



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 697

DATA: 07/10/2013

APPUNTI

STUDENTE: Chiesa

MATERIA: Metodi Numerici e Statstici

Prof. Pieraccini

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

PROBABILITÀ:

→ L'insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento è lo SPAZIO CAMPIONARIO.

es. per una moneta: {testa, croce}
per la lunghezza di uno spillo $\{x \mid 5,20 < x < 5,25\}$

→ Un sottoinsieme di uno spazio campionario è chiamato evento

COMBINAZIONE DI EVENTI



$A \cup B$ si realizza quando si verifica A o B (oppure entrambi)

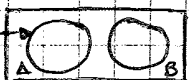


$A \cap B$ si realizza quando sia A che B si verificano



$B \cap A^c$ NON A toglie da B quella in comune con A

EVENTI INCOMPATIBILI



A e B sono MUTUALMENTE ESCLUSIVI o INCOMPATIBILI perché

- non hanno elementi in comune
- non possono mai capitare contemporaneamente (es. Testa e croce)

PROBABILITÀ:

→ $P(A)$ ≡ è la proporzione di volte in cui l'evento A potrebbe capitare, se l'esperimento venisse ripetuto indipendentemente e sotto le stesse condizioni un n° mol grande di volte.

ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ:

1. Sia S uno spazio campionario. Allora $P(S) = 1$

→ dice che il risultato di un esperimento si trova sempre nello spazio campionario in quanto lo spazio c. contiene per def. tutti i possibili risultati di un esperimento.

2. Per ogni evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$

→ dice che la frequenza è sempre compresa tra 0 e 100%.



PROBABILITÀ CONDIZIONATA: ~~INDIPENDENZA~~

→ Una probabilità che è basata su una parte ^{su una parte} ~~su un sottoinsieme~~ dello spazio campionario è detta probabilità condizionata.

es. una barra viene campionata si misura che la sua lunghezza rispetti la specifica. Qual è la probabilità che anche il diametro rispetti la specifica, data la lunghezza rispettata? $\Rightarrow P(d \text{ specifica} | l \text{ specifica})$
 Lo spazio campionario in cui la barra viene valutata non sarà il totale delle barre (1000), ma sarà ristretto alle barre che possiedono lunghezza specifica (942).

Siano A e B due eventi, dove $P(B) \neq 0$. La probabilità condizionata è:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

es. $P(\text{barra sui fianchi} | f. su sporichio) = \frac{P(f_1 \text{ e } f_2)}{P(f_2)}$

EVENTI INDIPENDENTI:

→ Due eventi sono indipendenti se la probabilità che un evento si verifichi rimane la stessa sia che si verifichi o non si verifichi l'altro.

Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, allora A e B sono indipendenti se:

$$P(B|A) = P(B) \text{ o equivalentemente } P(A|B) = P(A)$$

e anche:

Gli eventi A_1, A_2, \dots, A_m sono indipendenti se per ogni A_i , e per ogni collezione A_{j_1}, \dots, A_{j_m} di eventi con $P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_m}) > 0$

$$P(A_i | A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_m}) = P(A_i)$$

REGOLA DELLA MOLTIPLICAZIONE

• Se A e B sono due eventi con $P(B) > 0$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) P(A|B)$$

Se A e B sono due eventi con $P(A) > 0$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$$

Se $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ valgono entrambe le equazioni

• Se A e B sono due eventi indipendenti

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

(quoto per ogni collezione di eventi indipendenti)

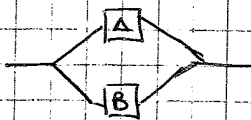
APPLICAZIONI ALL'ANALISI DELL'AFFIDABILITÀ:



il sistema funziona solo se entrambi funzionano

$$P(\text{sist. funge}) = P(A \cap B)$$

$$\stackrel{\text{indip}}{=} P(A) \cdot P(B)$$



il sistema funziona se o A o B funzionano

$$P(\text{sist. funge}) = P(A \cup B)$$

$$\stackrel{\text{indip}}{=} P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

VARIABILI CASUALI O ALEATORIE:

In molte situazioni si vorrebbe assegnare un valore numerico a ogni possibile risultato di un esperimento. Tale assegnazione è chiamata variabile aleatoria.

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE:

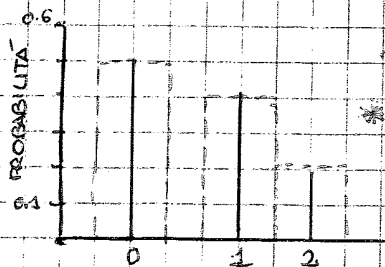
se i suoi possibili valori formano un insieme discreto. Questo significa che se i possibili valori fossero ordinati, esisterebbe un'intersezione tra ogni valore e il successivo.

L'insieme dei possibili valori può essere finito; per esempio, è l'insieme di tutti gli interi o è l'insieme di tutti gli interi positivi.

- La lista dei possibili valori con le relative probabilità fornisce una descrizione completa della popolazione da cui la variabile aleatoria X è stata campionata.

Questa descrizione è detta FUNZIONE DI PROBABILITÀ DI MASSA o DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ e si indica con: $p(x) = P(X = x)$

Questa è la sua rappresentazione grafica:



es. } funzione di massa di X (\equiv n° di difetti in un pezzo di filo selezionato casualmente)

grafico di $p(x)$ per il quadrato della sua distanza ozzom tale della media μ e poi sommare tali prodotti ossia:

$$\sigma_x^2 = \sum_x (x - \mu_x)^2 P(X=x)$$

oppure

$$\sigma_x^2 = \sum_x x^2 P(X=x) - \mu_x^2$$

infine:

• la DEVIATIONE STANDARD $\equiv \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$

* DIAGRAMMA DI PROBABILITÀ:

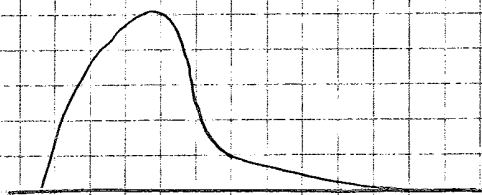
- i rettangoli sono centrati sui possibili valori nella variabile casuale
- le aree dei rettangoli rappresentano le probabilità

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE:

→ I possibili valori di una v.a. continua sono sempre chiusi in un intervallo a, b .

La probabilità che X sia compresa nell'intervallo a, b è uguale all'area sotto l'istogramma tra a e b . Dato che l'istogramma è una curva, la probabilità è calcolata con un integrale.

La curva è chiamata FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ o DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ e si indica con $f(x)$.



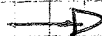
• L'area sotto la curva non dipende dal fatto che a e b siano inclusi o meno nell'intervallo, allora:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Inoltre:

$$P(X \leq a) = P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$P(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$



- La MEDIANA di X è il punto x_m per il quale vale:

$$F(x_m) = P(X \leq x_m) = \int_{-\infty}^{x_m} f(x) dx = 0,5$$

- Se p è un qualsiasi numero compreso tra 0 e 100, il p -esimo percentile è quel punto x_p per il quale vale

$$F(x_p) = P(X \leq x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f(x) dx = p/100$$

\Rightarrow la mediana è il 50-esimo percentile.

Spesso vengono costruite nuove variabili casuali mediante operazioni aritmetiche su altre variabili casuali.

AGGIUNGERE UNA COSTANTE

- Se X è una v.a. e b una costante

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_{X+b} = \mu_X + b \\ \sigma_{X+b}^2 = \sigma_X^2 \end{cases}$$

MOLTIPLICARE PER UNA COSTANTE

- Se X è una v.a. e a una costante

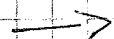
$$\Rightarrow \mu_{aX} = a\mu_X$$

- Se X è una v.a. e a una costante

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{aX}^2 = a^2 \sigma_X^2 \\ \sigma_{aX} = |a| \sigma_X \end{cases}$$

ENSEMBLE

$$\begin{cases} \mu_{ax+b} = a\mu_X + b \\ \sigma_{ax+b}^2 = a^2 \sigma_X^2 \\ \sigma_{ax+b} = |a| \sigma_X \end{cases}$$



LA VARIANZA DI COMBINAZIONI LINEARI DI VARIABILI CASUALI INDIP

→ la media della somma di variabili casuali è sempre uguale alla somma delle medie. Vale anche per le indipendenti.

Valgono poi per le v.a. indipendenti:

→ Se X_1, X_2, \dots, X_m sono v.a. indipendenti, allora la varianza della somma $X_1 + X_2 + \dots + X_m$ è data da:

$$\sigma_{X_1 + X_2 + \dots + X_m}^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_m}^2$$

In particolare:

$$\sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

la varianza della somma

e

$$\sigma_{x-y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

la varianza della differenza

→ Se X_1, X_2, \dots, X_m sono v.a. indipendenti ~~allora~~ e c_1, c_2, \dots, c_m sono costanti, allora la varianza della combinazione lineare $c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \dots + c_m X_m$ è data da

$$\sigma_{c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_m X_m}^2 = c_1^2 \sigma_{X_1}^2 + c_2^2 \sigma_{X_2}^2 + \dots + c_m^2 \sigma_{X_m}^2$$



DISTRIBUZIONI PIU' COMUNI.

