NUMERO: 690

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Comito

MATERIA: Analisi Matematica I
Prof. Codegone

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$: numeri interi positivi $(1; 2; 3 \dots)$ $0 \ 1 \ 2 \ 3 \rightarrow$

$\mathbb{Z}$ numeri interi relativi (i n° compreso quelli negativi)

$\mathbb{Q}$: numeri razionali (rapporto tra 2 n° interi): $\frac{p}{q}$ con $q \neq 0$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

$\mathbb{R}$: numeri reali $\rightarrow$ razionali + non razionali

n° irrazionali : $\sqrt{2}$; π ; e ... (non si ottengono dal rapporto di 2 n°)

_ POLINOMI _

è un espressione indicata con

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

n = grado del polinomio

a_n, a_0 = coefficiente (n° razionale)

es $3x^5 - 7x^4 + x^2 - x + 2$ polinomio di grado 5

$a_0 = 2$ $a_3 = 0$

$a_1 = -1$ $a_4 = -7$

$a_2 = 1$ $a_5 = 3$

SOMMA DI POLINOMI

$$(3x^5 - 7x^4 + x^2 - x + 2) + (-x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - 7) = -x^6 + 4x^5 - 8x^4 + x^3 + x^2 - 5$$

PRODOTTO DI POLINOMI

$$(2x^2 + x - 5)(x^3 - 2) = 2x^5 - 4x^2 + x^4 - 2x - 5x^3 + 10$$

PRODOTTI NOTEVOLI

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$$

• è divisibile per $x-1$?

$P(1)=2-1+5-6=0 \Rightarrow$ DIVISIBILE $\Rightarrow P(x)=Q(x)\cdot S(x)+\cancel{R(x)}$

$P(x)$ è divisibile per x? $\Rightarrow x-0$

$P(0)=-6\neq 0$ NON è DIVISIBILE

• Con la <u>scomposizione in fattori</u> ci poniamo come obbiettivo quell di scrivere un polinomio dato, come prodotto (o potenze) di fattori di grado inferiore

<u>es</u>: $P(x)=x^4-9x^2=x^2(x^2-9)=x^2(x-3)(x+3)$

— FUNZIONI —

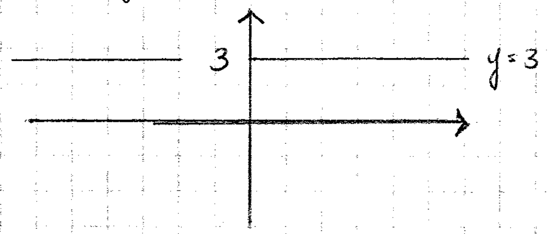
$P(x)=x^4-2x+1$

$\Rightarrow y=P(x)$ $\qquad P(2)=$ valore della f^{ne} in $x=2$

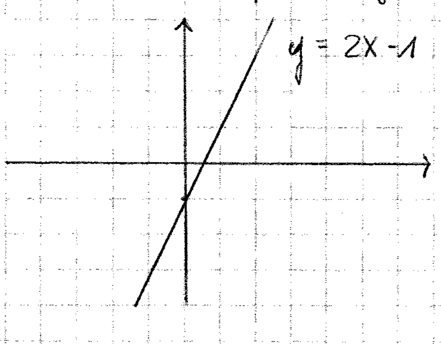
① Polinomi di 1° grado

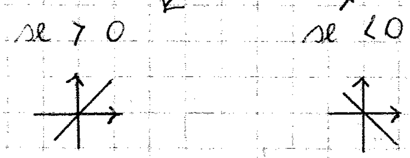
$f(x)=ax+b$ $\qquad a$ e b numeri assegnati

<u>caso 1</u> $a=0 \rightarrow f(x)=b$ per es. $f(x)=3 \Rightarrow f^{ne}$ costante



<u>caso 2</u> $a\neq 0$ per es $f(x)=2x-1 \Rightarrow y=2x-1 \rightarrow$ coeff. angolare

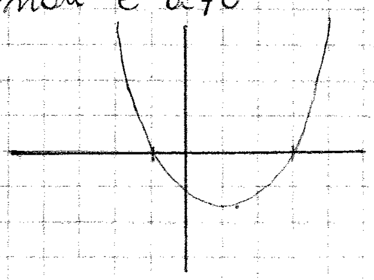




② Polinomi di 2° grado $\quad a$ e b n° assegnati e $a\neq 0$

$f(x)=ax^2+bx+c$ $\qquad$ per es $f(x)=x^2-2x-3$

• calcolo del vertice $\Rightarrow (x_v;y_v)=\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$



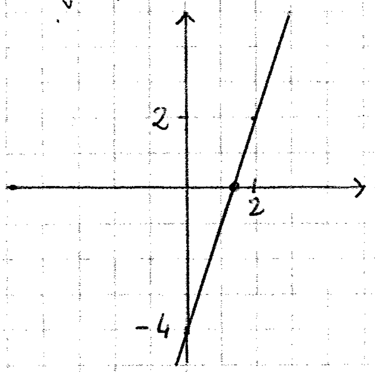
_ Eq. / Diseq di 1° GRADO _

es: 1) $3x-4=0 \qquad x=\frac{4}{3}$

2) $3x-4<0 \qquad x<\frac{4}{3}$

- Interpretazione grafica

1) $y=3x-4$



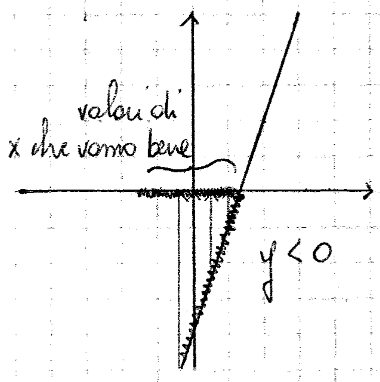
- Risolvere l'equazione significa trovare per quali valori x, $y=0 \Rightarrow (4/3;0)$

- IN GEN: risolvere $f(x)=0$ vuol dire trovare i punti del grafico in cui $y=0$

2) $3x-4<0 \qquad x<\frac{4}{3}$

grafico di $y=3x-4$

- Calcolare la disequazione significa trovare per quali valori di x si ha $y<0$



_ Eq. di 2° GRADO _

$ax^2+bx+c=0$

formula risolutiva: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\boxed{b^2-4ac}}}{2a}$ → Δ (discriminante)

se: $\Delta>0$ si hanno due soluzioni x_1 e x_2 $\qquad x_1\neq x_2$

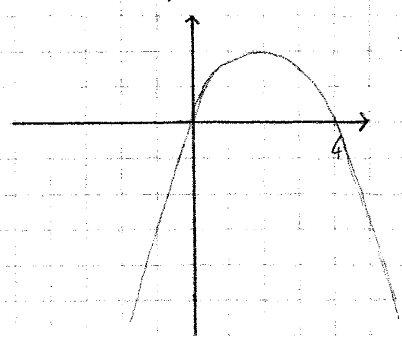
$\Delta=0$ si hanno due soluzioni coincidenti $\Rightarrow x_1=x_2$

$\Delta<0$ non ci sono soluzioni reali $\qquad x_1$ e $x_2 \notin \mathbb{R}$

es $-x^2+4x=0 \qquad -x(x-4)=0$

$x_1=0 \qquad x_2=4$

grafico della parabola:



2° CASO

$\sqrt{P(x)} > Q(x)$

$$\underbrace{\begin{cases} Q(x) \leq 0 \\ P(x) \geq 0 \end{cases}}_{\text{In questo caso sarà automaticamente vera.}} \cup \begin{cases} Q(x) > 0 \\ P(x) \geq 0 \\ P(x) \geq (Q(x))^2 \end{cases}$$

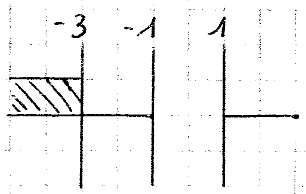
es: $\sqrt{x^2-1} > x+3$

$$\text{A} \begin{cases} x+3 \leq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \cup \text{B} \begin{cases} x+3 > 0 \\ x^2-1 > (x+3)^2 \end{cases}$$

A $\cdot\ x+3 \leq 0 \Rightarrow x \leq -3$

$\cdot\ x^2-1 \geq 0$

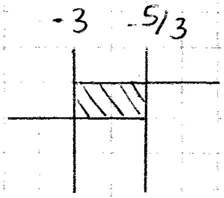
$x \leq -1$ e $x \geq 1$



$\Rightarrow x < -3$

B $\cdot\ x > 3$

$\cdot\ x^2-1 > x^2+6x+9 \Rightarrow x < -\frac{5}{3}$



$\Rightarrow -3 < x < -5/3$

A/B $\Rightarrow x < -5/3$

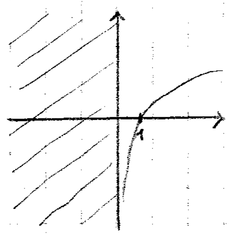
- $\log_a x^b = b \cdot \log_a x \quad \forall x > 0$
- <u>cambiamento di base</u>:
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} \quad \forall x > 0$

– BASE PRIVILEGIATA $b = e$

$$\boxed{\log x = y \iff e^y = x}$$

$f(x) = \log x \qquad D: x > 0$

$f(1) = 0$



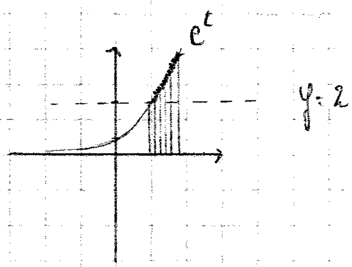
es.: • $\log x = -1 \iff e^{-1} = x$

• $\log x < 0 \qquad 0 < x < 1$

• $e^{3x} \geq 2 \qquad 3x = t \Rightarrow y = e^t$

lo risolvo ponendo $y = 2 \rightarrow e^t = 2$

$\Rightarrow \log 2 = t \Rightarrow 3x \geq \log 2 \rightarrow x \geq \frac{1}{3} \log 2$

