NUMERO: 687

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Iannizzi

MATERIA: Analisi Matematica I + Eserc.
Prof. Ugaglia

Prof: LUCA UGAGLIA 5/10/11

Esercitazioni: SCANZIO STEFANO SQUADRA (B), 11.30

Testo: • Canuto - Tabacco "Analisi matematica 1", SPRINGER

• Lancelotti "Esercizi di analisi matematica 1", CELID

• Demidovich "Esercizi e problemi di analisi matematica" (Editori riuniti)

• In rete → CANDOR

NOZIONI di BASE

Insiemi:

- Un insieme si indica con lettere maiuscole: X, Y, Z
- Gli elementi con lettere minuscole: x, y, z
- Appartenenza ad un insieme: $x \in X$, x appartiene all'insieme X
- Non appartenenza: $x \notin X$

Utilizzeremo insieme costruiti a partire da insiemi di numeri:

- $\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali
- $\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri interi
- $\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri razionali
- $\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali
- $\mathbb{C}$ = insieme dei numeri complessi

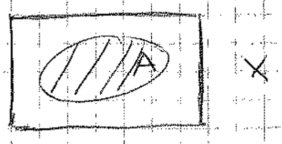
Fisso un insieme X (X non vuoto, $X \neq \emptyset$)

Def: un sottoinsieme A di X è un insieme formato da elementi di X

$A \subseteq X$ (se A può coincidere con X)

$A \subset X$ $[A \subsetneq X]$ (se A è sottoins. proprio, ovvero non tutti gli elementi di X stanno in A

Rappres: come regione finita del piano



Per insiemi numerici possiamo • elencare gli elementi di A (se pochi) *

• proprietà caratteristica del sottoins. **

* $A = \{x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4\}$ [non importa l'ordine in cui sono posizionati

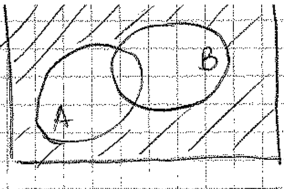
** $A = \{x \in X / p(x)\}$
TALE CHE (oppure ;)

Esempio

$A \subseteq \mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali minori di 4

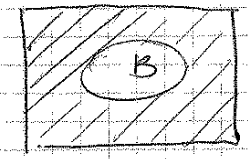
$A = \{0; 1; 2; 3\}$ o $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 4\}$

DEF: Dato un insieme finito X si costruisce l'insieme delle parti di X ($p(X)$) come l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di X. ES

(*) 

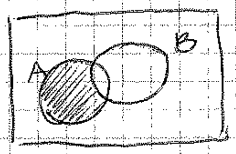
$∁(A\cup B)$

$∁A$

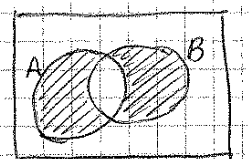


$∁B$

4) <u>Differenza</u> $A\setminus B = \{x\in X / x\in A / x\notin B\}$
$= A\cap ∁B$



5) <u>Differenza simmetrica</u> : $A \triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$



LOGICA

<u>PROPOSIZIONE LOGICA</u> = è un enunciato di cui si può affermare in modo inequivocabile se è vero o falso.

<u>EX</u>: p = "5 è un numero intero" È VERA
q = "−2 è un numero positivo" È FALSA
] cmq entrambe proposizioni logiche

"Il mio docente di analisi è un ottimo docente" NON è prop. logica

<u>PREDICATI LOGICI</u> = è un enunciato $p(x; y; \dots)$ dipendente da uno o più argomenti $(x; y; \dots)$. Questi argomenti variano in certi insiemi.
Un predicato diventa proposizione se fissiamo gli argomenti.

<u>EX</u>: $X = \mathbb{N}$
$p(x)$ = "x è un numero pari" è un predicato ma non possiamo dire se è vero o falso. <u>Dobbiamo fissare x</u>.
$p(4)$ = "4 è un numero pari" V
$p(3)$ = "3 " " " " F

A partire da predicati logici se ne possono ottenere altri con certe operazioni

1) <u>NEGAZIONE</u> $(\neg)$
$p(x)$ = predicato, costruisco $\neg p(x)$ [leggiamo "non $p(x)$"]

$p(x)$	$\neg p(x)$
V	F
F	V

QUANTIFICATORI

$\boxed{\forall}$ = "per ogni" <u>QUANTIFICATORE UNIVERSALE</u>

$\boxed{\exists}$ = "esiste" <u>QUANTIFICATORE ESISTENZIALE</u>

Come si utilizzano?

$p(x)$ predicato, insieme X costruisco le proposizioni

$$\forall x \in X,\ p(x) \text{ ("x ogni } x \in X\ p(x) \text{ è vera")}$$

$$\exists x \in X,\ p(x) \text{ ("esiste } x \in X \text{, per cui } p(x) \text{ è vera")}$$

<u>EX</u>: $X = \mathbb{N}$ $\quad p(x) =$ "x è pari"

$(\forall x \in X, p(x))$ FALSA! ("ogni numero $x \in \mathbb{N}$ è pari")

$(\exists x \in X, p(x))$ VERA! ("esiste almeno 1 numero che è pari")

- <u>NEGAZIONE (CONTRONOMINALE)</u>

<u>EX</u>: $X = \{$TUTTI GLI STUDENTI IN AULA$\}$

$p(x) =$ "x è donna"

$(\forall x \in X, p(x))$ FALSA, la sua negazione è VERA

quindi $\neg(\forall x \in X, p(x))$ VERA!

Negazione è $(\forall x \in X, \neg p(x))$ ("ogni studente in aula non è donna") FALSA!

$$\downarrow$$

$$(\exists x \in X, \neg p(x)) \Rightarrow \neg(\forall x \in X, p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in X, \neg p(x))$$

$$\neg(\exists x \in X, p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in X, \neg p(x))$$

- <u>PROBLEMA</u>: DATO un predicato $p(x;y)$ è importante l'ordine dei quantificatori [solo quando i quantificatori sono $\neq$]

<u>EX</u>: $X \in \mathbb{N}$, $p(x;y) =$ "$x \geq y$"

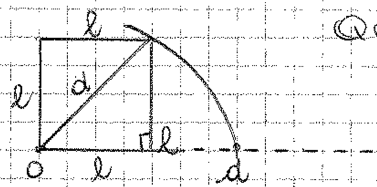
Considero le proposizioni:

a) $(\forall y, \exists x, p(x;y))$ ovvero $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}$, tale che $x \geq y$ VERA! perchè fissato comunque $y \in \mathbb{N}$, riesco a trovare un opportuno $x \in \mathbb{N}$ (x es: $x = y+1$) che verifica $x \geq y$

b) $(\exists x, \forall y, p(x;y))$ ovvero $\exists x \in \mathbb{N}$ tale che $\forall y \in \mathbb{N}$ vale $x \geq y$ FALSA! perchè vuol dire che un numero è $\geq$ a tutti gli altri _ $\exists >$ sono

$\mathbb{R}$ = numeri reali = non tutti i punti sulla retta corrispondono a numeri razionali. Ovvero: se fisso unità di misura, non tutte le lunghezze si possono misurare con multipli o sottomultipli di quell'unità.

EX:



QUADRATO di lato l e diagonale d

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$$
$$d = al \quad (\Leftrightarrow \frac{d}{l} = a)$$
elevo al quadrato
$$d^2 = a^2 l^2$$
$$\Rightarrow a^2 = 2 \quad (\text{perché } d^2 = 2l^2)$$
indico con $\sqrt{2}$ il numero a

Tesi: $\sqrt{2}$ non è razionale (se a è tale che $a^2 = 2$, allora $a \notin \mathbb{Q}$)

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

Ipotesi: $a^2 = 2$

Tesi: $a \notin \mathbb{Q}$ per assurdo → suppongo che la Th sia falsa e l'ipotesi vera e dimostro che ciò non è possibile (cioè provo un assurdo).

(p valida, ma anche $\neg p$.)