L' inferenza statistica è quella parte di statistica che consiste di estendere all'intera popolazione le informazioni fornite da un campione.

In questa parte verranno descritte alcune funzioni che ben approssimano la funzione di massa e di densità della popolazione di una popolazione.

LA DISTRIBUZIONE DI BERNOULLI

Un esperimento bernoulliano può avere solo due risultati, "successo" o "insuccesso".

La probabilità di successo è pari a "p".

La probabilità di insuccesso è pari a "1-p".

⇒ la variabile casuale X ha quindi una distribuzione di Bernoulli con parametro p; $X \sim \text{Bernoulli}(p)$:

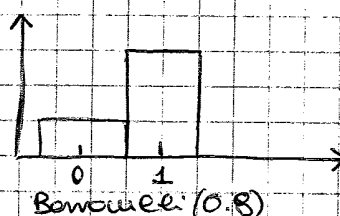
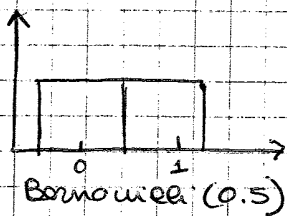
$$p(0) = P(X=0) = 1-p$$

↳ P di insuccesso

$$p(1) = P(X=1) = p$$

$p(x) = 0$ per qualsiasi altro valore di $x \neq 0, 1$

⇒ è una variabile casuale discreta, con funzione di probabilità di massa $p(x)$:



- $\mu_x = p$

- $\sigma_x^2 = p(1-p)$

- A volte non è nota la probabilità di successo p associata a un esperimento di Bernoulli, quindi si usa:

⇒ PROPORZIONE CAMPIONARIA: $\hat{p} = \frac{n^{\circ} \text{ successi}}{n^{\circ} \text{ prove}} = \frac{X}{n}$

L'incertezza di \hat{p} è: $\sigma_p = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

LA DISTRIBUZIONE NORMALE:

- tale distribuzione è un buon modello per molte popolazioni continue; ⇒ v.a. continua

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- la funzione di densità di probabilità:

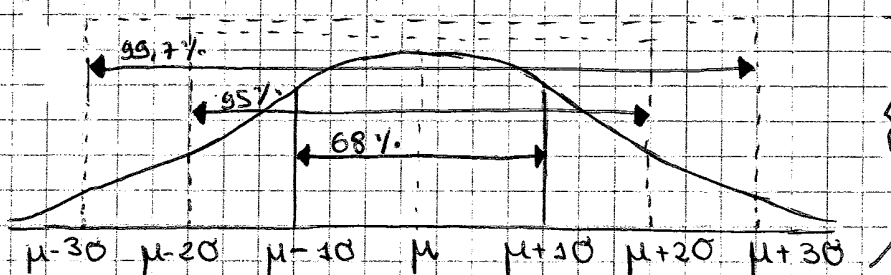
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- la media:

$$\mu_x = \mu$$

- la varianza:

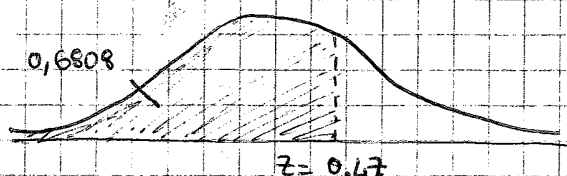
$$\sigma_x^2 = \sigma^2$$



CURVA NORMALE è standardizzata per qualsiasi popolazione ⇒ si fa riferimento alla standardizzazione delle unità:

$$z = \text{UNITÀ STANDARDIZZATA DI } X = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Esiste una tavola normale che per ogni valore di z equi-
me il valore della probabilità sottesa alla curva a sx
della z :



LA DISTRIBUZIONE LOGNORMALE: • continua

• per osservazioni contenenti valori anomali (outlier), la distribuzione normale è sostituita dalla d. lognormale. La d. lognormale è ricavata da quella normale e si ha

→ Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la variabile casuale $Y = e^X$ ha una distribuzione lognormale di parametri μ e σ^2 .

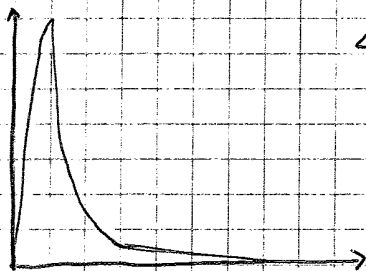
→ Se Y ha una distribuzione lognormale di parametri μ e σ^2 , allora la variabile casuale $X = \ln Y$ ha una distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln x - \mu)^2\right] & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$E(Y) = \text{media} = e^{\mu + \sigma^2/2}$$

(μ e σ^2 sono della distribuzione normale)

$$V(Y) = \text{varianza} = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}$$



← fortemente asimmetrica perché usata per modellare processi che producono grandi valori di outlier.

• STIMA DEI PARAMETRI DI UNA LOGNORMALE:

$Y_1, \dots, Y_m =$ CAMPIONE CASUALE DA UNA POP. LOG

$X_i = \ln Y_1, \dots, X_m = \ln Y_m =$ TRASFORMAZIONE LOGARITMICA

⇒ $X_1, \dots, X_m =$ CAMPIONE CASUALE DA $N(\mu, \sigma^2)$



- è valida per i tempi di attesa, quando la realizzazione degli eventi segue un processo di Poisson di parametro (tasso o intensità) λ ossia quando:
 - il n° di eventi che si realizzano in intervalli di tempo disgiunti sono indipendenti e il numero X di eventi che si verificano in un intervallo di tempo t ha una distribuzione di Poisson di media λt ossia $X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$
- \Rightarrow se gli eventi seguono un processo di Poisson di tasso λ e se T rappresenta il tempo di attesa tra qualunque evento e il successivo, allora $T \sim \text{Exp}(\lambda)$
- LA MANCANZA DI MEMORIA: un componente la cui durata segue una distribuzione esponenziale non mostra gli effetti dell'usura dovuta all'età.

\Rightarrow se $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ e t e s sono numeri positivi

allora: $P(T > t+s | T > s) = P(T > t)$

Def. Mancanza di memoria e la distribuzione

→ in generale se il campione estratto da una distribuzione quasi simmetrica, l'approssimazione normale è buona per piccoli valori di n . Se invece la popolazione è molto asimmetrica, è necessario un valore di n abbastanza grande [vedi fig pag 212]

Comunque " per la maggior parte delle popolazioni, se la numerosità campionaria è più grande di 30, l'approssimazione stabilita dal Teorema del Limite Centrale è buona".

APPROSSIMAZIONE NORMALE DELLA BINOMIALE:

Quando $X \sim \text{Bim}(n, p)$ con $\mu = np$, $\sigma^2 = np(1-p)$
 e $\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$ ≡ campione estratto da una popolazione di Bernoulli (p)

in base al teorema del limite Centrale, se n è grande e se la probabilità di successi $np > 0$ e la probabilità di insuccessi $n(1-p) > 0$, allora vale:

$$X \sim N(np, np(1-p)) \text{ approssimativamente}$$

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \quad "$$

In particolare:

• $\bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}$ è un IC al 68% per μ

• $\bar{X} \pm 1.645 \frac{s}{\sqrt{n}}$ è un IC al 90% per μ

• $\bar{X} \pm 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}}$ è un IC al 95% per μ (è quello più utilizzato)

• $\bar{X} \pm 2.58 \frac{s}{\sqrt{n}}$ è un IC al 99% per μ

• $\bar{X} \pm 3 \frac{s}{\sqrt{n}}$ è un IC al 97.7% per μ

oss.

↑ livello di fiducia \Rightarrow precisione dell'IC (e quindi si fornisce meno info)
 Infatti, per aumentare la nostra fiducia che l'intervallo calcolato contenga il vero valore della media della popolazione, occorre aumentare l'ampiezza dell'IC, per fornire un più ampio margine d'errore.

- caso possibili:
- si trova IC per un prefisso livello di fiducia
 - si trova il livello di fiducia per un prefisso IC
 - Ho un IC che il livello di fiducia.
 - Wolger trovare n campione per garantire quel livello di fiducia

(vedi cap. 5.7. negli appunti)

Intervallo di confidenza unilaterali:

gli IC misti fin ad un caso IC bilaterali \Rightarrow preferisco un limite di fiducia superiore che inferiore
 Se sono interessati solo ad uno dei 2 limiti \Rightarrow IC unilaterali

Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale numerico ($n > 300$) da una popolazione di media μ e scarto quadratico medio σ (in modo che \bar{X} sia approssimativamente normale).