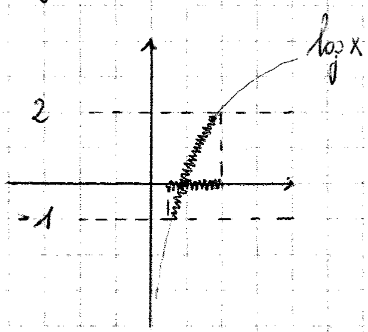


• $\log^2 x - \log x - 2 < 0 \qquad$ sostituisco $\log x = t \Rightarrow t^2 - t - 2 < 0 \quad y = t^2 - t - 2$

$t_1 = -1 \quad t_2 = 2$

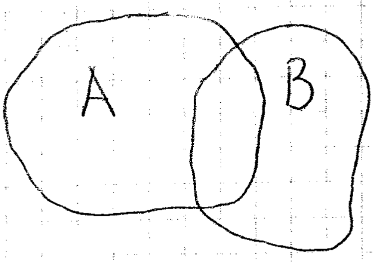
$-1 < t < 2 \Rightarrow -1 < \log x < 2$

$\left.\begin{array}{l} \log x = 2 \\ \log x = -1 \end{array}\right\} e^2 = x \; ; \; e^{-1} = x$



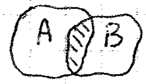
$\Rightarrow$ il risultato è: $e^{-1} < x < e^2$

TEORIA DEGLI INSIEMI

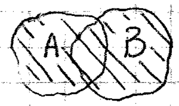


$A \cup B$ = unione

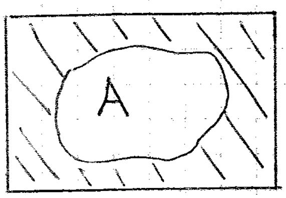
$A \cap B$ = intersezione



$A \cap B$



$A \cup B$



$\complement A$

LOGICA MATEMATICA

PREPOSIZIONI { vere / false

- $\wedge$: congiunzione logica "et"

- P e Q sono preposizioni $P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- $\vee$: disgiunzione logica "vel" ("o"; "oppure")

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

es: $2 \leq 3 \Rightarrow \underbrace{\underbrace{(2 < 3)}_{\text{VERO}} \vee \underbrace{(2 = 3)}_{\text{FALSO}}}_{\text{VERO}}$

DIM:

$$\begin{array}{l|l} ax^2+bx+c & (x-x_0) \\ \underline{ax^2-axx_0} & ax+(b+ax_0 \\ // \quad (b+ax_0)x+c & \\ \quad \underline{-(b+ax_0)x-bx_0-ax_0^2} & \\ \quad // \quad \underbrace{ax_0^2+bx+c}_{P(x_0)=0} & \end{array}$$

2_ Per contrapposizione

$I \Rightarrow T$ ha lo stessa tabella di verità di $\neg T \Rightarrow \neg I$ cioè:

$(I \Rightarrow T) \Leftrightarrow (\neg T \Rightarrow \neg I)$

I	T	I ⇒ T
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

¬T	¬I	¬T ⇒ ¬I
F	F	V
V	F	F
F	V	V
V	V	V

esempio:

I: sia E l'insieme di tutti i numeri primi

T: l'insieme E è infinito

$I \Rightarrow T \qquad \neg T \Rightarrow \neg I$

$\neg T$: E è formato da un numero finito di numeri

$\neg I$: E non ha tutti i numeri primi.

$a_1; a_2; a_3 \dots a_n$

$(a_1; a_2; a_3 \dots a_n)+1 = m$

$m : a_1$ da resto non nullo

$m : a_2$ " " "

$m : a_n$ " " "

m: o è primo o ha un fattore primo diverso da $a_1; a_2 \dots a_n$

PREDICATI e QUANTIFICATORI

Il predicato è una preposizione che dipende da 1 o più variabili
$P(x)$; $P(x,y)$; $P(x,y,z)$
Il suo valore di verità dipende dalla variabile
$P(x)$: { x è un numero pari }
$x \in \mathbb{N}$: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$
$P(27)$: falsa $\quad$ $P(18)$: vera

QUANTIFICATORI

$\forall$ "per ogni" $\quad$ $\exists$ "esiste almeno una" $\quad$ $\nexists$ "non esiste nessun"

esempio:

$\forall x \qquad (1+x^2) = 1+2x+4$

$\exists x \qquad x-5=0 \qquad (x)=5$

$\nexists \qquad$ x = numero reale $\qquad x^2+1=0$

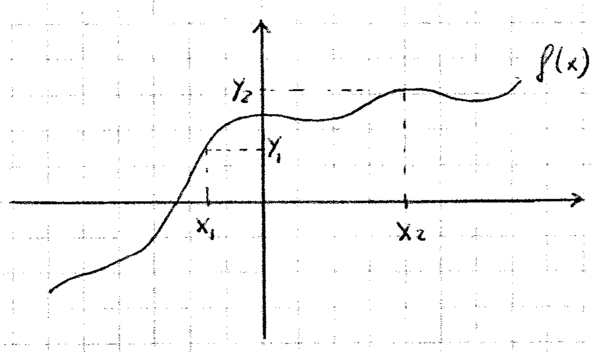
FUNZIONI

x	y

ad ogni valore di x corrisponde una y
f: da dominio $f \to \mathbb{R}$

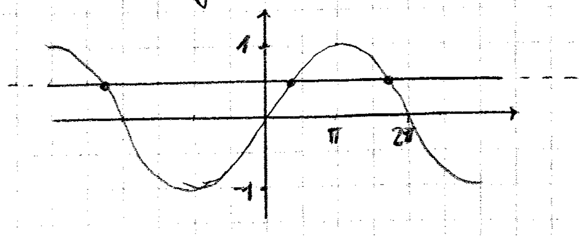
- $(x_1; y_1)$ $(x_2; y_2)$ se $x_1 = x_2$ allora $y_1 = y_2$

Se invece $y_1 = y_2$ ci possono essere due o più valori di x perchè $(x_1; x_2)$ $\in$ grafico



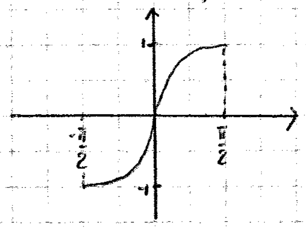
- Il grafico di f è un grafico di funzione x le rette verticali // all'asse y con x $\in$ al dom. di f, incontrano il grafico in un solo punto.

ESEMPIO: $y = \operatorname{sen} x$



$f(x)$ non è né iniettiva né suriettiva.
Si può però restringere il dom a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow$

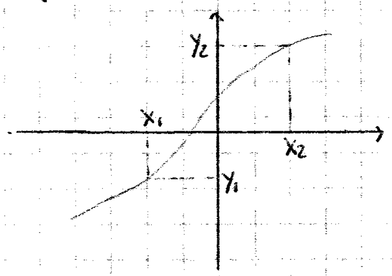


In questo caso le rette orizzontali o non intercettano il Gf. o lo intercettano in un solo punto. Allo stesso modo si può restringere il campo delle y a $[-1; 1]$.

$\Rightarrow \operatorname{sen} x$ ristretta a $y[-1;1]$ e $x\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ diventa iniettiva e suriettiva, e si indica con $\left. f \right|_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]} (x) = \left. \operatorname{sen} x \right|_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$

$y = f(x)$ è MONOTONA CRESCENTE perché:

$\forall x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ come $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x$



DEF. Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$\sup f := \sup \operatorname{imm}(f)$ e si dice "estremo superiore di f".

"uguale per definizione"

$\inf f := \inf \operatorname{im}(f)$ "estremo inferiore di f"

$\max f := \max \operatorname{imm}(f)$

$\min f := \min \operatorname{imm}(f)$

• OSS: - se $\exists \max f$, allora $\max f = \sup f$
- se $\exists \min f$, allora $\min f = \inf f$

es $f(x) = |x|$

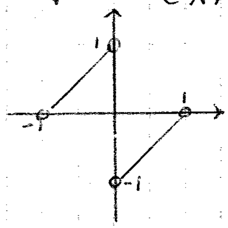
$\sup f = +\infty$, $\nexists \max f$.

$\inf f = 0$, $\exists \min f = 0$

es. $f(-1;1) \to \mathbb{R}$ trovare $im(f)$ e dire se è iniettiva.