Quindi: $\neg$ TESI $\Leftrightarrow a \in \mathbb{Q}$

allora $a = \frac{m}{n}$, con m ed n senza fattori comuni

IPOTESI: $a^2 = 2$, cioè $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

$\Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ è pari (perché multiplo di n^2) $\Rightarrow m$ è pari $\Rightarrow m = 2 \cdot k \Rightarrow$

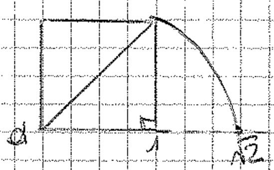
$\Rightarrow m^2 = 4k^2 \Rightarrow \cancel{2}n^2 = \cancel{4}k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2$ è pari $\Rightarrow n$ è pari,

QUINDI essendo entrambi pari hanno un divisore comune che è 2.

Quindi è ASSURDO (IPOTESI: m ed n senza fattori comuni), quindi TESI vera

C.V.D.

Il numero a non è razionale !!



Quindi $\sqrt{2}$ si chiama IRRAZIONALE. Rapp. decimale = illimitato NON periodico

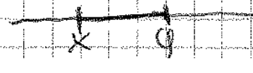
$\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$

I numeri reali sono in corrispondenza con ti punti della retta.

PROPRIETÀ:

1) OPERAZ di $\mathbb{Q}$ si estendono ad $\mathbb{R}$

2) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, cioè 2 numeri reali qualsiasi $x \neq y$, esistono ∞ numeri razionali tra x ed y.

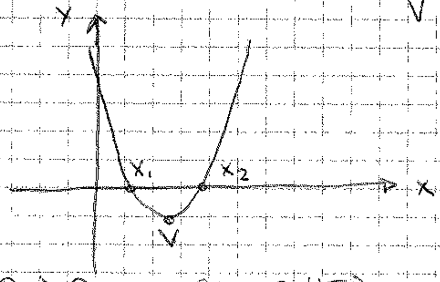


ESERCIZI

Prof Stefano Scanzio
stefano.scanzio@polito.it

PARABOLA

$y = ax^2 + bx + c$ $\quad V\left(-\frac{b}{2a}\right.$



$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a \geq 0 \rightarrow$ CONCAVITÀ verso l'alto

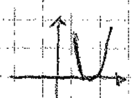
$a < 0 \rightarrow$ CONCAVITÀ verso il basso

$\Delta = b^2 - 4ac$

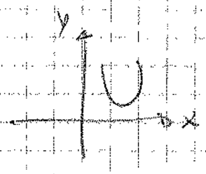
$\downarrow$

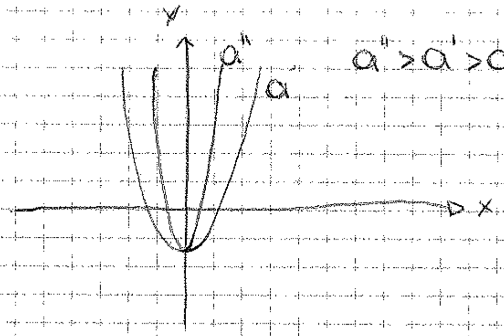
$\Delta > 0$ 2 sol reali x_1 e x_2

$\Delta = 0$ 1 sol reale $x_1 = x_2$



$\Delta < 0$ $\emptyset$ soluzioni

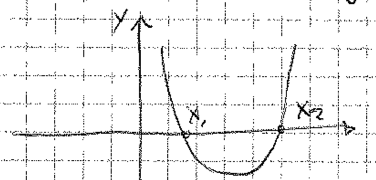




$a'' > a' > 0$

- $ax^2 + bx + c > 0$

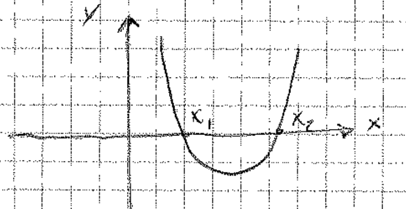
Ricavo x_1 e x_2 con la formula, poi



Quando > 0?

$x < x_1 \cup x > x_2$ oppure $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

- $ax^2 + bx + c \leq 0$



Quando ≤ 0?

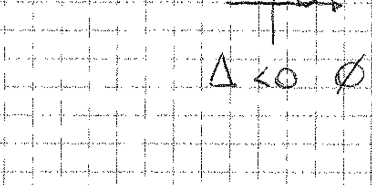
$x_1 \leq x \leq x_2$

$[x_1, x_2]$

ESERCIZI

1) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$

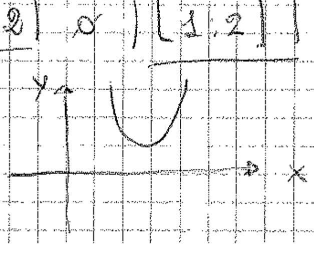
$$x = \frac{3 \mp \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \frac{3-1}{2} = 1 \\ \frac{3+1}{2} = 2 \end{cases}$$

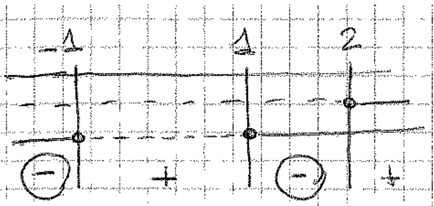


$\boxed{1 \leq x \leq 2}$ o $\boxed{[1, 2]}$

2) $2x^2 - 3x + 4 > 0$ $\boxed{\forall x}$

$$x = \frac{3 \mp \sqrt{9-32}}{4} = \not\; \Delta < 0 \quad \emptyset \text{ sol}$$

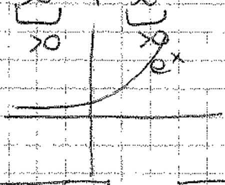




$x \leq -1 \;\cup\; 1 \leq x \leq 2$

$(-\infty, -1] \cup [1, 2]$

7) $\underbrace{e^{x}}_{>0} + \underbrace{e^{-x}}_{>0} < -4 \qquad \nexists\, x$



8) $\underbrace{\sqrt{x^2-3x+5}}_{\geq 0} + \underbrace{\sqrt{2x-3}}_{\geq 0} < 0 \qquad \nexists\, x$ Se avessi avuto ≤ 0, allora dovevo controllare se non fossero stati $= 0$.

9) OPERATORE: VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$|x| \leq 5$ $\quad [-5, 5]$

$|x| > 3$ $\quad (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

$|x-2| \leq 5$ $\quad [-3, 7]$

1) x è 5 oppure −5

$|x| = 5$

2) La distanza tra x e 5 è 2.

$|x-5| = 2$

3) La distanza tra x e −3 è > o = a 4

$|x+3| \geq 4$

4) x è compreso tra −3 e 1

$|x+1| \leq 2$

5) $|x+3| - 2 > 0$

$|x+3| > 2$

$(-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$

In modo analitico:

$$\begin{cases} x+3-2>0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -x-3-2>0 \\ x+3<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1 \\ \ldots \end{cases} \cup \begin{cases} x < -5 \\ \ldots \end{cases}$$

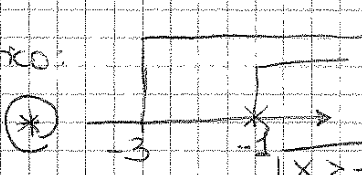
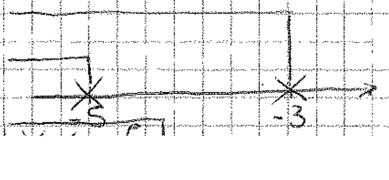


Grafico:



soluzioni

(c) $-x^2+4x-3 \geq \frac{x^2}{3}$

$-3x^2+12x-9-x^2 \geq 0$

$-4x^2+12x-9 \geq 0$

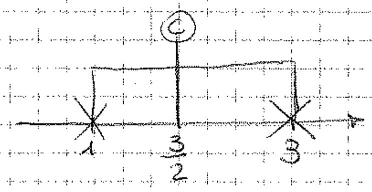
$4x^2-12x+9 \leq 0$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{\cancel{144-144}}}{8} = \frac{3}{2}$

(d) Prendiamo le soluzioni di (b) e facciamo $\mathbb{R}$ - quelle soluzioni

$(1, 3)$

Soluzioni sistema 2:



$x = \frac{3}{2}$

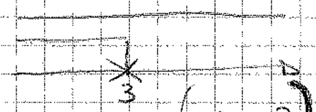
SOLUZIONE TOTALE $\left(-\infty, 3-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right] \cup \frac{3}{2} \cup \left[3+\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

7) $\sqrt{x^2+1} \geq x-3$

definita in $x^2+1 \geq 0$ $x^2 \geq -1$ $\boxed{\forall x}$

⚠ BISOGNA SEMPRE PORRE LA CONDIZIONE!

