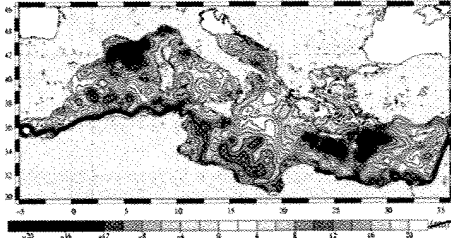
il mio frame è dato dalle quote dei punti della rete di livellazione



*mareografi (in alto è quello di Genova)
45*

Superficie del mare e superficie di livello

- la **superficie media del mare non è una superficie di livello** in senso globale, ma lo può essere solo su scala locale.
- Se ci limitiamo al nostro Mediterraneo, è possibile tracciare le **differenze altimetriche rispetto alla superficie equipotenziale**, che prendono nome di SST (Sea Surface Topography), con differenze di anche ± 20 cm



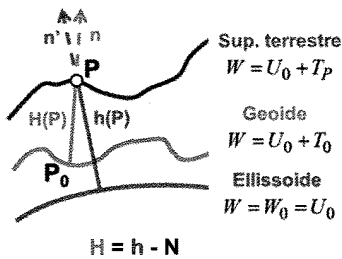
i diversi colori sono le diff. di quot

- Non basta allora collegare i vari mareografi. Si troverà sempre una differenza di zero causata da questa SST e non dagli errori di misura.
- **Conviene riferirsi al campo del potenziale di gravità** e definire meglio cos'è il geode e che cos'è perciò una quota ortometrica.

49
 i mari non rappresentano una sup. equipotenziale, se non in maniera approssimata.

Superficie di riferimento e quote

Geode: superficie di livello del campo della gravità: $g = -grad W$
Ellissoide: superficie di livello della gravità normale: $\gamma = -grad U$ *potenziale normale*
Potenziale anomalo: $T = W - U$



Altezza ellissoidica h: distanza del punto P dall'ellissoide, misurata secondo la direzione della normale *all'ellissoide*.

• Ha significato geometrico ma non fisico *(perché dove va l'acqua) → se progettassi un canale usando h → l'acqua andrebbe in mare!!*

Quota ortometrica H: distanza del punto P dal geode, misurata lungo la linea di forza del campo passante per il punto stesso.

$H(P) = \int_{P_0}^P dn$ *«differenziale della normale»*

- Ha significato geometrico (è una lunghezza) ma non fisico, in quanto le superfici di quota ortometrica costante non sono parallele

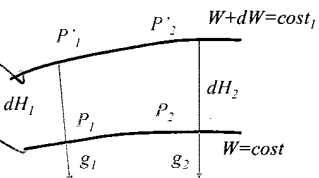
calcolo di N (formula di BRUNS):

$N = \frac{T}{\gamma}$

ondulazione del geode: che ci permette di correggere le altezze ellissoidiche per ottenere le ortometriche

Quota ortometrica e superfici di livello

Quota ortometrica: distanza dal punto P al geode misurata lungo la linea di forza (H) del campo passante per il punto stesso.



Il potenziale infinitesimo dW è:

$dW = g_1 dH_1 = g_2 dH_2$

$\rightarrow \frac{dH_2 - dH_1}{dH_1} = \frac{g_1 - g_2}{g_2}$

Equipotenziali
 domanda: queste 2 superfici sono parallele tra loro?

Consideriamo questa perché è più facile trattare con questa che con la gravità (anche se è la stessa cosa)

Le differenze ortometriche sono funzione della gravità g .
 La gravità normale γ ($g - \gamma = \Delta g$ anomalia di gravità) in un punto può essere espressa in funzione della gravità ai poli γ_p e di quella all'equatore γ_e , mediante la formula:

$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \psi)$

Con β = schiacciamento gravimetrico:

$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} \approx 1/150$

lo schiacciamento altimetrico era invece: $d \approx \frac{a-c}{2a}$

*calcolato in P1, dove c'è la gravità g1
 calcolato in P2, dove c'è la gravità g2
 $g_2 < g_1 \Rightarrow dH_2 - dH_1$
 aumenta \Rightarrow le surf. equipotenziali non sono tra loro parallele.
 infatti: $\frac{g_1}{g_2} = \frac{dH_2}{dH_1}$*

Dai numeri geopotenziali alle varie quote

Se per ogni stazione di livellazione si misura anche l'accelerazione di gravità con sufficiente approssimazione possiamo sostituire all'integrale la sommatoria ottenendo la **quota geopotenziale**, grandezza indipendente dal percorso che si effettua

$$C = W_1 - W_2 = \sum_i g_i dh_i$$

Numerosi autori hanno cercato di determinare la **cadenza delle misure di gravità**: valori indicativi possono essere

- Ogni 3-4 km in terreno pianeggianti
- Ogni 1-2 km in terreni mediamente accidentati
- Ogni km o meno in terreni accidentati.

La **precisione** con cui deve essere misurata la gravità è dell'ordine dei 2-3 mgal (1 mgal = 0.01 m/s² unità SI)

Il numero geopotenziale è alla base della definizione di tutti i sistemi di quote.

di riferimento

55

Numero geopotenziale e quota ortometrica

in termini di lunghezza. Invece delle strane dire: la quota di Torino è 3 gal·m!!!

Il numero geopotenziale ha unità [gal·m] e non è una lunghezza, *ma è pratico per noi ragionare*. Esso può diventare una lunghezza se viene diviso per una «gravità di riferimento convenzionale g_c ». La definizione di tale gravità determina vari sistemi di quote H :

$$H^c = \frac{C}{g_c} = \frac{1}{g_c} \int g dh \cong \frac{\sum_i g_i dh_i}{g_c}$$

Quota ortometrica: tratto di linea di forza del campo della gravità, compresa tra il punto e il geoido. Si ottiene dal numero geopotenziale assumendo come gravità convenzionale la gravità media g lungo la linea di forza:

$$g_c = g_m = \frac{1}{H_A} \int_0^{H_A} g dh$$

La difficoltà è conoscere il valore della gravità reale su tutta la linea di forza del campo della gravità.

è quella adottata dalla maggior parte dei Paesi Europei.

56

Numero geopotenziale e quota normale

Quota normale: si ottiene dal numero geopotenziale assumendo come gravità convenzionale non più la gravità reale g lungo la linea di forza ma la gravità normale media lungo la stessa linea di forza o, con buona approssimazione, lungo la normale all'ellissoide

$$H_A^N = \frac{C}{\bar{\gamma}_A} \quad \text{Dove:} \quad \bar{\gamma}_A = \frac{1}{H_A} \int_0^{H_A} \gamma dh$$

Per il calcolo del geoido gravimetrico i valori della gravità g devono essere ridotti al geoido secondo la:

$$g_{geoido} = g_{misurata} - \frac{dg}{dH} H \quad \text{Che richiede la conoscenza dell'accelerazione di gravità } g.$$

Se tale riduzione è fatta in «aria libera» otterremo l'«anomalia d'altezza»:

$$\xi = \frac{T}{\gamma}$$

La superficie la cui altezza sull'ellissoide è ξ è detta «**quasi Geoido**»

Viene detta Quota Normale $H^N = h - \xi$

Non sappiamo che $H = h - N$

57

126

TECNICHE DI LIVELLAZIONE INTEGRATE

- trigonometrica
- geometrica
- GPS e ondulazione geoidale

La misura delle quote dipende dal tempo!!!

Le satelliti "basati" misurano un tempo che è diverso da quello che misurano
(con i loro orologi)

gli orologi qui sulla terra a causa dell'errore relativistico.

Un dislivello di 1 m in quota provoca un effetto relativistico di 10^{-15} .

Come una persona che sta 1 m
più alto di me, a causa della
rotazione terrestre, è che
quello più in alto ruota più velocemente ⇒

Richiami su principi fisici: QUANTITÀ DI MOTO

È una grandezza vettoriale che misura la **capacità di un corpo di interagire dinamicamente con altri corpi**. Un punto di massa m con velocità v ha una quantità di moto Q pari a:

$\vec{Q} = m\vec{v}$ e con n punti: $\vec{Q} = \sum_{i=1}^n \vec{Q}_i$

quantità di moto totale

Nella **meccanica classica** la quantità di moto è correlata al 2° principio della dinamica. La forza è proporzionale alla rapidità con cui varia la quantità di moto. Nell'ipotesi di massa costante:

$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$ *Consideriamo la massa costante*

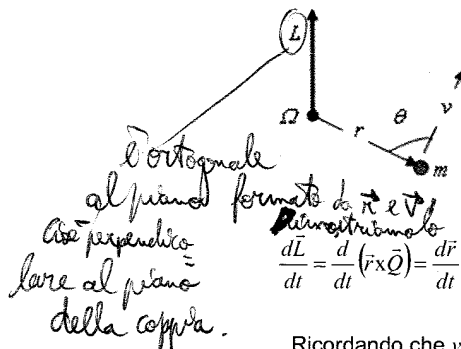
Nella **meccanica relativistica**, posto c la velocità della luce, $\vec{Q} = \gamma m \vec{v}$

Con: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ **Fattore di LORENTZ** *tiene conto del movimento dei corpi*

4

Richiami su principi fisici: MOMENTO ANGOLARE

È legato alle rotazioni nello spazio. Costituisce l'equivalente per le rotazioni della quantità di moto per le traslazioni.



Il momento angolare L di un punto di massa m rispetto a un polo Ω , è il prodotto vettoriale:
 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{Q} = \vec{r} \times m\vec{v}$ e con n punti: $\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$
La sua variazione nel tempo è il momento torcente
 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ *forza braccio*

dimostriamo tramite derivazione:
 $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{Q})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{Q} + \vec{r} \times \frac{d\vec{Q}}{dt} = (\vec{v} - \vec{v}_0) \times \vec{Q} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{v} \times \vec{Q} + \vec{r} \times \vec{F} + \vec{v}_0 \times \vec{Q} + \vec{\tau}$
 Ricordando che v e Q sono paralleli, con $v_0=0$: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ *perché v e Q sono paralleli!!!*

il punto non ha vel. iniziale (v0) nulla

5

Richiami : CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

L si conserva se il momento delle forze esterne (τ) è nullo:

Se $\vec{\tau} = 0$ allora $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ per cui $\vec{L} = \text{costante}$

Ciò può avvenire (per diversi motivi) se:

- il sistema è isolato ($F=0$) ($\Rightarrow \vec{\tau}=0$)
- la forza F è applicata in un punto dell'asse di rotazione ($r=0$)
- il prodotto vettoriale si annulla in quanto F parallelo a r *braccio nullo*

Il momento angolare L può essere espresso come il prodotto del momento d'inerzia I per la velocità angolare ω :

$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = r^2 m \vec{\omega} = I \vec{\omega}$ *v = w r*

La variazione di L nel tempo è il prodotto del momento d'inerzia per l'accelerazione angolare α :

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$ *m · r^2*

6

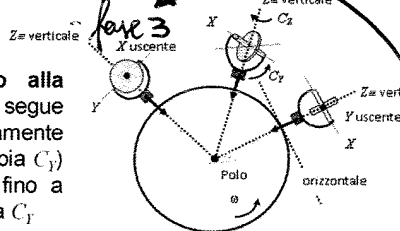
La GIROBUSSOLA

Si orienta secondo il NORD «vero» (astronomico), dato dalla posizione istantanea dell'asse di rotazione terrestre
 La rotazione terrestre fa cambiare continuamente la direzione della verticale in un sistema inerziale. Un esempio nel piano equatoriale:

(non il nord geografico) dell'ellipsoide...

Giroscopio libero: l'asse di spin mantiene inalterata la sua direzione indipendentemente da quella della verticale

Giroscopio con Z vincolato alla verticale (pendolo): il pendolo segue la verticale locale e da continuamente una rotazione intorno a Y (coppia C_y)
 → precessione intorno a Z fino a quando l'asse di spin X non è ⊥ a C_y



X si pone in direzione dell'asse rotazione terrestre

Cambia la verticale locale, ma il giroscopio resta sempre mantenendo alterata la direzione del suo asse di spin.

il giroscopio vorrebbe girare libero, ma lo vincolo secondo la verticale (alla verticale) → è come se applicassi una coppia C_y → il giroscopio precessere ruotando attorno a Z.

La GIROBUSSOLA

Ad una **latitudine** ϕ la posizione d'equilibrio sarà sempre nord-sud.

La girobussola può apprezzare al **componente orizzontale** della rotazione terrestre ω :

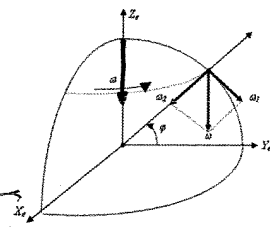
$$\omega_1 = \omega \cos \phi$$

Se il giroscopio è **vincolato in altezza** con un filo (detto di «torsione») che lo sostiene lungo la verticale, possiamo considerare la **sola componente nord-sud** (cioè la sola componente ω_1)
 Dalla legge del giroscopio: $\omega = \frac{C}{I \omega_g}$

$$C = I \omega_g \omega_1 = I \omega_g \omega \cos \phi$$

$$\omega = \frac{C}{I \omega_g \cos \phi} \quad \text{Apprezziamo la v. rotaz. terrestre } \omega \text{ nota } \phi$$

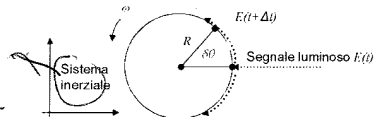
La girobussola può essere abbinata ad un teodolite, per limitare la propagazione dell'errore angolare in lunghe gallerie



sistema ECEF X,Y,Z

Il giroscopio OTTICO (FOG - Fiber Optic Gyroscope)

Il principio si basa sull'effetto relativistico di Sagnac (1913)



Spira circolare di fibra ottica di area A, in rotazione (ω) in un sistema inerziale, percorsa da un segnale luminoso $E(t)$

Il segnale è raccolto da un osservatore solidale:

- Alla fibra: dopo $\theta = 2\pi$
- Al SI: dopo $\theta = 2\pi + \Delta\theta$ a causa della rotazione ($\Delta\theta = \omega \Delta t$)

La differenza di percorso osservata dai due osservatori sarà (dimostrazione nelle dispense):
 Se percorriamo la spira con un segnale in senso opposto, la differenza di percorso osservata sarà:

$$\Delta = 2A \frac{\omega}{c} \text{ sul. bilie}$$

$$\Delta = -2A \frac{\omega}{c}$$

Lo sfasamento tra i 2 segnali è: $\Delta\phi = \frac{\Delta - (-\Delta)}{\lambda} = \frac{4A}{\lambda c} \omega$ **proporzionale alla v. angolare** ω di un fattore di «sensibilità del giroscopio» $\frac{4A}{\lambda c}$

Per aumentare la sensibilità si aumenta l'area e quindi si usano spire grandi possibili

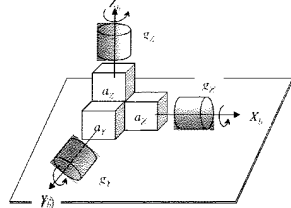
in cui lo zero del teodolite (cerchio azimutale) coincide con la direzione del giroscopio.

Col teodolite normale farei: misuro distanza e angolo: gli azimutali li misuro col teodolite giroscopio. se sbaglia una misura angolare (la prima) poi me la posto dietro che preleva con il teodolite giroscopio misuro in ogni punto il basamento indipendente di quello.

perché nel tempo in cui è stato compiuto un giro intero del segnale la spira è anche ruotata!

I SENSORI INERZIALI

Costituiti in generale da una terna di accelerometri e giroscopi, solidali ad una piattaforma, disposti secondo una terna cartesiana



Chiameremo questo sistema di riferimento strumentale, **sistema Body o b-frame**.

Possono essere **classificati** a seconda della **capacità di elaborazione** dello strumento stesso in:

Sistema di riferimento strumentale o interno o body.

sensori assemblati

ISA (Inertial Sensor Assembly): fornisce i dati «grezzi» di accelerazione e velocità angolare;

IMU (Inertial Measurement Unit): i dati grezzi sono compensati degli errori sistematici (*bias*) di misura;

INS (Inertial Navigation System): forniscono la stima della posizione e assetto mediante processamento dei dati grezzi con gli algoritmi di navigazione

per integrazione di vel. angolari e per doppia integrazione di accelerazioni.

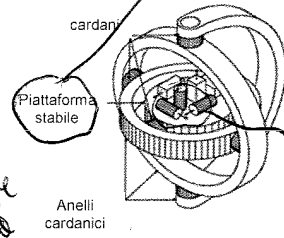
CONFIGURAZIONI di sensori inerziali

2 TIPI:

«gimbale»

GIMBALED: piattaforma dei sensori isolata meccanicamente dal moto del veicolo con giunti cardanici (*gimbal*) controllati dai giroscopi.

La piattaforma non subisce rotazioni e fornisce l'output degli accelerometri nel sistema inerziale, qualunque sia il moto del veicolo

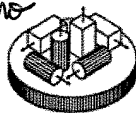


isolata rispetto al moto del veicolo

i 3 cardanetti sono vincolati alla piattaforma stabile all'interno di anelli cardanici

questi gli anelli, ma i sensori forniscono la controreazione per far sì che la piattaforma sia sempre nel n.d.r. desiderabile

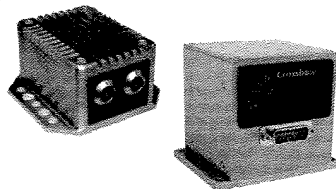
Gruppo di 3 accelerometri e 3 giroscopi



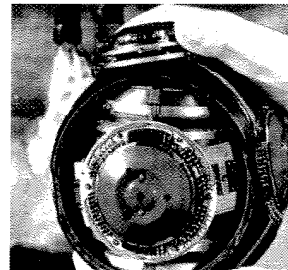
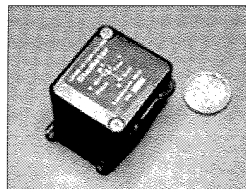
STRAPDOWN: sensori inerziali solidali ad una piattaforma rigida **vincolata** al mezzo in movimento.

Gli accelerometri seguono il mezzo nella sua dinamica e forniscono l'output nel sistema *body*

Esempi di sensori inerziali



IMU Strapdown



IMU Gimbaled

17

1 millesimo di grado all'ora

CLASSIFICAZIONE IMU in base ai BIAS			
Categoria	Bias		Applicazioni derivate e costi indicativi:
	Accelerometri [mg]	Giroscopi [°/ora]	
Marine grade	0.01	0.001	Navali, sottomarini, veicoli spaziali. Deriva: entro 1 miglio/giorno Costo: > 1M€.
Aviation grade	0.03 - 0.1	0.01	Veicoli militari, velivoli civili. Deriva circa 1 miglio/ora Costo: > 100 k€
Intermediate grade	0.1 - 1	0.1	Piccoli velivoli, elicotteri. Deriva circa 10 miglia/ora Costo: 20 - 50 k€
Tactical grade	1-10	1 - 100	Droni UAV, MMV (Mobile Mapping System) Soluzione di navigazione valida pochi minuti → indispensabile integrazione con GNSS Costo: 5-20 k€
Automotive grade	>10	>100	Industria automobilistica (ABS). Hanno ridottissime dimensioni. Costo: da pochi € a poche centinaia di €

quelli che ci interessano!!
 (se non altro, anche per una questione di costi!!)
 qui la deriva sarebbe paragonata al non ci fossero integrati i GPS a correggere i BIAS.

la soluzione ha una deriva notevole al trascorrere del tempo.

Effetto dei BIAS sugli ACCELEROMETRI

Bias «non compensati» deviano la soluzione di posizione e velocità. Analizziamo un caso 1D sugli accelerometri con bias (b_a)

con una prima integrazione abbiamo la velocità:

$$v = \int a dt = \int (\ddot{X} + b_a) dt = \dot{X} + b_a t$$

↳ bias negli accelerometri

con una seconda integrazione abbiamo la posizione:

$$X = \int v dt = \int (\dot{X} + b_a t) dt = \int \dot{X} dt + \int b_a t dt = X + \frac{1}{2} b_a t^2$$

Un bias sulle accelerazioni produce un bias proporzionale a:

- al tempo t sulle velocità
- al quadrato del tempo sulle posizioni

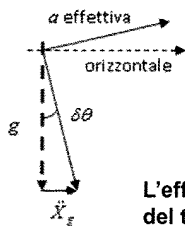
la deriva negli accelerometri ha un effetto lineare sulle velocità (con un bias non compensato ha un effetto lineare sulle velocità)

Sui giroscopi è ancora peggio (soprattutto nella

Effetto dei BIAS sui GIROSCOPI

L'errore $\delta\theta$ sull'angolo di assetto è proporzionale al tempo intercorso dalla posizione iniziale $\delta\theta = b_g t$. Esso si ripercuote sull'accelerometro al quale fornisce una errata direzione di proiezione.

portato ad un bias nei giroscopi



Ciò provoca un errore \ddot{X}_g nella misura dell'accelerometro, legato principalmente alla rotazione del vettore forza di gravità g . Esso può essere scritto:

$$\ddot{X}_g = g \sin \delta\theta \approx g \delta\theta = g b_g t$$

↳ spieghiamo che l'angolo $\delta\theta$ sia sufficientemente piccolo.

L'effetto sulla velocità sarà proporzionale al quadrato del tempo:

$$v = \int (\dot{X} + \ddot{X}_g) dt = \int \dot{X} dt + \int g b_g t dt = \dot{X} + \frac{1}{2} g b_g t^2$$

L'effetto sulla posizione sarà proporzionale al cubo del tempo:

↳ un bias nei giroscopi produce un errore lineare in funz. del tempo sulle vel. quadratico sulle pos. cubico

$$X = \int v dt = \int \dot{X} dt + \frac{1}{2} g b_g \int t^2 dt = X + \frac{1}{6} g b_g t^3$$

↳ sulle vel. e sulle pos.

le applicazioni militari e della marina hanno bias molto piccolo, ma anche la deriva

Da n-frame a b-frame (angoli Eulero)

matrice ortogonale (il - è in alto a dx)

Ritorno a X matrice antioraria (il - è in basso a dx)

$$R_n^b = R_x R_y R_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega & \sin \Omega \\ 0 & -\sin \Omega & \cos \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Phi & 0 & -\sin \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi & 0 & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos K & \sin K & 0 \\ -\sin K & \cos K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos K & \cos \Omega \sin K & -\sin \Omega \\ \sin \Omega \sin \Phi \cos K - \cos \Omega \sin K & \sin \Omega \sin \Phi \sin K - \cos \Omega \cos K & \sin \Omega \cos \Phi \\ \cos \Omega \sin \Phi \cos K + \sin \Omega \sin K & \cos \Omega \sin \Phi \sin K - \sin \Omega \cos K & \cos \Omega \cos \Phi \end{bmatrix}$$

Per piccole rotazioni la matrice di rotazione assume la forma linearizzata:

$$R_n^b = \begin{bmatrix} 1 & K & -\Phi \\ -K & 1 & \Omega \\ \Phi & -\Omega & 1 \end{bmatrix}$$

Per il passaggio da b-frame a n-frame ricordiamo le proprietà di ortogonalità della matrice di rotazione:

$$R_n^b = R_n^{b^{-1}} = R_n^{b^T} = R_n^T R_n^T R_n^T = \begin{bmatrix} 1 & -K & \Phi \\ K & 1 & -\Omega \\ -\Phi & \Omega & 1 \end{bmatrix}$$

28

Da n-frame a b-frame - velocità angolari

Possiamo propagare la matrice di rotazione nel tempo, note le velocità angolari $[\Omega \ \Phi \ K]$ del sistema body b-frame rispetto al sistema di navigazione n-frame. La velocità di cambiamento della matrice R sarà (omettendo la dimostrazione):

$$\dot{R}_b^n = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta R_b^n}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta R_b^n(t + \delta t) - \delta R_b^n(t)}{\delta t} = R_b^n \Omega_n^b$$

Con Ω matrice «emisimmetrica» delle velocità angolari del b-frame rispetto a n-frame:

$$\Omega_n^b = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{K} & \dot{\Phi} \\ \dot{K} & 0 & -\dot{\Omega} \\ -\dot{\Phi} & \dot{\Omega} & 0 \end{bmatrix}$$

29

Da e-frame a n-frame

La trasformazione può essere ricavata dalle coordinate geografiche (lat. φ , long. λ , alt. ellissoidica h) del punto di navigazione, a partire dalle equazioni parametriche dell'ellissoide ad altezza ellissoidica h :

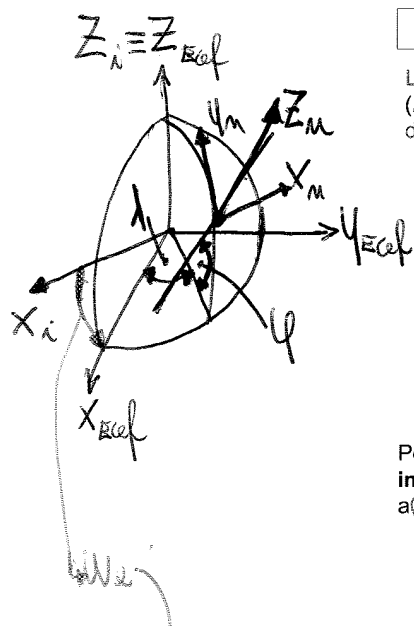
$$\begin{cases} X_0 = (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ Y_0 = (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ Z_0 = [N(1-e^2)+h]\sin\varphi \end{cases} \quad \text{con:} \quad N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_c - X_0 \\ Y_c - Y_0 \\ Z_c - Z_0 \end{pmatrix}$$

Per le relazioni inverse, da n-frame a b-frame:

$$\begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

30

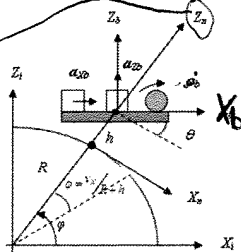


$X_n - Y_n - Z_n$ del disegno subito ☺

Equazioni di navigazione 2D in un sistema n-frame

Esprimiamo le equazioni precedenti nel sistema di navigazione, con ipotesi di Terra sferica (normale e verticale coincidono).

- Veicolo vincolato in un piano meridiano $X_i Z_i$ e vincolato alla verticale locale;
- Sistema *strapdown* con 2 accelerometri e 1 giroscopio.