Il limite inferiore dell'IC al $100(1-\alpha)\%$ per μ è:

$$\bar{X} - z_{\alpha} \sigma_{\bar{X}}$$

Il limite superiore dell'IC al $100(1-\alpha)\%$ per μ è:

$$\bar{X} + z_{\alpha} \sigma_{\bar{X}}$$

dove $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Quando il valore di σ è sconosciuto, si può stimare con lo scarto quadratico medio campionario s

Metodo tradizionale

Metodo tradizionale:
 • usa n al posto di \tilde{n}
 • usa \hat{p} al posto di \tilde{p}

Se n è elevato \Rightarrow va bene
 Altrimenti no

Sia \hat{p} la proporzione di successo in un campione di numerosità elevata n di prove indipendenti di Bernoulli con probabilità di successo p .

Allora l'IC al $100(1-\alpha)\%$ per p è:

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Questo metodo ~~non~~ si può utilizzare solo se il campione contiene almeno
 10 successi ($= n\hat{p}$)
 10 insuccessi ($= n(1-\hat{p})$)

IC per la media di una popolazione per campioni poco numerosi

Se n è piccolo \Rightarrow ~~A~~ buoni metodi per la costruzione di IC

Se la popolazione è circa normale \Rightarrow anche se è piccola, posso usare "t student" per calcolare gli IC.

Sia X_1, \dots, X_n un campione poco numeroso ($n < 30$) estratto da una popolazione normale con media μ . Allora la quantità

$$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

ha una distribuzione "t student" con $n-1$ gradi di libertà.

Essa è indicata con t_{n-1} .

Obs. Quando il valore di n è elevato, la distribuzione della quantità $\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ è molto prossima alla normale \Rightarrow la curva normale può essere utilizzata al posto della t student

n.b. La funzione di densità della distribuzione t student assume valori differenti al variare dei g.d.l.

Intervallo di confidenza per la differenza tra due medie (n.s.d.)

Vogliamo stimare la differenza tra le medie di due popolazioni

Siano X e Y variabili casuali indipendenti, con $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

Allora

$$X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$$

$$X - Y \sim N(\mu_x - \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$$

Vediamo ora come costruire IC per la differenza fra le medie di due popolazioni.

Sia X_1, \dots, X_{n_x} un campione casuale semplice di numerosità elevata n_x da una popolazione di media μ_x e varianza quadratico medio σ_x , e sia Y_1, \dots, Y_{n_y} un campione casuale semplice di numerosità elevata n_y da una popolazione con media μ_y e varianza quadratico medio σ_y .

Se i due campioni sono indipendenti, allora l'IC per $\mu_x - \mu_y$ al livello $100(1-\alpha)\%$ è

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

Quando i valori σ_x e σ_y sono incogniti, possono essere stimati con s_x ed s_y

IC per la differenza fra due proporzioni

In una popolazione di Bernoulli, la media è rappresentata dalla probabilità di successo p , che denota la proporzione di successi nella popolazione

\Rightarrow quando calcolo ^{IC} della diff. fra 2 probabilità di successo, utilizzo una formula leggermente \neq

In pratica sostituisco alle medie le due proporzioni p_x e p_y

Sia X il n° di successi in n_x prove di Bernoulli indipendenti con probabilità di successo p_x , e sia Y il n° di successi in n_y prove di Bernoulli indipendenti con probabilità di successo p_y , così che $X \sim \text{Bin}(n_x, p_x)$ e $Y \sim \text{Bin}(n_y, p_y)$.

Definiamo $\tilde{n}_x = n_x + 2$, $\tilde{n}_y = n_y + 2$, $\tilde{p}_x = \frac{X+1}{\tilde{n}_x}$ e $\tilde{p}_y = \frac{Y+1}{\tilde{n}_y}$

IC per campioni poco numerosi per la differenza fra due medie

Se entrambi i campioni sono poco numerosi \Rightarrow non può essere applicato il r.l.c.

Se entrambe le popolazioni sono normali \Rightarrow si può utilizzare la distribuzione t Student per calcolare l'IC per la differenza fra le due popolazioni.

Q₂. Il metodo è simile a quello per i campioni numerosi, solo che il valore di z viene sostituito con quello di una t Student.

Sia X_1, \dots, X_{n_x} un campione casuale di numerosità n_x da una popolazione normale con media μ_x e sia X_1, \dots, X_{n_y} un campione casuale di numerosità n_y da una popolazione normale con media μ_y . Assumiamo che i due campioni siano indipendenti.

L'IC a livello $100(1-\alpha)\%$ per la differenza $\mu_x - \mu_y$ è

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{v, \alpha/2} \sqrt{\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}}$$

Il numero di g.d.l. è dato da

$$v = \frac{\left(\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}\right)^2}{\frac{(S_x^2/n_x)^2}{n_x-1} + \frac{(S_y^2/n_y)^2}{n_y-1}} \quad \text{arrotondato all'intero inferiore}$$

Q₃. $t_{v, \alpha/2}$ è il quantile di ordine $1 - \frac{\alpha}{2}$ di una t Student con v g.d.l., ossia il valore che delimita un'area di $\frac{\alpha}{2}$ nella coda dx della distribuzione.

Popolazioni con = varianza

Si può utilizzare una formula particolare che permette di ottenere IC più ristretti rispetto a quelli che si otterrebbero utilizzando il metodo generale.

\Rightarrow Se le popolazioni hanno la stessa varianza incognita, l'IC a livello $100(1-\alpha)\%$ per $\mu_x - \mu_y$ è

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{n_x+n_y-2, \alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}$$

La quantità S_p^2 è la "varianza pooled", data da

$$S_p^2 = \frac{(n_x-1)S_x^2 + (n_y-1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}$$

LISTA COMANDI "R":

DESCRITTIVA UNIVARIATA:

- `table (...)` → crea una tabella di frequenza che rappz. la distribuzione

VALORI ASSUNTI	FREQ. ASSOLUTE	FREQ. RELATIVE
x_i	m_i	$f_i = m_i/n$

- `plot (time, mc, type = "l")`
 congiunge con un segmento le coppie di punti,
 - `pie (...)` hist (newcomb)
 - `hist (...)` hist (newcomb, freqs = T)
 - `box plot (...)`
 - `stem (weight)`
- grafici per rappresentare dati statistici
- grafico per rappz. la distribuzione di una variabile casuale (a gruppi e plot)

- `mean (...)`
- `mean (y') = mean (y) + a` → traslazione
- `mean (y") = e * mean (y)` → cambiamento di scala

- `median (...)` mode (...)

- `quantile (...)`
- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|------|
| 0% | 25% | 50% | 75% | 100% |
| min | Q1 | Q2 | Q3 | max |

- `summary (...)`
- | | | | | | |
|-----|----|------|----|----|-----|
| min | Q1 | mean | Q2 | Q3 | max |
|-----|----|------|----|----|-----|

- `range (...)` → mi dà la coppia min, max

- `IQR (...)` → differenza inter quartile

- `var (...)` → varianza campionaria
 $var(y) = var(y')$
 $var(y'') = e^2 var(y)$

- `sd (...)` → deviazione standard campionaria

DESCRITTIVA BIVARIATA:

- `plot (x, y)` → diagramma a dispersione
- `cov (x, y)`
- `lm (y ~ x)` → espressione lineare ai minimi quadrati
 variabile risposta variabile esplicativa

VARIABILI ALEATORIE REALI:

- $f(k) = dbinom(k, n, p) \equiv P(X = k)$
- $\Phi(k) = pbinom(k, n, p) \equiv P(X \leq k)$
- `rbinom(j, 1, p)` → simula j valori casuali da una Bernoulli
- `rbinom(r, n, p)` → simula j valori casuali da una Binomiale
 non è molto di un caso di una Bernoulli con o senza successo

METODI NUMERICI

RAPPRESENTAZIONE DI NUMERI IN MACCHINA

Per la rappresentazione di numeri in macchina, si utilizza la rappresentazione floating point normalizzata (virgola mobile)

$$123,4567 \Rightarrow \overset{\text{segno}}{\circ} \overset{\text{mantissa}}{0,1234567} \cdot \underset{\text{base}}{10^{\overset{\text{caratteristica}}{3}}}$$

$$0,00789 \Rightarrow 0,789 \cdot 10^{-2}$$

1 → si spostano tutte le cifre a destra della virgola, tenendo il 1° numero dopo la virgola ≠ 0

2 → si moltiplica il n° trasformato $\cdot 10^x$, in base agli spostamenti effettuati.

3 → il segno (+ o -) del numero si indica con $(-1)^s$

Se $s=0 \Rightarrow$ segno +

Se $s=1 \Rightarrow$ segno -

Gli insiemi dei numeri rappresentabili in una specifica macchina dipendono dalle caratteristiche della macchina:

$$F(\beta, t, L, U)$$

↳ base ↳ n° di cifre finite di mantissa

↳ cifra della caratteristica
ossia gli estremi dell'intervallo in cui può codare il mio numero

⇒ in generale un n° in macchina è nella forma:

$$X = (-1)^s \cdot 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots \cdot 10^c$$

I vari numeri floating point sono quindi equispaziati.