$f(x) := x - sgn(x)$

$$f(x) = x - sgn(x) \begin{cases} x-1 & se\ x>0 \\ x-x & se\ x=0 \\ x+1 & se\ x<0 \end{cases}$$

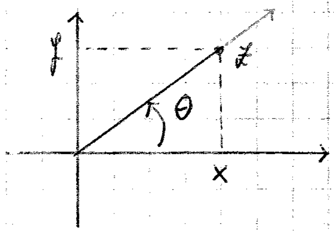


$imm(f) = (-1;1)$

f è iniettiva ma non è strettamente monoton

(cioè $f(x) < f(y)$)

_ COORDINATE POLARI _



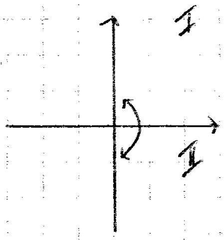
$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = r$

$x = r \cdot \cos\theta$

$y = r \cdot \sin\theta$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases} \quad r>0 \text{ e } x \neq 0 \qquad \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = tg\,\theta$$

$-\frac{\pi}{2} < arctg \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$



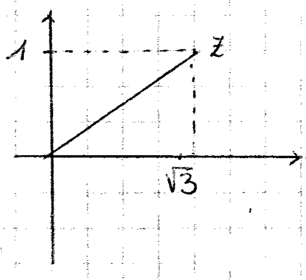
se $x>0$ $\quad \theta = arctg \frac{y}{x}$

se $x<0$ $\quad \theta = \pi + arctg \frac{y}{x}$

ESEMPIO:

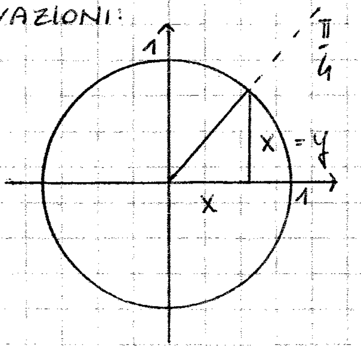
$z = \sqrt{3} + i$ $\qquad$ modulo di $z = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

$x = \sqrt{3} > 0$ $\qquad \theta = arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$



OSSERVAZIONI:

1_



$1 = \sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,x$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- FORMULA di EULERO -

- Prendendo due numeri complessi z e w con $|z|=1$ e $|w|=1$

$$\left.\begin{array}{l} z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ w = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \\ z\cdot w = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) \\ \Updownarrow \\ z\cdot w = e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi} = e^{i\cdot(\theta+\varphi)} \end{array}\right\}\ \text{FORMULA: } \boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

es. $r=(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cdot e^{i\theta} = z$ $\qquad |z|=r \qquad \theta = \arg z$

$\mathrm{Re}\, z = r\cos\theta \qquad \mathrm{imm}\, z = r\sin\theta$

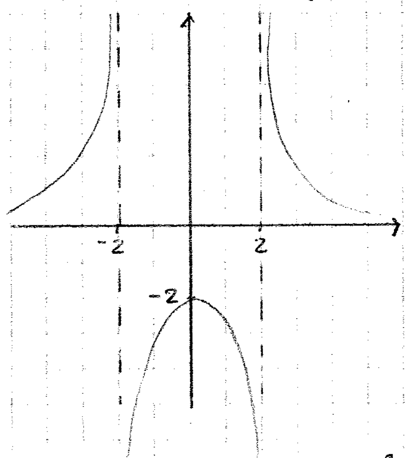
$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}\cdot e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y) \qquad |e^{z}| = e^{x}$

$\arg e^{z} = y$

DEF.

Sia $f: D = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $B \in \mathbb{R}$, si dice CONTROIMMAGINE di B tramite f, l'insieme $f^{-1}(B) := \{x : f(x) \in B\}$

=> esempio: Sia $f(x)$ di grafico:



- Allora l'insieme $f^{-1}([-1;+\infty])$ è:

(a): $(-\infty;-2] \cup (0;+\infty)$

(b): $(0;+\infty)$

(c): $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$

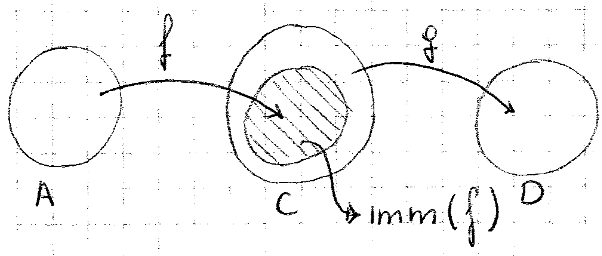
(d): $[-2;+2]$

- $f^{-1}([-1;+\infty)) = \{x : f(x) \in [-1;+\infty)\} = \{x : -1 \leq f(x)\} =$

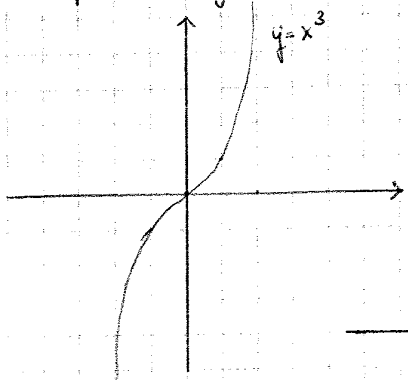
$= (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ $\qquad$ • (c) è la risposta VERA.

DEF.

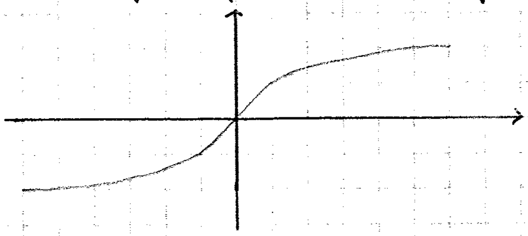
Siano date $f: A \to B$ e $g: C \to D$ tali che $\mathrm{imm}(f) \subseteq C$ si dice COMPOSIZIONE di f e g, e si denota con $f \circ g: A \to D$, la funzione definita da $(g \circ f)(x) := g(f(x))$



<u>esempio</u> $f(x) = x^3$



• Per vedere se f ha l'inverso, scrivo $y=x^3$ ma la risolvo in x $\Rightarrow$ $x=\sqrt[3]{y}$ che indica la f^ne $f^{-1}(y)$ $\Rightarrow$ $x=\sqrt[3]{y}=f^{-1}(y)$



• ottengo un grafico simmetrico rispetto a f.

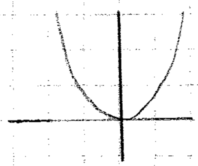
• <u>PROPRIETÀ</u>: Se f è iniettiva allora $\exists\, f^{-1}$ funzione inversa.

<u>DEF.</u>

$$\underset{\text{DOMINIO}}{f: A} \to \underset{\text{CODOMINIO}}{B}$$ si dice suriettiva se $\mathrm{imm}(f) = B$

(ha senso parlare di suriettività solo se esiste il codominio)

<u>esempio</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$



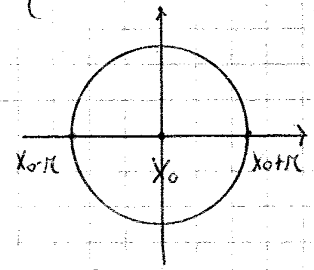
NON è suriettiva perché $\mathrm{imm}(f) =$
$= [0; +\infty) \neq \mathbb{R}$

INTORNO

• Chiamiamo intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ di raggio $r > 0$ l'intervallo aperto e limitato $I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$

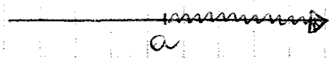
$$\underbrace{|x - x_0| < r}$$

$$-r < |x - x_0| < +r$$



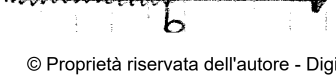
• Intorno ~~finito~~ di estremo inferiore a $a \in \mathbb{R}$

$I_a(+\infty) = (a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$



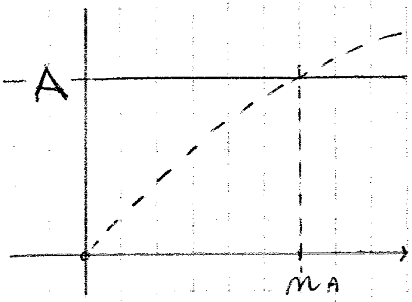
• Intorno di $-\infty$ di estremo superiore $b \in \mathbb{R}$

$I_b(-\infty) = (-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$



DEF. $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R} \ \exists n_A \in \mathbb{N} : n > n_A \Rightarrow a_n > A$

esempio: $a_n = \sqrt{n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$



$\forall A \ \exists n_A$

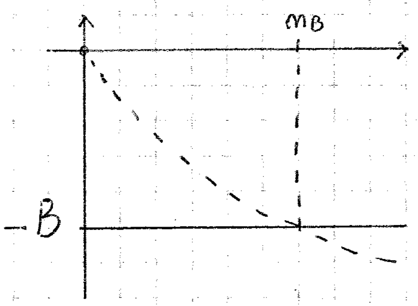
$n > n_A \Rightarrow a_n > A$ $\qquad \sqrt{n} > A$ ↗ se $A < 0 \to n \geq 0$ ↘ se $A > 0 \to n > A^2$

$\Rightarrow n_A = [A^2] + 1$

PARTE INTERA

DEF $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty \iff \forall B \in \mathbb{R} \ \exists n_B \in \mathbb{N} : n > n_B \Rightarrow a_n < B$

esempio: $a_n = \sqrt[3]{-n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sqrt[3]{-n} = -\infty$



$\forall B \in \mathbb{R} \ \exists n_B$

$n > n_B \Rightarrow a_n < B$ $\qquad \sqrt[3]{-n} < B$ ↗ se $B \geq 0 \to n < 0$ ↘ se $B < 0 \to -n < B^3$

$\Rightarrow n_B = [B^3]$

PARTE INTERA.