La velocità angolare del veicolo sarà: $\dot{\varphi} = \frac{v_x}{R+h}$

Ora però l'angolo d'assetto θ misurato dal giroscopio, è **modificato** per la **rotazione** del sistema locale rispetto a SI:

$$\dot{\theta} = \omega_b - \dot{\varphi} = \omega_b - \frac{v_x}{R+h} \Rightarrow \theta = \int \dot{\theta} dt$$

portiamo le **accelerazioni «specifiche»** misurate, nel sistema di navigazione:

$$\begin{pmatrix} a_{x_n} \\ a_{z_n} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{x_b} \\ a_{z_b} \end{pmatrix}$$

34

Equazioni di navigazione 2D in un sistema n-frame

Per le **accelerazioni «vere»** in n-frame, togliamo da quelle inerziali (a) l'accelerazione di Coriolis e g nella sola componente verticale Z_n :

$$a_C = 2\omega \times v = 2\omega v = 2 \frac{v_x}{R+h} v$$

$$\dot{v}_{x_n} = a_{x_n} - 2 \frac{v_x^2}{R+h}$$

$$\dot{v}_{z_n} = a_{z_n} - 2 \frac{v_x v_z}{R+h} \quad (g)$$

Integriamo per la **velocità**:

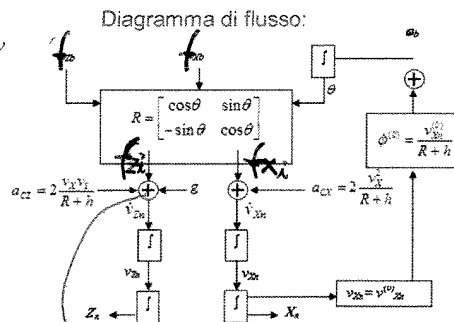
$$v_{x_i} = \int \dot{v}_{x_n} dt = \dot{X}_i$$

$$v_{z_i} = \int \dot{v}_{z_n} dt = \dot{Z}_i$$

e integriamo ancora per la **posizione**:

$$X_i = \int v_{x_i} dt$$

$$Z_i = \int v_{z_i} dt$$



Correggiamo con

35

Cenni su navigazione 3D

Da 2D a 3D aumenta la complessità delle equazioni ma con simile ragionamento. All'**accelerazione misurata** nel sistema *body* va sommato g per ottenere le **accelerazioni del moto**. Sia r il vettore posizione del punto nel sistema inerziale:

$$\dot{v}_i = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \Big|_i = \vec{f} + \vec{g}$$

consideriamo l'accelerazione di Coriolis nel sistema di navigazione, «rotante» rispetto a quello inerziale.

L'accelerazione è sempre misurata ne sistema *body* e andrà fatto un cambio di sistema di riferimento, con una matrice di rotazione R:

$$a^i = R^i_h f^h$$

Integriamo poi una volta per stima della **velocità**: $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_i$

E infine una seconda volta per la stima della **posizione**.

36

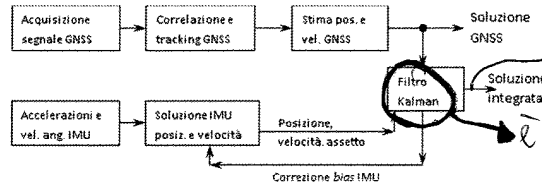
La forza di gravità agisce solo in direzione Z

Vediamo i vari accoppiamenti che possiamo avere tra GPS e INERZIALE:

Accoppiamento «libero» (loosely coupled integration)

- GNSS e IMU funzionano autonomamente e forniscono entrambi la stima di posizione e velocità
- le differenze entrano in un filtro di Kalman che stima la soluzione di navigazione e un modello d'errore per le successive epoche IMU

Abbiamo non i dati grezzi, ma già la soluzione



Il filtro di Kalman esce fuori la soluzione integrata. È già integrato all'interno dei nostri strumenti.

- Accoppiamento realizzabile semplicemente
- Funziona solo con soluzione autonoma GPS (4 satelliti)
- Corretta matrice varianza covarianza posizioni per corretta pesatura delle equazioni d'osservazione

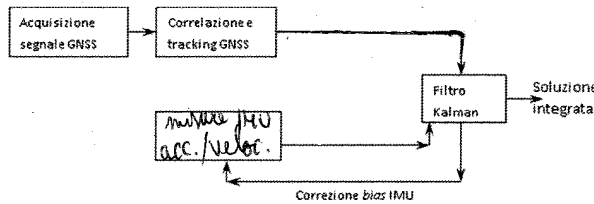
È il modo più semplice, ma non il modo più rapido.

40

Accoppiamento «stretto» (tightly coupled integration)

- Misure di pseudorange e di fase GNSS compensate con accelerazioni e velocità angolari IMU, con un filtro di Kalman, per la stima di posizione assetti e velocità.

Abbiamo noi acquistiamo le misure ~~grezze~~ grezze



Vedi pag. 43

- Maggior affidabilità e robustezza
- Non richiede la matrice di varianza covarianza posizione GNSS
- GNSS di ausilio alla navigazione anche senza soluzione autonoma
- Maggior complessità di calcolo e integrazione

41

Applicazioni: i Mobile Mapping Systems (MMS)

- Un Sistema di Rilevamento Mobile (MMS - Mobile Mapping System) è un veicolo che viene solitamente impiegato per integrare le informazioni acquisite da sensori differenti relative alle strade e a ciò che le circonda.
- I primi studi per la realizzazione di un tale veicolo sono stati condotti in Canada negli anni Ottanta (Mobile Highway Inventory System - MHIS).
- Ad oggi, si contano ormai più di un centinaio di sistemi MMS nel mondo, sviluppati per le più varie applicazioni e in particolare:
 - catasto stradale, GIS urbani: misura delle grandezze geometriche della strada
 - manutenzione e sicurezza stradale: stato della superficie stradale censimento della segnaletica orizzontale e verticale

42

Questo processo prende il ~~nome~~ ^(punto 2)) nome di PREVISIONE.
 es: moto rettilineo uniforme

$$\begin{cases} X_k = X_{k-1} + \underbrace{\dot{X}_{k-1} \cdot t}_{\text{vel. per tempo}} + \epsilon_x \\ \dot{X}_k = \dot{X}_{k-1} + \epsilon_{\dot{x}} \end{cases}$$

→ errori delle eq. di stato

la matrice di transizione sarà:

$$\begin{pmatrix} X_k \\ \dot{X}_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{matrice } F_{k-1}} \begin{pmatrix} X_{k-1} \\ \dot{X}_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_{\dot{x}} \end{pmatrix}$$

↑
 vettore di stato che contiene le incognite

matrice F_{k-1}

ipotizzando un altro tipo di moto poter ricavare la relativa matrice F .

2) Conversione in base alla misura b_k

$$A_k X_k = b_k + e_k$$

della
errore/misura

Partiamo da una misura iniziale:

$$A_0 X_0 = b_0 + e_0$$

errore dell'equaz. di stato: facendo un'ipotesi di moto, ho che anche tale ipotesi sarà soggetta ad errore.

$$X_1 = F_0 X_0 + \epsilon_0 \quad \text{è la previsione.}$$

La misura vera mi permette di risolvere per

$$A_1 X_1 = b_1 + e_1 \quad \text{è la correzione}$$

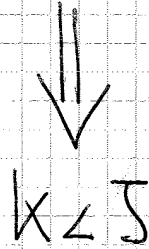
$$X_2 = F_1 X_1 + \epsilon_1$$

avuta la misura 2 →

$$A_2 X_2 = b_2 + e_2$$

!

SMOOTHING: X tiene conto di tutte le misure



Ma tempo reale posso fare solo il filtering (ho solo le misure precedenti, non quelle dopo). Quando torno a casa posso fare lo smoothing.

Per la post-elaborazione non ci serve il filtro di Kalman, per il tempo reale si.

Consideriamo il calcolo sequenziale basandoci proprio sul procedimento di filtering e considerando il FILTRO DI KALMAN:

1) Predizione:

$$X_{k|k-1} = F_{k-1} X_{k-1|k-1} + \epsilon_k$$

è un X previsto (perché voglio X_k usando $k-1$ misure)

vuol dire che è un X corretto (perché ho usato tutte le misure disponibili)

Predizione matrice dei cofattori $Q_{xx} = N^{-1}$. La otteniamo propagando:

$$N_{k|k-1}^{-1} = F_{k-1} Q_{xx} N_{k-1|k-1}^{-1} F_{k-1}^T + Q_{\epsilon\epsilon}$$

2) Calcolo matrice di Kalman: $K = N^{-1} A^T P$

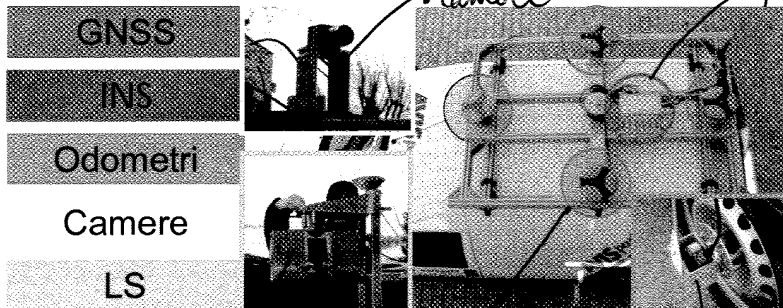
$$K_k = N_{k|k-1}^{-1} A_k^T (A_k N_{k|k-1}^{-1} A_k^T + Q_{\epsilon\epsilon})^{-1}$$

perché se che misura ho all'epoca k

perché è un peso

Sensori in un Mobile Mapping Systems

- MMS progettati per acquisire dati in continuo, ad una velocità di circa 50-80 km/h.
- La georeferenziazione dei dati (ovvero, l'attribuzione per ciascuna grandezza misurata, dell'esatta posizione rispetto ad un sistema di riferimento predefinito) avviene con:



Laser a Ramanone

GNSS

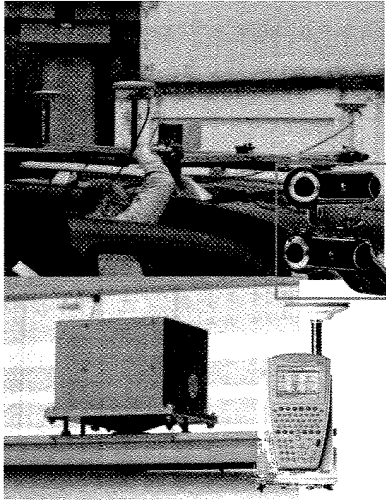
odometri 43

ESEMPI DI MOBILE MAPPING SYSTEMS



44

MMS sperimentale POLITO



3 ricevitori GNSS doppia frequenza → determinare posizione e assetti autonomamente

precisione posizione antenne GNSS $\sigma = \pm 2$ cm e una distanza fra le antenne di 180 cm

→ precisione di ± 15 cm a 10 m

In assenza segnale GNSS → posizione e assetti con misure da accelerometri e giroscopi IMU.

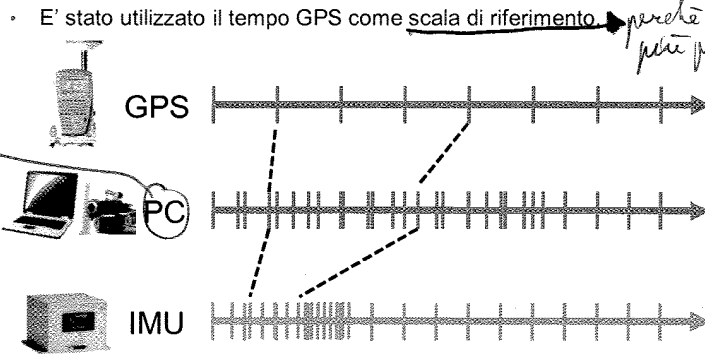
Importante la calibrazione del sensore, tanto più esso è a basso costo.

45

131

Sincronizzazione tra i sensori

- L'integrazione di sensori diversi è collegata alla sincronizzazione temporale: le misure di ciascun sensore devono poter essere associate ad un unico riferimento temporale.



ha un suo orologio che non ha nulla a che vedere con l'orologio GPS.

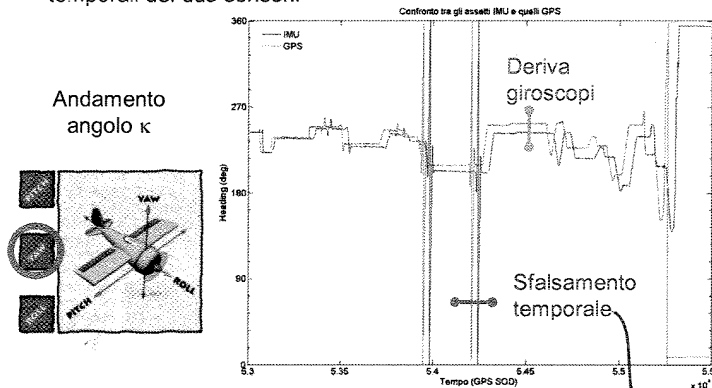
perché è la scala più precisa fra tutte.

*Scale temporali non sincronizzate
↓
bisogna sincronizzare tutto.*

49

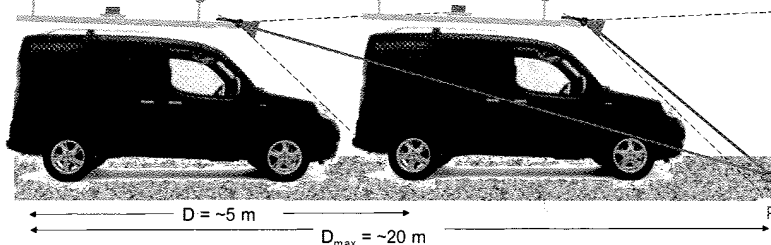
Problemi di sincronizzazione tra i sensori

Nell'integrazione tra IMU e GNSS occorre considerare due diversi sfalsamenti: uno legato alla misura degli assetti, e dovuto alla deriva dei giroscopi, e l'altro legato allo sfalsamento tra i sistemi di riferimento temporali dei due sensori.



le due linee verticali non sono sovrapposte a causa dello sfalsamento temporale

Acquisizione con MMS

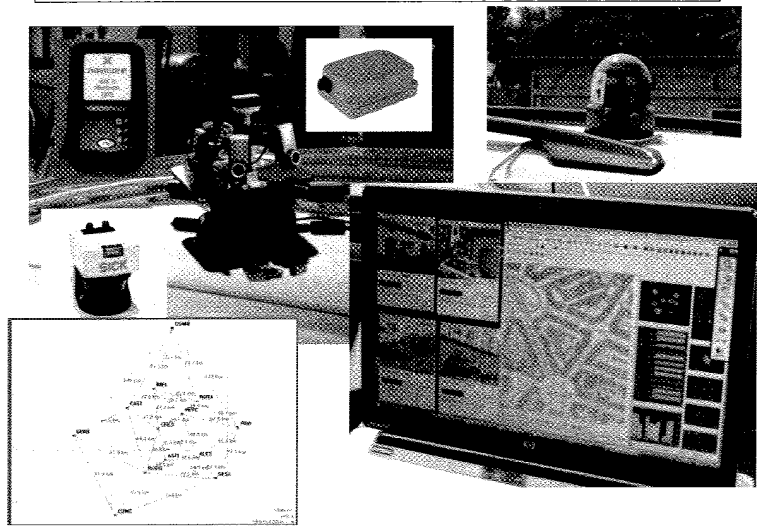


- $V=50$ Km/h circa 14 m/s
- Frequenza telecamera $4-5$ Hz
- in media 1 fotogramma ogni circa 3 m
- Considerando una massima distanza di circa 15 m (con 10 m di sovrapposizione), ogni punto viene descritto da almeno 4 immagini
- Noti i parametri d'orientamento \rightarrow eq. Collinearità nelle 3 incognite (E_p, N_p, Q_p) da risolvere minimi quadrati

54

134

GEOMATICA e rilievo integrato, anche a basso costo

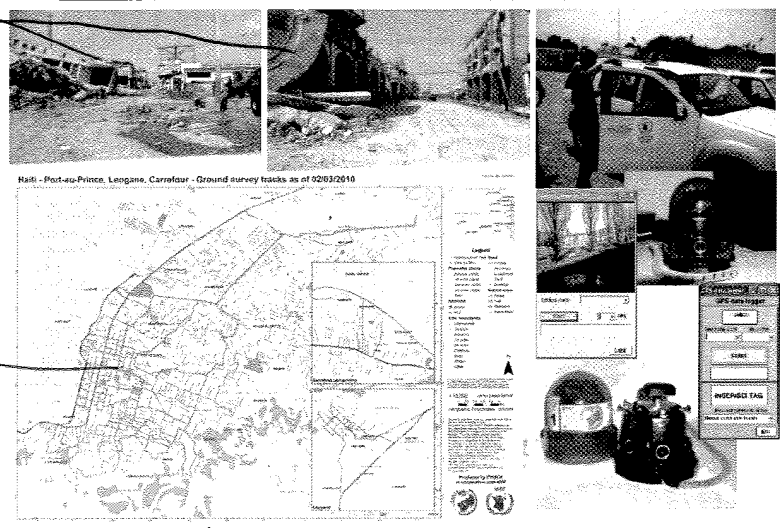


dunque rilievo non troppo preciso, ma veloce => utile per applicazioni di emergenza.

55

Geomatica e rilievo integrato in casi d'emergenza

Foto scattate con le webcam poco dopo il terremoto di Haiti.



Apparture fatte in pochissimi gg (non è precisissima, ma ci serve per capire le vie libere o quelle occupate per poter portare soccorso).

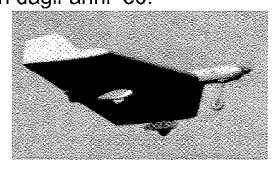
56

Applicazioni: gli UAV

Gli UAV (*Unmanned Aerial Vehicles*), comunemente detti droni, sono velivoli senza pilota impiegati per scopi militari fin dagli anni '60.

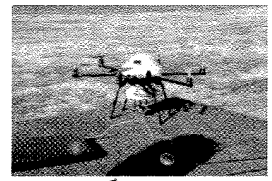
I vantaggi principali di tali velivoli sono:

- Assenza di personale a bordo
- Quote di volo molto basse
- Leggerzza e portabilità



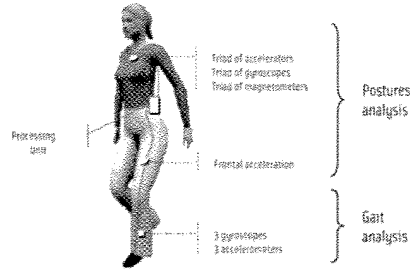
Negli ultimi anni, accanto agli scopi militari si stanno sviluppando anche per scopi civili.

- Gli UAV possono essere controllati da remoto, ad esempio da terra, oppure possono seguire una rotta prestabilita mediante un autopilota.
- Il "cuore" dell'autopilota è basato proprio sull'integrazione tra GNSS ed IMU, per il controllo automatico, in tempo reale, del velivolo.

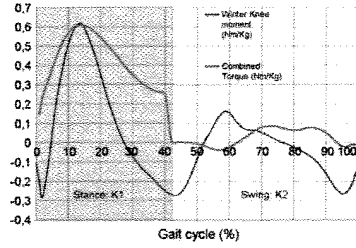


57

Studi medici #1 Studio e monitoraggio della corretta postura...



Studi medici #2 ...e progetto di protesi artificiali per le gambe



64

Sommario:

1. Introduzione	3
2. Richiami su principi fisici	4
2.1. Quantità di moto	4
2.2. Momento della quantità di moto o momento angolare.....	4
2.3. Forza di Coriolis	6
3. Il giroscopio meccanico.....	6
3.1. Descrizione matematica del moto di precessione: legge del giroscopio... 8	
3.2. La girobussola.....	11
4. Il giroscopio ottico	14
5. Accelerometri.....	15
6. Magnetometri.....	17
7. I sensori inerziali	18
7.1. Il calcolo della posizione con IMU	19
7.2. I bias negli IMU.....	21
8. Principi di navigazione inerziale.....	24
8.1. Sistemi di riferimento	24
8.2. La navigazione in un sistema fisso “i-frame”– un caso 2D	29
8.3. La navigazione in un sistema locale “n-frame”– un caso 2D	31
8.4. La navigazione 3D.....	33
9. La navigazione geodetica integrata	34
9.1. Principi di base	35
9.2. Cenni sull’uso del filtro di Kalman.....	36
9.3. Integrazione tra GNSS e IMU.....	40
10. Esempi strumentali e applicazioni.....	43
Bibliografia	49

2. Richiami su principi fisici

Prima di addentrarci nel funzionamento di accelerometri e giroscopi, strumenti che costituiscono le piattaforme inerziali, un breve richiamo dei principi fisici su cui si basano tali misure.

2.1. Quantità di moto

È una grandezza vettoriale che misura la capacità di un corpo di interagire dinamicamente con altri corpi. Un punto di massa m con velocità \vec{v} , ha una quantità di moto \vec{Q} pari a:

$$\vec{Q} = m\vec{v} \quad (1)$$

Con n punti, la quantità di moto del sistema è:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n \vec{Q}_i \quad (2)$$

Nella meccanica classica, la quantità di moto è correlata al secondo principio della dinamica: la forza è proporzionale alla rapidità con cui varia la quantità di moto. Nell'ipotesi di massa costante, la variazione nel tempo della quantità di moto è:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \quad (3)$$

Nella meccanica relativistica, indicando con c la velocità della luce, la quantità di moto sarà espressa da:

$$\vec{Q} = \gamma m \vec{v} \quad (4)$$

con γ fattore di Lorenz e v modulo della velocità:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5)$$

2.2. Momento della quantità di moto o momento angolare

È legato alle rotazioni nello spazio. Costituisce l'equivalente per le rotazioni della quantità di moto per le traslazioni. Il momento angolare \vec{L} di un punto di massa m , rispetto ad un polo Ω , è il prodotto vettoriale del vettore posizione \vec{r} rispetto a Ω e del vettore quantità di moto \vec{Q} (Figura 1):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{Q} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (6)$$

Con n punti componenti il sistema, il momento angolare totale sarà:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i \quad (7)$$

Il momento angolare \vec{L} può anche essere espresso come il prodotto del momento d'inerzia I per la velocità angolare $\vec{\omega}$. Ricordando infatti che $\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$ possiamo scrivere:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v} = \vec{r}^2 m \times \vec{\omega} = I \vec{\omega} \tag{11}$$

La variazione nel tempo del momento angolare dipende allora dall'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha} \tag{12}$$

2.3. Forza di Coriolis

Scoperta da Gaspard Coriolis (1835), è una forza apparente (\vec{F}_C) a cui è soggetto un corpo che si muove con velocità v , osservato da un sistema di riferimento in moto circolare con velocità angolare ω rispetto ad un sistema inerziale (S/I). Essa è data da:

$$\vec{F}_C = m \vec{a}_C = 2m \vec{\omega} \times \vec{v} \tag{13}$$

Un esempio è dato da un disco rotante su cui si muove un corpo C a velocità v , con un osservatore posto in O . Se nel sistema inerziale C si muove con traiettoria rettilinea (Figura 2) vista dall'osservatore inerziale, C è visto con traiettoria curvilinea da un osservatore in O , rotante rispetto al sistema inerziale (Figura 3). L'accelerazione di Coriolis è utile per esprimere le forze in diversi sistemi di riferimento.

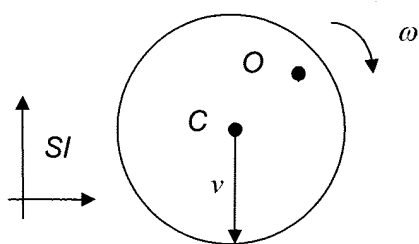


Figura 2 – traiettoria nel sistema inerziale

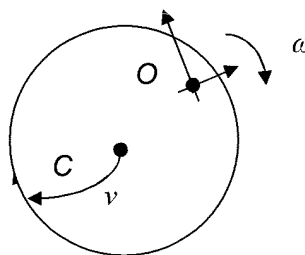


Figura 3 – traiettoria nel sistema rotante

Applichiamo questi principi fisici ad un primo strumento su cui si basano le misure inerziali: il giroscopio.

3. Il giroscopio meccanico

È uno strumento in grado di misurare la velocità angolare ed è utilizzato nelle misure inerziali. Ne esistono di vari tipi, ma in queste dispense tratteremo i principi fondamentali di quello meccanico e di quello ottico.

e può essere visto come una “difesa” del giroscopio nei confronti della forza o coppia perturbatrice. La precessione del giroscopio è dunque la rotazione del giunto cardanico nel sistema inerziale, per effetto di una coppia perturbatrice. Il giroscopio cerca infatti la sua posizione di equilibrio, portando il suo asse di *spin* perpendicolare al piano della coppia perturbatrice. Raggiunta questa posizione la precessione cessa e la forza che non ha più componenti devianti contribuisce ad accelerare il moto del disco. Possiamo allora dire che:

- con una coppia in input \vec{C}_Z , il giroscopio precessa con una rotazione intorno all'asse Y ;
- con una coppia in input \vec{C}_Y , il giroscopio precessa con una rotazione intorno all'asse Z .

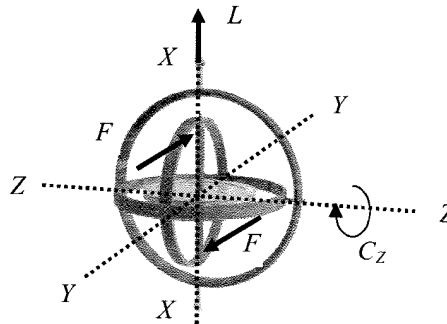


Figura 6 – assi del giroscopio e sollecitazione dell'asse di spin con una coppia C_Z causata dalle forze F (immagine tratta di Wikipedia e integrata)

Naturalmente rispetto al modello ideale, possono esistere fenomeni di “deriva giroscopica”. Essi sono precessioni indesiderate intorno agli assi Z e Y , generalmente di lieve entità, per imperfezioni costruttive, attriti, disallineamento degli assi. Ciò causa errori nelle misure giroscopiche. In tutti i casi, in un giroscopio possiamo misurare:

- la velocità angolare della rotazione dell'asse di *spin* durante la precessione: questa tipologia di giroscopio prende il nome di “*strapdown*”;
- la velocità di rotazione del supporto cardanico, da parte di un servomotore, per mantenere l'asse di *spin* nella posizione costante. Questa tipologia prende il nome di “*gimbaled*”.

Torneremo più avanti sulle tipologie strapdown e gimbaled; ora cerchiamo ora di dare una descrizione matematica del moto di precessione.