Inoltre, nel rappresentare un numero reale, la macchina può operare:

- arrotondamento → $0,278 \approx 0,28$

- truncamento → $0,278 \approx 0,27$

$$u = \beta^{1-t} \quad \text{con tonamento}$$

$$u = \frac{1}{2} \beta^{1-t} \quad \text{con arrotondamento}$$

\Rightarrow la precisione di macchina u , è rappresentata la soglia fissa che il calcolatore non può superare quando misura la distanza tra 2 mantisse.

Tutti i numeri che differiscono tra loro per una quantità $< u$, saranno approssimati allo stesso numero.

In pratica, la precisione di macchina mi dice di quanto sono quantizzati i numeri di macchina.

Oss. In MATLAB, $u = 10^{-16}$

Altri possibili errori nella rappresentazione di numeri in macchina:

- Overflow \rightarrow errore dovuto al tentativo di rappresentare numeri con caratteristica $>$ di quella leggibile dalla macchina
 $\text{se } e > V \rightarrow$ in MATLAB mi dà "inf"
- Underflow \rightarrow se $e < L \rightarrow$ in MATLAB mi dà "0"

Operazioni in macchina

Si fanno sempre e solo:

• \oplus
• \ominus
• \otimes
• \oslash

$\} \rightarrow$ in macchina, i simboli delle operazioni sono 0

$$\text{es. } a \oplus b = fl(fl(a) + fl(b))$$

Che errore viene introdotto quando faccio delle operazioni in macchina?

Faccio 3 approssimazioni:

- $m a$
- $m b$
- $m a + b$

$\} \text{ l'errore è trascurabile perché } < u$

oss. Quindi il problema non è tanto l'errore commesso, MA l'amplificazione dell'errore commesso che si ha nella traslazione.

La sottrazione in macchina non introduce alcun errore di approssimazione, ma fornisce il risultato esatto.

⇒ la sottrazione non genera problemi di per sé, ma amplifica gli errori di approssimazione già esistenti sugli operandi.

Bisogna cercare di "aggiare" il fenomeno della cancellazione numerica utilizzando valori che sono equivalenti nell'aritmetica infinita (numeri reali), ma sono \neq in aritmetica finita (mondo delle macchine).

es. utilizzare $\sin(x)$ o $\cos(x)$

Stabilità di un algoritmo e condizionamento di un problema

Un problema è ben posto quando ammette una ed una sola soluzione, e la soluzione dipende con continuità dai dati.

Assumiamo di lavorare sempre su problemi ben posti.

Vogliamo valutare l'andamento degli errori quando applichiamo un algoritmo ad un problema.

Nel determinare gli errori hanno un ruolo:

- il problema → condizionamento
- l'algoritmo → stabilità

Considerando un generico problema:

x = soluzione

\bar{x} = soluzione esatta del problema con dati perturbati

\tilde{x} = soluzione dell'algoritmo

Studiare il condizionamento → valutare differenza tra x e \bar{x}

Studiare la stabilità → valutare differenza tra \bar{x} e \tilde{x}

METODI NUMERICI PER LA RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

Richiami di algebra lineare

- Matrice diagonale $\rightarrow A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

N.B. Come nome = 0 anche lungo la diagonale principale

- Matrice triangolare superiore $\rightarrow A = \begin{pmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

- Matrice triangolare inferiore $\rightarrow A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 \\ x & x & x & x \end{pmatrix}$

- Matrice a predominanza diagonale per righe \rightarrow per ogni riga, l'elemento diagonale in valore assoluto deve essere $>$ della somma degli elementi che stanno sulla riga in valore assoluto.
(elemento della diagonale escluso dalla somma)

- Matrice a predominanza diagonale per colonne \rightarrow stessa cosa ma focus Σ elementi che stanno sulla colonna

N.B. Una matrice può essere a predominanza diagonale sia per righe che per colonne

- Matrice simmetrica positiva \Leftrightarrow tutti gli autovalori $\lambda_i(A)$ sono > 0

N.B. Gli autovalori di una matrice simmetrica sono sempre reali.

- Matrice simmetrica negativa $\Leftrightarrow \lambda_i(A) < 0$

\hookrightarrow seminegativa se ≤ 0
semipositiva se ≥ 0

• $\|x\|_2 = \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^2}$ norma euclidea (quella classica)

• $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ massima dei valori assoluti delle componenti del vettore

Norme di matrici:

• $\|A\|_1 =$ somma i valori assoluti degli elementi per ogni colonna, e prende il max ottenuto da una singola colonna

• $\|A\|_\infty =$ stessa cosa ma per le righe

• $\|A\|_2 =$ prende A e lo moltiplica per A^T
Calcolo tutti gli autovalori della matrice ottenuta, e prende quello di modulo max

Oss. [Non si calcola, troppo complicato]

• $\|A\|_F =$ è la $\sqrt{}$ della somma dei quadrati degli elementi

Da una norma di vettore, si può ^{derivare} una norma di matrice, tramite un'operazione che si chiama induzione

$\|A\|_1$, $\|A\|_2$ e $\|A\|_\infty$ sono dette norme naturali (perché provengono da norme di vettori).

$\|A\|_F$ (norma di Frobenius), invece, non è naturale

Il vantaggio delle norme naturali è che hanno una proprietà in più rispetto a quelle non naturali: la proprietà in più è quella di compatibilità

$\|\cdot\|_u$ e $\|\cdot\|_v$ sono dette compatibili se:

$$\|Ax\| \leq \|A\|_u \|x\|_v$$

Oss. Per le norme naturali, basta che metta lo stesso indice sia alla $\|\cdot\|$ vettore che alla $\|\cdot\|$ matrice \Rightarrow GARANTISCO LA COMPATIBILITÀ

1. Esplicito le equazioni tenendo a dx il termine noto
2. Ricavo l'incognita nell'equazione dove è unica (1^a riga)
↳ y₁
3. Procedo con la sostituzione in avanti dell'incognita appena trovata, inserendola nell'equazione della riga successiva
4. ... e così via

• Sostituzione all'indietro → per matrici triangolari superiori (V)

Partendo da $Uy = b$:

1. Procedo come prima, ma partendo dall'ultima riga e salendo via via

Problemi non triangolari:

• Eliminazione Gaussiana → per sistemi non triangolari:

Procedimento: sostituisco un'equazione con una combinazione lineare della stessa e di un'altra equazione, per arrivare ad una matrice triangolare ed effettuare la sostituzione

$$r_i \leftarrow r_i + m_{ix} \cdot r_x$$

$$m_{ix} = - \frac{a_{ix}}{a_{xx}}$$

con: i = riga da voglio modificare

x = riga di riferimento

$$\Rightarrow [(r_x \cdot m_{ix}) + r_i] = r_i \text{ modificata}$$

$$\text{es. } \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1^a cosa → miro la matrice completa:

1. Parto dalla matrice A
2. Applico il procedimento di eliminazione gaussiana
3. Al posto degli 0, scrivo i valori in utilizzati (separati da una riga) e cambio di segno
4. Finita l'eliminazione gaussiana, posso facilmente individuare U ed L
5. Scrivo la matrice $A=LU$
6. Utilizzo L per risolvere $Ly=b$
7. Utilizzo U per risolvere $Ux=y$
↳ FINE !!

es. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^{a} \text{ el.}} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & 6 & 3 \\ \frac{1}{4} & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2^{a} \text{ el.}} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & 6 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{matr. } LU} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

Risolvo $Ly=b$ per trovare y , usando la sostituzione in avanti.

con $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

Risolvo $Ux=y$ per trovare x , usando la sostituzione all'indietro.

con $U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Costo computazionale

Qual'è il metodo migliore tra Gauss vs. fattorizzazione LU?

- gauss → cambio b ed b in un solo sistema triangolare
- fatti LU → non cambio b ma b 2 sistemi triangolari

Procedimento :

- Faccio le stesse identiche cose che nella fatt. LU, solo che le P che faccio su A le faccio anche su b
- \Rightarrow mi regno gli scambi che ho fatto su A e li faccio su b quando svolo il sistema finale.

N.B. [In generale, $\det A = (-1)^s \cdot \det U$ con $s = n^{\circ}$ di permutazioni / scambi effettuate

La strategia di pivoting parziale può essere usata anche nel caso in cui si abbiano elementi $\neq 0$ sulla diagonale.

Infatti, moltiplicatori (m_{ij}) troppo grandi amplificano gli errori di arrotondamento, provocando instabilità dell'algoritmo.

\Rightarrow anche se $a_{kk} \neq 0$, quando se nella stessa colonna ci sono elementi che in valore assoluto sono più grandi.

Se si, scambio le righe in modo che a_{kk} sia il più grande

Non è necessario fare pivoting parziale per :

- matrici a predominanza diagonale per colonne
 - matrici simmetriche definite positive
- } \rightarrow perché sono già stabili.