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} \geq x-3 & (a) \\ x-3 \geq 0 & (b) \end{cases} \cup \begin{cases} \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\geq 0} \geq \underbrace{x-3}_{<0} & \forall x \\ x-3<0 \\ x<3 \end{cases}$$

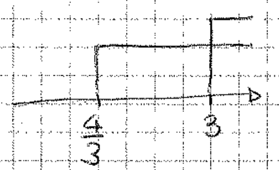


$(-\infty, 3)$

(a) $\cancel{x^2}+1 \geq \cancel{x^2}-6x+9$

$6x \geq 8$

$x \geq \frac{4}{3}$



$x \geq 3$ $[3, +\infty)$

(b) $x \geq 3$

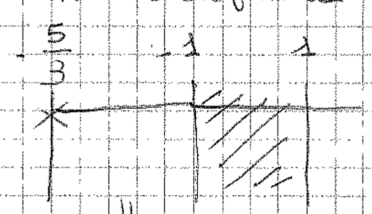
Soluzione globale: $(-\infty, 3) \cup [3, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \forall x \in \mathbb{R}$

8) $\sqrt{x^2-1} < x+3$

definita in $x^2-1 \geq 0$ $x^2 \geq 1$ $x = \pm 1$ $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-1} < x+3 & (a) \\ x+3 \geq 0 & (b) \end{cases} \cup \begin{cases} \underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\geq 0} < \underbrace{x+3}_{<0} & \nexists x \\ x+3<0 & \nexists x \end{cases}$$

Attenzione a controllare dove non è definito!!



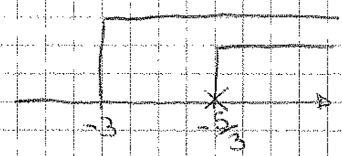
(a) $\cancel{x^2}-1 < \cancel{x^2}+6x+9$

$-6x < 10$

$6x > -10$

$x > -\frac{10}{6}$

$x > -\frac{5}{3}$



$x > -\frac{5}{3}$

Soluzione finale:

$-\frac{5}{3} < x < -1 \cup x > 1$

$\left(-\frac{5}{3}, -1\right] \cup [1, +\infty)$

(b) $x > -3$

Soluzione finale

$$\left(-1, -\frac{1}{3}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-1, \frac{1}{3}\right)$$

LOGICA

Sia $p(x,y)$ la proprietà $x^2 + y^2 < 4$:

- $\forall x \ \forall y, \ p(x,y)$: FALSA $\quad x = 2 \quad y = 2$
- $\forall x \ \exists y$ NOT $p(x,y)$: VERA $\quad x = 2 \quad \forall y \neq 0$
- $\exists x \ \exists y \ p(x,y)$: VERA $\quad x = 1 \quad y = 1$
- $\forall x \ \forall y$ NOT $p(x,y)$: FALSA
- $\forall x \ \exists y \ p(x,y)$: FALSA $\quad x = 10 \quad \nexists y$
- $\exists x \ \exists y$ NOT $p(x,y)$: VERA $\quad x = 10 \quad y = 10$
- $\exists x \ \forall y \ p(x,y)$: FALSA $\quad y > 2$
- $\exists x \ \forall y$ NOT $p(x,y)$: VERA

ESERCIZI

1) $\sqrt{x^2 - 6x} > x + 2$ $\qquad$ Ris: $\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right)$

2) $\sqrt{x^2 - 6x} < x + 2$ $\qquad$ Ris: $\left(-\frac{2}{5}, 0\right] \cup \left[6, +\infty\right)$

3) $\dfrac{x\sqrt{|x^2 - 4|}}{x^2 - 4} - 1 \geq 0$ $\qquad$ Ris: $\left(-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left(2, +\infty\right)$

1) $\sqrt{x^2 - 6x} > x + 2$

definita in: $x^2 - 6x \geq 0 \quad x(x-6) \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \ \vee \ x \geq 6$

$$\text{(a)(b)}\begin{cases} \sqrt{x^2 - 6x} > x + 2 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \sqrt{x^2 - 6x} > x + 2 & \forall x \\ x + 2 < 0 & x < -2 \end{cases} \qquad \left(-\infty, -2\right)$$

(a) $x^2 - 6x > x^2 + 4x + 4$

$-10x > 4$

$10x < -4$

$x < -\frac{2}{5}$

(b) $x > -2$ $\qquad \left(-2, -\frac{2}{5}\right)$

Soluzione finale:

$$\left(-\infty, -2\right) \cup \left(-2, -\frac{2}{5}\right) = \left(-\infty, -\frac{2}{5}\right)$$

INTERVALLI

Sono sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{R}$

<u>Def</u>: dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, suppongo $a < b$

- L'<u>intervallo chiuso</u> di estremi a e b $[a, b]$

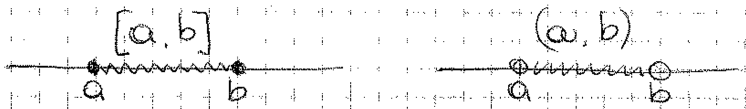
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$
$$\Updownarrow$$
$$x \geq a \text{ ed } x \leq b$$

- L'<u>intervallo aperto</u> di estremi a e b (a, b)

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

Gli estremi $a, b \in [a, b]$
$a, b \notin (a, b)$

<u>Rapp</u>:



Intervallo <u>SEMIAPERTO A DESTRA</u> (RISP. A SINISTRA)

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$
RISP $$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

Se ho una sola disequazione:

$$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\} \subseteq \mathbb{R}$$

$= [a, +\infty)$ $+\infty$ non è un <u>numero</u>, ma solo un simbolo

Ho la seguente proprietà: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x < +\infty}$

$[a, +\infty)$ è un intervallo <u>chiuso</u>

$(a, +\infty)$ " " " <u>aperto</u>

$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\} = (-\infty, b]$, con $-\infty$ simbolo $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x > -\infty}$

Osservazione: $\mathbb{R} = (-\infty ; +\infty)$

CONCETTO di LIMITATEZZA

Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice <u>superiormente limitato</u> se esiste un numero reale b / $\exists b \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq b$, $\forall x \in A$

tale $b \in \mathbb{R}$ si dice <u>maggiorante</u> dell'insieme A

A è <u>inferiormente limitato</u> se $\exists a \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq a$, $\forall x \in A$

Tale a si dice <u>minorante</u> dell'insieme A.

<u>Def</u>. $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se è sia superiormente lim. che inferiormente lim.

Con quantificatori :

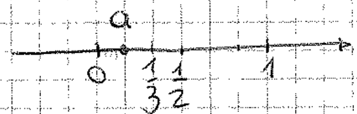
$\neg$ ($\forall A$ sup. lim. ammette max)

$\exists A$ sup. lim. che non ammette max.

Prop: l'insieme $A=\left\{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}_+\right\}$

è inf. lim. ma non ammette minimo.

dim: $\forall x \in A$, $x>0 \Rightarrow 0$ è minorante. Vediamo che 0 è il più grande dei minoranti. Ovvero se $a>0$, allora a non è più minorante.