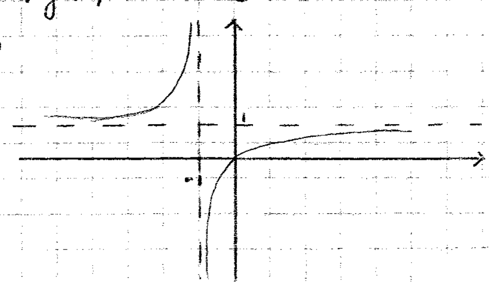
OSS. • Se a_n è monotona crescente e cioè $a_{n+1} \geq a_n$, allora
$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup \{a_n\}$

• Se a_n è monotona decrescente e cioè $a_{n+1} < a_n$, allora
$\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf \{a_n\}$

_ LIMITI DI FUNZIONI E CONTINUITÀ _

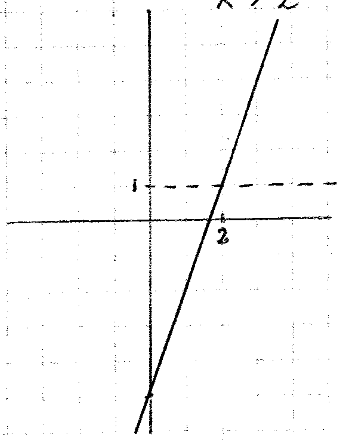
def: Si dice che f tende al limite finito $l \in \mathbb{R}$ per x tendente a $+\infty$ e si scrive: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$; • se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \in \mathbb{R}$: ($x \in$ dominio di f).
• $\forall x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

esempio: $f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \in \mathbb{R}$
$\forall x > A \ \left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon$

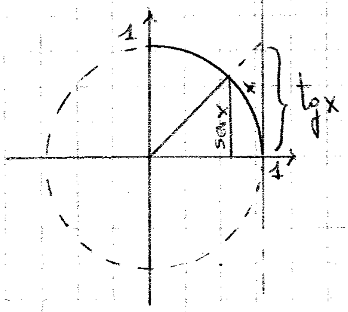
<u>esempio</u> $\lim_{x \to 2} (3x-5) = 1 \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$



$\forall x$ con $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(3x-5)-1| < \varepsilon$

$$\left.\begin{aligned} &\cdot |3x-5-1| < \varepsilon \\ &|3x-6| < \varepsilon \\ &-\varepsilon < 3x-6 < +\varepsilon \\ &-\frac{\varepsilon}{3} + 2 < x < \frac{\varepsilon}{3} + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{3} \qquad 2-\delta < x < \delta + 2$$

<u>esempio</u> $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$0 < x < \delta < \frac{\pi}{2} \ \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$

$\sin x < x < \operatorname{tg} x \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \Rightarrow 1 > \frac{\operatorname{sen} x}{1} > \cos x$

- In modo analogo, si può verificare $\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x} = 1$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

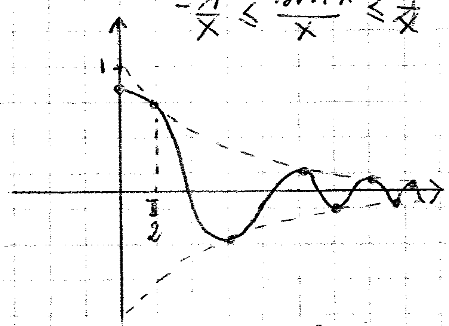
$\Updownarrow$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ et $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

<u>oss.</u> $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ con $x > 0 \qquad \Rightarrow -1 \le \sin x \le 1$

$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$

- se $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- se $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
  - I punti in cui tocca NON sono MAX e MIN.



<u>DEF</u> Una funzione è <u>continua</u> in x_0 se: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

ovvero:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall x \in \operatorname{dom} f$ e $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ma $l \neq f(x_0)$ oppure $x_0 \notin \operatorname{dom} f$, allora

$y=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1| \qquad x\in(-\infty,1)$

se $-\infty<x<-1$, $x+1<0 \qquad \Rightarrow |x+1|=-x-1$

$\sqrt{y}=|x+1|=-x-1 \Rightarrow x=-1-\sqrt{y}$

$\Rightarrow g^{-1}(y)=-1-\sqrt{y}$, $y\in(0,+\infty)$ quindi $g^{-1}(x)=-1-\sqrt{x} \qquad x>0$

• $f(x)$ è <u>continua</u> se in x_0 $\qquad \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

ESEMPIO:

$f(x)=\sin x$ è continua $\forall x_0\in\mathbb{R}$ cioè $\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta>0$

$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$

$$|\sin x-\sin x_0| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\underbrace{\left|\cos\frac{x-x_0}{2}\right|}_{|\cos\alpha|\le 1} \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le$$

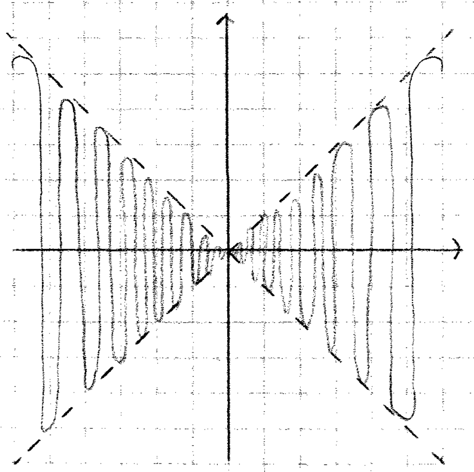
$$\le \left|2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|\right| = |x-x_0| < \delta = \varepsilon$$

es. $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$

$-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1 \qquad\qquad |x|\ge 0$

$-|x|\le |x|\sin\frac{1}{x}\le |x| \qquad\qquad -|x|<0$

$|x|\ge -|x|\sin\frac{1}{x}\ge -|x|$



• $\sin\frac{1}{x}=0 \qquad \frac{1}{x}=\frac{k2\pi}{2} \qquad k\in\mathbb{Z}$

↳ $x=\frac{1}{k\pi}$

• $\sin\frac{1}{x}=1 \qquad \frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

↳ $x=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$

• $\sin\frac{1}{x}=-1 \qquad \frac{1}{x}=\frac{3}{2\pi}+k2\pi$

↳ $x=\frac{\pi}{\frac{3}{2\pi}+k2\pi}$

• È continua in $x_0=0$?

$\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta>0$

$0<|x-0|<\delta \Rightarrow \left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$

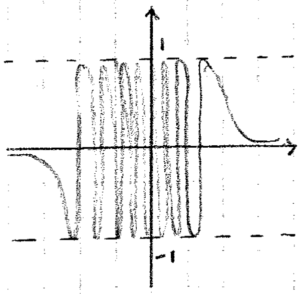
$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$

$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|<\delta=\varepsilon$

• è continua in $x_0=0$

$|\sin\alpha|\le 1 \qquad \Rightarrow f(x)=\{$

ESEMP. 3 $\quad f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad x_0 = 0$



$\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1 \qquad \sin \frac{1}{x} = 1$ se $x = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

$\sin \frac{1}{x} = 0$ se $x = \dfrac{1}{k\pi}$

$\sin \frac{1}{x} = -1$ se $x = \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$

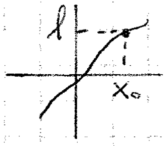
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ non esiste
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$ non esiste

Se esiste $l \in [-1; 1]$: $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = l \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\sin \frac{1}{x} - l\right| < \varepsilon$

- LIMITI DI FUNZIONI MONOTONE

$f(x)$ crescente



- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \sup (f)$ quando $x \in (x_0 - \delta, x_0)$
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \inf (f)$ quando $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

- <u>DEF.</u> $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T > 0$ (T-periodica) se

$$\boxed{f(x) = f(x+T)} \quad \forall x \in D$$

- Per esempio $\cos x$ e $\sin x$ sono 2π-periodiche

ESEMPIO ~~1~~. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periodica, $T > 0$. Sia $a \neq 0$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) := f(ax)$. Verificare che g sia $\frac{T}{a}$-periodica

$\Rightarrow$ vogliamo vedere se $g(x) = g\left(x + \frac{T}{a}\right)$

$$g(x) = f(ax) = f(ax + T) = \underbrace{f\Big(a\underbrace{\left(x + \tfrac{T}{a}\right)}_{X}\Big)}_{g(X)} = g\left(x + \frac{T}{a}\right)$$

$\Rightarrow g$ è $\frac{T}{a}$-periodica

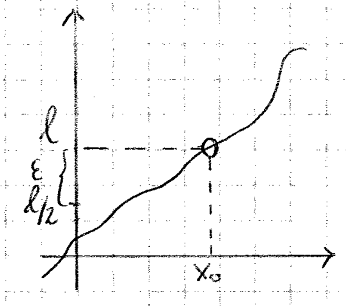
OSS $f(x) < g(x)$ in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$
$\downarrow \quad \downarrow$
$l \quad m$

• Anche se l'ipotesi ha la disuguaglianza stretta, la tesi ha sempre la disuguaglianza debole.