- Fattorizzazione di Cholesky \rightarrow se A è simmetrica positiva, essendo l'eliminazione gaussiana stabile senza pivoting, si può sfruttare la simmetria di A per ridurre il costo computazionale del calcolo della fattorizzazione usando come alternativa a LU :

$$A = R^T \cdot R$$

Costo computazionale per fatt. Cholesky : $\sim \frac{n^3}{6} \Rightarrow$ metà rispetto all'eliminazione gaussiana!!!

In generale: $B = -M^{-1} \cdot N$

↳ matrice d'iterazione, ed individua il particolare metodo

Metodo di Jacobi

$$A = \begin{pmatrix} & & F \\ & D & \\ E & & \end{pmatrix}$$

F = parte di A sopra la diagonale

D = diagonale

E = parte di A sotto la diagonale

Facciamo uno split di A: $A = E + D + F$

Poniamo $M = D$ ed $N = E + F$

$$\Rightarrow B_J = -D^{-1}(E + F)$$

Metodo di Jacobi in forma compatta

$$x^{(k+1)} = D^{-1} (b - E x^{(k)} - F x^{(k)})$$

es.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 = (15 - 4x_1 - 6x_3) / 5 \\ x_3 = (24 - 7x_1 - 8x_2) / 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 6 - 2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = (15 - 4x_1^{(k)} - 6x_3^{(k)}) / 5 \\ x_3^{(k+1)} = (24 - 7x_1^{(k)} - 8x_2^{(k)}) / 9 \end{cases}$$

Test di arresto

Dobbiamo stabilire un criterio di arresto delle iterazioni, per interrompere il procedimento di generazione di iterati.

Test di arresto $\left\{ \begin{array}{l} \text{misura della distanza tra 2 iterati successivi} \\ \text{controllo del residuo dell'equazione} \end{array} \right.$

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} \leq tol$$

\hookrightarrow è un parametro (tolleranza relativa) fissata dall'utente
 $\approx 10^{-2} - 10^{-16}$

$$\frac{\|b - Ax^{(k+1)}\|}{\|b\|} \leq tol$$

N.B.

Un residuo piccolo non garantisce errore piccolo
 Infatti: errore relativo \propto residuo $\cdot K(A)$
 $\Rightarrow \uparrow K(A)$, errore relativo \uparrow

Possiamo sapere che

Convergenza per Jacobi e GS

Possiamo sapere che:

- Per matrici a predominanza diagonale stretta (per righe o per colonne)
 \Rightarrow il metodo di Jacobi converge

- "

\Rightarrow il metodo di GS converge

- Per matrici simmetriche definite positive
 \Rightarrow il metodo di GS converge

APPROSSIMAZIONE DI DATI E FUNZIONI

- 2 applicazioni
- dati (x_i, y_i) voglio approssimarli con una funzione g in modo da poter stimare l'andamento dei dati anche in punti $x \neq x_i$.
 - dato una funzione f , voglio approssimarla con un'altra funzione g più facile da usare

Casi da seguire per un'approssimazione

- Individuare un sottospazio F_m in cui scegliere la funzione f_m che approssima f
 Come scegliere tra:

- P_m , polinomi algebrici di grado m
- P_m^I , funzioni polinomiali a tratti di grado n
- S_n , funzioni spline di ordine n
- Π_m , polinomi trigonometrici

- Individuare un criterio per determinare $f_m \in F_m$
 Come scegliere tra:

- interpolazione: $f_m(x_i) = y_i$
- minimi quadrati (la peggior "soluzione" con la peggior "funzione" (algebraica))

Dimensioni

- $\dim(P_m) = m + 1$
- $\dim(P_m^I) = (n + 1) \cdot (n^I \text{ di intervalli})$
- $\dim(S_m) = \dots$
- $\dim(\Pi_m) = 2m + 1$

La dimensione n da $\left\{ \begin{array}{l} \text{elementi della base di } F_m \\ \text{parametri da individuare } f_m \in F_m \\ \text{condizioni da imporre} \end{array} \right.$

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(-2-1)(-2-3)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x+2)(x-3)}{(1+2)(1-3)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(3+2)(3-1)}$$

$$p_2(x) = 3l_0(x) - 7l_1(x) - 5l_2(x)$$

↳ polinomio di grado 2 che interpola questi 3 punti

n.B. In generale, non risolve le parentesi \Rightarrow lasciare l_0, l_1 ed l_2 come sono

Base di Newton

Utilizzata se ad un $p_n(x)$ aggiungo un nodo \Rightarrow non butto via il lavoro fatto

Per gli esercizi:

• Continuare una tabella tipo:

$$\underbrace{x_k \quad f(x_k) \quad f(x_k, x_{k+1}) \quad f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) \quad f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3})}_{\text{Coordinate punti}}$$

Coordinate punti

Le varie f si calcolano con $f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_{i+1}}$

$$e. \quad f(x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

• Scrivere il polinomio nella forma: (es. polinomio 3^o grado)

$$p_3(x) = f(x_k) + f(x_{k+1}) \cdot (x - x_k) + f(x_{k+2}) \cdot (x - x_k) \cdot (x - x_{k+1}) + f(x_{k+3}) \cdot (x - x_k) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot (x - x_{k+2})$$

per nodi equidistanti $\Lambda_n \geq e^{\frac{\pi}{2}}$ $\rightarrow \Rightarrow$ in questo caso, evitare infinitamente nodi!!!
 per nodi di Chebyshev $\Lambda_n \sim \frac{\pi}{2} \log n$

Quindi, l'interpolazione polinomiale non è sempre convergente per $n \rightarrow \infty$, dipende dai casi!!!

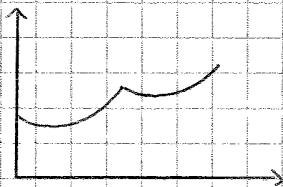
Se voglio essere sicuro che converga \Rightarrow uso Chebyshev (per il teorema di Bernstein)

Interpolazione polinomiale a tratti (non scandata)

\hookrightarrow non presta particolare attenzione a come si uniscono i diversi polinomi (punti angolari, ecc.)

Essere infittire i nodi non garantisce un miglior comportamento di $P_n(x)$

\Rightarrow interpolazione polinomiale a tratti, che viene fatta per risolvere l'approssimazione ad intervalli diversi (es. è inutile fare polinomi di grado 100, meglio tanti da 3)



1. Si fissa a priori il grado n (piccolo) del polinomio
2. Si partiziona l'intervallo $[a, b]$ in tanti intervalli tramite $n+1$ nodi X_i

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

3. Ogni $n+1$ nodi, costruiamo un polinomio diverso

Oss. Infittire i nodi non significa $\uparrow n$, no significa \uparrow il n° di tratti di polinomio.

Se f è regolare \Rightarrow questo tipo di interpolazione converge, indipendentemente da come sono fatti i nodi.

⇒ Le spline cubiche si differenziano in:

- **Naturali** → se agli estremi dell'intervallo di integrazione (1° ed ultimo nodo) la derivata seconda = 0

$$S_3''(x_0) = 0 \quad S_3''(x_n) = 0$$

- **Periodiche** → se derivata' nel 1° nodo = derivata' nell'ultimo nodo, e la stessa cosa per la derivata''.

$$S_3'(x_0) = S_3'(x_n) \quad S_3''(x_0) = S_3''(x_n)$$

- **Vincolate** → se ho delle perdure in entrata e in uscita assegnate

$$S_3'(x_0) = y_0' \quad S_3'(x_n) = y_n' \quad \text{con } y_0' \text{ e } y_n' \text{ dati}$$

- **Not-a-Knot** → derivata''' sia continua anche in x_1 (1° nodo interno) ed x_{n-1} (ultimo nodo interno)

⇒ di fatto, imposto di avere lo stesso polinomio (e l'unico modo con cui raggiungere queste condizioni)

Oss. La not-a-knot è quella utilizzata di default in MATLAB, perché puoi utilizzarla anche se non ho nessuna informazione sulla distribuzione dei dati.