Provo che $\forall a>0$, $\exists x \in A$ tale che $x<a$ (a, quindi, non è minorante)

$\Leftrightarrow \forall a>0$, $\exists n \in \mathbb{N}_+$ t.c. $\frac{1}{n}<a$

$\Leftrightarrow \forall a>0$, $\exists n \in \mathbb{N}_+$ t.c. $n>\frac{1}{a}$ è vero per prop Archimed

(qualunque n° a non è minorante)

0 è il + grande dei minoranti, ma $0 \notin A$.

Quindi 0 non è minimo di A.

Quindi, se A ammettesse MINIMO ($x_m \in A$) allora

$x_m > 0$ ed x_m minorante IMPOSSIBILE

C.V.D.

Def: $A \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente limitato chiamiamo estremo inferiore di A (inf A) il più grande dei suoi minoranti.

[ugualmente con i maggioranti]

se A sup. limitato, chiamo estremo superiore di A (sup A) il più piccolo dei suoi maggioranti.

ESEMPIO 0 è $\inf(A)$, $A=\left\{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}_+\right\}$

1 OSS: se $x_M \in A$ è massimo di A allora x_M è anche $\sup(A)$

2 OSS: Per provare che $a \in \mathbb{R}$ è estremo superiore (risp. inferiore) di A devo provare:

- a è maggiorante (minorante)
- a è il più ~~grande~~ piccolo ovvero se $b<a$, allora b non è maggiorante (risp se $b>a \Rightarrow$ b non è minorante).

3 OSS se $a=\cancel{\inf}\sup(A)$ ed inoltre $a \in A$, allora a = massimo di A

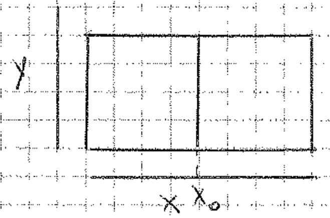
NOTAZIONE: il massimo di A si indica $\max(A)$

il minimo di A " " $\min(A)$

SOTTOINSIEMI di $X \times Y$

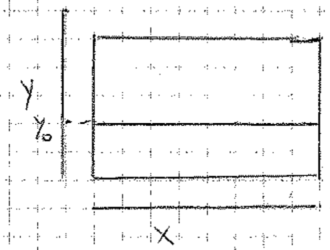
1) Fisso $x_0 \in X$ e considero

$$\{(x_0, y) / y \in Y\} = \{x_0\} \times Y$$



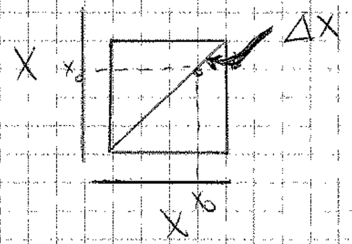
2) fisso $y_0 \in Y$

$$\{(x, y_0) / x \in X\} = X \times \{y_0\}$$



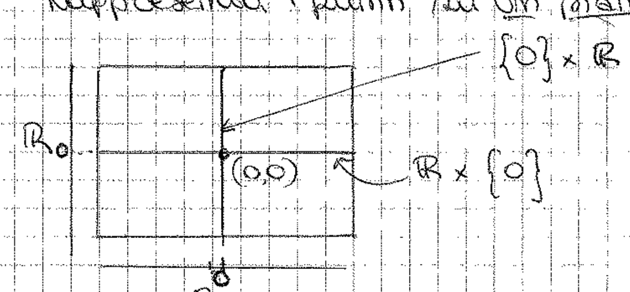
3) Se $X = Y$ $\quad X \times X = X^2$ Considero la DIAGONALE

$$\Delta X = \{(x, y) \in X \times X / x = y\}$$

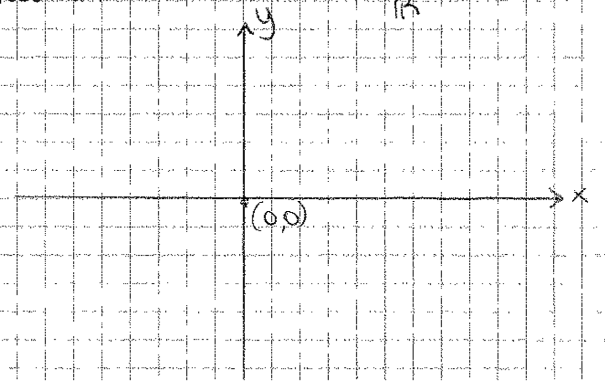


CASO PARTICOLARE $X = Y = \mathbb{R}$

$X \times Y = \mathbb{R}^2$ Rappresenta i punti su un piano



Quindi $\mathbb{R}^2$ ↓



$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k}$ sommatoria

PROP ④: $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}, \ \forall k, n \in \mathbb{N}$

FUNZIONI

Def: Dati 2 insiemi X, Y una funzione f definita in X a valori in Y è una corrispondenza che associa ad ogni elemento $x \in X$ al più un elemento $y \in Y$.
L'insieme degli $x \in X$ cui f associa un elemento $y \in Y$ si dice DOMINIO di f (dom f)

Notazione:
$$f : \text{dom} f \subseteq X \longrightarrow Y$$ [notaz + corretta]

In generale si usa anche la notazione
$$f : X \to Y$$

Quindi i punti $x \in X$ tali che f non associa nessun elemento ad x non fanno parte del dominio di f.

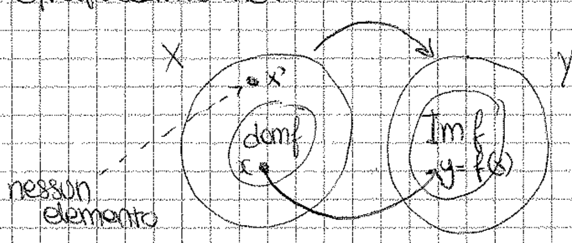
- Dato $x \in \text{dom} f$ l'elemento $y \in Y$ che f associa ad x si dice immagine di x attraverso f e si indica con $f(x)$

Si può scrivere
$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- L'insieme degli elementi $y \in Y$ della forma $y = f(x)$ costituisce l'immagine di f. Si indica: $\text{Im} f \subseteq Y$

Graficamente:

$\boxed{\curvearrowright = f}$



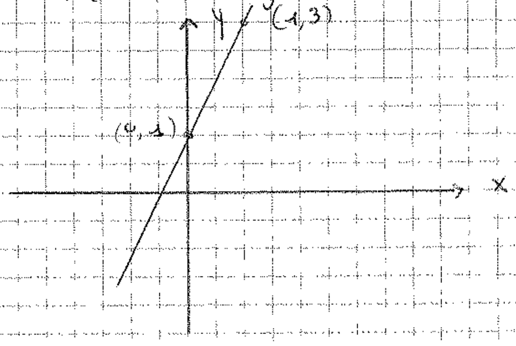
Esempi:

1) $X = \{$città italiane$\}$
$Y = \mathbb{R}$
$$f : X \to Y$$
$c \longmapsto f(c) =$ temperatura registrata oggi in c

2) $X = \{$studenti in aula$\}$
$Y = \{$cognomi italiani$\}$
$$f : X \longrightarrow Y$$
$s \longmapsto f(s) =$ cognome dello studente s.

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x+1\}$

$\Gamma(f)$



In generale il grafico di $f(x) = ax+b$ è una retta $\subseteq \mathbb{R}^2$
(viceversa, ogni retta in $\mathbb{R}^2$, non verticale, è il grafico di una funzione di questo tipo).