3.1. Descrizione matematica del moto di precessione: legge del giroscopio

Il funzionamento del giroscopio non è intuitivo ma può essere spiegato attraverso il principio di conservazione del momento della quantità di moto. Appliciamo allora all'asse di *spin* 2 forze F : il vettore della coppia sarà diretto secondo l'asse Y

La variazione $\delta\vec{L}$, rappresentata dal vettore AB, sarà:

$$\delta\vec{L} = (L + \delta L)\vec{b} - L\vec{a} = L(\vec{b} - \vec{a}) + \delta L\vec{b} \quad (15)$$

Ma $\vec{b} - \vec{a} = \omega \delta t (\vec{c} \times \vec{a})$ per cui:

$$\delta\vec{L} = L \omega \delta t (\vec{c} \times \vec{a}) + \delta L \vec{b} \quad (16)$$

La variazione nel tempo del momento angolare sarà:

$$\frac{\delta\vec{L}}{\delta t} = L\omega(\vec{c} \times \vec{a}) + \frac{\delta L}{\delta t} \vec{b} = \vec{\omega} \times \vec{L} + \frac{\delta L}{\delta t} \vec{b} \quad (17)$$

Ricordando che $\frac{\delta\vec{L}}{\delta t} = \vec{C}$ coppia perturbatrice, avremo:

$$\vec{C} = \vec{\omega} \times \vec{L} + \frac{\delta L}{\delta t} \vec{b} \quad (18)$$

La componente secondo \vec{b} va ad accrescere la rotazione del disco: stante le alte velocità di rotazione il suo effetto è generalmente trascurabile. La componente perpendicolare all'asse di *spin* fa nascere la velocità di precessione ω , perpendicolare alla coppia e all'asse di *spin*. Trascurando allora la componente secondo l'asse di *spin* si ha allora:

$$\vec{C} = \vec{\omega} \times \vec{L} \quad \text{con modulo } |\vec{C}| = \omega L \quad (19)$$

Ricordando infine dalla (11) che $\vec{L} = I\vec{\omega}_g$, possiamo stabilire la:

$$\omega = \frac{C}{I\omega_g} \quad (20)$$

che lega la velocità angolare di precessione ω con la velocità del giroscopio ω_g , il momento d'inerzia I e la coppia perturbatrice C . Questa relazione è anche nota come "legge del giroscopio".

Il principio della precessione permette di misurare con accuratezza le velocità angolari e gli angoli di rotazione, come integrazione delle velocità angolari nel tempo. Quando il rotore è in moto e il giroscopio è sospeso su giunti cardanici, esso mantiene l'asse di *spin* nella medesima direzione e anche ruotando l'involucro cardanico non si altera tale direzione. In alternativa, se applichiamo una coppia torcente al rotore per mantenere l'asse di *spin* allineato ad una direzione definita dallo strumento, la misura di questa coppia fornisce la velocità angolare dello strumento e quindi del corpo a cui è solidale. Si noti che quando si applica una coppia al rotore, che reagisce "precedendo", ciò equivale ad una coppia eguale ed opposta dal rotore al meccanismo. Possiamo allora misurare la precessione del rotore (configurazione *gimbaled*) oppure la coppia sul meccanismo per mantenere l'asse di *spin* nella stessa direzione (configurazione

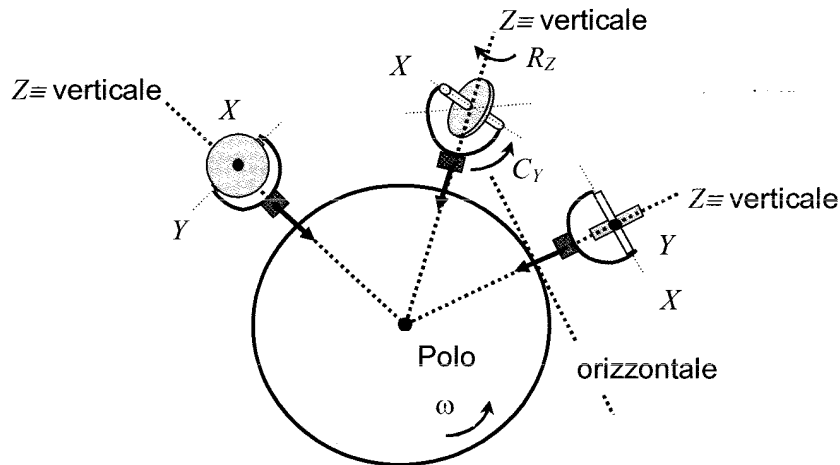


Figura 10 – giroscopio, nel piano equatoriale, con asse Z vincolato alla verticale. La coppia torcente C_Y data dal vincolo porta il giroscopio a reagire con una coppia C_Z e a precedere intorno a Z, ponendo l'asse X di spin in direzione nord-sud

In questo modo l'asse X si pone nella direzione dell'asse di rotazione terrestre. Questo perché il giroscopio, forzato sulla verticale, altro non può fare che "precedere" fino alla posizione di equilibrio nord-sud.

Naturalmente la coppia perturbante è massima all'equatore e nulla ai poli, dove non esistono variazioni della verticale per rotazione: in questa situazione il giroscopio non può funzionare. Ad una latitudine φ la posizione di equilibrio sarà sempre in direzione nord-sud. Possiamo però far apprezzare alla girobussola la componente orizzontale della rotazione terrestre. La velocità angolare può infatti essere scomposta secondo una direzione nord-sud $\omega_1 = \omega \cos \varphi$ ed una verticale $\omega_2 = \omega \sin \varphi$ (Figura 11). Se il giroscopio è vincolato in altezza, tramite un filo che lo sostiene secondo la verticale (filo di torsione) possiamo considerare la sola componente nord-sud e la coppia perturbante sarà:

$$C = I \omega_g \omega_1 = I \omega_g \omega \cos \varphi \quad \text{da cui} \quad \omega = \frac{C}{I \omega_g \cos \varphi} \quad (21)$$

Apprezziamo quindi la velocità di rotazione terrestre, nota la latitudine del punto.

4. Il giroscopio ottico

Questo tipo di strumento è anche detto FOG (*Fiber Optic Gyroscope*) e può essere realizzato in dimensioni estremamente ridotte con tecnologia MEMS (*Micro Electro Mechanical System*). Il principio si basa sull'effetto relativistico di Sagnac, noto già dal 1913.

Consideriamo una spira circolare di fibra ottica, in rotazione ad una velocità ω in un sistema di riferimento inerziale. Nella stessa direzione di rotazione si propaghi un segnale luminoso di intensità $E(t_0)$. Esso viene raccolto da un sensore solidale alla fibra dopo un giro intero, ovvero dopo un angolo $\theta' = 2\pi$, visto da un osservatore solidale alla fibra rotante. Un osservatore solidale al sistema inerziale però riceverà lo stesso segnale dopo un angolo $\theta = 2\pi + \Delta\theta$, a causa della rotazione della fibra dell'angolo $\Delta\theta = \omega\Delta t$, con Δt tempo impiegato dal segnale luminoso per un giro completo nella fibra (*Figura 13*).

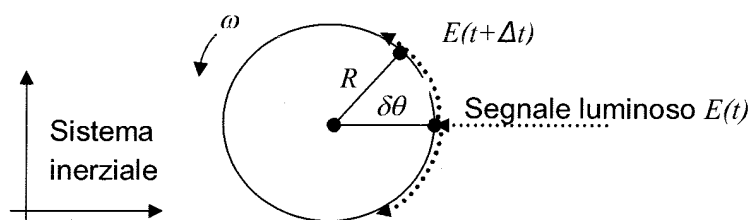


Figura 13 – schema di giroscopio, costituito da una fibra ottica rotante percorsa nei due sensi opposti da un segnale luminoso

La differenza angolare con cui si percepisce un segnale dopo un giro della fibra sarà dunque differente per i due osservatori del valore:

$$\Delta\theta = \theta_{\text{OsservatoreInerziale}} - \theta'_{\text{osservatore solidale alla fibra}} \quad (22)$$

In termini differenziali possiamo scrivere:

$$d\theta' = d\theta - \delta\theta = d\theta - \omega dt \quad (23)$$

Ma il percorso $Rd\theta$ del segnale luminoso è visto dall'osservatore inerziale, alla velocità c della luce:

$$c = \frac{Rd\theta}{dt} \quad \text{da cui} \quad dt = \frac{Rd\theta}{c} \quad (24)$$

che sostituite nelle (23) portano alla:

$$d\theta' = d\theta - \omega \frac{Rd\theta}{c} = \left(1 - \frac{\omega R}{c}\right) d\theta \quad (25)$$

Questo in quanto, ponendo un accelerometro su di un piano soggetto alla forza di gravità g , la massa di prova è attratta verso il basso e l'output dell'accelerometro è di segno opposto all'accelerazione locale. A titolo di esempio osserviamo la misura di un accelerometro nelle due posizioni:

- fermo su di un tavolo: $a = 0$ e $f = -g$;
- in caduta libera nel vuoto: $a = g$ e $f = 0$.

Osservando l'equazione (30) si comprende come occorra separare le due componenti (gravità e moto) per calcolare l'ascissa curvilinea con un procedimento di doppia integrazione. Ciò avviene all'interno dello strumento correggendo la misura con un modello gravitazionale noto a priori.

Esistono vari tipi di accelerometri, anche in versione MEMS. Limitiamoci a fornire il concetto di funzionamento dell'accelerometro meccanico. Esso è uno strumento costituito da una "massa di prova" m vincolata ad uno chassis per mezzo di una molla. Lo chassis vincola la massa m a muoversi in una direzione X .

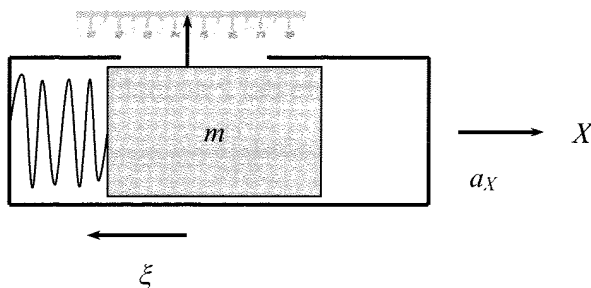


Figura 14 – schema di un accelerometro meccanico

Quando lo strumento (o il mezzo al quale è vincolato) subisce una accelerazione a_X lungo X , si crea una forza $F=ma_X$ che tende a comprimere la molla di un valore ξ , proporzionale alla F per mezzo della costante K della molla:

$$F = ma_X = K\xi \Rightarrow \xi = \frac{a_X}{\frac{K}{m}} = \frac{a_X}{\omega_0^2} \quad (31)$$

con $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ valore caratteristico dell'accelerometro. Lo spostamento ξ misura su di una apposita scala l'accelerazione secondo una direzione. Può però essere preferibile non misurare tale spostamento ma, come questo avviene, fornire con un servomotore la reazione opposta per riportare istantaneamente la massa nella posizione iniziale. In pratica la massa non si sposta ma varia la reazione nella molla: la misura della sua tensione è proporzionale alla forza specifica che agisce sulla massa.

7. I sensori inerziali

Sono generalmente costituiti da una terna di accelerometri e di giroscopi, solidali ad una piattaforma e disposti lungo gli assi di un sistema cartesiano ortogonale (*Figura 15*). Possono esserci schemi anche con meno sensori o sensori ridondanti e con la presenza di magnetometri. La disposizione degli accelerometri e dei giroscopi sui tre assi costituisce in pratica la definizione di un sistema di riferimento strumentale che chiameremo "body" o anche "b-frame". Esso andrà correlato sia con i sistemi locali nei quali si effettua la navigazione sia con i sistemi globali: tali definizioni e trasformazioni saranno affrontate al capitolo successivo.

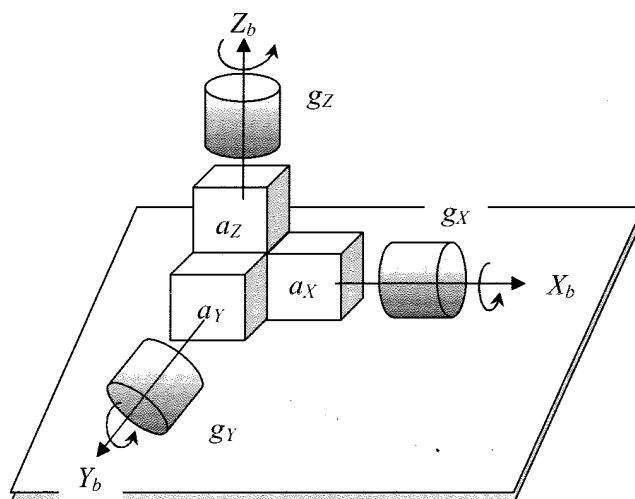


Figura 15 – accelerometri (a) e giroscopi (g) nel sistema strumentale "body"

I sensori inerziali possono essere classificati in base ai dati che forniscono e alla capacità di una loro elaborazione all'interno dello strumento stesso. Parleremo allora di:

- **ISA (Inertial Sensor Assembly)**: fornisce i dati grezzi di accelerazione e velocità angolare;
- **IMU (Inertial Measurement Unit)**: i dati grezzi sono compensati degli errori sistematici (bias) di misura;
- **INS (Inertial Navigation System)**: forniscono direttamente la stima della posizione e assetto, mediante un processamento dei dati grezzi con algoritmi di navigazione.

Essi possono anche essere classificati in base alla tipologia costruttiva: le due fondamentali sono (*Figura 16*):

1. **gimbaled**: la piattaforma su cui sono montati i sensori è isolata meccanicamente, con giunti cardanici, dal moto rotante del veicolo in movimento. In questo caso la terna di accelerometri è sospesa mediante

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{X}(\tau) d\tau = X(t_0) + \frac{1}{2} \ddot{X}(t_0)(t-t_0)^2 \quad (33)$$

Naturalmente prima di eseguire l'integrazione è necessario scindere dalla misura dell'accelerometro la componente dell'accelerazione di gravità per integrare solo l'accelerazione nella componente del moto.

Estendiamo il caso monodimensionale ad un caso bidimensionale: per ottenere la stima della posizione occorre sempre che le accelerazioni siano nello stesso sistema di riferimento (e, n) nel quale si descrive il moto. Analizziamo le due configurazioni *gimbaled* e *strapdown*.

- Soluzione “meccanica” (*gimbaled*): grazie alle misure dei giroscopi gli accelerometri sono posizionati con servomotori direttamente nel sistema inerziale dove avviene la soluzione della posizione (*Figura 17*):

$$\begin{aligned} e &= e_0 + \iint a_x dt = e_0 + \frac{1}{2} a_x (t-t_0)^2 \\ n &= n_0 + \iint a_y dt = n_0 + \frac{1}{2} a_y (t-t_0)^2 \end{aligned} \quad (34)$$

- Soluzione “analitica” (*strapdown*): il sensore è vincolato al veicolo e occorre conoscere gli assetti degli accelerometri per portarli dal sistema body al sistema nel quale si descrive il moto. Ciò è possibile determinando l'angolo di assetto A per mezzo delle velocità angolari dei giroscopi (*Figura 18*):

$$\begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 \\ n_0 \end{pmatrix} + \iint \begin{bmatrix} \cos A & \sin A \\ -\sin A & \cos A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} dt \quad (35)$$

Ricordiamo che le velocità angolari del giroscopio sono date in un sistema inerziale: le loro integrazioni consentono la misura istantanea della variazione di assetto in questo sistema.

Categoria	Bias		Applicazioni derivate e costi indicativi:
	Accelerometri [mg]	Giroscopi [°/ora]	
Marine grade	0.01	0.001	Navali, sottomarini, veicoli spaziali. Deriva: entro 1 miglio/giorno Costo: > 1M€.
Aviation grade	0.03 - 0.1	0.01	Veicoli militari, velivoli civili. Deriva circa 1 miglio/ora Costo: > 100 k€
Intermediate grade	0.1 - 1	0.1	Piccoli velivoli, elicotteri. Deriva circa 10 miglia/ora Costo: 20 – 50 k€
Tactical grade	1-10	1 – 100	Droni UAV, MMV (<i>Mobile Mapping System</i>) Soluzione di navigazione valida pochi minuti → indispensabile integrazione con GNSS Costo: 5-20 k€
Automotive grade	>10	>100	Industria automobilistica (ABS). Hanno ridottissime dimensioni. Costo: da pochi € a poche centinaia di €

Tabella 1 – classificazione IMU in base ai bias

Analizziamo ora gli effetti dei *bias* degli accelerometri e dei giroscopi “non compensati” sulla stima della posizione.

Per quanto riguarda gli **accelerometri**, consideriamo un caso monodimensionale per semplicità. Sia allora a l'accelerazione misurata, somma dell'accelerazione effettiva \ddot{X} e del bias b_a . Con una prima integrazione otterremo la velocità:

$$v = \int a dt = \int (\ddot{X} + b_a) dt = \dot{X} + b_a t \quad (36)$$

con una seconda integrazione si avrà la posizione nel sistema monodimensionale:

$$X = \int v dt = \int (\dot{X} + b_a t) dt = \int \dot{X} dt + \int b_a t dt = X + \frac{1}{2} b_a t^2 \quad (37)$$

Ci accorgiamo che un *bias* sulle accelerazioni produce un *bias* proporzionale al tempo sulle velocità e proporzionale al quadrato del tempo sulla posizione.

Come influisce sulla posizione un *bias* non compensato dei **giroscopi**?

L'errore $\delta\theta$ sull'angolo di assetto sarà proporzionale al tempo intercorso dalla posizione iniziale: $\delta\theta = b_g t$. Esso si ripercuote sull'accelerometro, del quale fornisce una errata direzione di proiezione. Ciò provoca un errore \ddot{X}_g nella misura dell'accelerometro, legato principalmente alla rotazione del vettore g (Figura 19).

possono essere introdotti nel *software* di trattamento per eseguire le correzioni necessarie (

Figura 21).

	Accelerometers			Rate Gyros			Magnetometers		
Offset	33198	33183	32387	31615	33592	32469	32470	33110	31956
Gain	418	418	417	4555	4451	4446	6770	6703	6763
Misalignment	1.00	0.00	0.00	1.00	-0.01	0.02	1.00	-0.00	-0.05
	0.00	1.00	0.01	0.01	1.00	0.00	0.02	1.00	0.05
	-0.02	0.01	1.00	-0.01	-0.00	1.00	-0.07	-0.02	1.00

Figura 21 – valori di calibrazione in un IMU di categoria automotive. I valori sono relativi agli accelerometri (accelerometers), giroscopi (rate Gyros) e magnetometri (magnetometers)

8. Principi di navigazione inerziale

Le equazioni di navigazione fanno parte della meccanica e possono essere scritte in vari sistemi di riferimento. Un sistema può essere quello inerziale oppure il sistema di navigazione che si origina dalla posizione istantanea del sensore solidale al veicolo. La scelta del sistema di riferimento condiziona la scrittura delle equazioni: occorre allora definirli e analizzare le procedure per il calcolo della trasformazione di coordinate.

8.1. Sistemi di riferimento

Sono fondamentali nel posizionamento inerziale. Quelli che analizzeremo sono tutti sistemi cartesiano ortogonali destrorsi. Essi devono essere messi in relazione fra loro per trasformare in sistemi coerenti le coordinate rilevate nel sistema strumentale, con quelle inerziali e quelle dei sistemi geodetici globali. Quelli che verranno utilizzati sono:

- Sistema di riferimento inerziale o *i-frame*: si origina nel centro della Terra ed è senza rotazioni rispetto alle stelle fisse. Z_i è l'asse polare terrestre, X_i è l'intersezione dell'eclittica con il piano equatoriale (V è detto "punto vernale") e Y_i completa la terna destrorsa.
- Sistema di riferimento terrestre o *e-frame*: solidale alla Terra, centrato nel centro di massa. L'asse Z_e è l'asse di rotazione terrestre per un polo medio convenzionale, X_e è intersezione tra il piano equatoriale e il meridiano di Greenwich e Y_e completa la terna destrorsa. Tale sistema è in rotazione alla

approcciare il problema matematico delle rotazioni, il contenuto delle matrici derivate è identico. Tra questi approcci particolare ricordiamo:

- **coseni direttori:** raccolti in una matrice R di dimensioni 3×3 , le cui colonne rappresentano i versori nel sistema *body*, proiettati sugli assi dell'altro sistema di riferimento. Nel caso di proiezione dal sistema *body* a quello di navigazione la matrice dei coseni direttori è rappresentata con:

$$R_b^n = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (41)$$

e la trasformazione tra i due sistemi di un vettore r avverrà con la seguente relazione:

$$r^n = R_b^n r^b \quad (42)$$

- **Angoli di Eulero:** tre successive rotazioni intorno agli assi del sistema *body* per allinearli all'altro sistema di riferimento. In particolare chiameremo:
 - Ω = rollio ovvero, rotazione intorno all'asse X ;
 - Φ = beccheggio, ovvero rotazione intorno all'asse Y ;
 - K = sbandamento, ovvero rotazione intorno all'asse Z .

Considerando la sequenza delle rotazioni (attenzione a non cambiarla in quanto il risultato finale varia variando l'ordine delle rotazioni!):

- Rotazione antioraria attorno a X ;
- Rotazione oraria intorno a Y ;
- Rotazione antioraria intorno a Z ;

Tali rotazioni sono quelle che possono essere misurate dai giroscopi di un sistema inerziale: con tali angoli possiamo derivare la matrice di rotazione per il **passaggio da n -frame a b -frame** come il prodotto delle tre rotazioni:

$$R_n^b = R_x R_y R_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega & \sin \Omega \\ 0 & -\sin \Omega & \cos \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Phi & 0 & -\sin \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi & 0 & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos K & \sin K & 0 \\ -\sin K & \cos K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (43)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos K & \cos \Omega \sin K & -\sin \Omega \\ \sin \Omega \sin \Phi \cos K - \cos \Omega \sin K & \sin \Omega \sin \Phi \sin K - \cos \Omega \cos K & \sin \Omega \cos \Phi \\ \cos \Omega \sin \Phi \cos K + \sin \Omega \sin K & \cos \Omega \sin \Phi \sin K - \sin \Omega \cos K & \cos \Omega \cos \Phi \end{bmatrix}$$

Per piccole rotazioni si possono considerare le approssimazioni $\sin(\alpha) \cong \alpha$ e $\cos(\alpha) \cong 1$: la matrice assume allora la sua forma linearizzata:

Figura 22 consideriamo ora le seguenti rotazioni per allineare gli assi dei sistemi *e-frame* ed *n-frame*:

- rotazione antioraria intorno all'asse Z_e di $\pi/2+\lambda$;
- rotazione antioraria intorno al nuovo asse X dell'angolo $\pi/2-\varphi$.

Scriviamo la matrice di rotazione:

$$R_e'' = R_\varphi R_\lambda = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \\ 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \end{bmatrix} = \quad (49)$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix}$$

e infine le relazioni complete per il passaggio *e-frame* a *n-frame*:

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_e - X_0 \\ Y_e - Y_0 \\ Z_e - Z_0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

Le relazioni per il passaggio inverso, da *n-frame* a *e-frame*, possono essere facilmente ricavate dalle (61):

$$\begin{pmatrix} X_e \\ Y_e \\ Z_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} \quad (51)$$

Per la **trasformazione da *e-frame* a *i-frame*** (sistema inerziale) consideriamo la rotazione del piano equatoriale (l'asse di rotazione si mantiene tale nei due sistemi) del valore $\omega_e t$, con ω_e velocità di rotazione terrestre:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_e t & \sin \omega_e t & 0 \\ -\sin \omega_e t & \cos \omega_e t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_e \\ Y_e \\ Z_e \end{pmatrix} \quad (52)$$

Analogamente per le formule inverse da *i-frame* a *e-frame*:

$$\begin{pmatrix} f_{Xi} \\ f_{Zi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_{Xb} \\ f_{Zb} \end{pmatrix} \quad (55)$$

Ora dobbiamo separare le accelerazioni dovute al moto $a = \dot{v}$, da quelle specifiche f , a partire da un modello di gravità noto a priori (memorizzato nello strumento IMU) con componenti g_{Xb} , g_{Zb} nel sistema fisso. Passiamo da f_{Xb} , f_{Zb} alle accelerazioni inerenti il moto \dot{v}_{Xi} , \dot{v}_{Zi} .

$$\begin{aligned} \dot{v}_{Xi} &= f_{Xi} + g_{Xi} \\ \dot{v}_{Zi} &= f_{Zi} + g_{Zi} \end{aligned} \quad (56)$$

Esse sono integrate nel tempo 1 volta per ottenere la velocità:

$$\begin{aligned} v_{Xi} &= \int \dot{v}_{Xi} dt = \dot{X}_i \\ v_{Zi} &= \int \dot{v}_{Zi} dt = \dot{Z}_i \end{aligned} \quad (57)$$

e una seconda volta per ottenere infine la posizione:

$$\begin{aligned} X_i &= \int v_{Xi} dt \\ Z_i &= \int v_{Zi} dt \end{aligned} \quad (58)$$

Il flusso dei dati delle operazioni descritte è riportato in *Figura 24*:

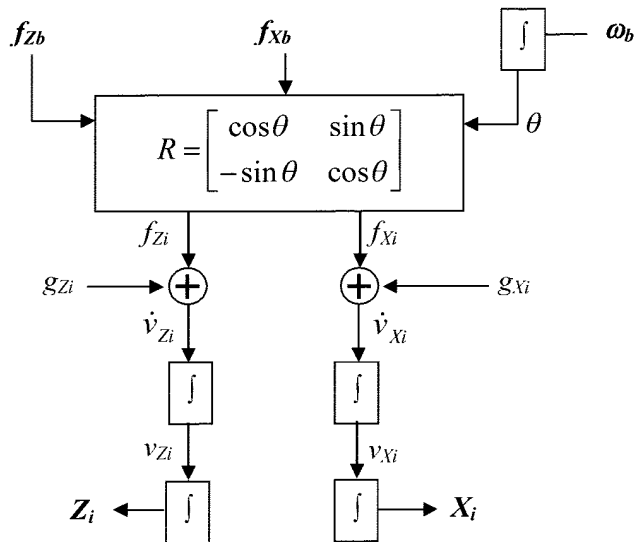


Figura 24 –navigazione in un sistema fisso X,Z

$$\dot{\theta} = \omega_b - \frac{v_X}{R+h} \Rightarrow \theta = \int \dot{\theta} dt \quad (59)$$

Tale valore permette di portare le accelerazioni misurate f_{Xb} f_{Zb} nel sistema di navigazione f_{Xn} f_{Zn} :

$$\begin{pmatrix} f_{Xn} \\ f_{Zn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_{Xb} \\ f_{Zb} \end{pmatrix} \quad (60)$$

Per ottenere le accelerazioni vere \dot{v} occorre considerare l'accelerazione di Coriolis

$a_C = 2\omega \times v = 2\omega v = 2\frac{v_X}{R+h}v$ in modulo, essendo ω ortogonale sia a v_X che v_Y . Le accelerazioni nelle due componenti del sistema di navigazione risulteranno allora

$$a_{CX} = 2\frac{v_X^2}{R+h} \text{ e } a_{CZ} = 2\frac{v_X v_Z}{R+h}.$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{Xn} &= f_{Xn} - 2\frac{v_X^2}{R+h} \\ \dot{v}_{Zn} &= f_{Zn} - 2\frac{v_X v_Z}{R+h} + g \end{aligned} \quad (61)$$

Il termine di gravità nelle (61) compare solo nella componente Z in quanto diretta secondo la verticale. Analogamente al caso precedente integrando nel tempo una volta le (61) si ottiene la velocità:

$$\begin{aligned} v_{Xi} &= \int \dot{v}_{Xi} dt = \dot{X}_i \\ v_{Zi} &= \int \dot{v}_{Zi} dt = \dot{Z}_i \end{aligned} \quad (62)$$

e con una seconda integrazione si ottiene infine la posizione:

$$\begin{aligned} X_i &= \int v_{Xi} dt \\ Z_i &= \int v_{Zi} dt \end{aligned} \quad (63)$$

Un esempio di diagramma del flusso della meccanizzazione delle equazioni nel sistema di navigazione è riportato in *Figura 26*:

$$\vec{v}_n = \vec{v}_i - \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (66)$$

con \vec{v}_n velocità sulla superficie fisica e $\vec{\omega} = [0 \ 0 \ \omega_e]$ velocità di rotazione terrestre. Queste equazioni possono essere risolte nei vari sistemi di riferimento prescelti. Ricordiamo che l'accelerazione misurata è sempre nel sistema *body* e occorre quindi eseguire un cambio di sistema di riferimento per poterla integrare in quello prescelto, attraverso la matrice di rotazione C . Per esempio, da sistema *body* a inerziale useremo tale notazione:

$$a^i = C_b^i f^b \quad (67)$$

Tale matrice di rotazione può essere determinata all'istante generico a partire da una matrice di assetto iniziale, considerando le velocità angolari misurate dai giroscopi $\omega_b^i = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]$ nel sistema *body* rispetto a quello inerziale:

$$\dot{C}_b^i = C_b^i \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

9. La navigazione geodetica integrata

Affronta il problema di come definire con misure inerziali e GNSS la posizione e l'assetto di una terna cartesiana solidale al veicolo e la sua evoluzione rispetto ad un sistema di riferimento terrestre. Il problema della navigazione può essere affrontato secondo due aspetti:

1. Navigazione in tempo reale (RT): la soluzione in tempo reale (o quasi tempo reale) consente il controllo del veicolo e di poter "reagire" per portarlo su di una traiettoria voluta.
2. Navigazione in post-elaborazione (PP): determiniamo assetti e posizioni del veicolo a posteriori, senza volerlo guidare su di una traiettoria. Chiameremo questo tipo di navigazione "*geodetica*": essa serve per georeferenziare sensori come camere fotogrammetriche, laser a scansione o altri ancora, in un sistema di riferimento terrestre.