③ PERMANENZA DEL SEGNO

Hp: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad x_0 \in \mathbb{R} \qquad l > 0$

Th. $\exists I(x_0) \setminus \{x_0\}$ tale che $f(x) > 0$ in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$



$\varepsilon = \frac{l}{2}$

Dim: $\forall \varepsilon = \frac{l}{2} \qquad \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \rightsquigarrow l/2$

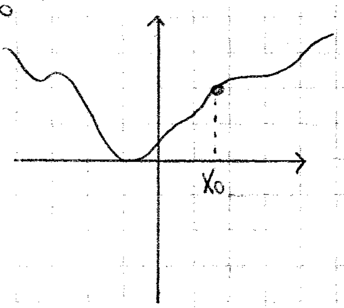
$l - \frac{l}{2} < f(x) < l + \frac{l}{2}$

$0 < \frac{l}{2} < f(x) < \frac{3l}{2}$

• COROLLARIO (logica seguente dei fatti approvata questa dim):

Hp: $f(x) \geq 0$ in $I(x_0) \setminus \{x_0\} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Th: $l \geq 0$



Dim se $l < 0$ prendo $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$

tale che $\exists \delta > 0 \ \forall x$ dom f

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow l - \frac{|l|}{2} < f(x) < l + \frac{|l|}{2} < 0$

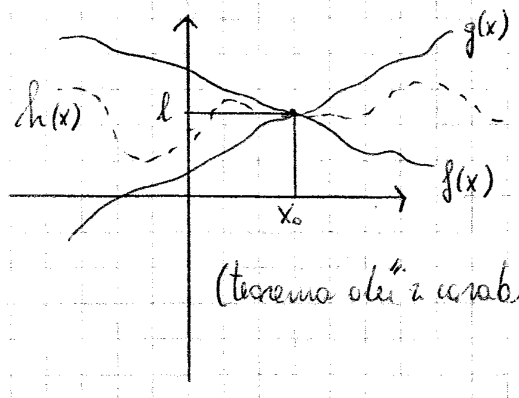
$f(x) < 0$ questo contraddice $f(x) \geq 0$

④ 2° TEOREMA DEL CONFRONTO SUL CASO FINITO

Hp $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = l$

$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

Th: $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$



(teorema dei 2 carabinieri)

Dim $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

$x \to x_0 \downarrow \ \Rightarrow \quad \vdots \quad \Leftarrow \quad \downarrow x \to x_0$

$l \qquad l \qquad l$

Dim per controesempio:

$f(x) = M(x)$ $g(x) = [x]$ $M(x) + [x] = x$ $\lim_{x\to 2} x = 2$ ma $\lim_{x\to 2} M(x) =$ non esiste

• LIMITI DELLA SOMMA

Hp: $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} l \in \mathbb{R}$

$g(x) \xrightarrow{x\to x_0} m \in \mathbb{R}$

Th: $f(x) \pm g(x) \xrightarrow{x\to x_0} l+m \in \mathbb{R}$

$f(x)\cdot g(x) \xrightarrow{x\to x_0} l\cdot m$

se $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x\to x_0} \frac{l}{m}$

Dim: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in dom\, f$ e $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta''\ \forall x \in dom\, g$ e $0<|x-x_0|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-m|<\varepsilon$

dimostrare che $f+g \xrightarrow{x\to x_0} l+m$ significa che $|f+g-(l+m)|<$

pur di prendere un δ per cui se $0<|x-x_0|<\delta$

scegliamo $\delta = \min\{\delta' ; \delta''\}$

$|f(x)-g(x)-l-m| \le |f(x)-l| + |g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\forall x: 0<|x-x_0|<$

proviamo che $f(x)\cdot g(x) \xrightarrow{x\to x_0} l\cdot m$ dobbiamo far vedere che

$|f(x)\cdot g(x) - l\cdot m|$ può essere reso piccolo con tolleranza ε pur di

prendere valori di x sufficientemente vicini a x_0 con tolleranza

: $|f(x)\cdot g(x) - l\cdot g(x) + l\cdot g(x) - l\cdot m| = |(f(x)-l)\cdot g(x) + l(g(x)-m)| \le$

$\le |\underbrace{f(x)-l}_{\varepsilon}|\cdot|g(x)| + |l|\cdot|\underbrace{g(x)-m}_{\varepsilon}|$

OSS: Teorema di limitazione locale:

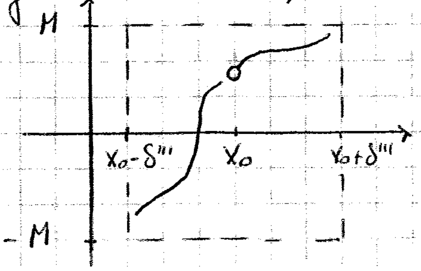
Se $g(x) \xrightarrow{x\to x_0} m \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta'''>0$ $x \in dom\, f$ e

$0<|x-x_0|<\delta'''$ $m-\varepsilon \le g(x) \le m+\varepsilon$

$M = \max\{|m-\varepsilon|, |m+\varepsilon|\} \Rightarrow -M \le g(x) \le M$ cioè $|g(x)| \le M$

cioè il grafico di g in $(x_0-\delta''' ; x_0+\delta''')$ è compreso tra $-M$ e M

$x \neq x_0$



• la f^{ne} è "chiusa" in questi estremi

NUMERI COMPLESSI

Scrivere in numeri algebrici il n°: $z = \frac{1+i}{2-i}$

Forma algebrica (o cartesiana) significa:

$z = x + iy$ con x e $y \in \mathbb{R}$ $\qquad (x = \mathrm{Re}\, z,\ y = \mathrm{Imm}\, z)$

· Si moltiplica e si divide per $\overline{2-i} = 2+i$, il coniugato del denominatore. Infatti se $w = a+ib$, a e $b \in \mathbb{R}$ allora

$w\overline{w} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |w|^2$

$\Rightarrow \boxed{w\overline{w} = |w|^2 \ \forall w \in \mathbb{C}}$

$\Rightarrow z = \frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+3i-1}{|2-i|^2} = \frac{1+i3}{5} = \frac{1}{5} + i\frac{3}{5}$

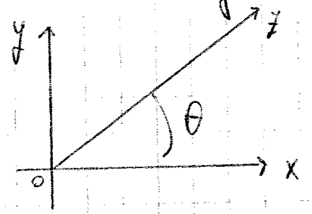
es $z = \frac{2+i3}{4-i} = \frac{(2+3i)(4+i)}{|4-i|^2} = \frac{8+2i+12i-3}{17} = \frac{5}{17} + i\frac{14}{17}$

es: Calcolare il modulo di

$z = \left(\frac{1-3i}{1+i} - i\right)^3 = \frac{2-4i}{1+i} = \frac{(2-4i)(1-i)}{|1+i|^2} = \frac{2-6i-4}{2} = -1-3i$

$\Rightarrow z = (-1-3i)^3 \Rightarrow |z| = |(-1-3i)^3| = |-1-3i|^3 =: \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = (\sqrt{10})^3 = 10^{3/2}$

es Scrivere in forma polare $z = i(1+i)$ cioè $z = re^{i\theta}$ dove $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ e θ è un argomento di z



$z = i(1+i) = i-1 = -1+i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow z = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

raccolgo il modulo

· Qual è il $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$?

cioè $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$

- FORME INDETERMINATE (o di indecisione)

$+\infty - (+\infty) \longrightarrow \lim_{x \to c} f(x) = +\infty$

$-\infty - (-\infty)$

$\lim_{x \to c} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to c} f(x) - g(x) = ?$$

esempio: $f(x) = x + a \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$

$g(x) = x + b \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to +\infty} [(x+a) - (x+b)] = a - b$$

- Mentre se avessi avuto: $+\infty - K = +\infty \quad K \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to c} g(x) = K$ $\Rightarrow \lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = +\infty$

ESERCIZIO Calcolare le radici quadrate di -4

$w = -4 \; ; \; |w| = 4$

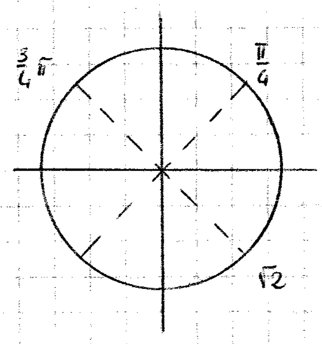
$\Rightarrow -4 = 4(-1) = 4e^{\pi i} \qquad z = re^{i\theta}$

$z^4 = -4 \iff r^4 e^{i4\theta} = 4e^{i\pi} \quad \begin{cases} r^4 = +4 \\ 4\theta = \pi + 2K\pi \end{cases} \quad K = 0;1;2;3 \quad \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi \end{cases} \quad K = 0;1;$

$\begin{cases} \text{—} \\ \theta = \frac{\pi}{4} ; \frac{3}{4}\pi ; \frac{5}{4}\pi ; -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$z = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i} \qquad z = \sqrt{2}\, e^{\frac{5}{4}\pi i}$

$z = \sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi i} \qquad z = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4} i}$



$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \qquad \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_1 \leq b_0$

$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \lim_{n \to +\infty} a_n \qquad \lim_{n \to +\infty} b = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{a^n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \underset{\uparrow}{=} f\left(\lim_{n \to +\infty} a_n\right) = f(x_0)$$

f è continua

$f(a_n) < 0 < f(b_n)$

$\downarrow n \to +\infty \qquad \downarrow \qquad \downarrow n \to +\infty$

$f(x_0) \leq 0 \leq f(x_0)$

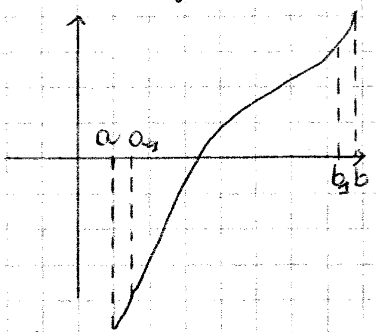
$$\lim_{n \to +\infty} f(b_n) \underset{\uparrow}{=} f\left(\lim_{n \to +\infty} b_n\right) = f(x_0)$$

f è continua

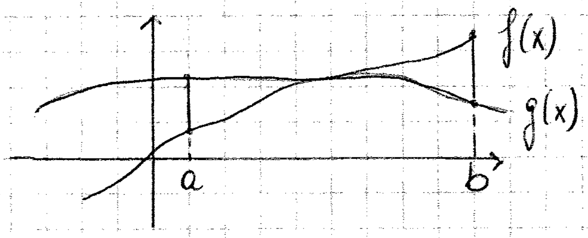
$f(x_0) = 0$

VARIAZIONE DI ESISTENZA DI ZERI

Hp I intervallo (chiuso o aperto ; limitato o non limitato) il limite per x che tende agli estremi dell'intervallo (finiti o infiniti) sono diversi da zero e sono di segno opposto. Allora $\exists x_0 \in I : f(x_0) = 0$ e tale zero è unico se la funzione è strettamente monotona.