Convergenza delle spline cubiche

Già l'interpolazione polinomiale a tratti converge

⇒ quella a spline converge meglio, perché soddisfa più caratteristiche (infatti è un metodo più sofisticato)

La spline converge alla funzione con un errore che è un $o(h^{2-p})$

⇒ va a 0 molto velocemente

↳ "piccolo"

EO. DIFFERENZIALI ORDINARIE (ODE)

ODE \rightarrow eq. in cui sono correlate una f incognita e le sue derivate fino all'ordine " m ".

$$y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t))$$

Posso anche avere un sistema di ODE di ordine 1:

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \\ \vdots \\ y_m'(t) = f_m(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \end{cases}$$

È sempre possibile ricondurre un'eq. di ordine " m " ad un sistema di m equazioni del primo ordine:

$$y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t))$$

Pongo

$$\begin{aligned} z_1(t) &= y(t) \\ z_2(t) &= y'(t) \\ &\vdots \\ z_m(t) &= y^{(m-1)}(t) \end{aligned}$$

\Rightarrow ottengo

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t) \\ z_2'(t) = z_3(t) \\ \vdots \\ z_{m-1}'(t) = z_m(t) \\ z_m'(t) = f(t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)) \end{cases}$$

Un problema non è ben posto se non si assegna un dato iniziale
 \Rightarrow Problema di Cauchy

$$\lim_{K \rightarrow \infty} y_K = 0 \iff |\mathcal{F}(h\lambda)| < 1$$

\Rightarrow imponendo questa condizione, trovo i valori di h per cui il metodo è stabile (regione di assoluta stabilità del metodo numerico).

es. Procedimento per ricavare la regione di assoluta stabilità del metodo di Euler esplicito:

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y_{K+1} = y_K + h\lambda y_K = \underbrace{(1 + h\lambda)}_{=\mathcal{F}(h\lambda)} y_K$$

\Rightarrow pongo $|1 + h\lambda| < 1$ e trovo i valori di h che soddisfanno questa condizione.

Problemi stiff

$$y'(t) = A y(t) + g(t)$$

si dice "stiff" in $\mathcal{J} = [t_0, t_0 + L]$ se:

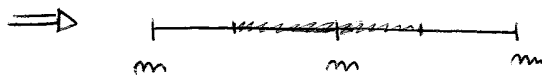
- Eventuali autovalori con parte reale positiva hanno $\mathcal{R}(\lambda_i) \cdot L$ non grande
- Esiste almeno un autovalore con parte reale negativa e $\mathcal{R}(\lambda_i) \cdot L \ll -1$

(con $L =$ ampiezza intervallo)

(con $\mathcal{R}(\lambda_i) =$ parte reale degli autovalori)

② $F(30, 3, L, U)$ arrotondamento

• il max errore relativo che si può commettere facendo $fl(x)$
 $\equiv \epsilon_m = \frac{1}{2} \beta^{1-t}$



$x_1 = 0,982$

$x_2 = 0,984$

$m = \frac{1}{2} \odot (x_1 \oplus x_2) = \frac{1}{2} \odot fl(x_1 \oplus x_2) = \frac{1}{2} \odot fl(1,966) =$

$= \frac{1}{2} \odot (0,197 \times 10) = 0,985$

NO, perché lavorando in macchina ho dovuto fare il floating delle addizione arrotondato 1,966 a 0,197 x 10 (errore mantissa = 3) e quindi ho introdotto un errore che si è ripercosso sul risultato finale. Infatti se avessi mantenuto il n° reale 1,966 $\Rightarrow 0,983 \in (x_1, x_2)$!

③ studiare il condizionamento del problema:

$y = x_1 \cdot x_2 \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$\bar{x}_1 = x_1 + \delta_1$

$\bar{x}_2 = x_2 + \delta_2$

$\bar{y} = (x_1 + \delta_1) \cdot (x_2 + \delta_2) = x_1(1 + \delta_1) \cdot x_2(1 + \delta_2)$

$\delta y = x_1(1 + \delta_1) \cdot x_2(1 + \delta_2) - y$

$\Rightarrow \frac{|\bar{y} - y|}{|y|} = \frac{|\delta y|}{|y|} = \frac{x_1(1 + \delta_1)x_2(1 + \delta_2) - y}{y} \leq \frac{x_1(1 + \delta_1)x_2(1 + \delta_2)}{y} \cdot \left(\frac{-1}{xy}\right)$

PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$\Rightarrow \quad \quad \quad \leq 1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2$

$\Rightarrow \frac{|\bar{y} - y|}{|y|} \leq |\delta_1| + |\delta_2| + |\delta_1 \delta_2|$

quantità ancor più piccola di $|\delta_1|$ e $|\delta_2|$ quindi trascurabile

$\Rightarrow \frac{|\bar{y} - y|}{|y|} \leq |\delta_1| + |\delta_2|$

allora il problema è ben condizionato. Infatti il risultato non è eccessivamente influenzato dalle perturbazioni sui dati, essendo ≤ 1 !

• $Ly = Pc$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 2 \\ -1 + y_2 &= 3 \rightarrow y_2 = 4 \\ 2 + y_3 &= 1 \rightarrow y_3 = -1 \end{aligned}$$

$Ux = y$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} -6x_1 + 2 &= 2 \rightarrow x_1 = 0 \\ 2x_2 + 2 &= 4 \rightarrow x_2 = 1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = (0, 1, 1)^T$

② $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$P_{12}A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \textcircled{1} & \textcircled{1} & 3 \end{pmatrix}$

$m_{31} = \frac{-a_{31}}{a_{11}} = -\frac{1}{4}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 13/4 \end{pmatrix}$

$m_{32} = \frac{-a_{32}}{a_{22}} = \frac{-1/2}{2} = -\frac{1}{4}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 3 \end{pmatrix}$

• $Ly = Pb$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= -1 \\ 1/4 - 1/4 y_3 &= 3 \end{aligned}$$

$Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} 4x_1 + (-2) + (-1) &= 1 \rightarrow x_1 = 1 \\ 2x_2 + 1 &= -1 \rightarrow x_2 = -1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = (1, -1, 1)^T$

• $e^{(k)} = |x^{(k)} - x^*|$ con $x^* = (4, 1, 4)^T$

↓ scelgo

$\|e^{(k)}\|_\infty$

(3)

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} - x_1^* &= \frac{88}{84} - 4 = \frac{88 - 336}{84} = \frac{-248}{84} \\ x_2^{(1)} - x_2^* &= \frac{87}{84} - 1 = \frac{87 - 84}{84} = \frac{3}{84} \\ x_3^{(1)} - x_3^* &= \frac{32}{84} - 4 = \frac{32 - 336}{84} = \frac{-304}{84} \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{84} \\ \frac{13}{84} \\ \frac{10}{84} \end{pmatrix} = e^{(1)} \leftarrow = 0,155$$

(4)

$$\begin{aligned} \frac{6}{7} - 4 &= \frac{-22}{7} \\ \frac{7}{6} - 1 &= \frac{1}{6} \\ \frac{5}{9} - 4 &= \frac{-31}{9} \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = e^{(2)} \leftarrow = 0,25$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{(3)}$$

$\Rightarrow \|e^{(1)}\|_\infty > \|e^{(2)}\|_\infty > \|e^{(3)}\|_\infty$
 $0 > 0,25 > 0,155$ l'errore decresce

N.B.

Teorema di Stern Rosenberg:

- $0 < \rho(B_{GS}) < \rho(B_S) < 1 \Rightarrow$ calcolare sempre $\rho(B_S)$!
- $1 < \rho(B_S) < \rho(B_{GS})$

ENEA

Con B_3

$$B_3 = -D^{-1} (E+F)$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} (E+F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$- [D^{-1} (E+F)] = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0-\lambda & 0 & \frac{1}{9} & -1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0-\lambda & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\det = -\lambda^3 + 0 + 0 - \cancel{6} \left[-\frac{1}{3} \lambda \right] = 0$$

$$-\lambda^3 + \frac{1}{3} \lambda = 0$$

$$-\lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{3} \right) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$



Controllo che $(E+D) \cdot (E+D)^{-1} = I$

$$(E+D) \cdot (E+D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{OK}$$

$$(E+D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(E+D)^{-1} \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\lambda^2 \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{1}{3} \end{cases}$

$$B_{cs} = -[(E+D)^{-1} \cdot F] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$p(B_{cs}) = ?$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & \frac{1}{4} & | & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & | & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} - \lambda & | & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det = \lambda^2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \lambda \right) + 0 + 0 - [0] = 0$$

• $B_S = -D^{-1} \cdot (E + F)$

con:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_S = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & +1/9 \\ 0 & 0-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 0 \rightarrow 0 \\ 0 & 0 \rightarrow \\ 3 & 0 \end{array} \right.$$

$$\det(B_S) = -\lambda^3 - \left(-\frac{1}{3}\lambda\right)$$

$$= -\lambda^3 + \frac{1}{3}\lambda$$

$$= -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{cases} -\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \\ \lambda^2 - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$\Rightarrow \rho(B_S) = \sqrt{\frac{1}{3}} < 1 \Rightarrow$ converge

⑥ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• applicabile perché D è invertibile

• né predominanza diagonale, né simmetria positiva

$B_S = -D^{-1}(E + F)$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & 1/2 \\ 0 & 0-\lambda & 2 \\ 8 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 \rightarrow \\ 8 & 0 \end{array} \right.$$

$$\det(B_S) = -\lambda^3 - (-4\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 4)$$

$$\begin{cases} -\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \\ \lambda^2 - 4 = 0 \rightarrow \lambda = 2 \end{cases}$$