Nella navigazione, geodetica o in tempo reale, l'integrazione di misure da accelerometri, per la stima dell'ascissa curvilinea, o di giroscopi, per la stima degli assetti, tendono a far "derivare" la soluzione in presenza di errori sistematici o accidentali integrati nel tempo.

loro dinamica e il loro peso, all'interno di un filtro di Kalman che produce una stima della soluzione navigazionale e dei *bias* dello strumento inerziale. Uno schema sintetico è riportato in *Figura 28*:

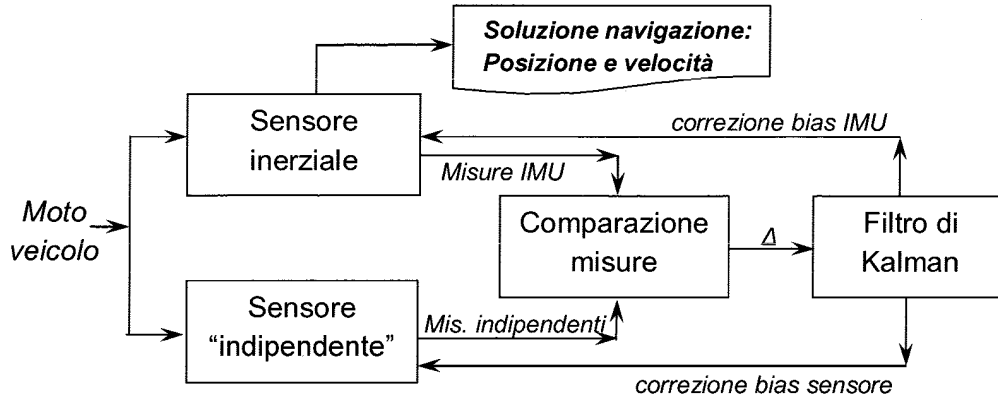


Figura 28 – schema base della soluzione di navigazione con sensori integrati

È utile allora fornire alcuni principi sull'utilizzo del filtro di Kalman.

9.2. Cenni sull'uso del filtro di Kalman

Esistono vari modi con i quali può essere formulato il filtro di Kalman. Partiamo affrontando la soluzione ricorsiva di un problema di minimi quadrati. Lo scopo è aggiornare la vecchia soluzione a fronte delle nuove misure, senza dover risolvere tutto il sistema ma aggiornando solo la soluzione. Affronteremo poi il problema "dinamico", nel quale il vettore di parametri \hat{x} varia ad ogni epoca a causa del cambiamento del suo stato. Lo chiameremo per questo "vettore di stato".

Partendo dal modello di Gauss da cui si origina il problema dei minimi quadrati:

$$Ax - I_0 = v \tag{69}$$

possiamo esprimere la "nuova stima \hat{x}_{new} come combinazione lineare della vecchia stima \hat{x}_{old} e delle nuove osservazioni b_{new} :

$$\hat{x}_{new} = L\hat{x}_{old} + Kb_{new} \tag{70}$$

ponendo $L = (I - KA_{new})$, con A_{new} matrice disegno relativa alle nuove misure, possiamo riscrivere la relazione precedente come:

$$\hat{x}_{new} = (I - KA_{new})\hat{x}_{old} + Kb_{new} = \hat{x}_{old} + K(b_{new} - A_{new}\hat{x}_{old}) \tag{71}$$

K è detta "**matrice guadagno o di Kalman**" e la sua determinazione è uno dei punti cruciali del procedimento. Essa moltiplica l'incremento delle vecchie stime

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 x_0 = b_0 + e_0 \\ x_1 = F_0 x_0 + \varepsilon_0 \\ A_1 x_1 = b_1 + e_1 \\ x_2 = F_1 x_1 + \varepsilon_1 \\ A_2 x_2 = b_2 + e_2 \\ x_3 = F_2 x_2 + \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots \\ A_{k-1} x_{k-1} = b_{k-1} + e_{k-1} \\ x_k = F_{k-1} x_{k-1} + \varepsilon_{k-1} \end{array} \right. \quad (77)$$

Ad ogni nuovo stato di X vengono aggiunte una colonna e 2 righe (previsione e correzione). In forma matriciale diventa:

$$\begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -F_0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_1 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_2 & I & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -F_{k-1} & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 \\ \varepsilon_0 \\ e_1 \\ \varepsilon_1 \\ e_2 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_{k-1} \\ e_k \end{pmatrix} \quad (78)$$

Tale sistema può essere risolto "in blocco" con minimi quadrati. Tuttavia per stimare il vettore di stato ad ogni epoca, cosa utile per conoscere in tempo reale la soluzione di posizione e velocità di navigazione, dobbiamo usare una procedura ricorsiva che ad ogni epoca di misura aggiorni la stima precedente, con un filtro di Kalman. Ciò consente di evitare di memorizzare tutte le misure precedenti e risolvere sistemi via via più grandi. Questo è possibile ricordando che le vecchie misure sono implicitamente già presenti all'interno delle vecchie stime. Il procedimento può essere eseguito ad ogni epoca: indichiamo con $\hat{x}_{j|k}$ la stima di x all'epoca j fatta usando k osservazioni. Ad ogni passo si eseguono le operazioni:

- Aggiornamento del valore precedente $\hat{x}_{j|k-1}$ con $j < k$ (*smoothed*);
- Correzione del valore all'epoca $k \rightarrow \hat{x}_{k|k}$ (*filtered*);
- Previsione del valore successivo.

Il filtro di Kalman avviene attraverso le quattro fasi:

che contribuirebbero alla soluzione. Per tali epoche occorre tornare indietro con una procedura di smoothing.

- *smoothing*: si determinano le soluzioni delle epoche precedenti in modo che anch'esse tengano conto di tutte le misure eseguite. In sostanza, la soluzione che si ottiene è quella che si avrebbe con una soluzione classica minimi quadrati eseguiti "in blocco".

Non si affronta per brevità il problema dello smoothing. Vediamo quale utilità può avere il filtro di Kalman nell'integrazione tra GNSS e IMU.

9.3. Integrazione tra GNSS e IMU

Il posizionamento inerziale è in generale caratterizzato da un basso rumore (o *noise*) ma le soluzioni di posizione e velocità tendono a derivare nel tempo. Con riferimento a *Tabella 1*, vediamo che un sistema inerziale installato a bordo di un aereo può derivare, a seconda della tipologia di sensore adottato, da 1 a 10 miglia ogni ora. Al contrario, il posizionamento con GPS (o GNSS se consideriamo la totalità delle costellazioni disponibili), è caratterizzato da una soluzione che può avere un apprezzabile rumore ma che non presenta derive in funzione del tempo. Le cause di tale *noise* sono molteplici, legate alla potenza con cui viene ricevuto il segnale, alla eventuale presenza di interferenze elettromagnetiche che lo possono degradare, variazioni nella configurazione della costellazione a causa di ostruzioni della visibilità, *cycle slip*, *multipath*, stabilità degli orologi. Nel GPS è ancora possibile avere effetti di disturbo sul segnale (*jamming*) di tipo involontario o intenzionale: Il posizionamento GPS da solo può essere vulnerabile e ciò ne può compromettere la piena utilizzabilità. Il sistema satellitare fornisce posizione e velocità, o meglio le misure di *pseudorange* di codice e fase mentre i sistemi inerziali misurano accelerazioni specifiche, che devono essere compensate della gravità e risolte con i dati di velocità angolare dei giroscopi. Una sintesi delle potenzialità e criticità dei due posizionamenti è riportata in *Tabella 2*.

navigazione e un modello di errore dell'IMU, usato per correggere le misure inerziali nelle epoche successive. Uno schema sintetico di tale accoppiamento è riportato in *Figura 30*.

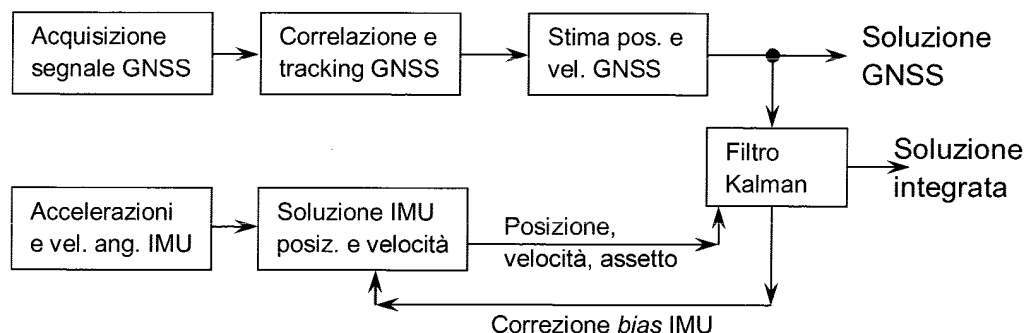


Figura 30 – schema “loosely coupled”

Uno dei problemi di questa modalità di integrazione sta nelle ipotesi di base assunte nel filtro di Kalman, che prevede misure incorrelate. Questa ipotesi potrebbe non essere rigorosa a causa di correlazioni del tempo relative agli intervalli di campionamento utilizzati. Ancora: il sistema funziona solo se il GNSS fornisce una soluzione autonoma che possa servire come input al procedimento di calcolo con filtro di Kalman: questo richiede sempre la visibilità su non meno di 4 satelliti. Della posizione deve poi essere nota in maniera affidabile la matrice di varianza covarianza per una corretta pesatura.

Accoppiamento stretto (*tightly coupled integration*): le misure di pseudorange di codice e fase sono compensate assieme alle misure di accelerazione e velocità angolari dello strumento inerziale. I dati di input del GNSS non sono dunque più la posizione ma direttamente i dati di codice e fase. Essi vengono usati nel filtro di Kalman per la stima della posizione, velocità e assetti assieme alle misure inerziali fornendo una soluzione di navigazione integrata, secondo lo schema sintetico di *Figura 31*.

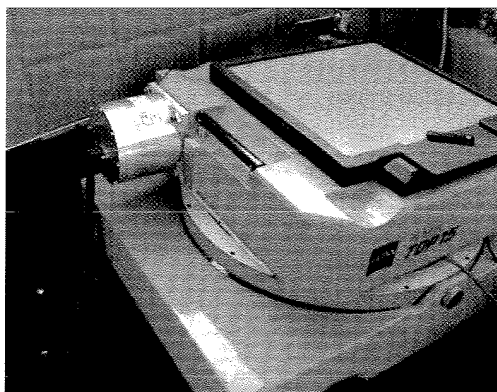


Figura 32 – camera fotogrammetrica aerea con sistema inerziale e GNSS

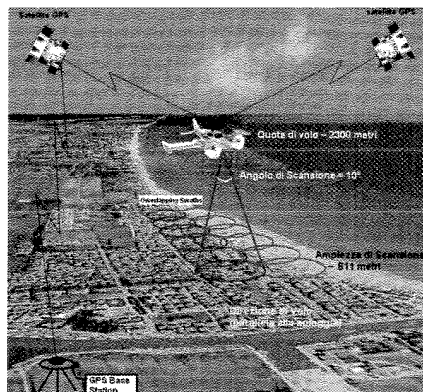


Figura 33 – laser a scansione aerotrasportato con sistema inerziale e GNSS

Un esempio di integrazione è la realizzazione di veicoli per il rilievo stradale ad alto rendimento MMV (*Mobile Mapping Vehicle*) che integrano sensori di varia natura. Il veicolo riportato in *Figura 34* ha a bordo un sistema GNSS multi antenna, un apparato IMU e alcune telecamere per riprese fotogrammetriche.



Figura 34 – veicolo sperimentale per rilievo delle geometrie stradali, attrezzato con GNSS, IMU e telecamere

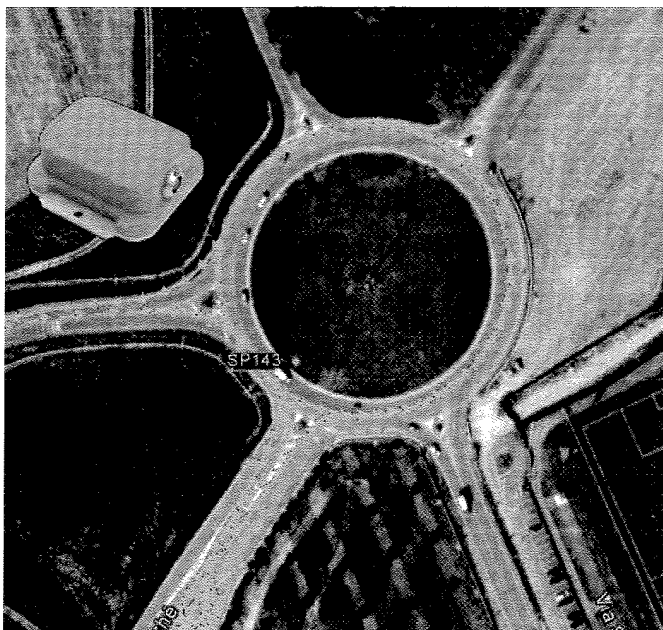
Sistemi basso costo possono essere realizzate per mappature speditive, con soluzioni economiche ma efficienti. In *Figura 35* vediamo un sistema *low cost*

Figura 22.

Counter	Mag_X	Mag_Y	Mag_Z	Roll	Pitch	Yaw
177	0.457410	-0.283791	-0.571284	0.066867	0.389768	31.807916
178	0.457603	-0.284744	-0.570250	0.148254	0.318662	31.799883
179	0.454965	-0.285002	-0.569859	0.269570	0.283320	32.020370
180	0.445221	-0.350207	-0.542563	5.423361	0.200629	33.827790
181	0.432222	-0.482262	-0.439702	19.490879	-0.188316	35.260986
182	0.386179	-0.579324	-0.357777	28.906559	-2.624069	38.905769
183	0.419745	-0.544752	-0.371998	25.496472	0.711424	38.369488
184	0.596193	-0.354744	-0.353189	7.570930	19.647861	34.951355
185	0.707536	-0.083247	-0.305947	-22.611259	30.399594	21.239813
186	0.690837	0.198437	-0.284761	-50.371421	22.310500	9.829110
187	0.593946	0.330066	-0.364550	-50.957806	8.535740	8.353767

Tabella 4 – misure di assetto con i magnetometri dell'IMU. Si noti come dall'epoca 181 vengano rilevati variazioni negli angoli d'assetto roll (Ω), pitch (Φ) e yaw (K) rispetto alla precedente epoca

Un esempio di rilievo di un tratto di strada è riportato in Figura 36, in prossimità di una rotonda: lo strumento utilizzato è una IMU di categoria *automotive* integrato ad un ricevitore GPS singola frequenza. I valori rilevati dagli accelerometri, giroscopi e magnetometri, sono integrati alle misure GPS per una soluzione integrata di tipo *loosely coupled* (Figura 37).



Sample rate: 50.0Hz

YY	MM	DD	Second	Counter	Latitude	Longitude	Altitude	Vel_X	Vel_Y	Vel_Z
11	5	4	41526.9874	55499	44.980003357	7.613551140	290.310486	5.454104	4.292352	0.040506
11	5	4	41527.0074	55500	44.980007172	7.613549709	290.311218	5.438664	4.310315	0.029820
11	5	4	41527.0274	55501	44.980007172	7.613548756	290.311859	5.422744	4.327143	0.038923
11	5	4	41527.0474	55502	44.980007172	7.613547802	290.312592	5.409741	4.343529	0.035078
11	5	4	41527.0674	55503	44.980007172	7.613546371	290.278687	5.392101	4.371824	0.036043
11	5	4	41527.0874	55504	44.980010986	7.613544941	290.279358	5.383148	4.386916	0.035696
11	5	4	41527.1074	55505	44.980010986	7.613543987	290.280029	5.366110	4.389123	0.025154
11	5	4	41527.1274	55506	44.980010986	7.613542557	290.280487	5.345567	4.403220	0.035940
11	5	4	41527.1474	55507	44.980010986	7.613541603	290.282257	5.335711	4.415833	0.034025
11	5	4	41527.1674	55508	44.980014801	7.613540649	290.282990	5.320040	4.436942	0.032825
11	5	4	41527.1874	55509	44.980014801	7.613539696	290.283813	5.289423	4.459222	0.051943
11	5	4	41527.2074	55510	44.980014801	7.613538265	290.284760	5.284268	4.485568	0.047424
11	5	4	41527.2274	55511	44.980014801	7.613536835	290.252441	5.262663	4.518475	0.049204
11	5	4	41527.2474	55512	44.980018616	7.613535881	290.253479	5.256291	4.529212	0.060813

Tabella 5 – rilevamento di un tratto di strada con GPS e IMU – La presenza del GPS permette di “datare” le epoche. Si noti come i dati di posizione e velocità siano campionati, nel caso specifico, a 50 Hz.

Sistemi di rilevamento aerei possono essere attrezzati con sistemi IMU. Piccoli velivoli UAV (*Unmanned Aerial Vehicle*) (*Figure 38*) possono eseguire riprese aeree per rilievi metrici fotogrammetrici. Il velivolo può seguire un piano di volo prestabilito, acquisire dati GPS e IMU per una post-elaborazione della traiettoria e degli assetti. I giroscopi possono essere usati sia per determinare l'assetto degli accelerometri che per “livellare” la camera fotografica in posizione nadirale. La determinazione della posizione e dell'assetto con GPS e IMU permette di georeferenziare le immagini della camera.

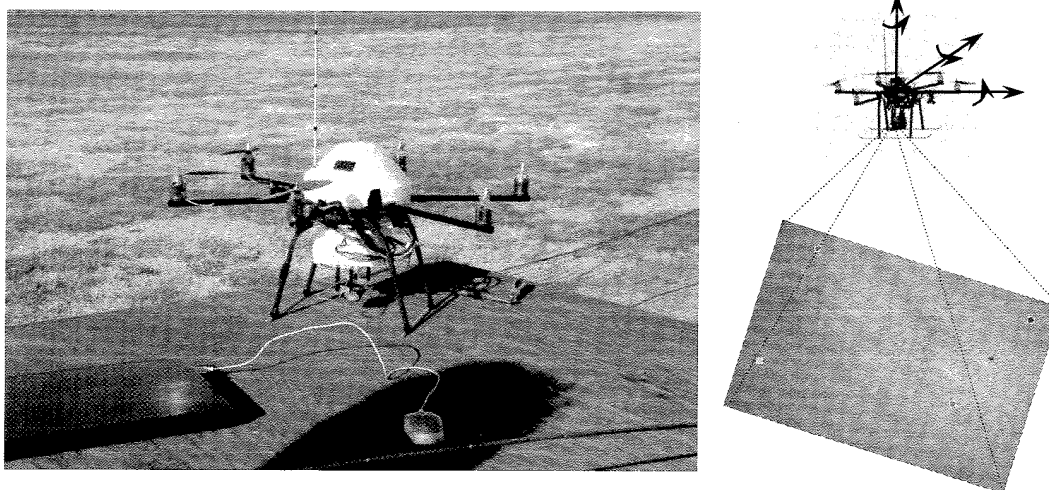


Figure 38 – UAV con camera, IMU e GPS per rilevamenti fotogrammetrici da bassa quota. Il sistema consente la navigazione secondo un piano di volo



POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria dell'Ambiente, del Territorio e delle Infrastrutture

LEZ. 28-05-2013

La geomatica per il rilievo, la progettazione e il tracciamento delle grandi opere di ingegneria

Alberto CINA

Corso di Geomatica – maggio 2013

1

APPLICAZIONI DELLA GEOMATICA NEL CAMPO DELLE GRANDI INFRASTRUTTURE

Progettazione:

- Realizzazione cartografia grande scala ex novo
- Rilievi topografici particolareggiati 3D

Operazioni di tracciamento

Realizzazione dell'opera:

- ausilio macchine movimento terra

Gestione e controllo dell'opera:

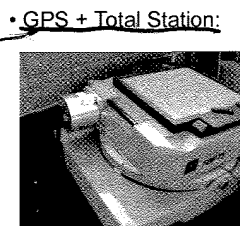
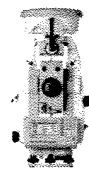
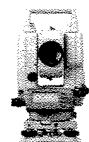
- monitoraggio movimenti e deformazioni
- rilievi per catasto strade

Rilievo o tracciamento 3D con sensori integrati (stazioni totali, GPS, IMU, giroscopi, laser scanner)

2

SENSORI INTEGRATI PER IL RILIEVO 3D

- T2 + AGA14: basso grado d'integrazione
- Stazione totale: alto grado d'integrazione



• GPS + Total Station:

strumenti di rilievo integrati

GPS + IMU con camere fotogrammetriche, laser scanner, odometri, informazioni aggiuntive (cartografia numerica)



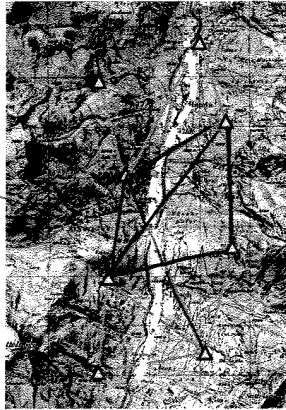
Veicoli per rilievo alto rendimento

3

ACS

LA RETE GEODETICA D'INQUADRAMENTO

Materializzazione sul terreno del sistema di riferimento
 ⇒ rete geodetica (spesso realizzata appositamente)



*deberiamo
 un'ingegneria
 di infrastruttura
 da realizzare con
 una rete geodetica
 (compensata)*

PROGETTAZIONE

- 0) scelta sistema di riferimento
- 1) scelta tipo e schema delle misure
- 2) precisioni di misura (pesi)
- 3) ottimizzazione schemi misura



*delle misure angolari
 è il più idoneo, rapido, preciso*

MODELLO DI COMPENSAZIONE E SIMULAZIONE M.Q.

Compensazione rete m.q.:

dal modello: $Ax=L=v$

stima: parametri: $\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P L = N^{-1} T_n$

scarti stimati: $\hat{v} = A\hat{x} - L$

matrice varianza covarianza: $C_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$ con $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{n-r}$

test sulle osservazioni: $w = \frac{v}{\sigma_v} \leq k_a$

La matrice A contiene la geometria della rete ed è progettabile. Anche la matrice dei pesi P è progettabile con ipotesi a priori sulle precisioni delle misue. → Cxx può essere progettata.

*perché c'è una
 propagazione refatta
 nelle misure angolari*

RILIEVO DI DETTAGLIO (ovvero il tracciamento dei particolari)

Rilevamento e tracciamento planimetrico - schema

Tracciamento con misure classiche di angoli e distanze:

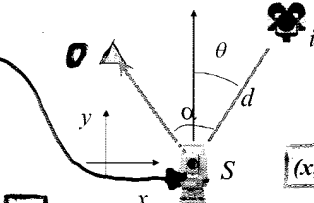
Note coordinate Stazione e Orientamento:

$$d = \sqrt{(x_i - x_s)^2 + (y_i - y_s)^2}$$

$$\alpha = \text{atan} \frac{x_i - x_s}{y_i - y_s} - \text{atan} \frac{x_o - x_s}{y_o - y_s}$$

$(x, y)_i = \text{S.R. progetto}$ $(x, y)_o = \text{S.R. terreno}$

*Traccia stazione nel
 punto di rete:
 materializzazione
 del S.R. sul terreno*



NB la precisione angolare e della distanza devono essere pressoché equivalenti → 1 mgon equivale a 1 cm/636 m di errore laterale (1.5 cm/km)

Es. pratico: propagazione varianza orientamento $\theta_{Si} = \text{atan} \frac{x_i - x_s}{y_i - y_s}$

(se $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ e punto S privo d'errore)

$$\sigma_{\theta} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_o}\right)^2 \sigma_o^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y_o}\right)^2 \sigma_o^2} = \pm \frac{\sigma_o}{d_{Si}}$$

*precisione misura
 angolare*

Valori di σ_{θ} in [mgon]

Dist.	± 1 cm	± 5 cm
50 m	± 12.7	± 63.7
100 m	± 6.4	± 31.8
1 km	± 0.6	± 3.2

*0: vertice di
 orientamento
 S: punto di stazione
 i: punto generico*

*diverger "ambra
 obliqua"*

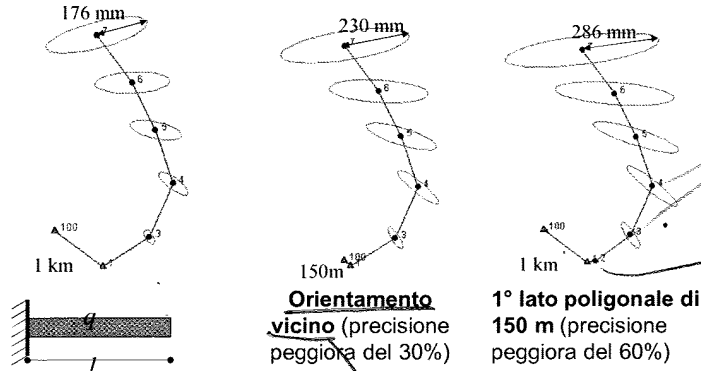
*rispondiamo di
 collimare di
 un punto di
 orientamento
 che ha precisione
 ± 1 cm o ± 5 cm.
 di orientamenti non vanno fatti su punti...*

PROBLEMI DI TRACCIAMENTO - schemi reali

PROBLEMI: TOPOGRAFICI

DI PROGETTO

Togliendo il punto di chiusura l'analogia statica diventa



e le mensole sono le strutture che si deformano ad assumere dimensioni importanti.