- COROLLARIO (Intersezione di curve continue)



Hp I [a,b] intervallo chiuso e limitato

$f(x)$ e $g(x)$ continue in I $\qquad f(a) < g(a)$

$\qquad f(b) > g(b)$

Th $\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = g(x_0)$

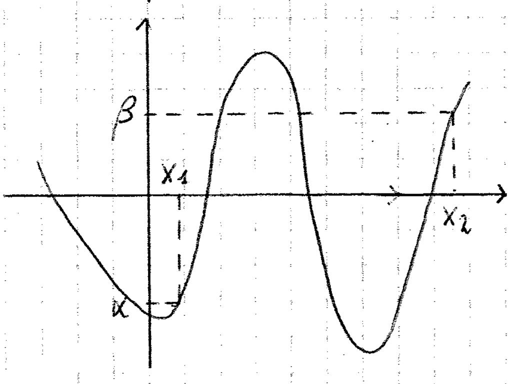
Dim: $J = f(I)$ $\forall \alpha \in J, \forall \beta \in J$, con $\alpha < \beta$

J è un intervallo se $[\alpha; \beta] \subseteq J$

$\alpha \in J \Rightarrow \exists x_1 \in I$ con $f(x_1) = \alpha$

$\beta \in J \Rightarrow \exists x_2 \in I$ con $f(x_2) = \beta$

· Applico all'intervallo I_1 di estremi x_1 e x_2 il teorema dei valori intermedi. $f(I_1) \supseteq [\alpha; \beta]$



· TEOREMA DI WEIERSTRASS:

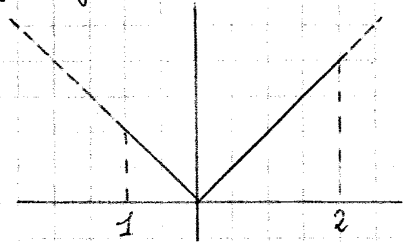
Hp: $I = [a, b]$ chiuso e limitato $f(x)$ continua in I

Th: $f(x)$ assume in I MAX e MIN.

$m = \text{MIN } f(x)$ $x \in I$ $M = \text{MAX } f(x)$ $x \in I$

si ha $f([a, b]) = [m; M]$

ESEMPIO: $f(x) = |x|$ $I = [1; 2]$ $f(x)$ è continua in I



$x_1 = 0 \Rightarrow$ MIN

$x_2 = 2 \Rightarrow$ MAX

CONFRONTO LOCALE DI FUNZIONI

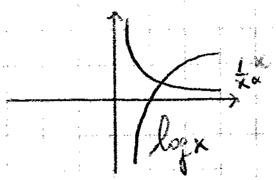
· SIMBOLI DI LANDAU

$f(x)$ e $g(x)$ sono definite in $I(c) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

· DEF ① $f(x) = O(g(x))$ $x \to c$ se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$

e si dice che f è controllata da g per $x \to c$.

- $e^{-x} = o(|x|^\alpha)$ $\quad x \to -\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\iff \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{|x|^\alpha} = 0$
- $\log x = o(x^\alpha)$ $\quad x \to +\infty$, $\alpha > 0$ $\iff \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$
- $\log x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ $\quad x \to 0^+$, $\alpha > 0$ $\iff \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^\alpha}} = 0$



$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log x = 0$$

Uso di "$\sim$" e "o" nei limiti

Si vogliono studiare $\lim_{x \to c} f(x) - g(x)$ oppure $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$

con $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

- se $f(x)$ e $g(x)$ sono tali che: $f_1(x) \sim f(x)$ $\quad x \to c$
  $g_1(x) \sim g(x)$ $\quad x \to c$

allora: $\lim_{x \to c} f(x) - g(x) = \lim_{x \to c} f_1(x) - g_1(x)$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

ESEMPIO $\lim \frac{x \sin x}{1 - \cos x} =$ $\qquad \sin x \sim x \quad x \to 0$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \quad x \to 0$

$\Rightarrow = \lim \frac{x \cdot x}{\frac{1}{2} x^2} = 2$

- $f(x)$ è detta INFINTESIMA per $x \to c$ se $\lim_{x \to c} f(x) = 0$
- $f(x)$ è detta INFINITA per $x \to c$ se $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

INFINITESIMI $\quad f(x) \xrightarrow{x \to c} 0 \qquad g(x) \xrightarrow{x \to c} 0$

$f(x) \asymp g(x) \quad x \to c$ infinitesimi dello stesso tipo.

$f(x) = o(g(x)) \quad x \to c$ $\quad f$ infinitesimo di ordine superiore a g

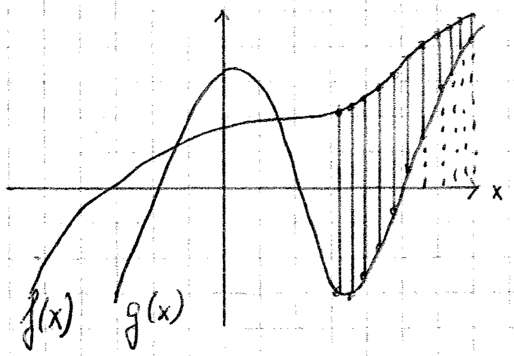
$g(x) = o(f(x)) \quad x \to c$ $\quad$ " " " " inferiore a g

- se nessuna delle condizioni precedenti si verifica si dice che sono infinitesimi non confrontabili.

_ ASINTOTI _

Premessa generale.

• FUNZIONI ASINTOTICHE: $f(x)$ e $g(x)$ si dicono asintotiche per $x \to c$ se $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = 0$ con $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$



se $x \to +\infty$

1) $f(x)$ asintotica a $g(x) \iff f(x) - g(x) \xrightarrow{x \to c} 0$

2) $f(x) = g(x) + o(g(x)) \iff \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to c} 0$

• <u>ASINTOTI:</u> Se $f(x)$ è asintotica ad una retta $y = mx + q$ per $x \to \pm\infty$ questa è detta asintoto, cioè $f(x)$ ha asintoto, per $x \to \pm\infty$, la retta $y = mx + q$ se $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (m + q)) = 0$

$f(x) = mx + q + o(1) \quad x \to +\infty$

$\frac{f(x)}{x} = m + \frac{q}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad x \to +\infty$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$m \quad m \quad 0 \quad 0$

• Se esiste il $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ questo è candidato ad essere coefficiente angolare della retta asintoto

$f(x) = mx + q + o(1) \quad x \to \pm\infty$

$\underbrace{f(x) - mx}_{x \to +\infty \downarrow q} = q + o(1) \quad x \to +\infty$

$q \quad q \quad 0 \; (x \to +\infty)$

• Se ci sono due limiti: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$

allora: $y = mx + q$ è asintoto per $f(x)$ per $x \to +\infty$ (<u>asintoto destro</u>). Gli stessi limiti per $x \to -\infty$ si dicono <u>asintoti sinistri</u>.

ESEMPIO: $f(x) = 5x + 3 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = 5 + \frac{3}{5} + \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \to +\infty} 5$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 5x = \lim_{x \to +\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3$ $\quad 5x + 3$ ASINTOTO DESTRO.

$$\underbrace{f(x)-f(x_0)}_{\downarrow\ 0} = f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{\sigma(x-x_0)}_{\downarrow\ x\to 0\ \ 0} \quad (\text{per } x\to x_0)$$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\quad f(x)$ è continua

OSS: non è vero il viceversa $\quad f(x)$ continua in x_0 $\not\Rightarrow$ $f(x)$ è derivabile in x_0

- DIM PER CONTROESEMPIO

$f(x)=|x|$ è continua anche in 0

$|x|$ non è derivabile in 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \text{non esiste}$$

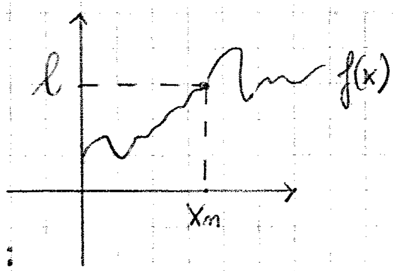
PROPOSIZIONE: $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Allora $\forall x_n$ successione : $x_n \to x_0$ per $n\to\infty$ si ha che $\exists \lim_{x\to\infty} f(x) = l$

DIM (per l finito e x_0 finito): $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ cioè

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: se $0 < |x-x_0| < \delta$ allora,

$|f(x) - l| < \varepsilon$



- $x_n \to x_0 \Rightarrow$ preso ad esempio $\delta > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

se $n \geq n_0$ allora $|x_n - x_0| < \delta$ allora se $n \geq n_0$ si dice che $|x_n - x_0| < \delta$, per cui

$|f(x_0) - l| < \varepsilon$, quindi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$

COROLLARIO:

Se $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$ e $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$ allora $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$

ESEMPIO $\lim_{n\to\infty} (-1)^n + \frac{1}{n}$ $\quad$ · se n è pari $(-1)^n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$

$\Rightarrow$ il lim non esiste. $\quad$ · se n è dispari $(-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n} \to -1$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} \quad \text{con } a > 1}$$

TEOREMA (di derivata di funzione composta)

Hp: $f(x)$ derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$

$g(x)$ " e definito in $y_0 = f(x_0)$

Th: $g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$ f^{ne} derivabile e composta in x_0 e si ha

$g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x_0)$

Dim: $$\frac{g(f(x_0+\Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x} = \frac{g(f(x_0+\Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\frac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}}_{f'(x_0)} \xrightarrow{\Delta x \to 0} g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$\boxed{\Delta y = y - y_0 = f(x) - g(x_0)}$$

esempi: $\cdot \sin x^2 = \cos x \cdot 2x$

$\cdot e^{\cos x^2} = (e^{\cos x^2}) \cdot (-\sin x^2) \cdot (2x)$

$$\cdot \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$= 1 + \operatorname{tg}^2 x$

- $f(x)$ è pari $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$

  $f'(x) = -f'(-x) \Rightarrow f'(x)$ è dispari.