$\rho(B_{GS}) > 1 \Rightarrow$ non converge

$$Ux = y$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

* con $Ax = c \rightarrow x = (1, 0, 1, 0)^T$

43 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P_{13}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}} = \frac{-1}{2}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{-a_{32}}{a_{22}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{43} = \frac{-a_{43}}{a_{33}} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$P_{34}A^{(3)} = A^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = P_{13}P_{34} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 15/4 \end{pmatrix}$$

$$Ly = Pb$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

$$Ux = y$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 15/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = (1, 1, 0, 0)^T$$

$$\Rightarrow \text{con } \Delta x = c \quad x = (0, 1, 0, 1)^T$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{matrix} x_i = -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ y_i = -7 & 0 & 2 & 9 & 28 \end{matrix}$$

$$l_k(x) = \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)} \quad \text{con Lagrange}$$

$$(x_0, y_0) = (-2, -7)$$

$$l_0(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)(-2-3)}$$

$$(x_1, y_1) = (-1, 0)$$

$$l_1(x) = \frac{(x+2)(x-4)(x-2)(x-3)}{(0+2)(0-1)(0-2)(0-3)}$$

$$(x_2, y_2) = (1, 2)$$

$$l_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-2)(x-3)}{(0+2)(0+1)(0-2)(0-3)}$$

$$(x_3, y_3) = (2, 9)$$

$$l_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)}{(0+2)(0+1)(0-1)(0-3)}$$

$$(x_4, y_4) = (3, 28)$$

$$l_4(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+2)(0+1)(0-1)(0-2)}$$

$$P_4(x) = -7l_0(x) + 0l_1(x) + 2l_2(x) + 9l_3(x) + 28l_4(x)$$

con Newton

x_k	$f(x_k)$	$f(x_k, x_{k+1})$	$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$	$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3})$	$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+4})$
-2	-7				
-1	0	$\rightarrow \frac{0 - (-7)}{-1 - (-2)} = 7$			
1	2	$\rightarrow \frac{2-0}{1-(-1)} = 1$	$\rightarrow \frac{1-7}{1-(-2)} = -2$		
2	9	$\rightarrow \frac{9-2}{2-1} = 7$	$\rightarrow \frac{7-1}{2-(-1)} = 2$	$\rightarrow \frac{2-(-2)}{2-(-2)} = 1$	
3	28	$\rightarrow \frac{28-9}{3-2} = 19$	$\rightarrow \frac{19-7}{3-1} = 6$	$\rightarrow \frac{6-2}{3-(-1)} = 1$	$\rightarrow \frac{1-1}{3-(-1)} = 0$

$$\Rightarrow P(x) = -7 + 7(x+2) - 2(x+2)(x+1) + 1(x+2)(x+1)(x-1) + 7(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) + 1(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$$

Il grado del polinomio è 3 come si può vedere dalla tabella di Newton.

Essendo una spline di ordine tre ~~deve~~ avere continuità significa avere continuità non solo per la funzione, ma anche per d' , d'' .

$$\Downarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} d_1 = d_2 \\ c_1 = c_2 \\ 2b_1 = 2b_2 \end{array} \right\} \text{dovete sostituire la } x \text{ del punto } (0,2) \text{ dove} \\ \text{voglio avere la continuità in } S_3(x), S_3'(x) \text{ e} \\ S_3''(x), \text{ per } x \text{ uguali a } S_3(x), S_3'(x), S_3''(x) \\ \text{con pedice 2.}$$

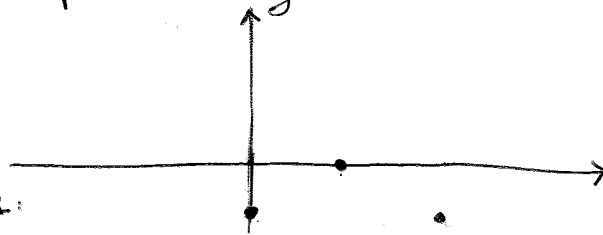
Essendo una spline naturale vogliamo:

$$\begin{aligned} S_3''(x_0) = 0 & \quad -6a_1 + 2b_1 = 0 \\ S_3''(x_n) = 0 & \quad 6a_2 + 2b_2 = 0 \end{aligned}$$

Con le 8 equazioni in 8 incognite (parametri) e dunque risolvendo il sistema otterremo il polinomio interpolante. Potrei determinare quindi l'equazione della spline inserendo il valore delle incognite nell'equazione generale.

⑤ $[a, b] = [0, 3]$

$(0, -1) (1, 0) (3, -1)$



- spline interpolante di ordine 4:
- $m = \text{n° intervalli} = 2$
- $d = \text{ordine della spline} = 1$
- $\text{n° parametri} = 4$
- $\text{n° condizioni} = 4$

$$S_4(x) \begin{cases} c_1 x + d_1 & x \in [0, 1] \\ c_2 x + d_2 & x \in (1, 3] \end{cases}$$

Impongo il passaggio per i punti:

$$\begin{aligned} d_1 &= -1 \\ c_1 + d_1 &= 0 \\ 3c_2 + d_2 &= -1 \end{aligned}$$

Impongo la continuità nel nodo interno $(1, 0)$

$$c_1 + d_1 = c_2 + d_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d_1 &= -1 & \Rightarrow d_2 &= 1/2 \\ c_1 &= 1 & c_2 - 4 - 3c_2 &= 0 \Rightarrow c_2 = -1/2 \\ c_2 + d_2 &= 0 & \text{con } d_2 = -1 - 3c_2 & \Rightarrow c_2 = -1/2 \end{aligned}$$

• spline cubica periodica:

$$m = 2$$

$$d = 3$$

$$n^{\circ} \text{ param.} = 8$$

$$n^{\circ} \text{ cond.} = 6 + 2 \text{ libere}$$

come prima, ma cambiano le condizioni libere:

$$S'_3(x_0) = S'_3(x_m) \rightarrow c_1 = 27a_2 + 6b_2 + c_2$$

$$S''_3(x_0) = S''_3(x_m) \rightarrow 2b_1 = 18a_2 + 2b_2$$

⑥, ⑦, ⑧, ⑨, ⑩, ⑪ \rightarrow NO, perché con il min/m quadrato

⑫ spline di ordine 2

$$(-1, 2) \quad (0, 1) \quad (1, 2)$$

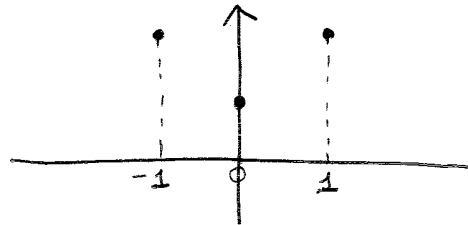
$$\text{con } S'_2(1) = 0$$

$$m = 2$$

$$d = 2$$

$$n^{\circ} \text{ param.} = 6$$

$$n^{\circ} \text{ condizioni} = 5$$



$$S_2(x) = \begin{cases} b_1 x^2 + c_1 x + d_1 & x \in [-1, 0] \\ b_2 x^2 + c_2 x + d_2 & x \in (0, 1] \end{cases}$$

impiego passaggio per punti:

$$+ b_1 - c_1 + d_1 = 2$$

$$d_1 = 1$$

$$b_2 + c_2 + d_2 = 2$$

impiego continuità in (0, 1):

$$S'_2(x) = 2b_1 x + c_1$$

$$d_1 = d_2$$

$$c_1 = c_2$$

$$\text{Ed in } \text{pu}\ddot{\text{c}}: 2b_2 + c_2 = 0$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} y'''(x) - 4y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = x^2 & x \in (0, +\infty) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = -2 \end{cases}$$

$$\cdot y'''(x) = 4y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) + x^2$$

$$\cdot z_1(x) = y(x)$$

$$z_2(x) = y'(x)$$

$$z_3(x) = y''(x)$$

$$\cdot \begin{cases} z_1'(x) = z_2(x) \\ z_2'(x) = z_3(x) \\ z_3'(x) = 4z_3(x) - 2z_2(x) - 3z_1(x) + x^2 \\ z_1(0) = 1 \\ z_2(0) = 2 \\ z_3(0) = -2 \end{cases}$$

$$\cdot \begin{cases} z'(x) = Az(x) + g(x) \\ z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{4} \textcircled{a} \begin{cases} y' = -10y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$z_1 = y$$

$$\begin{cases} z_1' = -10z_1 \\ z_1(0) = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow A(-10)$$

$$\det(A) = 0 \rightarrow -10 - \lambda = 0 \\ \lambda = -10$$

autovalore negativo quindi è asintoticamente stabile

per essere anche assolutamente stabile impiego $\lambda =$ autovalore più negativo (= -10 in questo caso) e lo sostituisco in R_2 per avere!