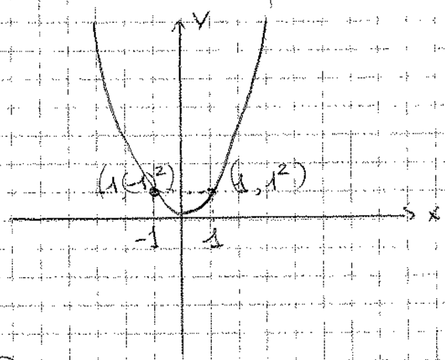
2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = x^2$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

$\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\} = \mathbb{R}_{\geq 0}$

Grafico $\Gamma(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ è una parabola



3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Grafico $\Gamma(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ IPERBOLE RIFERITA AGLI ASINTOTI

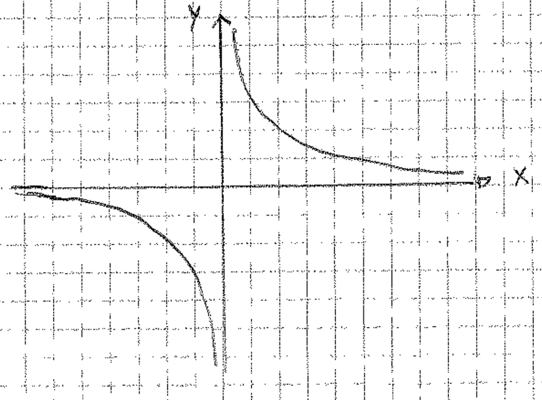
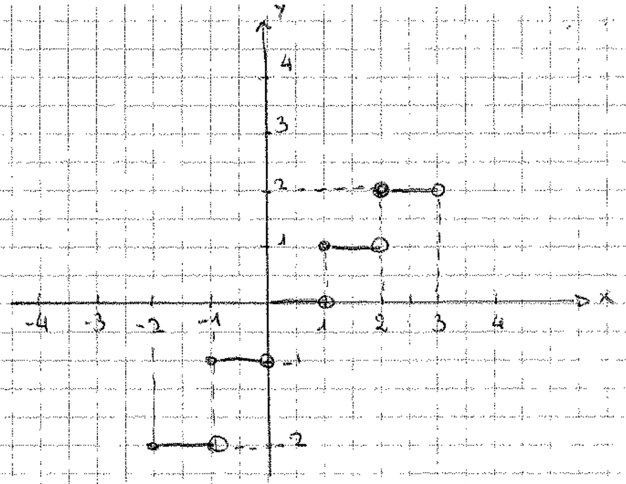


Grafico:



OSS: in generale il grafico $\Gamma(f)$ di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una curva in $\mathbb{R}^2$, ma non ogni curva in $\mathbb{R}^2$ coincide col grafico di una funzione.
La condizione affinché lo sia è che ogni retta verticale intersechi la curva al più in un punto.

Ex:

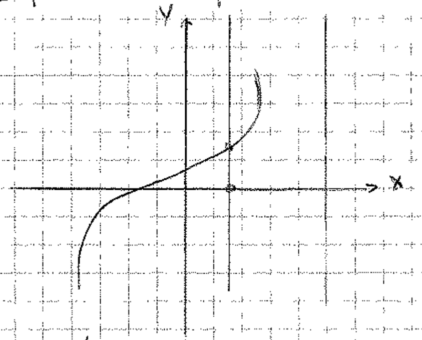
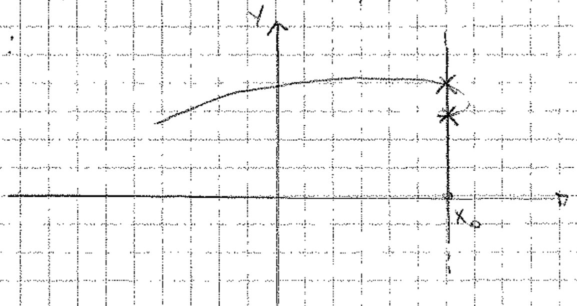


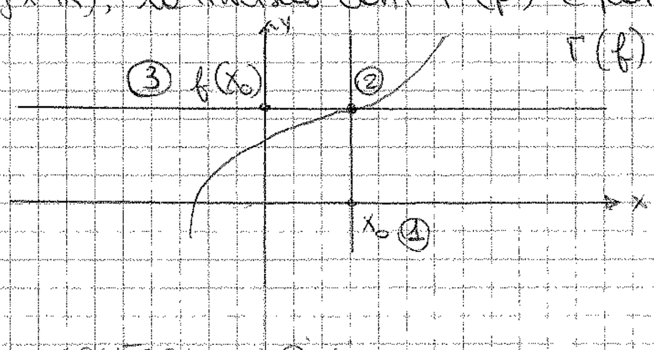
GRAFICO di una funzione

Ex:



Non è una funzione xké a x_0 corrispondono 2 y !!

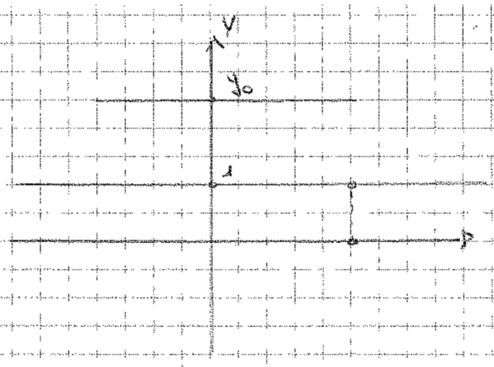
OSS: dato $x_0 \in \mathbb{R}$ e dato il grafico $\Gamma(f) \subseteq \mathbb{R}^2$
Per trovare l'immagine $f(x_0)$ traccio la retta verticale per x_0 ($\{x_0\} \times \mathbb{R}$), la interseco con $\Gamma(f)$ e poi proietto sull'asse y.



IMMAGINI e CONTROIMMAGINI

Def: Dato un insieme $A \subseteq X$, $f: X \to Y$ definiamo l'immagine di A tramite f come l'insieme:
$$f(A) = \{f(x) / x \in A\} \subseteq \mathrm{Im}(f)$$

Grafico:



se $y_0 \neq 1$, $f^{-1}(y_0) = \emptyset$

se $y_0 = 1$ $f^{-1}(y_0) = \mathbb{R}$

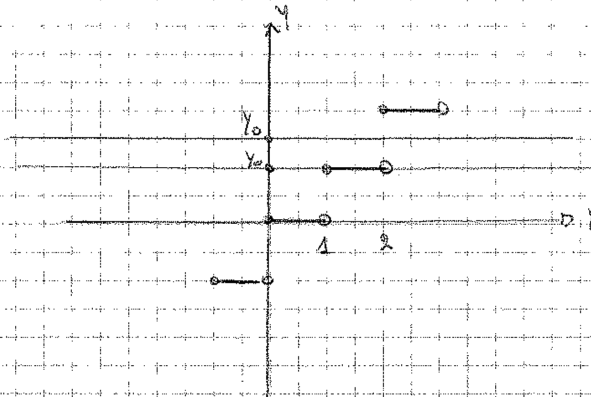
ES: Parte intera

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto [x]$$

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

$\text{Im } f = \mathbb{Z}$

se $y_0 \notin \mathbb{Z}$ $f^{-1}(y_0) = \emptyset$



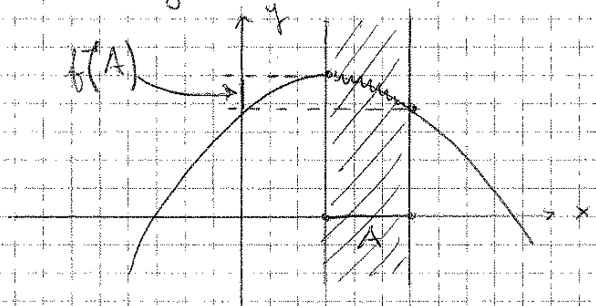
se $y_0 = 1$

$f^{-1}(1) = [1, 2)$

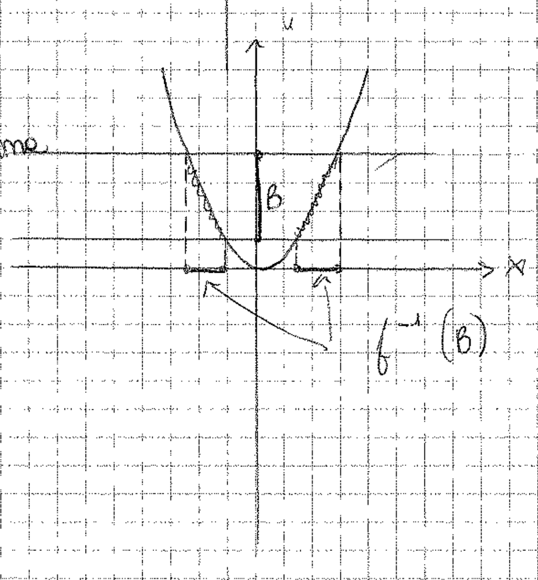
$f^{-1}(z) = [z, z+1)$ $\forall z \in \mathbb{Z}$