⇒ Tener conto nella progettazione delle esigenze topografiche di tracciamento tra 1 e 100

Orientamento vicino (precisione peggiora del 30%)
1° lato poligonale di 150 m (precisione peggiora del 60%)

forché non chiusa con un punto esterno (punto 1000. prima)
 la ridondanza locale di queste misure (precisione controllabile) è il caso della galleria che entra in curva ⇒ il primo lato di poligonale ha lunghezza limitata. La galleria che entra ad angolo è quanto di peggio il progettista può fare!!!

più di tutte le ellissi di errore combinate 13

Tracciamento: azimut giroscopici

Per limitare la propagazione dell'errore angolare in lunghe poligonali in galleria si possono utilizzare i teodoliti giroscopici

Teodolite giroscopico



- giroscopio a 1 grado di libertà sospeso in un involucro "neutro" che oscilla intorno alla direzione del Nord
- per le sue proprietà fisiche si oppone alla rotazione terrestre e tende a riallinearsi sul meridiano passante per il punto di stazione
- oscillazioni rilevate in modo quasi continuo da un sensore di posizione solidale all'involucro (zero del sistema)
- attribuzione di valori numerici ad epoche discrete (discretizzazione oscillazioni)

asse di misura tende a metterli secondo l'asse di rotazione terrestre

- Angolo deviazione tra il centro di oscillazione (Nord astronomico) e il riferimento del giroscopio come media integrale della serie di misure
- cerchio del teodolite con lo zero coincidente con lo zero del giroscopio

rotore che gira a grande velocità

è quello che ci dà ISOLOITE GIROSCOPICO è il nord con riferimento al geode (non è il nord geografico) ⇒ deve essere ridotto all'azimut (geografico) tramite le equazioni di Bessel.

Azimut giroscopici: precisione e competitività con misure angolari azimutali

Il teodolite giroscopico misura **azimut astronomici**. Essi devono essere poi ridotti ad **azimut ellissoidici**.

Precisione dipendente dal tempo di misura e pressochè costante su ogni lato della poligonale, con le debite cautele operative

Technical Data Gyromat - 2000

Measuring mode:#1#3#2
Measuring accuracy in mgon:	1	5	10
Measuring time in minutes:	10	5	2

La precisione della misura di azimut con giroscopio è inferiore a quelle degli angoli azimutali, ma dopo alcuni lati della poligonale questo diventa vantaggioso. Applichiamo la propagazione della varianza con le IP: $\sigma_{\text{giroscopio}} = 1 \text{ mgon}$ $\sigma_{\text{teodolite}} = 0.3 \text{ mgon}$

$$\sigma_{\text{giroscopio}}^2 = n_{\text{lati poligonale}} \cdot \sigma_{\text{teodolite}}^2 \Rightarrow n_{\text{lati poligonale}} = \frac{\sigma_{\text{giroscopio}}^2}{\sigma_{\text{teodolite}}^2} = \frac{(1 \text{ mgon})^2}{(0.3 \text{ mgon})^2} = 11$$

varianza giroscopio

varianza teodolite dopo n lati

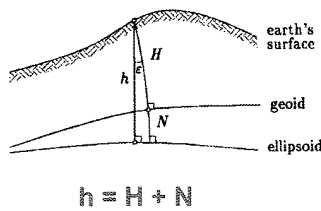
il vantaggio si avrà dopo 15 (non 11) lati.

dopo 11 lati il giroscopio batte le misure angolari di teodolite fatte sulla poligonale

Il teod. giroscop. mi dà la direzione sempre indipendente dalle misure precedenti. L'errore è più grande di quello che mi può dare un teodolite, però ha il vantaggio di essere sempre costante.

Quota ortometrica e altezza ellissoidica

Il GPS fornisce le coordinate XYZ: dopo le trasformazioni di coordinate si ricava l'altezza ellissoidica "h". Per scopi ingegneristici e di progettazione, le quote (H) sono riferite alla superficie del Geoide.



h = altezza ellissoidica
 H = quota ortometrica
 N = ondulazione del geoid
 (La formula è approssimata ma sufficiente: la deviazione della verticale ε è al massimo 30")

È dunque importante conoscere l'ondulazione del geoid N o la sua variazione a partire da un punto di note "H" e "h".

Topografo e progettista devono utilizzare lo stesso S.I.R.!!!

Se noi immaginiamo un cilindro (terra cilindrica)

Se voglio distendere una buccia di marmarite su un piano, lo posso fare per piccole porzioni della buccia, dopodiché la buccia si crepa!!!. È lo stesso principio del perché avvengono deformazioni quando vedo della superficie (terra) alla 20

19 (terreno) → *Cartografia*

piano di Gauss per proiezione e tracciamento

Superfici a semplice curvatura:
 perfetta similitudine tra figura sulla superficie e figura sul piano di sviluppo

Superfici a doppia curvatura:
 rappr. su piano ⇒ deformazioni

Sistema Coordinate geocentrico (X, Y, Z) o geografico (φ, λ, h)
 ⇒ no deformazioni ma ...

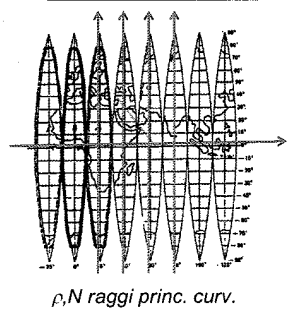
(Terra)

(sfera, ellissoide, ...)

Cartografiche (modulo di def. lineare e areale, deformaz. angolare)

20 ~~...~~ *rappresentazione su piano.*

Riduzione di coordinate e baseline GPS piano Gauss
Coordinate geografiche e cartografiche



$$x = \lambda N \cos \varphi + \frac{1}{6} \lambda^3 N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \dots$$

$$\frac{1}{120} \lambda^5 N \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) + \dots$$

$$y = l_\varphi + \frac{1}{2} \lambda^2 N \sin \varphi \cos \varphi + \dots$$

$$\frac{1}{24} \lambda^4 N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \dots$$

$$t = \tan \varphi \quad \eta^2 = \frac{N - \rho}{\rho} \quad l_\varphi = \int_0^\varphi \rho d\varphi$$

Nei sistemi cartografici vengono ancora applicati moduli di contrazione e origini convenzionali:

$Est = x m_c + E_0 \quad Nord = y m_c + N_0$

$m_c = 0.9996$

$E_0 = 500000 \text{ m}$

$N_0 = 4610000 \text{ m}$

Da φ, λ a X, Y cartografici con le formule di Mercatore.

Sistemi di riferimento - le coordinate isometriche

Es.: elemento lineare $L_p=5\text{ km}$ al centro fuso ($m_L=0.9996$) da riportare sul terreno a $h=600\text{ m}$:

$$L_t = \frac{5000\text{ m}}{0.9996 (1 - \frac{600\text{ m}}{R})} = 5002.47\text{ m}$$

⇒ La lunghezza sulla carta ≠ da quella di tracciamento

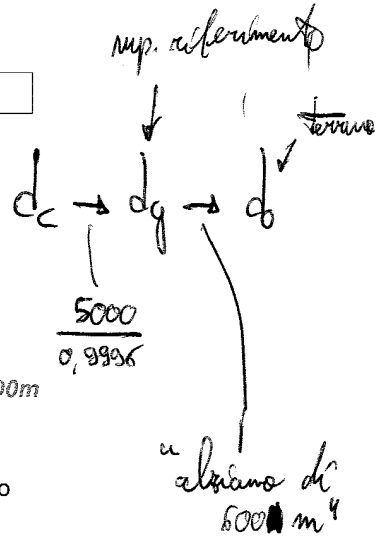
- 1) modifica in tracciamento dei parametri di progetto (?)
- 2) considerare le riduzioni in progetto: $L_p=4997.53\text{ m} \Rightarrow L_t=5000\text{ m}$

3) **Sistemi ISOMETRICI** ⇒ immediato utilizzo in tracciamento

Similitudine tra grandezze sul piano cartografico e di tracciamento

• Non è possibile realizzare deformazione lineare nulla su tutto il piano della rappresentazione ⇒ SR è isometrico se realizza deformazioni residue trascurabili (es. 10 ppm)

$$1\text{ cm} / 1\text{ km}$$



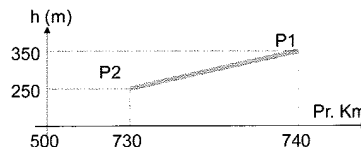
altezza ellissoidica

diso al progettista: a progetto già considerando le deformaz. cartografiche.

25

Sistemi isometrici: un esempio pratico

Es: tracciato composto da unica livelletta-rettifilo di lunghezza di 10 km sul piano di Gauss (sistema WGS84 fuso 32) tra P1 e P2.



Calcolare la lunghezza di tracciamento sul terreno e definire un sistema isometrico che realizzi deformazioni entro 10 ppm

$E_1=740\text{ km} \Rightarrow \lambda_1=11^\circ 57' 34.3661''$	$E_2=730\text{ km} \Rightarrow \lambda_2=11^\circ 50' 10.9798''$
$N_1=4800\text{ km} \Rightarrow \varphi_1=43^\circ 18' 52.3764''$	$N_2=4800\text{ km} \Rightarrow \varphi_2=43^\circ 19' 3.6196''$
$h_1=350\text{ m}$	$h_2=250\text{ m}$

Calcolo raggi curvatura sezioni normali nel punto medio tra P1 e P2:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_{\text{medio}}}} = 6388208\text{ m raggio max}$$

$$R = \sqrt{\rho N} = 6376843\text{ m raggio sferale locale}$$

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_{\text{medio}})^3}} = 6365498\text{ m raggio min}$$

il 1° disp. dipende dai 3° del meridiano centrale

Sistemi isometrici: un esempio pratico

deformazione lineare nel punto $\varphi_{\text{medio}}, \lambda_{\text{medio}}$: $m_L = 0.9996 \left(1 + \frac{(\lambda_{\text{medio}} - 9^\circ)^2 \frac{\pi^2}{180^2}}{2} \cos^2 \varphi_{\text{medio}} \right) = 1.000276859 \approx 2.7 \cdot 10^{-4}$

Fattore riduzione altezza ell. in h_{medio} : $m_h = \left(1 - \frac{h_{\text{medio}}}{R} \right) = 0.99995295$

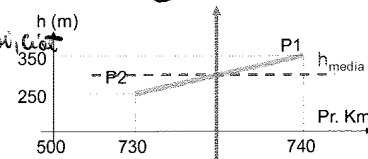
Sul terreno risulterà una lunghezza: $d_t = \frac{10.000\text{ m}}{m_L m_h} = \frac{10.000\text{ m}}{1.000276859 \cdot 0.99995295} = 9997.232\text{ m}$

⇒ Contrazione sul terreno rispetto al progetto di circa $3\text{ m} / 10\text{ km}$ (300 ppm)!

Definiamo un sistema isometrico con:

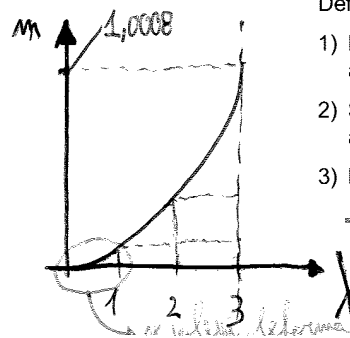
- 1) Merid. centrale fuso, baricentrico alla zona considerata (per λ_{medio})
- 2) Sup. riferimento passante ad una altezza ellissoidica h_{medio}
- 3) Modulo di contrazione = 1

⇒ Ricalcoliamo le coordinate cartografiche nel nuovo sistema:



non è più il meridiano 9° , ma il meridiano che passa per il baricentro della zona considerata.

distinzione cartografica (10 km esatti sulla DTA)



(isometrico)

27

Sistemi isometrici nella progettazione e tracciamento

Rete d'inquadramento nel sistema isometrico definito => ridefinizione del tracciato analitico, da parte del progettista.

Operazioni:

- 1) riporto nel S.I. dei vertici della poligonale d'asse
 - 2) ricalcolo tracciato analitico con parametri di progetto (raggi curvatura, curve transizione ecc...) corretti
- => lievi variazioni al progetto analitico (lunghezze rettili e pendenze) ma con trascurabili conseguenze pratiche.

Per dislivelli $\Delta h > \pm 63.4$ m e spostamenti $\Delta E > \pm 28$ km

=> definizione di **più sistemi isometrici**, con zone di sovrapposizione (coordinate doppie) per passaggio agevole tra sistemi.

31

SISTEMI ISOMETRICI NELLA PROGETTAZIONE
Relazione tra piano locale e di Gauss

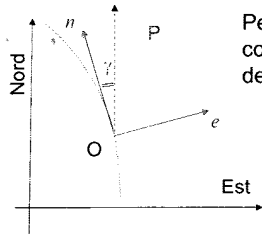
Anche un piano locale può essere considerato un sistema isometrico con validità:

- 15 km nella sola planimetria senza apportare le correzioni per la convergenza delle normali;
- 20-25 km 3D apportando le correzioni per la convergenza delle normali

Per opere di estensione maggiore occorre utilizzare più piani locali con diverse origini, prevedendo zone di sovrapposizione di doppie coordinate.

-> **Coordinate piani locali non congruenti come origine e rotazione.**

(false origini)



Per ridurre le coordinate di P al piano di Gauss consideriamo la convergenza della trasformata del meridiano γ e il modulo di def. lineare m_L :

$$\begin{pmatrix} E \\ N \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} E_0 \\ N_0 \end{pmatrix} + m_L \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix}_P$$

32



Un esempio: rete geodetica per il tracciamento Bologna Firenze a.v.

- lunghezza del tracciato circa 80 km
- sviluppo prevalente Nord-Sud
- variazioni di quota da circa 67 m a 413 m
- rete GPS (1995), principale e secondaria, con punti di stazione e orientamento in corrispondenza degli imbocchi delle gallerie e delle opera d'arte
- definizione dei sistemi "isometrici" di tracciamento
- precisioni ottenute dalla compensazione:

Massimo	12	13	26
Medio	5	5	12

33

IL RUOLO DELLA CARTOGRAFIA NELLA PROGETTAZIONE E REALIZZAZIONE DELLE INFRASTRUTTURE DEI TRASPORTI

Alberto Cina

Riassunto

Il tracciamento di grandi infrastrutture implica sempre una preliminare definizione dei sistemi di riferimento nei quali eseguire le operazioni di misura. Lo stesso sistema di riferimento deve essere compatibile con quello utilizzato in progettazione o devono essere note le relazioni analitiche fra questi. Si affrontano i problemi topografici legati al tracciamento, con particolare riferimento alle tecniche e ai problemi che si possono presentare utilizzando la cartografia ufficiale.

1) PREMESSA

La buona riuscita di un'infrastruttura dipende sia dalla capacità del progettista che da come essa viene trasportata dal "mondo di progetto" al "mondo reale": complessi tracciati, lunghe ed articolate gallerie, si possono oggi realizzare con elevata precisione grazie ai moderni mezzi di misura topografica.

Il problema del tracciamento di una infrastruttura non è comunque solo di tipo strumentale o legato alla bravura "sul terreno" del topografo, che in questa sede si da per scontato conosca tutte le tecniche del buon operare, ma anche ad una preliminare definizione dei sistemi di riferimento. Anche questi devono essere ottimizzati per mettere d'accordo il mondo della progettazione con quello reale del tracciamento sul terreno oltre che per "semplificare" le operazioni di campagna evitando, per quanto possibile, riduzioni delle grandezze topografiche da eseguirsi sul terreno.

2) PROBLEMI GEODETICI E CARTOGRAFICI

Ogni infrastruttura nasce da un'idea progettuale che si sviluppa su di una cartografia, dalla quale il progettista può dedurre le "condizioni al contorno" che la realizzazione tecnica dell'opera e il suo impatto con il territorio e con l'ambiente comporta. Se per una definizione di massima del tracciato si può lavorare sulla cartografia a piccola e media scala esistente (1:25.000 IGM o 1:10.000 della CTR), una progettazione esecutiva prevede una cartografia a grande scala, spesso realizzata appositamente per via fotogrammetrica e con rilievi topografici in prossimità di manufatti notevoli (imbocchi di gallerie, ponti, viadotti e altro).

Nella realizzazione di un'opera, esiste un delicato momento nel quale occorre trasferire la geometria del progetto, appartenente ad un mondo virtuale privo di

Alberto CINA - 2004

orientamento per le misure angolari. Nelle loro coordinate è implicito il sistema di riferimento che sarà usato nel tracciamento dei particolari.

3.1) La rete geodetica

Può essere realizzata con misure topografiche classiche (angoli e distanze) anche se risulta più conveniente la tecnica GPS per la maggiore precisione e velocità operativa, specialmente se l'opera insiste su vaste zone di territorio. In tutti i casi la rete geodetica viene compensata con l'algoritmo dei minimi quadrati. Per semplicità poniamo che tra le coordinate x e le misure L sussista il seguente modello lineare:

$$Ax-L=v$$

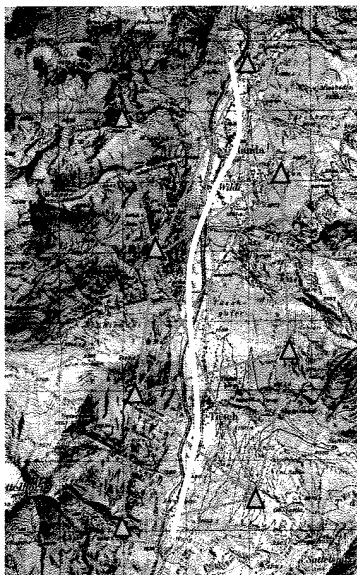
con A matrice disegno contenente i coefficienti delle equazioni di osservazioni, L il vettore delle osservazioni, x quello delle incognite e v quello degli scarti. La stima avviene secondo la nota formula:

$$x=(A^T P A)^{-1} A^T P L = N^{-1} T_n$$

con P matrice dei pesi, N matrice normale. La precisione dei vertici della rete si deduce dalla matrice di varianza covarianza C_{xx} stimata dopo la compensazione secondo la:

$$C_{xx} = \sigma_0^2 N^{-1}$$

con $\sigma_0^2 = v^T P v / \text{ridondanza} = \text{varianza dell'unità di peso}$.



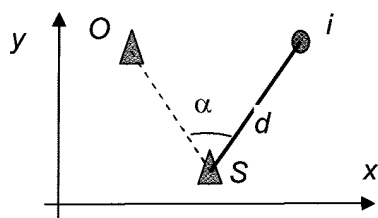
Anche la matrice C_{xx} può essere progettata a meno di σ_0^2 che sarà oggetto di stima una volta eseguite realmente le misure. In sede di progettazione delle misure è definibile un'altra importante matrice R , detta di "ridondanza", calcolabile con la:

$$R = (I - AN^{-1}A^T P)$$

(con I = matrice identità)

Essa contiene sulla diagonale principale i termini, compresi tra 0 e 1, detti "ridondanze locali" ovvero il contributo di ogni osservazione alla ridondanza complessiva della rete. Da questa è derivabile la matrice di varianza covarianza degli scarti C_{vv} , anch'essa progettabile prima di aver eseguito le misure, ipotizzando un valore a priori della varianza dell'unità di peso:

Fig.1. Il tracciato e la rete geodetica



$$d = \sqrt{(x_i - x_s)^2 + (y_i - y_s)^2}$$

$$\alpha = \operatorname{atan} \frac{x_i - x_s}{y_i - y_s} - \operatorname{atan} \frac{x_o - x_s}{y_o - y_s}$$

Fig. 3 – tracciamento con misure classiche

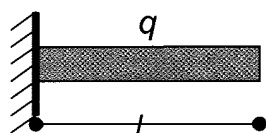
Note dalla compensazione della rete geodetica le coordinate cartesiane dei vertici di stazione (S) e di orientamento (O), un punto generico i definito nel progetto, può essere tracciato sul terreno, con una stazione totale, per coordinate polari. Occorre riportare sul terreno dal punto di stazione la direzione α dal vertice d'orientamento e distanza d , entrambe ricavabili dalle coordinate cartesiane secondo le semplici relazioni di figura 3. L'apparente semplicità teorica di quest'operazione nasconde però un primo problema: il sistema di riferimento nel quale è sviluppato il progetto deve coincidere con quello "strumentale" di tracciamento. Come si vedrà al paragrafo 4, questo non è mai rigorosamente vero, specie se si utilizza il sistema cartografico nazionale.

Nel tracciamento di lunghe gallerie può essere usato il giroscopio che fornisce direttamente un azimut astronomico, con precisione di circa ± 0.8 mgon. Essa è inferiore a quella delle misure angolari di precisione ma è costante su qualunque lato di una poligonale di tracciamento. Si elimina così la propagazione dell'errore angolare tipico delle poligonali. Il giroscopio diventa competitivo con le misure di angoli eseguite con normali teodoliti dopo un numero n di lati. Sia $\pm \sigma_\alpha$ la precisione della misura angolare e $\pm \sigma_g$ quella dell'azimut del giroscopio: propagando la varianza dell'angolo, dopo n lati essa diventa equivalente o superiore a quella dell'azimut del giroscopio: ($n\sigma_\alpha^2 \geq \sigma_g^2$). Esso è dunque conveniente per poligonali con lati in numero superiore a $n \geq \frac{\sigma_g^2}{\sigma_\alpha^2}$. In pratica è sempre conveniente integrare misure angolari a quelle di azimut giroscopico per eseguire controlli e compensazioni delle misure.

3.3) Gli schemi classici di tracciamento

Nel tracciamento in galleria, viene realizzata una poligonale d'asse con misure di distanze e direzioni angolari. Si consideri come esempio uno schema di poligonale con 5 lati della lunghezza compresa entro 1 km. Questa lunghezza costituisce in pratica un limite operativo nei tracciamenti in galleria dove spesso risulta difficoltosa la collimazione a causa dell'atmosfera quasi mai limpida. Si ipotizzino precisioni (sqm) pari a ± 0.5 mgon per le misure angolari e $\pm(3\text{mm}+2\text{ppm})$ per quelle di distanza. In figura 4 si riporta la simulazione di tale poligonale che parte dal vertice di stazione di posizione nota (1) con

precisione globale. Esse, per contro, possono risultare problematiche da un punto di vista operativo in caso di scarsa visibilità.



$$f = \frac{ql^4}{8EJ}$$

Fig.5 - Analogia statica della poligonale d'asse aperta

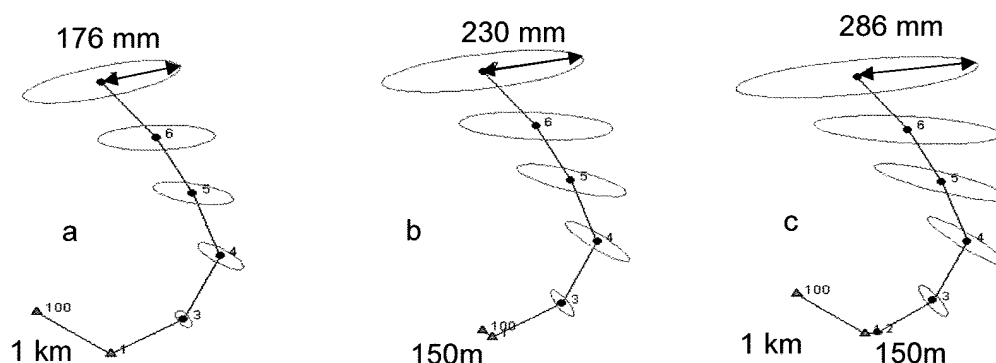


Fig.6 a, b, c- Poligonale d'asse aperta

Questi problemi sono ben noti a chi opera nel campo della topografia e del tracciamento, oltre a tutte le regole del ben operare: ad esempio è noto che visuali con forti elevazioni amplificano gli errori residui di rettifica delle misure angolari. Generalmente il topografo cerca di non porsi in queste condizioni.

In alcuni casi però il problema della configurazione geometrica può derivare dalla progettazione dell'opera: per gli stessi motivi prima esposti, un lato iniziale d'ingresso in galleria con visuale libera troppo breve (nel nostro esempio 150 m) provoca un decadimento di precisione che può arrivare nel nostro caso a circa 60% (fig. 6c), non imputabile certo all'incuria delle misure.

Anche lo schema della poligonale aperta è migliorabile dal momento che non essendo ridondante non permette un controllo o compensazione delle misure. Esso può diventare di precisione insufficiente in gallerie molto lunghe. Proprio in questo caso diventa utile integrare le misure angolari con quelle "indipendenti" di azimut con giroscopio.

La figura 7 mostra una possibile soluzione con uno schema "a traliccio". Schemi più complessi sono certo possibili ma non sempre il maggior impegno di tempo e lavoro compensa il guadagno di precisione. Si pensi che il lavoro di tracciamento è spesso limitato nel tempo da esigenze di cantiere, dal passaggio di veicoli o problemi di sicurezza e altro ancora.

molto comoda in quanto non è né piana né sviluppabile su di un piano. La cartografia studia proprio le deformazioni connesse ad una rappresentazione piana dell'ellissoide per minimizzare via via quelle di maggior interesse. Se l'opera è vasta ci si deve scontrare con queste deformazioni, pur piccole.