- $f(x)$ è dispari $\Leftrightarrow f(x) = -f(x) \Rightarrow f'(x) = f'(-x)$ f' è pari.

f è derivabile ed è definita in regioni simmetriche rispetto all'origine.

* derivata DESTRA

$$f'(x_0)_+ = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

* derivata SINISTRA

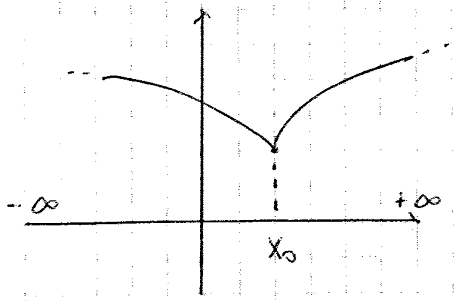
$$f'(x_0)_- = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

TEOREMA

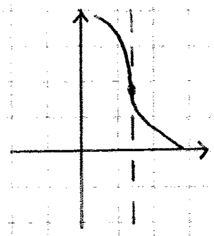
$f'(x_0) = f'_+(x_0) - f'_-(x_0)$ se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = f'_+(x_0) - f'_-(x_0)$

Se c'è $f'(x_0) \Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

- CUSPIDI : x_0 si dice punto di cuspide se $f'_+(x_0) = +\infty$ e $f'_-(x_0) =$
o meglio se $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \neq \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$



- FLESSO A tg VERTICALE:



$f(x)$ è continua e $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = -\infty$
$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = +\infty$

- MAX, MIN $\to$ LOCALI, GLOBALI, STRETTI (o FORTI), DEBOLI.
$f(x)$ ha un MAX locale in x_0 se esiste un intorno $I(x_0)$: $f(x) \leq f(x_0)$
il "$\leq$" indica un MAX debole. Se metto "$<$" indico un MAX forte

- PROPRIETÀ GLOBALI delle f^{ni} derivabili.

-Teorema di fermat

Ip. $f(x)$ derivabile in $I(x_0)$; x_0 punto di estremo (MAX, MIN)
Th. $f'(x_0) = 0$
Dim. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ $\qquad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I(x_0)$

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x < x_0$ $\qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall x > x_0$

$\downarrow x \to x_0^-$ $\qquad \downarrow x \to x_0^+$

$\boxed{f'(x_0) \geq 0}$ $\qquad \boxed{f'(x_0) \leq 0}$

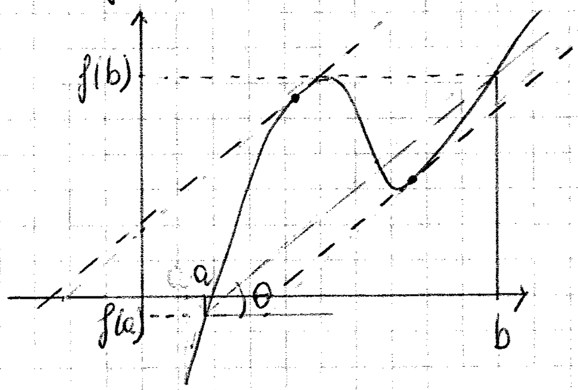
$f'(x_0) = 0$

- LAGRANGE:

Hp $f(x)$ definita e continua in $[a,b]$ I $[a,b]$ chiuso e limitato
$f(x)$ derivabile in $[a,b]$

Th: $\exists x_0 \in [a,b]: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$

- Interpretazione geometrica:



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \operatorname{tg}\theta$$

Dim $r(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \to$ retta per i due punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

$g(x) = f(x) - r(x)$ $\underbrace{g(a) = g(b) = 0}$

posso applicare il teorema di Rolle $\exists x_0 \in (a,b): g'(x_0) = 0$,

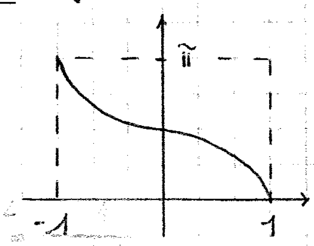
ma $g'(x) = f'(x) - r'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ cioè $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ESEMPIO $f(x) = \arccos x$ continua in $[-1;1]$

derivabile in $(-1;1)$

$\exists x_0: \frac{\arccos 1 - \arccos(-1)}{1-(-1)} = f'(x_0) = \frac{0-\pi}{2} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{1-x^2}$ $1-x^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2$ $1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = x^2$

$x = \pm\sqrt{1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = o(1) \qquad x \to x_0$$

$$\Longleftrightarrow f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0) \qquad x\to x_0$$

$$\Longleftrightarrow f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) \qquad x \to x_0$$

• 2^a FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0) \qquad c \text{ compreso tra } x \text{ e } x_0$$

<u>Dim</u> $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$

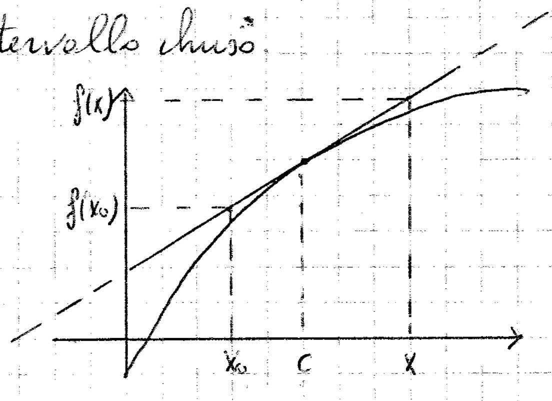
$$\Updownarrow$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$$

se $x > x_0$: $x_0 < c < x$
se $x < x_0$: $x < c < x_0$

Nell'ipotesi della 2ª formula, $f(x)$ deve essere derivabile nell'intervallo di estremi x e x_0 (cioè (x_0, x) se $x > x_0$ e (x, x_0) se $x < x_0$) e continua nell'intervallo chiuso.

$$y = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$$



• TEOREMA DELLA DERIVATA NULLA

Abbiamo visto che $f(x)$ crescente (strettamente o no) è derivabile $\Rightarrow f'(x) \geq 0$

Se $f'(x) > 0$ in un intervallo I, allora $f(x)$ è strettamente crescente in I

Se $f'(x) < 0$ in un intervallo I, allora $f(x)$ è strettamente decrescente in I

Dim $f'(x) > 0$ in I $\forall x_1, e x_2 \in I$ e $x_1 < x_2$ applico Lagrange

$\exists\, c \in (x_1, x_2)$: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \underbrace{>0}_{\text{per Hp.}}$

ma $x_2 > x_1$ e quindi $x_2 - x_1 > 0$ dunque $f(x_2) > f(x_1) > 0 \Rightarrow f$ è strettamente crescente.

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

Se $f(x)$ è derivabile in un intorno di x_0 e la sua derivata in x_0 è $f'(x)$, definita in $I(x_0)$ posso costruire il rapporto incrementale di $f'(x)$ e vedere se c'è il limite di $\dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ per $x \to x_0$.

Se questo limite esiste si dice derivata seconda $f''(x_0)$

Si può procedere cercando la $f'''(x_0)$ facendo $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0}$

Se in un intervallo I la f^{ne} $f(x)$ è n-volte derivabile si dice di classe $C^n(I)$

$f(x) \in C^n(I)$ e la sua derivata n-esima è continua.

ESEMPIO ①:

$f(x) = \sin x$ $\quad f^{IV}(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$ $\quad f^{V}(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$ $\quad f^{VI}(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$ $\quad f^{VII}(x) = -\cos x$

ESEMPIO ②

$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\,x$

$f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\,x$

$f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\,x$

SEMPIO: $f(x) = x^2$ è convessa? $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$

$^2 \geq x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$

$^2 - 2x_0 x + 2x_0^2 + 2x_0 = x^2 - 2x_0 x + x_0^2 \Rightarrow (x - x_0)^2 \geq 0$

TEOREMA:

e $f''(x) \geq 0$ in I con x_0 continua in I, allora $f(x)$ è convessa in I

m $x_0 \in I$ e $x_1 \in I$

$(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\frac{(x_1) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$ con $x_1 < c < x_0$

f è convessa $F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è crescente $\Rightarrow f'(x_0) \leq f'(c)$ $x_1 < c < x_0$

$(x_1) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)}_{f'(c) \geq f'(x_0)}(x - x_0)$

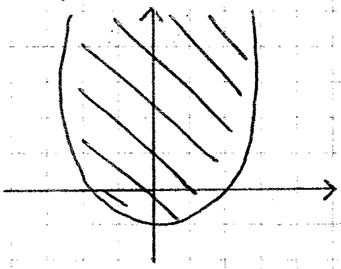
$\Rightarrow$

$f(x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f''(x_0) \geq 0 \Rightarrow f'$ è crescente

EF. EPIGRAFO. Si dice epigrafo di $f(x)$ il seguente insieme.

$\text{epi} f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \in \text{dom} f; y \geq f(x)\}$



L'insieme delle coppie di $(x; y)$ tali che ad una x che sta "sopra il grafico" corrisponde una y che sta anch'essa "sopra il grafico".