$$\text{- e.e.: } |1 - 10h| < 1 \quad \begin{cases} 1 - 10h < 1 & h > 0 \\ -1 + 10h < 1 & h < \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\text{- e.i.: } |h\lambda - 1| > 1 \quad \begin{cases} -10h - 1 > 1 & h < -\frac{1}{5} \\ 10h + 1 > 1 & h > 0 \end{cases}$$

b) Uguale a prima, ma

$$A(10)$$

$$\det(A=0) \rightarrow 10 - \lambda = 0 \\ \lambda = 10$$

autovalore positivo, quindi $\lambda_i(A) > 0 \Rightarrow$ non asintot. stabile

\Rightarrow allora non lo senso cercare un passo h.

$$\textcircled{c} \begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y'' = -5y' - 6y$$

$$z_1 = y$$

$$z_2 = y'$$

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -5z_2 - 6z_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_i(A) = -2, -3$$

quindi è asint. stabile con qualche h
Per volutare y e assolutamente stabile, impiego $\lambda = -6$.

$$z_1(0) = 1$$

$$z_2(0) = 1$$

$$\textcircled{d} \begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(2) = \pi \\ y'(2) = 4 \end{cases}$$

$$y'' = 5y' - 6y$$

$$z_1 = y$$

$$z_2 = y'$$

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = 5z_2 - 6z_1 \\ z_1(2) = \pi \\ z_2(2) = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_i(A) = 3, 2$$

\Rightarrow non è asintoticamente stabile
 \Rightarrow non è ass. stabile

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

$$y(1/2) = 2$$

$$y'(1/2) = -5/2$$

$$y(*^{(1)}) \text{ con } *^{(1)} = *^{(0)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

7

$$\begin{cases} y_1'(x) = -449y_1(x) - 429y_2(x) \\ y_2'(x) = -369y_1(x) - 349y_2(x) \\ y_1'(0) = 1 \\ y_2'(0) = 2 \end{cases} \quad x \in (0, 1)$$

• stabilire se il problema è stiff

Perché un problema sia stiff:

- eventuali autovalori positivi devono avere $\lambda_i L$ non grande
- l'autovalore negativo deve avere $\lambda_i L \ll -1$

con $L =$ ampiezza intervallo

$$\begin{pmatrix} -449-\lambda & -429 \\ -369 & -349-\lambda \end{pmatrix} \lambda \quad (-449-\lambda) \cdot (-349-\lambda) - (-369 \cdot -429) = 0$$

$$+156701 + 449\lambda + 349\lambda + \lambda^2 - 158301 = 0$$

$$\lambda^2 + 798\lambda - 1600 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-798 \pm \sqrt{636804 + 6400}}{2}$$

$$= \frac{-798 \pm 802}{2} \begin{cases} +2 \\ -800 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -800 \cdot 1 \ll -1 \Rightarrow \text{è stiff}$$

Valendo usare il metodo di e.e. per integrarlo numericamente, determinare un passo h per cui i prodotti $h\lambda_i$, per gli autovalori con $\text{Re } \lambda_i < 0$, appartengano alla regione di ass. stab. del metodo

Se voglio usare e.e.:

$$h < \frac{-2}{\lambda} \rightarrow h < \frac{-2}{-800} = \frac{2}{800} \quad \text{se voglio un metodo stabile devo scegliere questo passo.}$$

$$= 0,0025$$

che va bene anche considerando l'intervallo in cui devo integrare il metodo che è piccolo.

COMANDI GENERICI :

`norm(a)` mi fa la norma del vettore/matrice
`M=diag(A)` estrae da A la diagonale e genera una matrice triangolare avente la diagonale di A

PLOT

`plot(x,y)` per fare un grafico
"hold on" mi permette di sovrapporre due grafici
`plot(x,y,marker)` scelgo il marker che voglio mi raffiguri il grafico
`plot(x,y,'c+')` mette una croce sul grafico in corrispondenza di ogni dato
`plot(x,y,'k+')` mi mette solo i dati non interpolati (quindi solo i valori puntuali)

(slides teoriche pag 55-77)

CICLO FOR

CICLO WHILE

FUNCTION (e' bene tenerli in file separati, ad es. nome.m)

`function[y1,y2,.....,yn]=nome(x1,.....,xn)`
(output) (input)

FATTORIZZAZIONE

\ fa l'eliminazione gaussiana
`LU(A)` restituisce la fattorizzazione dando tre risultati, L,U e P
`CHOL(A)` restituisce una matrice R triangolare (occhio perche' non controlla che la matrice sia simmetrica positiva!!)

CONTROLLO DEL RESIDUO DEL SISTEMA LINEARE

$r(x)=b-A * x$ soprassegnato ~ 0 mi dice quanto la mia soluzione sia distante da quella reale

INTERPOLAZIONE

`a=polyfit(x,y,n)` ottengo in uscita i coeff. del polinomio (ma in entrata?)
`yy=polyval(a,xx)` xx e' il vettore dei punti in cui voglio valutare il polinomio
`yy=spline(x,y,xx)`
dove: x e' il vettore ascisse dei punti di interpolazione
y e' il vettore delle ordinate dei punti di interpolazione
xx e' il vettore delle ascisse dei punti in cui voglio valutare il polinomio

OSS.----> x e y di= lunghezza-----> not a knot
x e y + 2 elementi rispetto a x----->vincolata


```
errore=norm(x-x_es)/norm(x_es);
pause
end
```

METODI ITERATIVI

FUNCTION DI JACOBI

```
function [xn,messaggio,k]=jacobi(A,b,Nmax,x0,tol)
%
%
M=diag(diag(A));
N=A-M;% deriva dallo splitting della matrice A in A=M+N
%xc=x corrente, xn=x nuovo
xc = x0;

for k=1:Nmax
    xn = M\(-N*xc+b);% deriva da  $Mx^{(k+1)}=-Nx^{(k)}+b$ 
    if norm(xn-xc)/norm(xn) <= tol
        messaggio = 'Verificato criterio di arresto';
        break
    end
    xc = xn;
end
if ~exist('messaggio')
    messaggio = 'Test di arresto non verificato';
end
```

FUNCTION RHO

```
function r=rho(A)% function per determinare il raggio spettrale
%data una matrice quadrata in ingresso A

r=max(abs(eig(A)))
```

FUNCTION GS

```
function [xn,messaggio,k]=MetGS(A,b,Nmax,x0,tol)
%
%
M=tril(A,0); %il comando tril mi prende la matrice triangolare inferiore di A.
%0 vuol dire che la faccio partire dalla diagonale principale.
%ho usato il comando tril perche' la parte invertibile in Bgs e' data da
%(E+D)^-1. In jacobi, invece, e' solo D^-1.
N=A-M;

xc = x0;

for k=1:Nmax
    xn = M\(-N*xc+b);
    if norm(xn-xc)/norm(xn) <= tol
        messaggio = 'Verificato criterio di arresto';
        break
    end
    xc = xn;
end
if ~exist('messaggio')
    messaggio = 'Test di arresto non verificato';
end
```

%guardo k, ovvero il numero di iterazioni che ci sono volute per arrivare
%alla soluzione

ODE

EULERO ESPLICITO

```
function [t,u]=EE(f,u0,h,t0,T)
%la prima cosa da fare è creare il vettore dei nodi, con il comando colon
t=t0:h:(t0+T);
%poi devo applicare il metodo di eulero esplicito, quindi inizio a fare un
%ciclo four

u(1)=u0;%ho messo il dato iniziale
for k=1:length(t)-1%k lo faccio arrestare dove?quanti passi devo fare?mi devo
fermare ad un numero di passi =t-1. Length è un comando che mi permette di
calcolare la lunghezza di un vettore.
    tmp=feval(f,t(k),u(k));%questo comando valuta la funzione f in t(k) e u(k)
    u(k+1)=u(k)+h*tmp;%ho creato una variabile temporanea tmp che utilizzo per
applicare il metodo di eulero esplicito
end
```

f

```
function y=f(t,u)
y=u+sin(t);
```

ES2

```
[t,u]=EE(@f,0,0.1,0,1);
plot(t,u,'r*');

hold on
[t2,u2]=EE(@f,0,0.02,0,1);
plot(t2,u2,'go');

u_ex=0.5*(exp(t)-sin(t)-cos(t));
plot(t,u_ex,'k-')
legend('h=0.1','h=0.02','sol. esatta')
```

fbis

```
function zprimo = fbis(t,z)
zprimo(1,1)=z(2);
zprimo(2,1)=-6*z(1)-7*z(2)+t^2+1;
%zprimo=zprimo';
```

$\Rightarrow z_1'(t) = z_2(t)$
 $\Rightarrow z_2'(t) = -6z_1(t) - 7z_2(t) + t^2 + 1$
 $t \in [1, 2]$

ES3

```
[t_ode45,u_ode45]=ode45(@fbis,[1 2],[3,2]);
plot(t_ode45,u_ode45);
legend('z1, i.e. u','z2, i.e. u''');
```

$[u(t), u'(t)]$
 $[z_1(t), z_2(t)]$
 a part detour
 che basi

INTERPOLAZIONI