Di queste, la più comoda da rendere nulla, per il progettista e per il tracciatore, è quella angolare (non si possono eliminare tutte!). Per questo motivo le carte più usate per navigazione e tracciamenti sono quelle conformi. Tra queste la principale è quella di Gauss. Sia per il progetto che per il tracciamento la superficie di riferimento è bene sia più prossima possibile all'andamento dell'opera. Si potrebbe pensare allora ad ellissoidi di semiasse variabile in funzione della quota del tracciato. Per la cartografia, l'utilizzo di un fuso origine orientato nella dimensione prevalente dell'opera e infine l'adozione di diversi fusi per la rappresentazione riducono le ineliminabili deformazioni.

Se la progettazione avviene sul piano di Gauss, gli elementi lineari risultano inevitabilmente soggetti a deformazioni che di norma non possono essere trascurate nel tracciamento. Anche le direzioni angolari devono essere "ridotte" per poter sfruttare con precisione le caratteristiche di conformità della carta.

4.1) Le riduzioni lineari

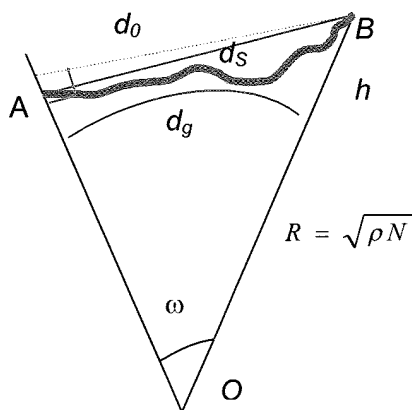


Fig. 8 - Riduzione alla superficie di riferimento

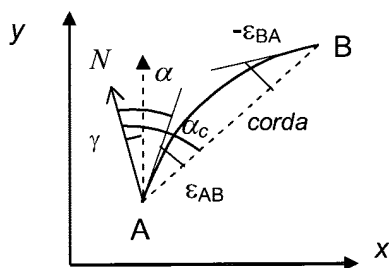
Assumiamo che la superficie di riferimento planimetrica sia l'ellissoide. In un ambito geodetico (100 km) tale superficie può essere sostituita da quella di una sfera locale di raggio R , media geometrica dei raggi di curvatura delle sezioni normali principali di raggi ρ , N . Dalla distanza reale d_i occorre ricavare d_g sulla superficie di riferimento (fig. 8) applicando un fattore di riduzione uguale a m_Q :

Questo modo di operare è valido e applicabile se entrambi i tecnici, progettista e topografo tracciante, sono ben consci del problema. Spesso invece, per evitare possibili fraintendimenti o incomprensioni tra le due figure professionali e insoliti valori di grandezze di progetto (non intere), si ricorre ad una soluzione intermedia che cerchi di accordare il mondo della progettazione con quello del tracciamento, ricorrendo a sistemi di riferimento chiamati "isometrici" ovvero non deformati.

4.2) Le riduzioni degli angoli e degli azimut giroscopici

La conformità della proiezione di Gauss garantisce l'equivalenza tra azimut di geodetiche sull'ellissoide e azimut tra le corrispondenti trasformate di geodetiche sulla carta, generalmente curve. Analogamente per gli angoli azimutali.

Nella pratica è però più agevole determinare direzioni o angoli sulla carta con riferimento alle corde, invece che alle trasformate, commettendo un errore pari a ε per ogni direzione angolare (fig. 9). Questa riduzione angolare alla corda ε risulta massima alle estremità del fuso cartografico. Alle nostre latitudini raggiunge comunque valori massimi contenuti entro 0.2 mgon per lati di 1 km e si può considerare praticamente trascurabile su ogni lato di una poligonale di tracciamento in galleria, dove dette distanze non vengono di norma superate.



$$\varepsilon [mgon] = \frac{(2x_A + x_B)(y_A - y_B)}{6\rho N 0.9996^2} 63662$$

$$\gamma [gon] = \lambda \operatorname{sen} \varphi \left(1 + \frac{\lambda^3}{3} \cos^2 \varphi \right) \frac{200}{\pi}$$

Fig.9 - Riduzioni angolari

Se si utilizzano invece misure di azimut con giroscopio occorre ancora tenere conto della convergenza della trasformata del meridiano γ , calcolabile con la formula inserita in fig. 9, che consente un'approssimazione inferiore a 0.1mgon. L'angolo di direzione della corda α_c viene trasformato in un azimut α sull'ellissoide secondo la:

$$\alpha = \alpha_c + \gamma - \varepsilon$$

Al problema geometrico di riduzione degli azimut si aggiunge un problema di tipo fisico, legato alla deviazione della verticale. La deviazione della verticale ν

lineari e angolari, dal momento che è ben noto che non esistono cartografie "equidistanti" su tutto il piano della rappresentazione.

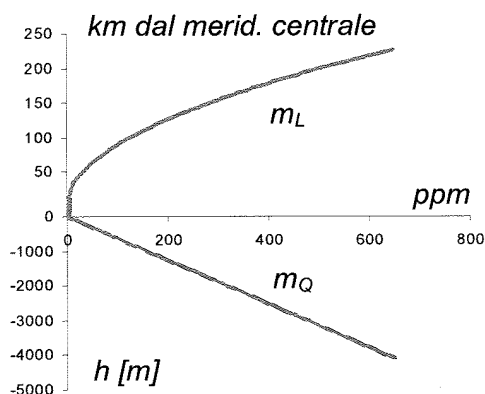
Se si utilizza la rappresentazione di Gauss, se l'opera non è troppo estesa in longitudine e non presenta forti variazioni di quota, un sistema isometrico è realizzabile ponendo contemporaneamente:

1. il fuso origine della rappresentazione su un meridiano posto in posizione baricentrica nella zona del tracciato e modulo di contrazione pari a 1 (invece di 0.9996). Detta condizione realizza un modulo di deformazione lineare medio $m_L \approx 1$;
2. l'utilizzo di uno o più riferimenti altimetrici locali ciascuno dei quali con una superficie di riferimento (spesso è sufficiente una sfera locale) passante per una quota media del tracciato dell'opera. Ciò si realizza aumentando il valore del raggio della sfera. Detta condizione realizza un fattore di riduzione per la quota $m_Q \approx 1$.

Ad esempio, una deformazione di 10 ppm (1cm/1km), alla latitudine di 45° può avvenire a causa di uno spostamento dal meridiano centrale del fuso pari a circa ± 28 km nella componente Est (ovvero in una fascia di 56 km) o da una variazione di quota di circa ± 60 m, assorbita dall'aumento del raggio della superficie di riferimento della stessa entità.

Ne risulta che un sistema così definito può essere considerato isometrico (a meno di deformazioni residue di 10^{-5}) per opere che si estendano con variazioni in longitudine comprese in una fascia di $\Delta Est = 56$ km e con dislivelli fino a $\Delta h = 120$ m, senza limiti di estensione in latitudine.

Per estensioni eccedenti i limiti indicati, occorre utilizzare più sistemi di



referimento nei quali può essere variato sia il meridiano di origine che il riferimento altimetrico locale. Il passaggio fra questi diversi sistemi nelle zone di transizione, si realizza generalmente creando fasce di sovrapposizione tra zone nelle quali vengono calcolate le "coordinate doppie", ovvero note in entrambi i sistemi di tracciamento. Per ottimizzare la definizione dei sistemi isometrici e aumentarne se possibile la

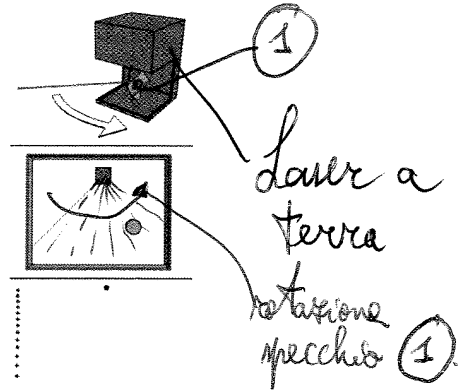
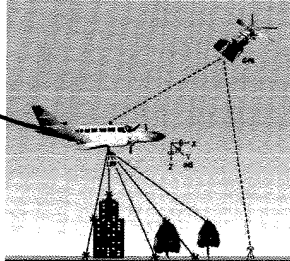
fig. 10 - Andamento delle riduzioni e deformazioni

3. Carosio, A. Reis, O. (1995): *Méthodes géodesiques et modèles mathématiques pour l'implantation des nouvelles transversales alpines*. In rivista "Mensuration Photogrammétrie Génie Rural" – Svizzera.
4. Bellone T., Cina A., Manzino A., Tomatis M. (1995): "Controllo di movimento franoso in prossimità di un grande manufatto mediante l'uso di misure satellitari GPS". In: Rivista "GEAM" n°2-3 1995. (pagg. 93-99).
5. Cina, A. Venuti, G. (1998): *Inquadramento della Bologna-Firenze con il GPS*. "Le strade", 10/98.
6. Cina, A (2000). *GPS. Principi, modalità e tecniche di posizionamento*. Torino, Celid,
7. Dequal, S. (1996): *Linea TAV Bologna-Firenze. Dal progetto al terreno*. "Le strade", 6/96.

La misura delle direzioni

Può avvenire in diverse modalità:
 1) **Misura coordinate** del punto di applicazione con **GNSS** e degli **assetti** con piattaforma inerziale **IMU/INS**. Tipico dei sensori **laser aerei**

Laser aereo: affrontiamo il movimento del mezzo per far spuntare il sensore

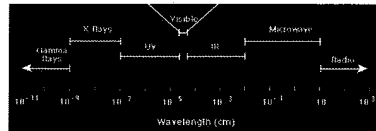
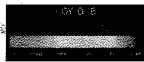


2) Misura attraverso la **rotazione dello strumento e di uno specchio** emettitore. Tipico dei **laser terrestri**

4

La misura della distanza: Laser

Nel LIDAR si determina la distanza di un oggetto o di una superficie usando impulsi laser. Esso opera nel campo delle radio onde, la distanza di un oggetto è determinata misurando l'intervallo di tempo tra la trasmissione di un impulso e la ricezione del segnale riflesso.



Le lunghezze d'onda usate sono dell'ordine di grandezza del particolato in sospensione nell'atmosfera:

→ Sensibilità a vapore d'acqua, aerosol, polveri...

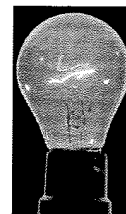
È possibile scegliere la lunghezza adatta per varie situazioni. In generale si ha che $300\text{ nm} < \lambda < 1600\text{ nm}$

5

Natura del raggio laser

Light Amplification by **Stimulated Emission of Radiation**

- sorgente ottica di fotoni coerenti,
- emessi in un fascio stretto
- energia elevata
- stretto spettro di emissione (quasi monocromatico)
- impulsi brevi o modulazione



Al contrario, una lampadina ad incandescenza emette fotoni incoerenti in quasi tutte le direzioni

6

laser distanziometrici TOF

$$\frac{t_a}{V_a} = \frac{T}{V}$$

La valutazione dei **tempi residui** t_a e t_b , è fatta da un condensatore caricato da una corrente continua: un impulso T corrisponde ad una data tensione V e i residui sono forniti dalle variazioni V_a e V_b di tale tensione, secondo le relazioni:

$$t_a = \frac{V_a}{V} T$$

$$t_b = \frac{V_b}{V} T$$

Le precisione della distanza misurata con impulsi è paragonabile a quella con misure di fase e dell'ordine di pochi ppm*d

laser distanziometrici a misura di fase

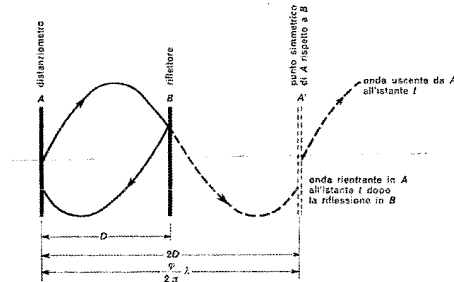
problema analogo a quello di G-B e distanziometrici.

Misuriamo lo sfasamento tra un'onda sinusoidale emessa:

$$s_e(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

e quella rientrante: $s_r(t) = A \sin(\omega(t + \Delta t) + \varphi_0)$

e sommiamo il numero intero di lunghezze d'onda:



$$d = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda \Delta \varphi}{2 \cdot 2\pi}$$

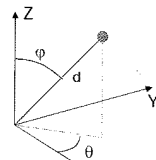
Precisione di poche ppm * d

diviso per 2 perché c'è andata e ritorno

Precisione dei laser distanziometrici

La precisione è centimetrica. Dalla propagazione della varianza:

φ e θ vengono rilevati dai sensori dello strumento



$$X = d \sin \varphi \cos \theta$$

$$Y = d \sin \varphi \sin \theta$$

$$Z = d \cos \varphi$$

propagazione della varianza:

$$\sigma_x = \sqrt{(\sin \varphi \cos \theta)^2 \sigma_d^2 + (d \cos \varphi \cos \theta)^2 \sigma_\varphi^2 + (d \sin \varphi \sin \theta)^2 \sigma_\theta^2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{(\sin \varphi \sin \theta)^2 \sigma_d^2 + (d \cos \varphi \sin \theta)^2 \sigma_\varphi^2 + (d \sin \varphi \cos \theta)^2 \sigma_\theta^2}$$

$$\sigma_z = \sqrt{\cos^2 \varphi \sigma_d^2 + (d \sin \varphi)^2 \sigma_\varphi^2}$$

Caratteristiche tecniche dei laser terrestri

La precisione e la portata non sono che due degli aspetti che devono essere considerati per stabilire la qualità di uno strumento laser scanner nel rilievo di un particolare oggetto (forma, dimensione, natura, localizzazione). Non meno importanti risultano:

- ✓ velocità di acquisizione;
- ✓ risoluzione di scansione e divergenza di raggio laser;
- ✓ portata reale;
- ✓ campo di misura;
- ✓ riconoscimento automatico di segnali;
- ✓ acquisizione RGB;
- ✓ autonomia operativa;
- ✓ maneggevolezza;
- ✓ software di acquisizione e di gestione.

→ i laser triangolatori sono molto lenti

16

Caratteristiche operative dei laser terrestri

VELOCITÀ DI ACQUISIZIONE

Velocità di acquisizione superiori a 1000 pt/s non consentono di raggiungere realmente maggiori velocità nella scansione di un oggetto complesso. Influiscono in modo determinante i tempi di settaggio dello strumento, di analisi dei dati acquisiti e di spostamento dello strumento nelle varie posizioni necessarie.

RISOLUZIONE DI SCANSIONE E DIVERGENZA DEL RAGGIO

La risoluzione di scansione è teoricamente pari all'ampiezza dell'angolo di rotazione del raggio laser tra due punti adiacenti. Se la divergenza del raggio ad una determinata distanza è tale da superare questo intervallo la risoluzione di scansione effettiva ovviamente decresce. Infatti le distanze misurate sono la media delle distanze dei punti contenuti nell'area di impatto del raggio.

17

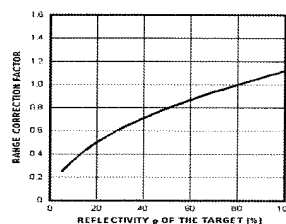
Caratteristiche operative dei laser terrestri

PORTATA EFFETTIVA

Dipende dal mezzo nel quale si propaga il raggio laser (rifrazione).

Dipende dal materiale che costituisce l'oggetto e dalla sua rugosità.

Dipende anche dalla presenza di radiazioni di disturbo (luce solare riflessa, radiazioni artificiali dell'oggetto o di altri corpi posti in prossimità dell'oggetto stesso).



CAMPO DI MISURA

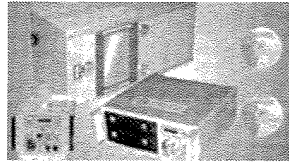
Ricordando che la sfera ha un'ampiezza di 4π steradiani i laser scanner terrestri possono essere fissi con campo pari a 0.5 steradiani (analogo al campo di una camera fotografica), rotanti attorno a un asse con campo non superiore a 5 steradiani, rotanti attorno a due assi con campo variabile tra 11.6 steradiani e 4π steradiani.

18

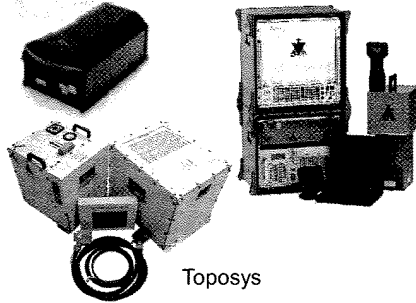
il trasporto del sensore avviene mediante il mezzo.

Alcuni sistemi LIDAR da aereo

Leica Geosystems Optech International



Riegel

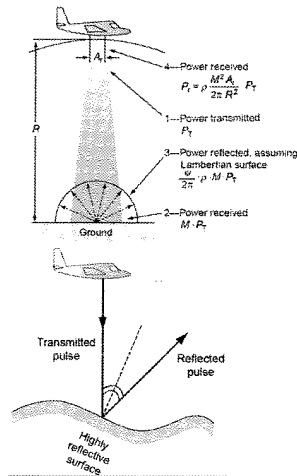


Toposys

Sistema	Divergenza	Frequenza	α	h	Echi	Intensità
TopoSys Falcon III	0.7 mrad	50 - 125 kHz	27°	30 - 2500 m	9 / Full	12 bit
Optech ALTM 3100	0.3 - 0.8 mrad	100 kHz	0° - 50°	80 - 3500 m	4	12 bit
Saab TopEye Mk II		50 kHz	14° - 20°	60 - 1000 m		16 bit

22

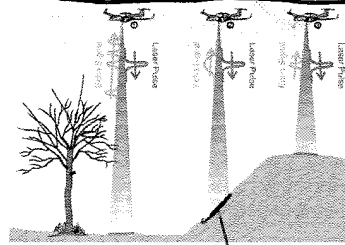
Sistemi LIDAR mobili: impulsi di ritorno



Quando una radiazione luminosa colpisce un corpo essa è in parte:

- Assorbita
- Riflessa
- Trasmessa

La parte più utile è quella riflessa, nella direzione d'incidenza → misura della distanza. Le cose si complicano per la «divergenza del raggio laser»



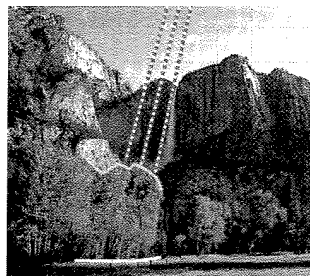
per il sensore
La parte più utile è quella riflessa, nella direzione d'incidenza → misura della distanza. Le cose si complicano per la «divergenza del raggio laser»
cioè il raggio è contenuto in certi angoli solidi.

noi misureremo una media di tutti gli impulsi di radiazione che arrivano su questa superficie pendente (un po' di segnale arriva prima, un po' dopo).

Sistemi LIDAR mobili: echi di risposta

Per la divergenza del raggio laser la superficie d'impatto aumenta con la distanza dall'oggetto e l'area d'impatto non è puntuale.

- Se la superficie ha delle asperità una parte del raggio viene riflessa prima della restante parte
- Il percorso effettuato dalle diverse parti del raggio è differente → diversi treni d'onda chiamati impulsi di ritorno o echi



- una superficie vegetata avrà per lo meno due impulsi di ritorno.
- Alcuni laser possono registrare un solo impulso, altri anche il secondo o fino a 4
- Se le differenze di distanza sono minori di un valore di soglia, si registra 1 solo impulso e la distanza è determinata come media delle varie distanza.

1° impulso corrisponde alla chioma.
2° impulso corrisponde alla morfologia del terreno.

dunque, saremo in grado di filtrare la vegetazione.

24

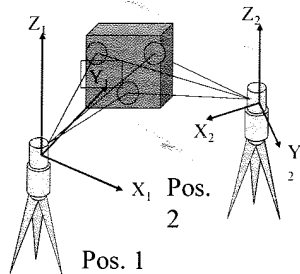
Se abbiamo più scansioni parziali di uno stesso oggetto, per portarle nello stesso S.D.R. abbiamo effettuare una rototraslazione:

Allineamento e registrazione di scansioni Laser

Oggetti complessi possono richiedere varie scansioni parziali da terra, spostando lo strumento.

Il SR strumentale è fisso e il cambiamento della stazione implica che le nuvole di punti siano riferite a sistemi diversi e indipendenti da quelli precedenti

→ Unire le scansioni (allineare o registrare) ovvero determinare i parametri d'orientamento delle singole scansioni per esprimerle in un sistema unico



$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

matrice 2x2 se è sempre lungo la verticale (lo vedo tramite un inclinometro messo sullo strumento)

Individuando un numero sufficiente di punti comuni a due scansioni adiacenti è possibile determinare i parametri della rototraslazione spaziale che trasforma i punti della seconda scansione nel S.D.R. della prima.

28

Individuazione punti omologhi tra 2 scansioni

La registrazione tra due scansioni presuppone che siano stati identificati un certo numero di punti corrispondenti o «omologhi»

Tale corrispondenza può avvenire con procedimento:

- **manuale:** da ricercare in base alla forma locale della superficie
- **automatico:** presuppone che i punti siano segnalizzati con dei **marker (o target)** posizionati appositamente sull'oggetto

La **dimensione dei marker** deve essere calcolata in funzione della **risoluzione angolare** imposta per la scansione, **della distanza** che intercorre tra l'oggetto ed il sensore laser e della **divergenza** del raggio laser.

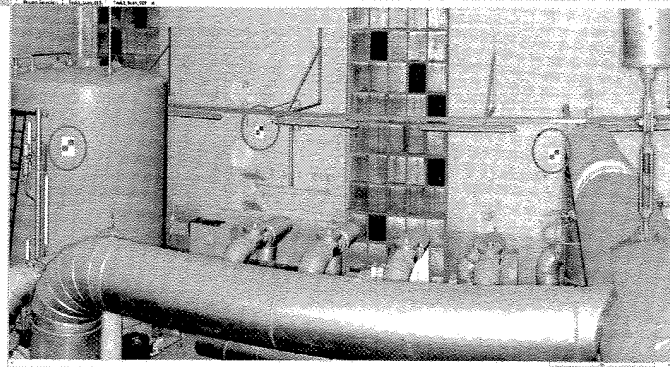
La **posizione** relativa e la distribuzione dei **marker** deve essere tale da **non incorrere in situazioni singolari**.

Da due scansioni adiacenti devono essere **visibili almeno 3 punti** in comune, condizione necessaria e sufficiente affinché sia possibile stimare i parametri di registrazione di una scansione secondo il sistema di riferimento dell'altra.

29

Scansione con marker presegnalizzati

tutti i marker uniformemente distribuiti per evitare effetti camera; inoltre non li mette tutti su una stessa verticale!



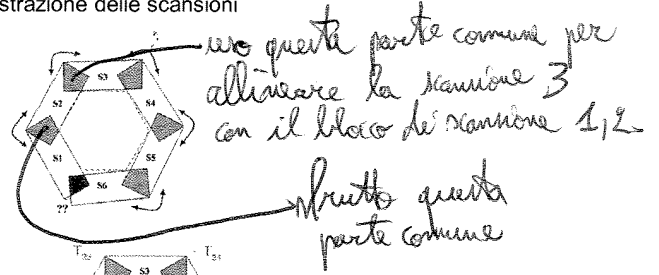
30

Come mettiamo le vorelle scansioni in uno stesso s.d.r.?

Allineamento pairwise di più scansioni

Indichiamo con S_1, S_2, \dots, S_n n scansioni parziali da registrare.
La successione delle operazioni per la registrazione delle scansioni è la seguente:

- 1) $S_{1,2}$ = registra S_1 e S_2
- 2) $S_{12,3}$ = registra S_{12} e S_3
- 3) $S_{123,4}$ = registra S_{123} e S_4
- 4) $S_{1234,5}$ = registra S_{1234} e S_5
- 5) S_{12345} e S_6 = registra S_{12345} e S_6
- 6)



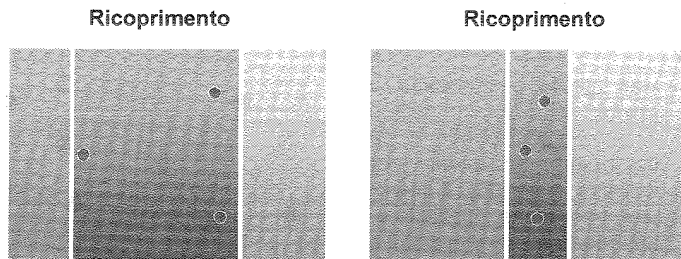
È un po' quello che accade nelle lami che poligonalì.

Il risultato ottenuto mostra però un effetto di propagazione dell'errore per cui la prima e ultima scansione, mostrano disallineamenti → è una soluzione approssimata per eseguire successivamente una registrazione globale,

Il problema con le varie scansioni si traduce in un s.d.r. che può essere risolto, rispetto a quella delle altre scansioni, anche di qualche decina di gradi (non trascurabile!!!)

La posizione dei marker

I punti scelti devono essere disposti in modo tale da evitare la configurazione di "quasi allineamento" che conduce a soluzioni instabili



Buona distribuzione dei punti

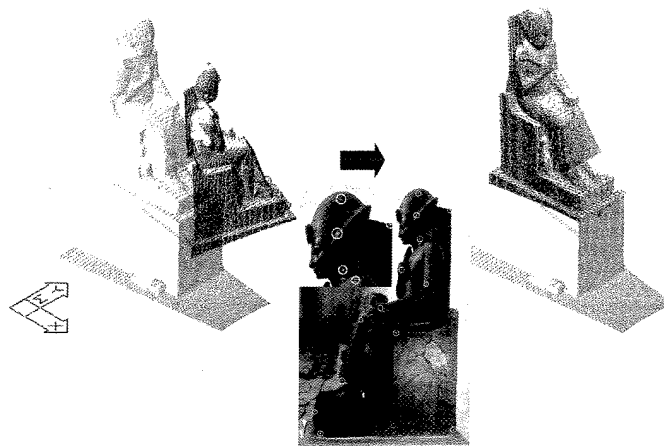
Distribuzione critica dei punti

Quindi la matrice di rotazione, che non è lineare (perché contiene sin e cos) lavora l'insieme della nell'intervallo di valori approssimati

Nano vicini alle occasioni di una curva.