LIMITI CON DE L'HOPITAL

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow = \frac{\alpha e^{x}}{1} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow = \left(\frac{e^{\frac{\alpha}{\beta} x}}{x}\right) = +\infty$ $\quad \to +\infty$

LIMITI FONDAMENTALI

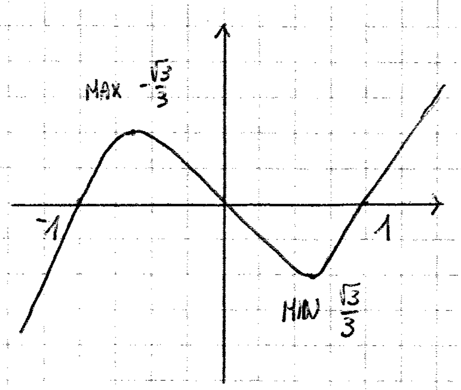
$\boxed{\alpha \text{ e } \beta > 0}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} = +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log x)^{\alpha}}{x^{\beta}} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} |x|^{\alpha} e^{\beta x} = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} |\log x|^{\beta} = 0$

Cerchiamo i punti di flesso

$f''(x) = \frac{d}{dx} 3x^2 - 1 = 6x \Rightarrow f''(x) = 0$ se $x = 0$ $\begin{cases} f''(x) > 0 & \text{se } x > 0 \\ f''(x) < 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

→ Flesso ascendente



Teorema o formula di TAYLOR o McLOURIN -

$Tf_{n,x_0}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$

← polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0.

$f(x) - Tf_{n,x_0}(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$.

ESEMPIO: $\underbrace{2 - 3x + 4x^2 + \sin^3 x}$

è uno sviluppo di Taylor? cioè del tipo $f(x) = \underbrace{2 - 3x + 4x^2}_{Tf_{2,0}} + o(x^2)$ $(x \to 0)$

Sì, è uno sviluppo di Taylor difatti $\underbrace{\sin^3 x = o(x^3)}$ $x \to 0$

$\frac{\sin^3 x}{x} \xrightarrow{x \to 0} 0$

- Sviluppo e formula di Taylor significa scrivere f nel modo seguente:

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + o\left((x-x_0)^n\right) \quad x \to x_0$$

e $x_0 = 0$ si parla di formula di McLaurin

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + o\ x^n \quad x \to x_0$$

Se f ha derivata prima e seconda in un intorno di x_0 allora
può scrivere il resto nella forma di Lagrange

OREMA: se $f(x)$ è derivabile n- volte con derivata $(n+1)$
continua in $I(x_0)$

$$x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}} \rightarrow \text{resto di Lagrange.}$$

SS Se $f(x)$ è pari cioè $f(x) = f(-x)$ allora il polinomio di
claurin ha solo potenze pari. Se $f(x)$ è dispari allora il polinomio ha solo potenze dispari (P. 236)

EMPIO $f(x) = e^x$ $x_0 = 0$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$f'''(x) = e^x$

$f^{IV}(x) = e^x$

$$(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) \qquad x \to n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^n + o(x^n) \qquad x \to 0$$

SS • Siamo partiti da $f(x)$ derivabile n-volte in un intorno di $x_0 = 0$

$$x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n) \qquad x \to 0$$

$$= f(0)\ ;\ a_1 = f'(x_0);\ a_2 = \frac{f''(0)}{2}\ ;\ a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}\ ;\ a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$$

Se ha uno sviluppo $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ $x \to 0$

posso dire che $a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$ di $f(x)$? **RISP**: solo se so che $f(x)$ è derivabile
volte.

ciò se so che $f(x)$ è derivabile 2 volte in x_0 e so che $f(x) = 2 + 3x^2 + o(x^2)$ $x \to 0$
$= 0$? Posso dire che $f(0) = 2$ $f'(0) = 0$ $\frac{f''(0)}{2} = 3 \Rightarrow f''(0) = 6 > 0$
$\Rightarrow x_0 = 0$ è un punto di MIN.

EMPI

$\int e^x dx = e^x + c \qquad I = \mathbb{R}$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad I = \mathbb{R}$

$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$

$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c \quad \begin{cases} \log x & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

ROPRIETÀ DELLA PRIMITIVA

. LINEARITÀ: α e β costanti

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \underbrace{\int f(x)\, dx}_{F(x)} + \beta \underbrace{\int g(x)\, dx}_{G(x)}$$

sa è vera se in I, f e g hanno primitiva rispettivamente $F(x)$ e $G(x)$

nfatti $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x)$

. INTEGRAZIONE PER PARTI $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in I e sia $f'(x) \cdot g(x)$ integrabile in I, allora lo è anche $f(x) \cdot g'(x)$ e si ha:

$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$

m: legata alla proprietà di derivazione del prodotto $H(x) = \int f'(x) \cdot g(x) dx$

$(f(x) \cdot g(x) - H(x))' = (f(x) \cdot g(x))' - H'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) - f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g'(x)$

uesto significa che $f(x) \cdot g(x) - H(x) = \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$

: Sia $f(x) = x + \log x$ calcolare $(f^{-1})'(1+e)$

e f è invertibile e derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 = f(x_0)$ allora

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \forall x > 0 \qquad f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$> 0 \Rightarrow$ strettamente crescente e $\Rightarrow f$ invertibile)

$_0 = 1 + e$, dobbiamo trovare x_0: $f(x_0) = 1 + e$ cioè $x_0 + \log x_0 = 1 + e$

$\Rightarrow x_0 = e \quad \Rightarrow (f^{-1})'(1+e) = \frac{1}{f'(e)} = 1 + \frac{1}{e}$

$- \int f(y)\, dy = *$ $\qquad y = \varphi(x)$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \Rightarrow dy = \varphi'(x)\, dx}$$

$$\Rightarrow = * \underbrace{\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx}_{F(\varphi(x)) = F(y)}$$

ESEMPIO: (P. 320/321)

$\int (\cos x^2)\, 2x\, dx =$ $\qquad y = x^2 \qquad \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2x\, dx$

$\Rightarrow = \int \cos y\, dy = \sin y + c = \sin x^2 + c$

TEOREMA IN AMBITO REALE: Ogni polinomio di grado n coefficiente reale si serve in modo unico.

$P(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante}}}{d}\, (x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_m)^{r_m} \cdot (x^2 + 2p_1 x + q_1)^{s_1} \cdots (x^2 + 2p_h x + q_h)^{s_h}$

$p_1^2 - q_1 < 0 \; \ldots \; p_h^2 - q_h < 0$

$r_1 + r_2 + \ldots + r_m + 2s_1 + 2s_2 + \ldots + 2s_h =$ grado di $P(x)$

OSS: la fattorizzazione dei polinomi è analoga alla fattorizzazione degli interi (es. $24 = 2^3 \cdot 3$)

... il polinomio i fattori primi sono i polinomi di 1° grado come $(x - x_i)$ ... $(x + 2p_j \cdot x + q_j)$ con $p_j^2 - q_j < 0$

$$\Rightarrow \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx = \int \frac{R(x)}{(x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_m)^{r_m} \cdot (x^2 + 2p_1 x + q_1)^{s_1} \cdots (x^2 + 2p_h x + q_h)^{s_h}}$$

L'integrando $\frac{P(x)}{Q(x)}$ lo si scompone in fattori semplici, ovvero le somme di termini del tipo:

$$\frac{A_1}{(x - x_i)^1} + \frac{A_2}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{A_{r_i}}{(x - x_i)^{r_i}}$$

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + 2p_j x + q_j)^1} + \ldots + \frac{B_{2j} x + C_{1j}}{(x^2 + 2p_j + q_j)^2}$$

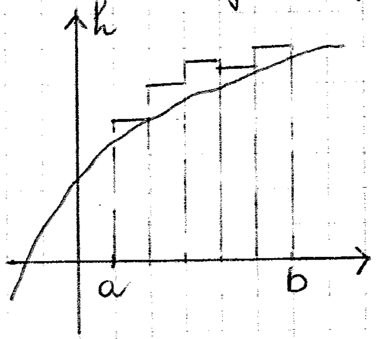
$i_f \leq f(x) \leq s_f \qquad a \leq x \leq b$

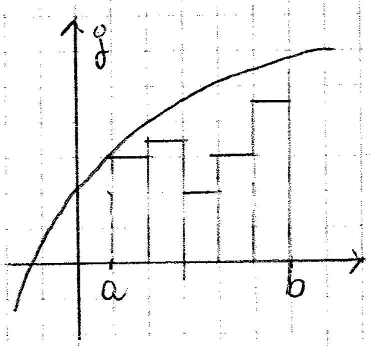
ntroduciamo delle funzioni a scala $h(x)$ con la proprietà

$$f(x) \leq h(x)$$

delle funzioni a scala $g(x)$ con la proprietà

$$g(x) \leq f(x)$$





$S_f^+ = \{ h \text{ a scala: } f(x) \leq h(x) \quad a \leq x \leq b \}$

$S_f^- = \{ g \text{ a scala: } g(x) \leq f(x) \quad a \leq x \leq b \}$

Integrale superiore di f in I

$$\overline{\int_I} f = \inf \left\{ \int_I h, \text{ con } h \in S_f^+ \right\}$$

Integrale inferiore di f in I

$$\underline{\int_I} f = \sup \left\{ \underline{\int_I} g, \text{ con } g \in S_f^- \right\}$$

<u>Def. di integrale di Riemann</u>. Ogni funzione $f(x)$ limitato n $I = [a,b]$ si dice integrale secondo R. su I se:

$\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$ tale valore comune viene detto integrale definito di f su $[a,b]$ ed è indicato con:

$\int_I f$ oppure $\int_a^b f(x)\,dx$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 73