Analogamente con gli insiemi:

Immagine



Controimmagine



ESERCITAZIONI 13/10/11

$$\frac{x \log(x+2)}{x-3} \leq 0 \qquad \begin{matrix} x+2>0 \\ x>-2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} N \to >0 \ \forall x>0 \\ D \to >0 \end{matrix}$$

$\hookrightarrow x \neq 3$

a) $[\cancel{-2},0]$

b) $(-2,-1] \cup [0,3)$ RISPOSTA CORRETTA

c) $[\cancel{-1},0]$ $\quad x=2 \quad \dfrac{2 \cdot \log(4)}{-1} \leq 0$

d) $(-2,\cancel{+\infty})$

e) $(3,\cancel{+\infty})$ $\quad x=4 \quad \dfrac{4 \cdot \log(6)}{1}$ NO ≤ 0

MINIMO e MASSIMO, sup inf

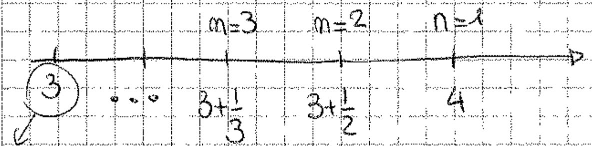
$A = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 2\}$

max = 2
inf = 1
min = $\nexists$

$B = \{x \in \mathbb{R} / 27 \leq x^3 < 64\} = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 4\}$

min = inf = 3
max = $\nexists$
sup = 4

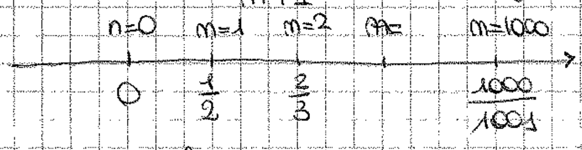
$C = \{x \in \mathbb{R} / x = 3 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$



mi avvicino ma non lo raggiungo

max = sup = 4
inf = 3 $\quad x>3$
min = $\nexists$

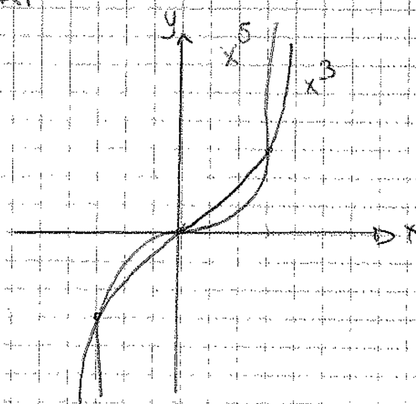
$D = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$



inf = min = 0
sup = 1
max = $\nexists$ (1 non viene mai raggiunto)

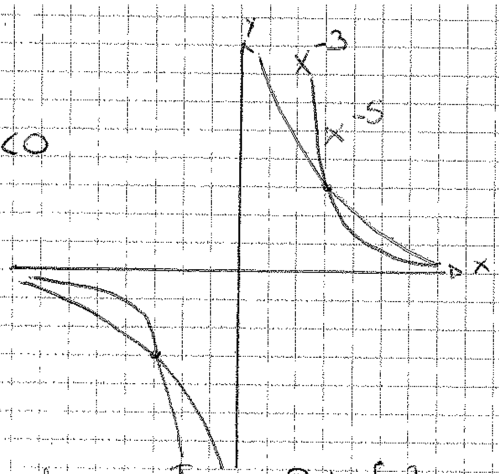
n DISPARI

$n > 0$



dom = Im = $\mathbb{R}$

$n < 0$



dom = Im = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\boxed{n = \text{RAZIONALE}}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

n DISPARI

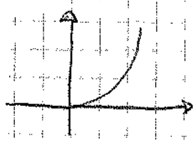
dom $f = \mathbb{R}$

n PARI

dom $f = [0, +\infty)$

$x \geq 0$ lato dx Γ

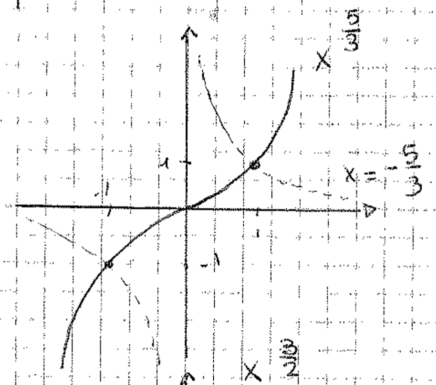
$\forall m, n$ FUNZIONE STRETTAMENTE CRESCENTE

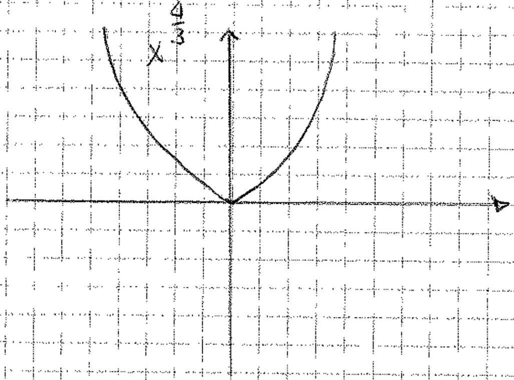


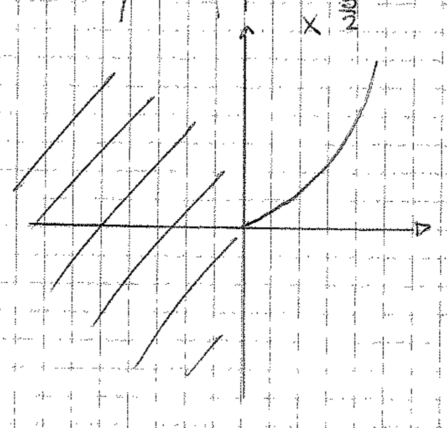
$x < 0$ lato sx Γ

→ m PARI STRETTAMENTE DECRESCENTE

→ m DISPARI STRETTAMENTE CRESCENTE







PROP. $\bullet \log a \cdot b = \log a + \log b$

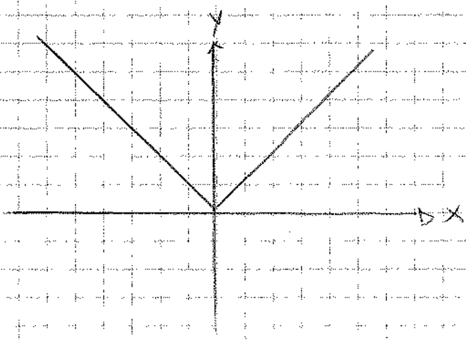
$\bullet \log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

$\bullet \log a^m = m \cdot \log a$

$\triangleq$ = definito come

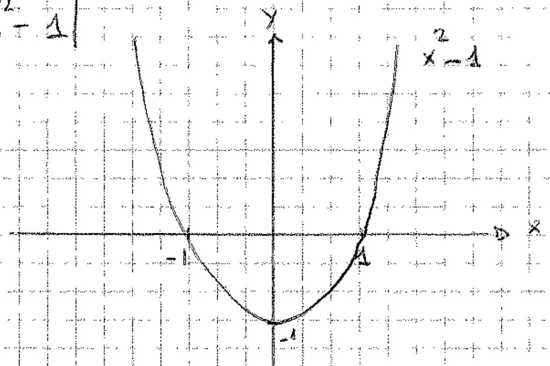
VALORE ASSOLUTO

$$|x| \triangleq \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

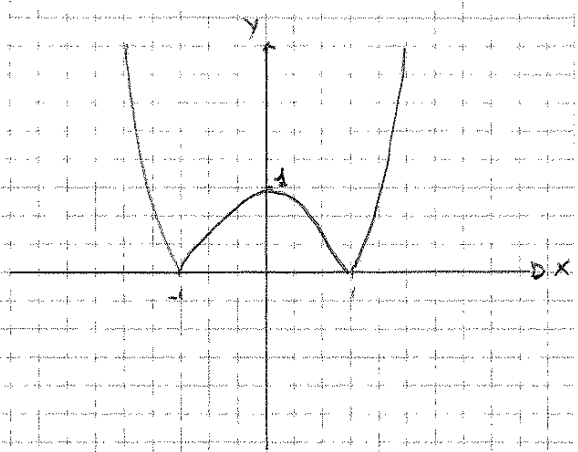


Esempio:

$y = |x^2 - 1|$

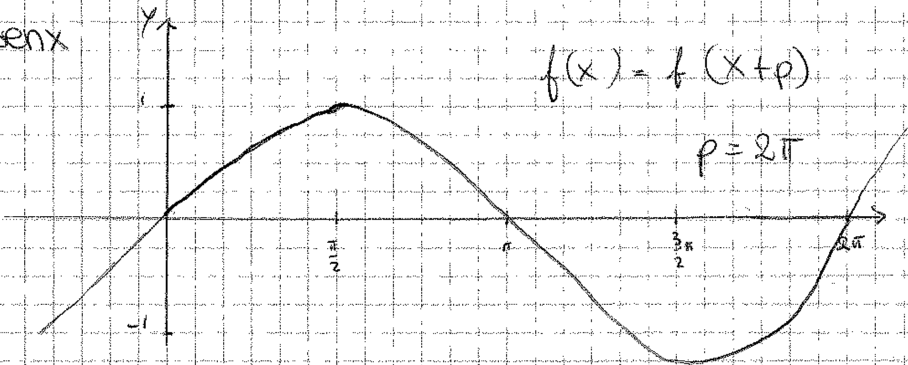


$\Rightarrow$



FUNZIONE SENO

$y = \text{sen}\, x$



$f(x) = f(x+p)$

$p = 2\pi$

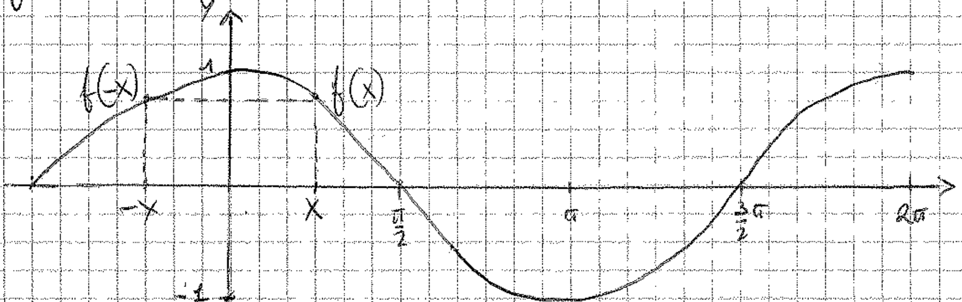
dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = [-1, 1]$

funzione dispari

$p = 2\pi$

$f(x) = \cos x$



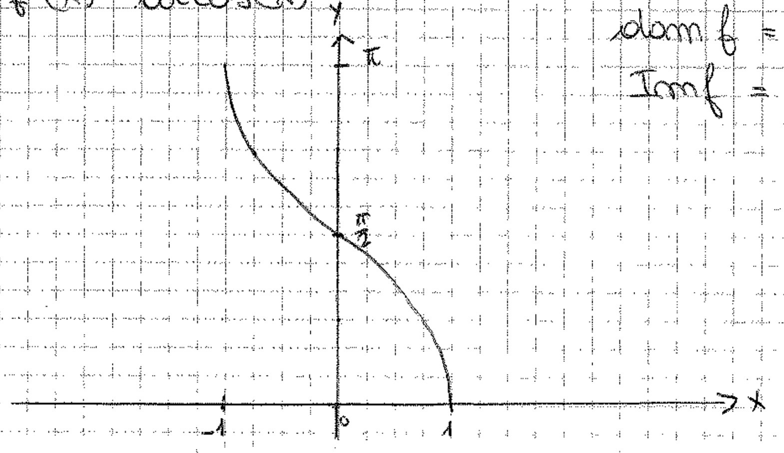
dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = [-1, 1]$

$p = 2\pi$

funzione pari

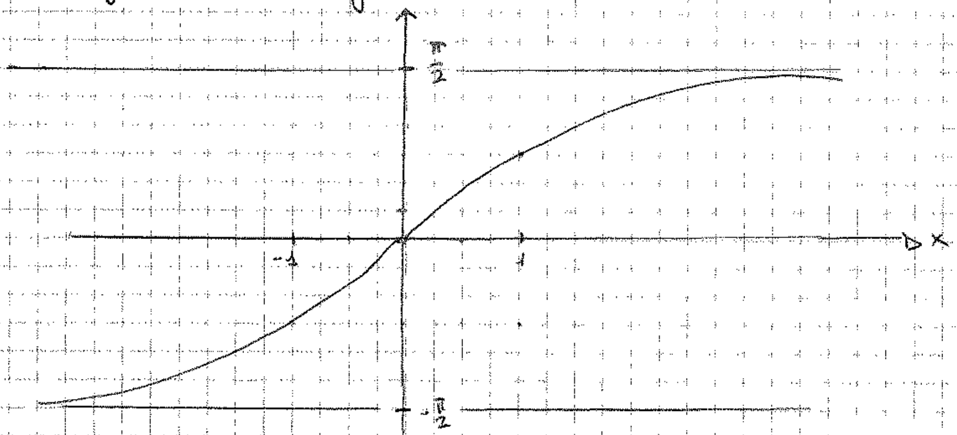
$\Gamma(f) \Rightarrow f(x) : \arccos(x)$



$\mathrm{dom}\, f = [-1, 1]$

$\mathrm{Im} f = [0, \pi]$

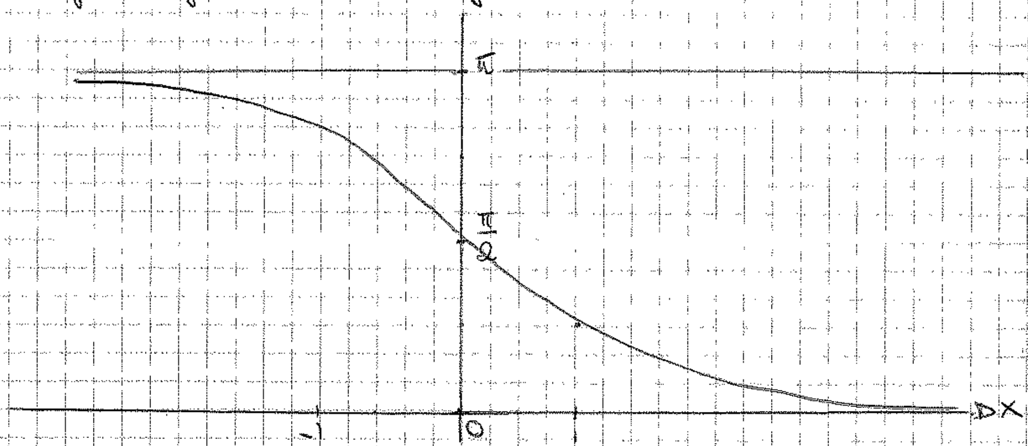
$\Gamma(f) \Rightarrow f(x) : \mathrm{artang}(x)$



$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = (-\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2})$