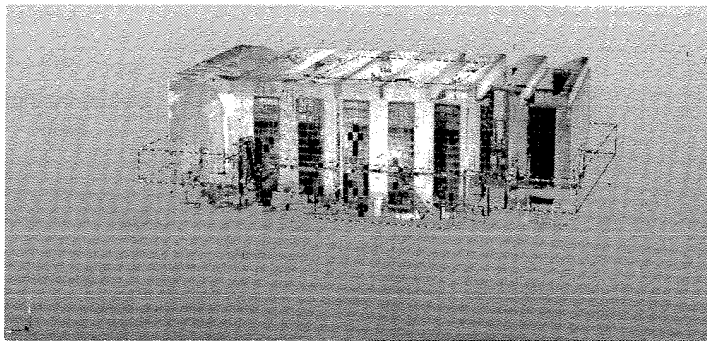
35

Un esempio di allineamento di due scansioni



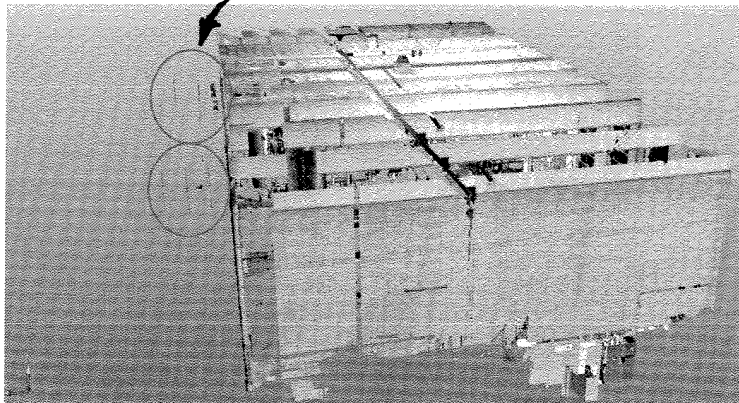
36

Allineamento di due scansioni (bianca e gialla) in un sistema locale



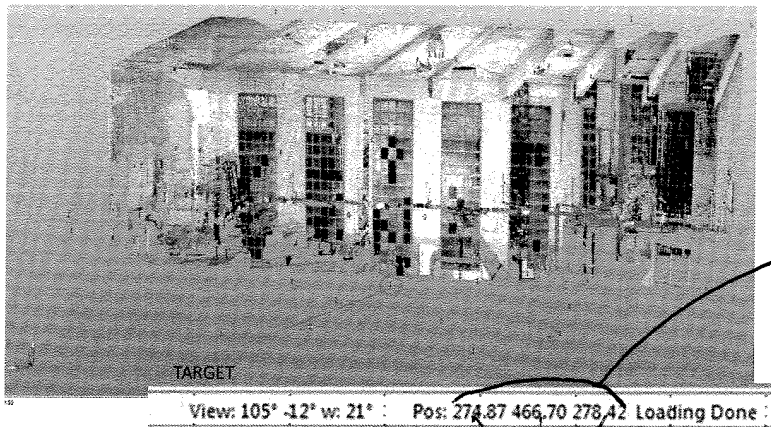
40

Outlier da filtrare



44

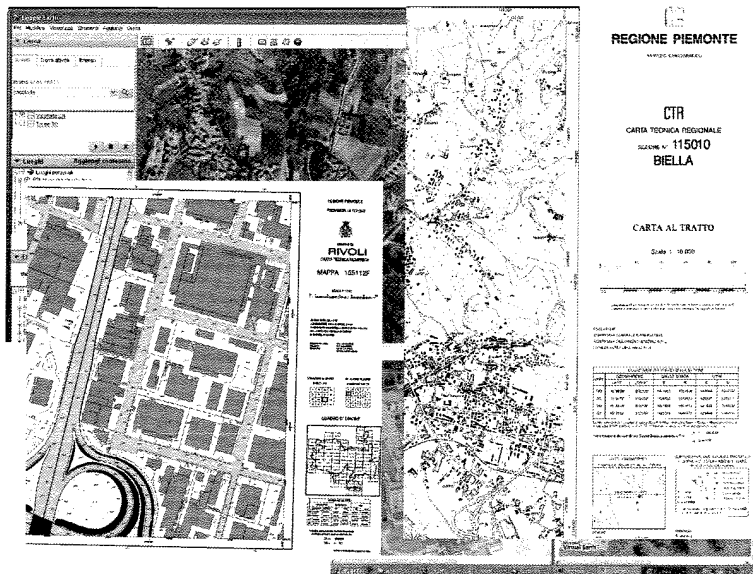
Registrazione di scansioni in un sistema globale



*Ci muoviamo
al mouse e
troviamo queste
coordinate.*

*sono distanze fuori dalla portata del
nostro laser, quindi queste coordinate sono già*

Adesso, al contrario, dalle misure fatte con il laser vogliamo utilizzare
per georeferenziare le ~~coordinate~~ misure fotogrammetriche.

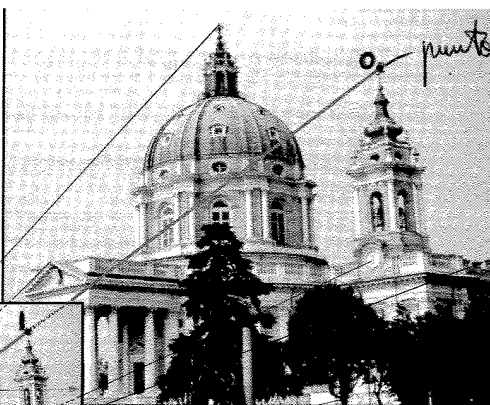


4

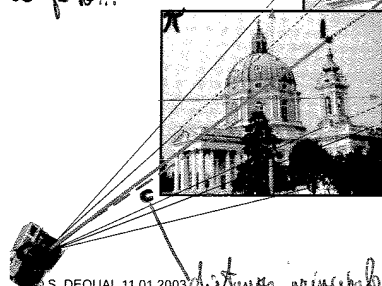
Il fotogramma è una prospettiva centrale dell'oggetto.

La prospettiva centrale trasforma un oggetto 3D in 2D

è ciò che facciamo facendo una foto!!!



oggetto: viene proiettato sul piano π nel punto I (immagine).



O, I, C sono allineati: potremo scrivere delle equazioni di allineamento o «colinearità»

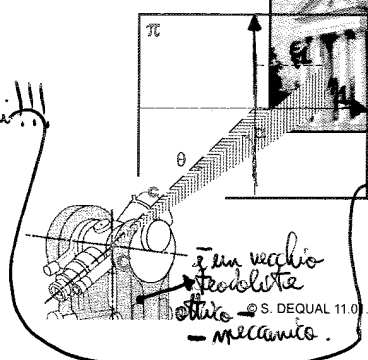
distanza principale cioè quella tra il centro di presa ed il piano su cui proiettiamo l'oggetto.

5

Analogia col teodolite:
Misurare le coordinate del punto immagine sul fotogramma equivale a misurare l'angolo azimutale e l'angolo d'inclinazione con un teodolite.

... e la distanza?

Quando facciamo una fotografia e misuriamo un punto immagine, in realtà stiamo misurando degli angoli!!!



Tangenti di direzione:

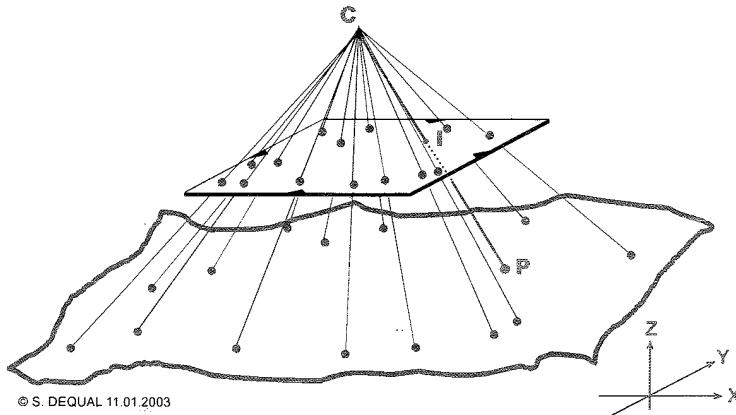
$$\theta = \arctan \xi_1/c$$

$$\alpha = \arctan (\eta_1 \cos \theta/c)$$

6

LA STELLA DI DIREZIONI

Definito l'orientamento interno è possibile tracciare la **stella di direzioni** formata dalle rette che uniscono i singoli punti immagine con il centro di proiezione.



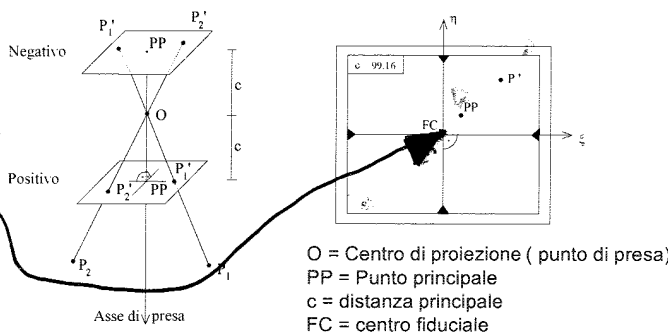
© S. DEQUAL 11.01.2003

40

L'orientamento interno

Definisce la **posizione del centro di proiezione** rispetto al sistema fiduciale definito sul piano del fotogramma.

Il costruttore fa in modo che il centro di proiezione O cada nel centro fiduciale del p.d.r. Anche se, in pratica è difficile realizzare ciò!



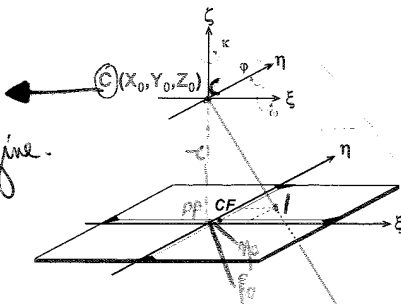
O = Centro di proiezione (punto di presa)
 PP = Punto principale
 c = distanza principale
 FC = centro fiduciale

L'orientamento interno è l'insieme dei parametri utili a definire la geometria interna della camera da presa (ξ_0, η_0) **coordinate del punto principale** nel sistema fiduciale, c **distanza principale** della camera

parametri del sistema principale 11

PARAMETRI DI ORIENTAMENTO interno ed esterno

origine di un sistema di coordinate immagine.

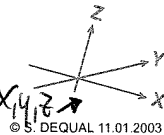


L'orientamento esterno è l'insieme dei parametri utili alla definizione dell'assetto spaziale della camera (fotogramma + punto principale internamente orientati) rispetto ad un sistema di coordinate tridimensionale.

parametri che mi definiscono la posizione e l'assetto della camera.

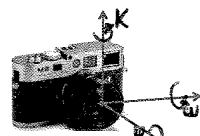
Essenzialmente definisce la **posizione spaziale di un corpo rigido (la camera) nello spazio**. Quindi è definito da 6 parametri: tre traslazioni e tre rotazioni.

Gli assi ξ, η, ζ non sono paralleli al sistema di riferimento ma ci sono 3 angoli (k, φ, ω) .



© S. DEQUAL 11.01.2003

QIP devono essere ALLINEATI.



42

Equazioni di collinearità: modalità «prospettivizzazione»

coordinate immagine in funzione dei parametri di orientamento interno ed esterno e delle coordinate oggetto X Y Z.

Equazioni di prospettivizzazione

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 - c \frac{r_{11}(X-X_0) + r_{21}(Y-Y_0) + r_{31}(Z-Z_0)}{r_{13}(X-X_0) + r_{23}(Y-Y_0) + r_{33}(Z-Z_0)} \\ \eta = \eta_0 - c \frac{r_{12}(X-X_0) + r_{22}(Y-Y_0) + r_{32}(Z-Z_0)}{r_{13}(X-X_0) + r_{23}(Y-Y_0) + r_{33}(Z-Z_0)} \end{cases}$$

Equazioni di collinearità in cui il sistema immagine ha rotato di angoli w, φ, k .

Ad ogni punto «oggetto» di coordinate X Y Z corrisponde un solo punto immagine di coordinate $\xi \eta$

Se abbiamo un punto oggetto di coordinate X, Y, Z riusciamo a ricavare le coordinate immagine?

Sì: noi possiamo sempre prospettivizzare un punto oggetto in una immagine, noti i parametri di orientamento interno ed esterno. 16

Equazioni di collinearità: modalità «restituzione»

Per ricavare le inverse partiamo dalla matrice di rotazione che lega il sistema oggetto X Y Z a quello parallelo X' Y' Z':

Raggiogge del sistema parallelo al sistema oggetto:

$$\begin{aligned} \frac{X-X_0}{Z-Z_0} &= \frac{r_{11}(X'-X'_0) + r_{12}(Y'-Y'_0) + r_{13}(Z'-Z'_0)}{r_{31}(X'-X'_0) + r_{32}(Y'-Y'_0) + r_{33}(Z'-Z'_0)} \\ \frac{Y-Y_0}{Z-Z_0} &= \frac{r_{21}(X'-X'_0) + r_{22}(Y'-Y'_0) + r_{23}(Z'-Z'_0)}{r_{31}(X'-X'_0) + r_{32}(Y'-Y'_0) + r_{33}(Z'-Z'_0)} \end{aligned}$$

e moltiplichiamo numeratore e denominatore a destra per: $\frac{-c}{Z'-Z'_0}$

$$\frac{(X'-X'_0) \frac{-c}{Z'-Z'_0}}{Z'-Z'_0} = \xi - \xi_0$$

$$\frac{(Y'-Y'_0) \frac{-c}{Z'-Z'_0}}{Z'-Z'_0} = \eta - \eta_0 \quad \text{Da cui:}$$

$$\frac{(Z'-Z'_0) \frac{-c}{Z'-Z'_0}}{Z'-Z'_0} = -c$$

$$\begin{aligned} \frac{X-X_0}{Z-Z_0} &= \frac{r_{11}(\xi - \xi_0) + r_{12}(\eta - \eta_0) - r_{13}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c} \\ \frac{Y-Y_0}{Z-Z_0} &= \frac{r_{21}(\xi - \xi_0) + r_{22}(\eta - \eta_0) - r_{23}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c} \end{aligned}$$

eq. di restituzione: noti ξ ed η posso determinare X, Y, Z.

Equazioni di collinearità: modalità «restituzione»

coordinate oggetto in funzione dei parametri di orientamento interno ed esterno e delle coordinate immagine

Se ad ogni punto oggetto corrisponde un punto immagine, è altrettanto vero che ad un punto immagine corrisponde un punto oggetto? Con sole coord. immagine NON riusciamo a determinare le coordinate del punto oggetto.

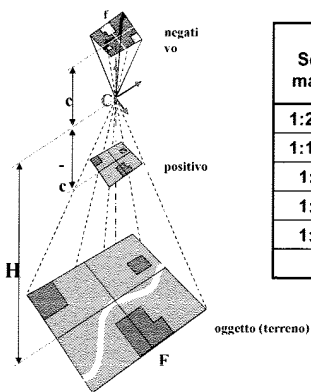
$$\begin{aligned} X &= X_0 + (Z - Z_0) \frac{r_{11}(\xi - \xi_0) + r_{12}(\eta - \eta_0) - r_{13}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c} \\ Y &= Y_0 + (Z - Z_0) \frac{r_{21}(\xi - \xi_0) + r_{22}(\eta - \eta_0) - r_{23}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c} \end{aligned}$$

Ad ogni punto «immagine» di coordinate $\xi \eta$ possono corrispondere infiniti punti oggetto a meno di non «bloccare la Z»

→ Con un solo fotogramma non possiamo ricostruire l'oggetto tridimensionale → avrà bisogno di 2 fotogrammi.

Non riusciamo a determinare X, Y se la Z è variabile → mi servono 2 fotogrammi. Se la Z è costante → basta un solo fotogramma.

La presa fotogrammetrica: scala fotogramma e scala carta

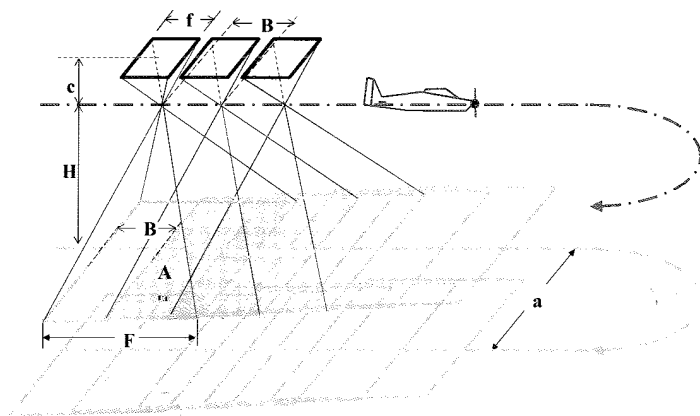


Scala mappa	Scala media fotogrammi	QUOTA RELATIVA DI VOLO	
		c = 150 mm	c = 300 mm
1:25.000	1:25.000	3750	-
1:10.000	1:20.000	3000	-
1:5.000	1:15.000	2250	-
1:2.000	1:8.000	1200	2400
1:1.000	1:5.000	750	1500
1:500	1:3.000	500	900

$f/F = 1/m = c/H$

22

La presa fotogrammetrica: piano di volo (terreno pianeggiante)



Δt = intervallo di scatto
 H = quota relativa di volo
 F = lato dell'area fotografata

B = base di presa = avanzamento
 a = interasse fra le strisciate
 A_m = area del modello

© S. DEQUAL 11.01.2003

23

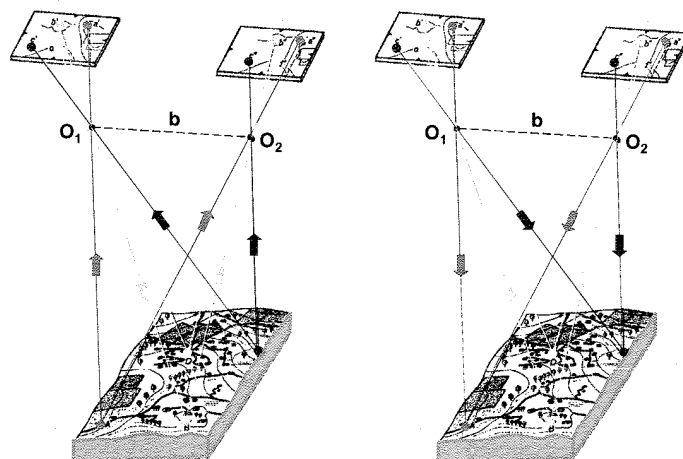
La presa fotogrammetrica piano di volo

- Fattore di scala medio $m = H/c$
- Lato dell'area fotografata $F = f \cdot m$
- Base sul fotogramma $b = B / m$
- Quota relativa di volo $H = c \cdot m$
- Quota assoluta di volo $Z_o = H + Z_t$
- Ricoprimento longitudinale (%) $h = \frac{F - B}{F} \cdot 100 = \left(1 - \frac{B}{F}\right) \cdot 100$
- Ricoprimento trasversale (%) $g = \frac{F - A}{F} \cdot 100 = \left(1 - \frac{A}{F}\right) \cdot 100$
- Area ricoperta da un fotogramma $A_f = F^2 = f^2 \cdot m^2$
- Base per un ricoprimento h % $B = F \cdot \left(1 - \frac{h}{100}\right)$

© S. DEQUAL 11.01.2003

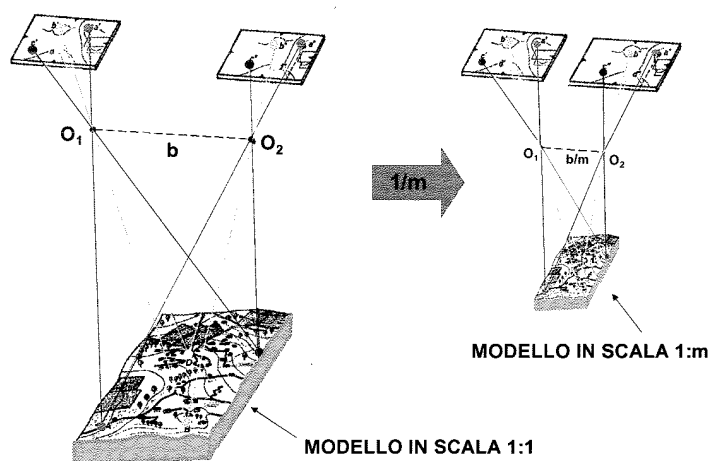
24

LA RESTITUZIONE



28

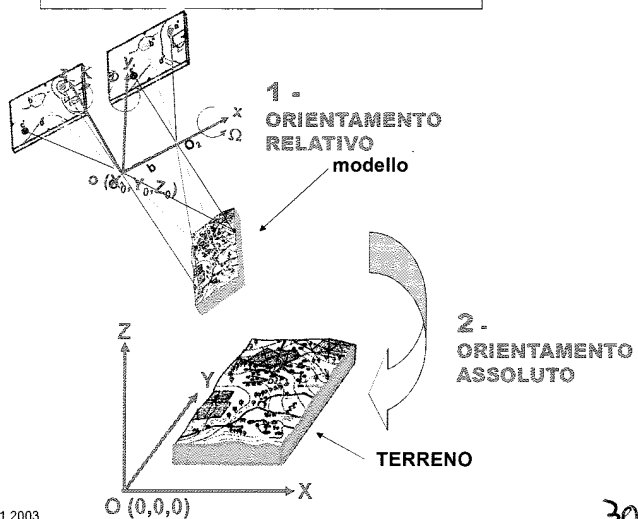
SCALA DEL MODELLO



© S. DEQUAL 11.01.2003

29

ORIENTAMENTO ESTERNO IN DUE FASI

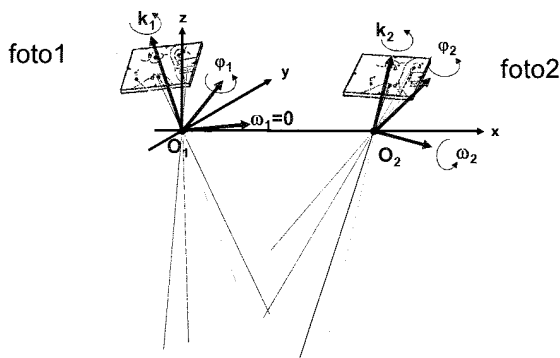


© S. DEQUAL 11.01.2003

30

ORIENTAMENTO RELATIVO

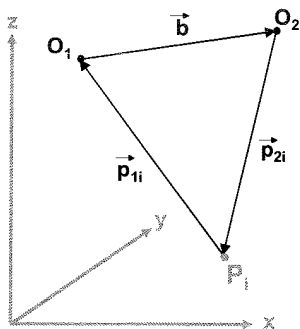
questo procedimento si chiama **O. R. SIMMETRICO**



© S. DEQUAL 11.01.2003

34

ORIENTAMENTO RELATIVO ANALITICO



$$\vec{b} \wedge \vec{p}_{2i} \times \vec{p}_{1i} = 0$$

$$i = 1 \dots \geq 5$$

EQUAZIONI DI COMPLANARITÀ

© S. DEQUAL 11.01.2003

35

ORIENTAMENTO RELATIVO

ASIMMETRICO

dall'equazione di complanarità si ricava la
EQUAZIONE ALLA PARALLASSE D'ALTEZZA

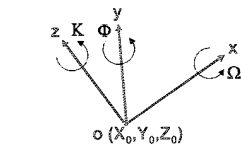
$$p_\eta = \frac{c}{h} b_y + \frac{\eta_2}{h} b_z - \frac{\xi_2 \eta_2}{c} \phi_2 + \left[c + \frac{\eta_2^2}{c} \right] \omega_2 + \xi_2 \kappa_2 \quad [1]$$

ponendo $p_\eta = 0$ e scrivendo almeno 5 di queste equazioni in corrispondenza di almeno 5 punti omologhi, si ricavano i 5 parametri incogniti (2 lunghezze e 3 angoli)

© S. DEQUAL 11.01.2003

36

**TRASFORMAZIONE 3D a 7 parametri:
3 traslazioni + 3 rotazioni + 1 variazione isotropa di scala**

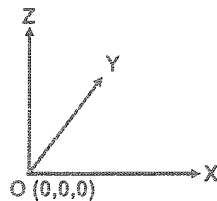


IN FORMA MATRICIALE:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + m \mathbf{R} \mathbf{x}$$

PER ESTESO:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



40

TRASFORMAZIONE 3D a 7 parametri (continua)

È COME DIRE:

$$\begin{cases} X = f(X_0, Y_0, Z_0, \Omega, \Phi, K, m, x, y, z) \\ Y = f(X_0, Y_0, Z_0, \Omega, \Phi, K, m, x, y, z) \\ Z = f(X_0, Y_0, Z_0, \Omega, \Phi, K, m, x, y, z) \end{cases}$$

PRIMA dell'orientamento assoluto analitico
 $X_0, Y_0, Z_0, \Omega, \Phi, K, m$ sono parametri INCOGNITI

Per determinarli, ci vogliono almeno 7 equazioni, per scrivere le quali si collimano punti di coordinate note ("PUNTI DI APPOGGIO")

41

EQUAZIONI AI PUNTI DI APPOGGIO

Se collimiamo un punto d'appoggio **PLANO-ALTIMETRICO** (di cui sono note X, Y, Z , e di cui si misurano le coordinate modello x, y, z), si possono scrivere 3 equazioni

Se collimiamo un punto d'appoggio **PLANIMETRICO** (di cui sono note solo X, Y), si possono scrivere 2 equazioni

Se collimiamo un punto d'appoggio **ALTIMETRICO** (di cui è nota solo Z), si può scrivere solo 1 equazione

PER ESEGUIRE L'ORIENTAMENTO ASSOLUTO, BISOGNA DISPORRE DI ALMENO 7 EQUAZIONI, ad es:
3 punti P-A o 2 P-A + 1 A (minimo!) o 3 P + 2 A

42

triangolazione fotogrammetrica: principio stelle proiettive

I punti immagine e il centro di presa di ciascun fotogramma definiscono una stella di raggi nello spazio. I parametri di orientamento esterno di tutte le stelle del blocco, ossia tutti i fotogrammi, vengono calcolati simultaneamente.

I dati di partenza sono le coordinate immagine dei punti di legame (punti presenti in più di un fotogramma) e le coordinate immagine e oggetto dei punti di appoggio.

Le stelle proiettive vengono traslate e ruotate in modo che i raggi si intersechino al meglio in corrispondenza dei punti di legame e passino il più possibile per i punti di appoggio.

Equazioni alle misure

Le equazioni risoltrici sono rappresentate dalle equazioni di collinearità, le quali devono quindi essere linearizzate come abbiamo già visto all'inizio del corso.

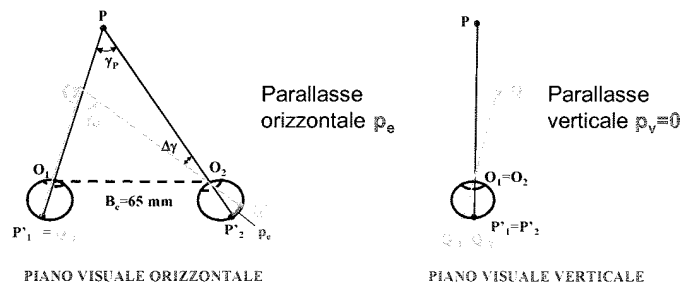
Ogni punto immagine dà origine a due equazioni per ogni immagine.

Ogni fotogramma metrico introduce 6 incognite.

Ogni punto di legame introduce 3 incognite aggiuntive.

46

La visione stereoscopica naturale



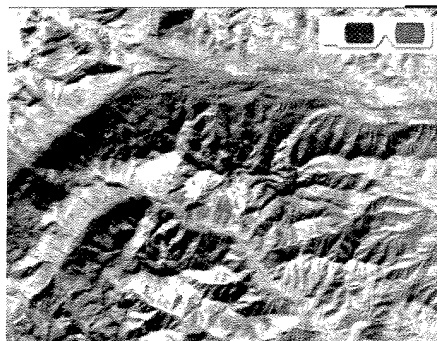
La fusione, in un'unica immagine tridimensionale, delle due immagini formatesi sulle retine in posizioni che differiscono per la parallasse orizzontale e che non presentano parallassi verticali, si chiama **visione stereoscopica o stereoscopia**

47

Visione stereoscopica artificiale: anaglife

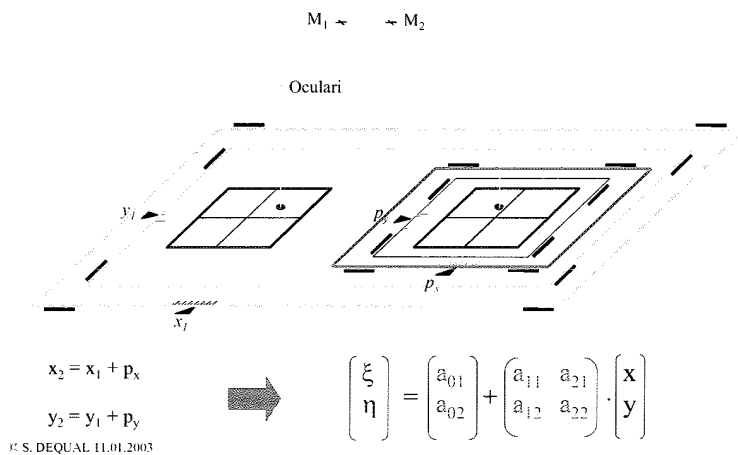
Questa tecnica permette di creare artificialmente la stereoscopia sfruttando i colori complementari.

Stampando le immagini di colori rosso e ciano ed inforcando degli occhiali con due lenti, ognuna in grado di filtrare una componente di colore, è possibile osservare con ogni occhio solo una delle due immagini, permettendo di visualizzare l'immagine 3D



48

Restitutori analitici: stereocomparatore



52

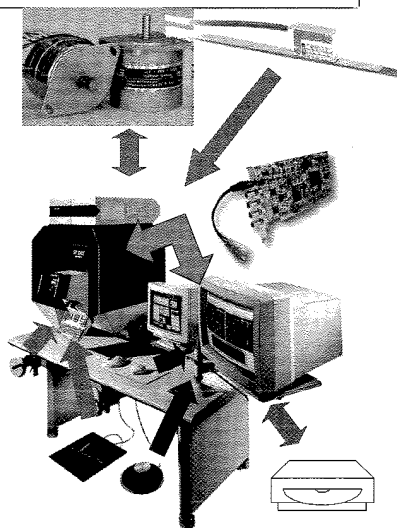
Restitutori analitici

Stereocomparatore: assiste l'operatore nell'individuazione dei punti omologhi (mediante visione stereoscopica) e ne misura le coordinate in un sistema di riferimento piano (sistema strumentale);
Motori di asservimento, movimentazione dei carrelli
Encoder: misura spostamenti carrelli

Calcolatore e periferiche di i/o: eseguono i programmi necessari, ricevono dati dallo stereocomparatore e dai **dispositivi di controllo** gestiti dall'operatore, inviano dati ai motori di asservimento.

Interfaccia: schede elettroniche che consentono lo scambio delle informazioni tra le varie componenti del restitutore.

Software di gestione: insieme dei programmi utili all'assolvimento delle funzioni del restitutore.



53

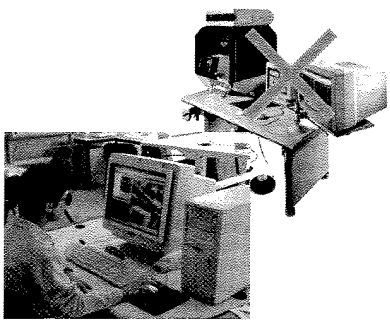
Restitutori digitali

La tradizionale misura di coordinate (restitutori analitici) è sostituita dalla **individuazione del pixel all'interno della matrice immagine** (restituzioni digitali).

La posizione del pixel è **fissa** per definizione all'interno dell'immagine ed è il **sistema di acquisizione** che associa a un determinato pixel il valore radiometrico corrispondente. Esso quindi **costituisce il vero strumento di misura**.

Utilizzando immagini digitali non è più necessario effettuare sofisticate misurazioni con lo stereocomparatore in quanto esse sono già "nascoste" all'interno delle immagini digitali.

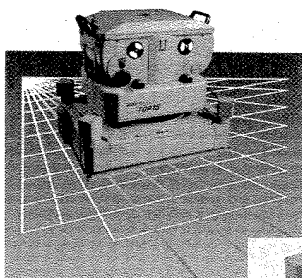
Ne consegue che il **restitutore digitale è solo più costituito dal software**.



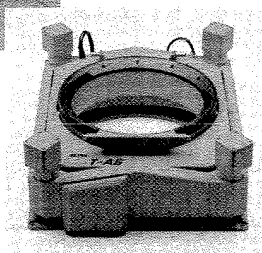
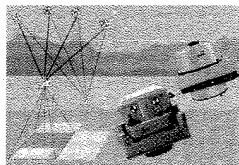
54

Le camere fotogrammetriche

La camera RMK TOP di Zeiss



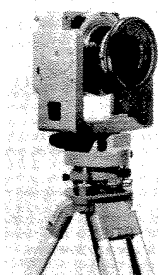
- Obiettivi con focale da 150 e 300 mm
- Compensatore del trascinamento
- Selezione personalizzata delle informazioni da registrare sul fotogramma
- Tempi di esposizione variabili da 1/50 s a 1/500 s
- Peso circa 50 kg



Il basamento consente di attutire le vibrazioni causate dal volo e quindi di garantire una migliore qualità delle foto

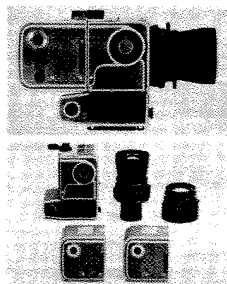
58

Le camere fotogrammetriche terrestri

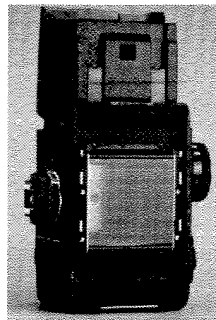


La camera P32 di Wild (1974)

Hasselblad MK-70



Rolleiflex 6006



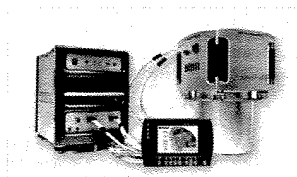
Camere amatoriali

59

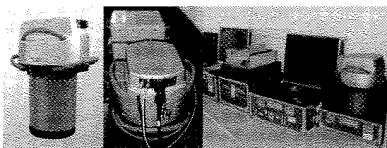
Le camere fotogrammetriche digitali

Aeree:

Vexcel ultracam:



Leica ASD40



Terrestri: camere digitali professionali / amatoriali

- Orientamento interno noto
 - Curve di distorsione dell'obiettivo note
- tramite procedure di calibrazione

60

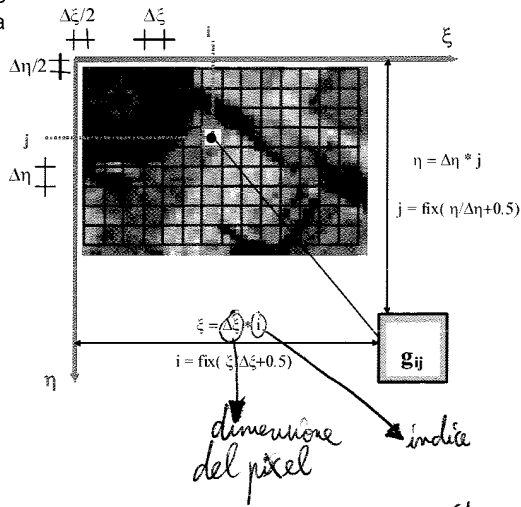
Il n.d.r. è posto all'interno dell'immagine digitale.

Contenuto metrico delle immagini digitali

Occorre fissare un **sistema di riferimento** (ξ, η) che consenta di associare a ogni pixel coordinate reali.

In tale sistema il pixel assume **dimensione finita** $(\Delta\xi, \Delta\eta)$ e si considera la posizione del suo baricentro.

Si può determinare una **corrispondenza biunivoca** tra la posizione (i, j) del pixel all'interno della matrice immagine e le sue coordinate cartesiane (ξ, η) .



64

Da immagini analogiche a digitali: scanner

Scanner fotogrammetrici

Sistemi ottico meccanici di precisione, elevata risoluzione (pixel 9-10 μm), elevata precisione geometrica (1-2 μm)



Scanner DTP



Sono dispositivi di scansione utilizzati per l'**editoria elettronica**. Gestiscono il formato A3 e hanno risoluzioni ottiche superiori a 800 dpi. Il loro utilizzo in ambito fotogrammetrico è stato discusso per molto tempo. Le prove eseguite in ambito internazionale hanno dimostrato che con opportuni **software di calibrazione** è possibile generare immagini digitali che consentono di raggiungere le precisioni richieste nelle usuali applicazioni fotogrammetriche.

65

La densità del campionamento

Le dimensioni del pixel di un'immagine digitale sono generalmente indicate in termini di densità di campionamento (**risoluzione**).

La risoluzione di un'immagine digitale indica il numero di pixel contenuti in una opportuna unità di lunghezza.

La risoluzione viene solitamente indicata in **Dots Per Inch (DPI)** ossia numero di pixel in un pollice (=25.4 mm).

$d_{\text{pix}} = \frac{25400}{\text{dpi}}$ $\text{dpi} = \frac{25400}{d_{\text{pix}}}$

25,4 mm

I pixel utilizzati sono generalmente **quadrati** e quindi un'immagine digitale ha la medesima risoluzione in entrambe le direzioni del sistema di riferimento interno.

risoluzione qualche megapixel nelle camere fotografiche

Es: **200 dpi** - dimensione pixel = 25.4 mm / 200 = 0.127 mm (127 μm)

dpi	Pixel μm	Scala carta				
		1:2.000	1:5.000	1:10.000	1:25.000	1:50.000
100	254	0.51 m	1.27 m	2.54 m	6.35 m	12.70 m
200	127	0.25 m	0.63 m	1.27 m	3.17 m	6.35 m
300	85	0.17 m	0.42 m	0.85 m	2.12 m	4.23 m
400	64	0.13 m	0.32 m	0.63 m	1.59 m	3.17 m

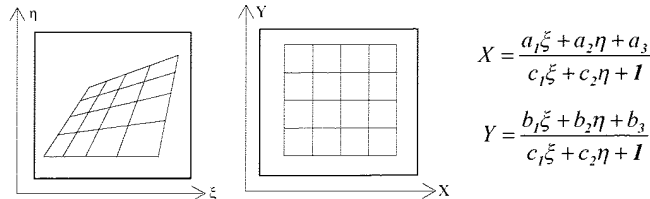
Se dobbiamo acquisire la cartografia (sapiamo che gli errori di graficismo sono 0,2 mm alla scala della carta) -> acquistiamo ALMENO a 200 dpi.

0,25 mm

66

Raddrizzamento e Fotopiani

Se la superficie dell'oggetto è un piano, la prospettiva centrale assume la forma generica rappresentata in figura e la relazione tra punti terreno e punti immagine è data dalle equazioni dell'omografia generale.

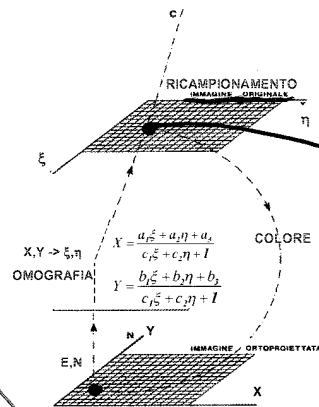


Se sussistono le ipotesi di planarità dell'oggetto, le deformazioni del fotogramma possono essere modellate con le equazioni di omografia generale. L'operazione che permette di eliminare queste deformazioni è chiamata **RADDRIZZAMENTO fotogrammetrico**.

In questo caso, il fotogramma viene trasformato in una proiezione centrale dell'oggetto, con piano parallelo all'oggetto stesso e asse di presa normale al piano dell'oggetto. Questa nuova prospettiva centrale è uguale, a meno di un fattori di scala alla proiezione ortogonale dell'oggetto stesso.

Procedura di raddrizzamento

- Data l'immagine dell'oggetto piano da raddrizzare e una serie di punti noti (X,Y) sull'oggetto:
- Si stimano i coefficienti dell'omografia (necessari almeno 4 punti noti)
- Si considera l'immagine raddrizzata (inizialmente vuota) della quale per ogni pixel si conoscono le coordinate oggetto X,Y
- Per ogni pixel dell'immagine raddrizzata si applicano le equazioni di omografia e si proietta il punto oggetto nello spazio immagine
- Si ricampiona il tono radiometrico (RICAMPIONAMENTO) e lo si assegna al pixel.
- Ripetendo l'operazione per tutti i pixel dell'immagine, si ottiene l'immagine raddrizzata

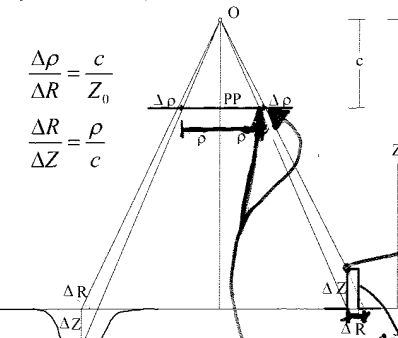


generico pixel di qui ci prendiamo le coordinate xi, eta and anche a prendere l'indice di riga e colonna (i,j) e moltiplicandolo per la dimensione del pixel.

Tutto questo va bene per oggetti piani, ma quanto piano può essere considerato un oggetto?

L'errore planimetrico dovuto alla differenza di quota

Quali sono le variazioni di quota che possono essere considerate trascurabili durante l'operazione di raddrizzamento? Da quali parametri dipendono?



$$\frac{\Delta \rho}{\Delta R} = \frac{c}{Z_0}$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta Z} = \frac{\rho}{c}$$

Le immagini dei punti che non giacciono esattamente sul piano oggetto risultano spostate in direzione del punto principale.

L'entità di tale spostamento radiale, nel caso di fotografia normale, è espresso dalla seguente relazione:

$$\Delta \rho = \Delta R \frac{c}{Z_0} = \Delta Z \frac{\rho}{Z_0} = \Delta Z \frac{\rho}{c \cdot m_b}$$

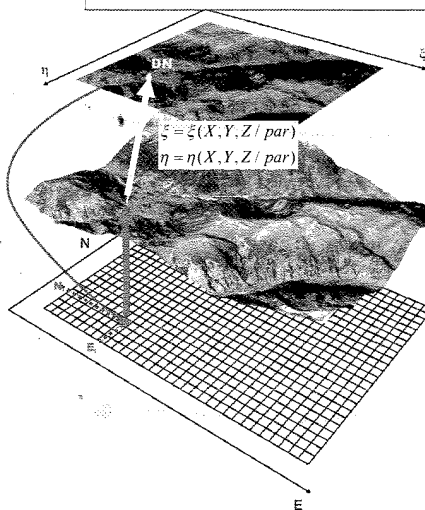
$$m_b = \frac{c}{Z_0} \quad 1/\text{Scala fotogramma}$$

Questa relazione è, con buona approssimazione, valida anche per fotogrammi ripresi con assetto quasi normale.

$$\Delta Z = \frac{\Delta \rho \cdot c \cdot m_b}{\rho}$$

questo punto ha la stessa coordinata del punto al quale, ma quindi lo proietto ottengo un punto diverso da quello al quale.

Concetto di Ortoproiezione



L'ortofoto è una rappresentazione cartografica in forma di immagine digitale geoteferenziata: corrisponde ad una proiezione ortogonale del territorio nel piano cartografico.

Per ogni pixel dell'ortofoto:

- si determinano le coordinate planimetriche (**E,N**)
- mediante un modello altimetrico si interpola la quota (**Z**)
- si proietta il punto 3D sull'immagine (**ξ,η**) mediante un apposito modello
- si determina il/i **DN** da associare alla posizione immagine mediante ricampionamento
- si scrive il DN nel pixel dell'ortofoto

56

Classificazione dell'ortoproiezione

Le ortofoto sono classificate, in funzione della precisione, in 3 tipologie:

- *Ortofoto Speditiva*
- *Ortofoto Ordinaria*
- *Ortofoto di Precisione*

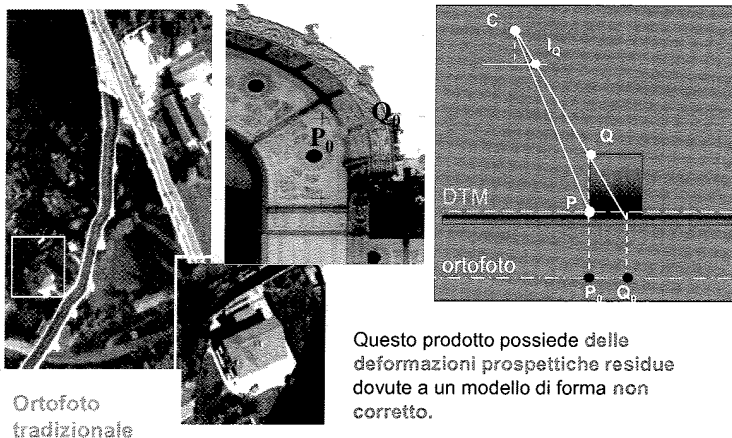
L'*ortofoto speditiva* è una **rappresentazione fotografica** di un oggetto generalmente prodotta con tecniche rapide e economiche. In genere essa viene caratterizzata con una **precisione grafica** corrispondente a **0.3 mm alla scala nominale dell'ortofoto per elementi posti sul terreno** e a **0.9 mm alla scala nominale dell'ortofoto per gli oggetti in elevazione rispetto al terreno (edifici, ponti, viadotti)**. E' utilizzata per applicazioni ambientali e tematiche (gestione delle emergenze ambientali) in cui analisi visive e fotointerpretazione sono più importanti rispetto al rigore metrico

L'*ortofoto ordinaria* è una **rappresentazione fotografica** di un oggetto che segue le norma di precisione legate alle rappresentazioni cartografiche tradizionali. La **precisione grafica** è di **0.2 mm alla scala nominale dell'ortofoto per gli elementi posti sul terreno** e di **0.6 mm alla scala nominale dell'ortofoto per elementi in elevazione rispetto al terreno**

57

Ortofoto ordinaria

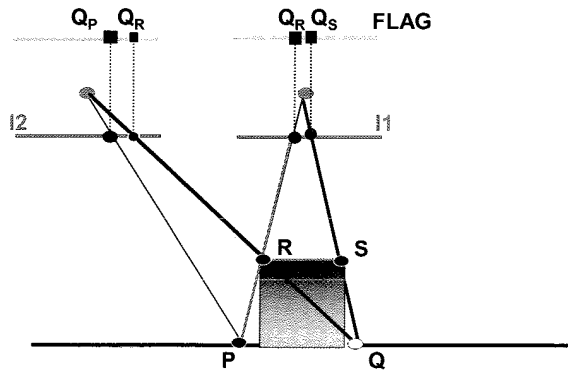
L'ortoproiezione avviene utilizzando un Modello Digitale del Terreno (DTM).



Questo prodotto possiede delle deformazioni prospettiche residue dovute a un modello di forma non corretto.

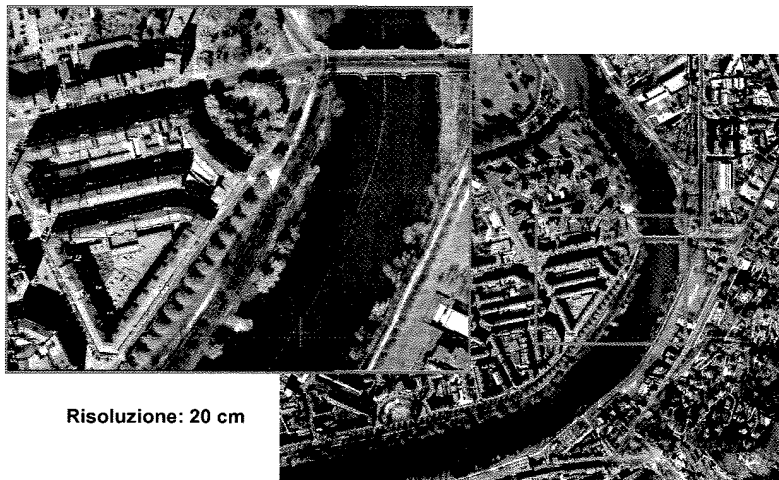
58

Ortofoto di precisione: approccio di produzione



82

Ortofoto di precisione: un esempio aereo



Risoluzione: 20 cm

83

Produzione di cartografia numerica e fotogrammetria

Le principali applicazioni della fotogrammetria sono:

- Produzione di cartografia
- Modelli digitali del terreno (DTM – *Digital Terrain Model*) e delle superfici (DSM – *Digital Surface Model*)
- Possibile creare reti di vertici di riferimento, ad esempio per applicazioni catastali
- Fotogrammetria degli oggetti vicini: con distanze fra oggetto e camera da 1 a 100m circa, per applicazioni industriali, architettoniche ed altro ancora.

Come nel rilievo classico a terra, anche nella fotogrammetria si distinguono le 2 fasi:

1. Rilievo d'inquadramento: nel caso fotogrammetrico serve per «appoggiare» i fotogrammi e portare la restituzione in un sistema di riferimento assoluto («terreno»)
2. Rilievo di dettaglio: nel caso fotogrammetrico prende il nome di «restituzione», a partire da misure eseguite sui fotogrammi

Ade la fotogrammetria richiede di "appoggiare" i fotogrammi! Pochi punti di appoggio e precisione

*Google Earth
Virtual Earth
Cartografie } uso tutti la fotogrammetria*

The image is a composite of three maps. On the left is a screenshot of Google Earth showing a 3D aerial view of a city. In the center is a technical map titled 'REGIONE PIEMONTE' and 'CARTA AL TRATTO' for the area of RIVOLI, with a scale of 1:10,000. It includes a grid of coordinates and a legend. On the right is another technical map titled 'REGIONE PIEMONTE' and 'CARTA AL TRATTO' for the area of BIELLA, also with a scale of 1:10,000. It includes a grid of coordinates and a legend.

In realtà la dist. in fotogrammetria non si misura ma si usa l'intersezione spaziale

Intersezione spaziale:

Utilizzando due prospettive centrali di uno stesso punto oggetto, è possibile ricostruire la posizione spaziale del punto stesso.



Il p.to immagine I_2 ha coord. diverse di I_1 . Sia di I_1 che di I_2 conosco gli angoli con 2 foto. ~~Si può~~ conoscere le coordinate del p.to oggetto! (la posizione del p.to oggetto).

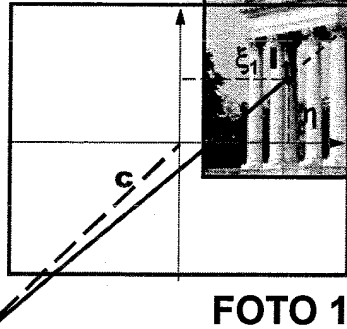


FOTO 1

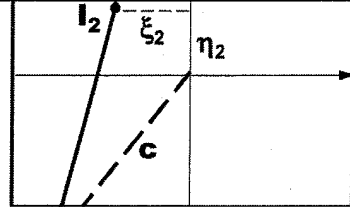
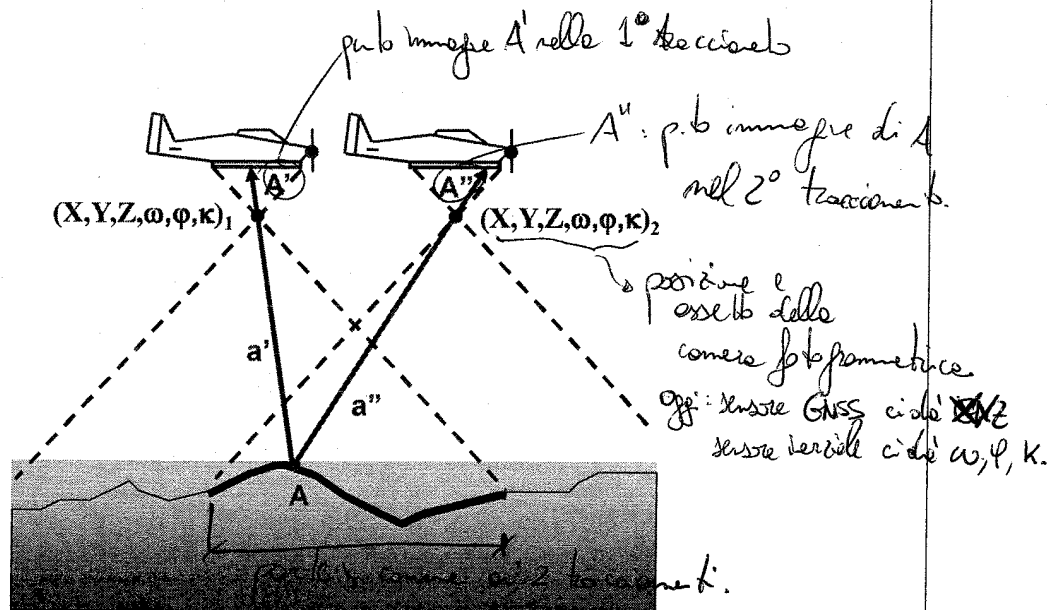


FOTO 2

© S. DEQUAL 11.01.2003

LA PRESA AEROFOTOGRAMMETRICA



Ricoprimento «longitudinale» 60% ma anche «trasversale» tra le strisciate (20% o 60%)

→ cioè il 3° fotogramma ha il 10% in comune col 1° fotogramma.

© S. DEQUAL 11.01.2003