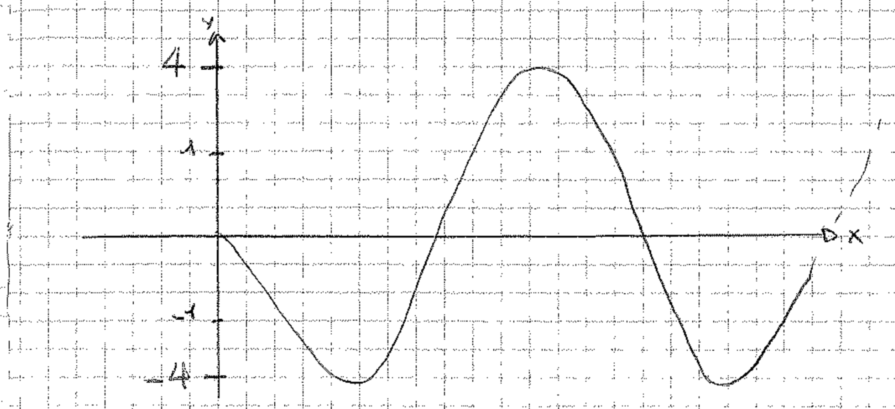
$\Gamma(f) \Rightarrow f(x) : \mathrm{arcctang}(x)$



$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

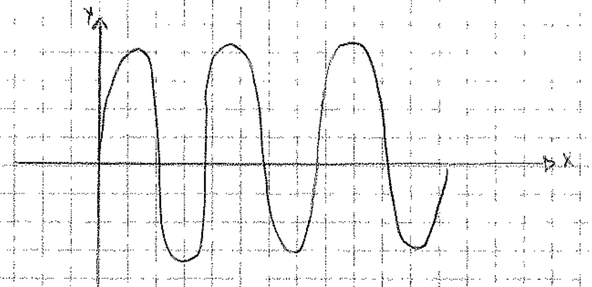
$\mathrm{Im}(f) = (\pi, 0)$

$y = -4 \cdot \operatorname{sen} x$

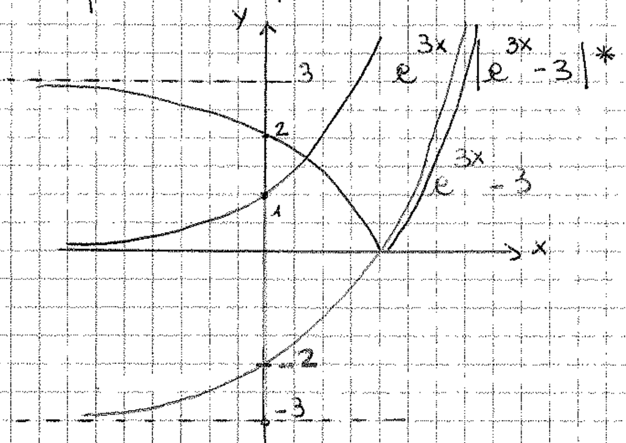


$y = \operatorname{sen}(2x)$

PERIODICITÀ → METÀ



$y = \left| e^{3x} - 3 \right|$



* IL GRAFICO CHE STA NELLA PARTE POSITIVA RIMANE INVARIATO, LA PARTE NEGATIVA DIVENTA POSITIVA.

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

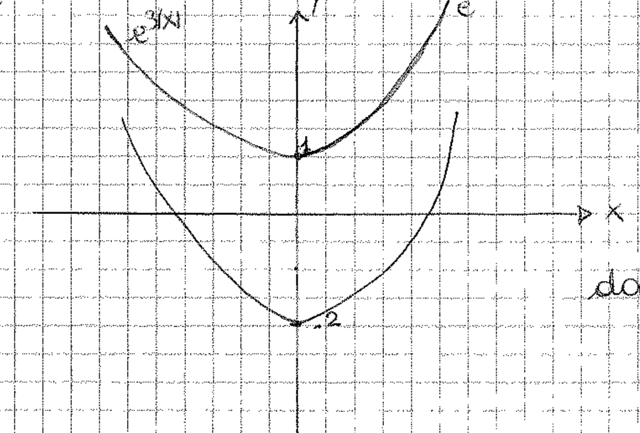
$\operatorname{Im} f = [0, +\infty)$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

$\operatorname{Im} f = (-3, +\infty)$

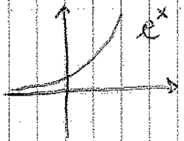
$$e^{3|x|} \begin{cases} e^{3x} & x \geq 0 \\ e^{-3x} & x < 0 \end{cases}$$

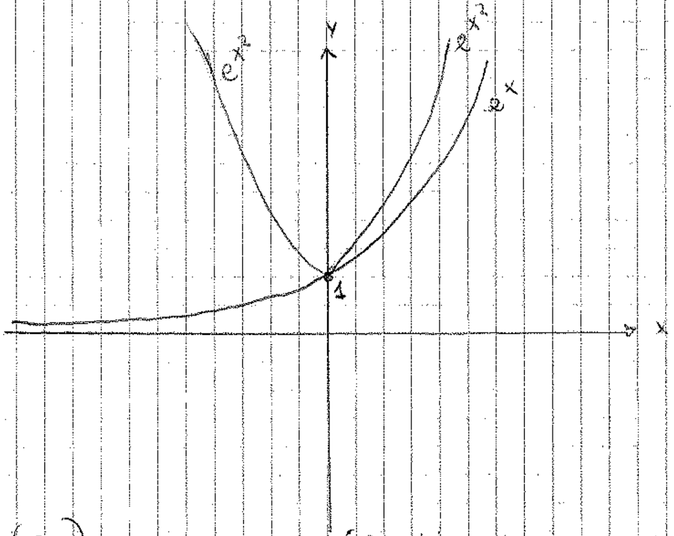
$y = e^{3|x|} - 3$



$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \quad \operatorname{Im} = [-2, +\infty)$

$f(x) = e^{x^2}$

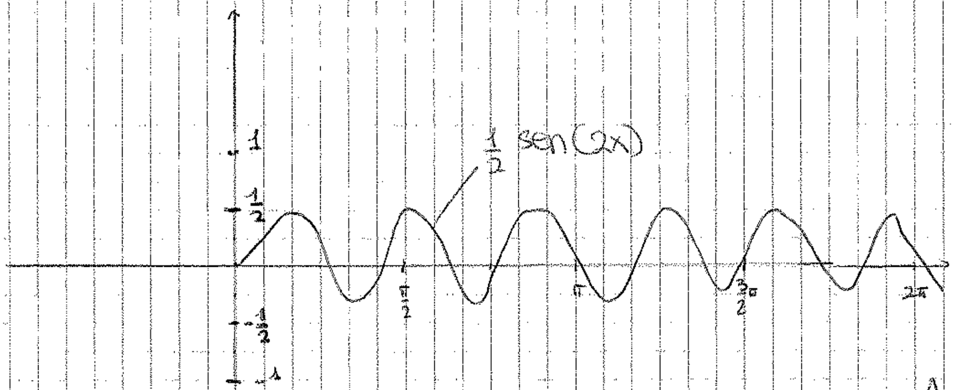


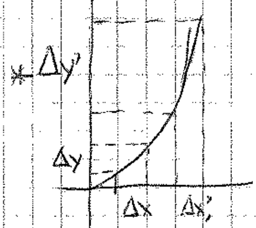


* COME SE FOSSE UN VALORE ASSOLUTO

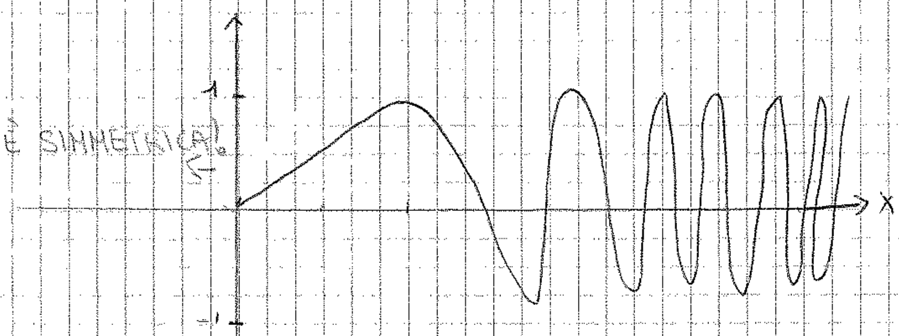
$Im = [1, +\infty)$

$f(x) = \frac{1}{2} sen(2x)$ $p = \pi$ (è diventato metà)



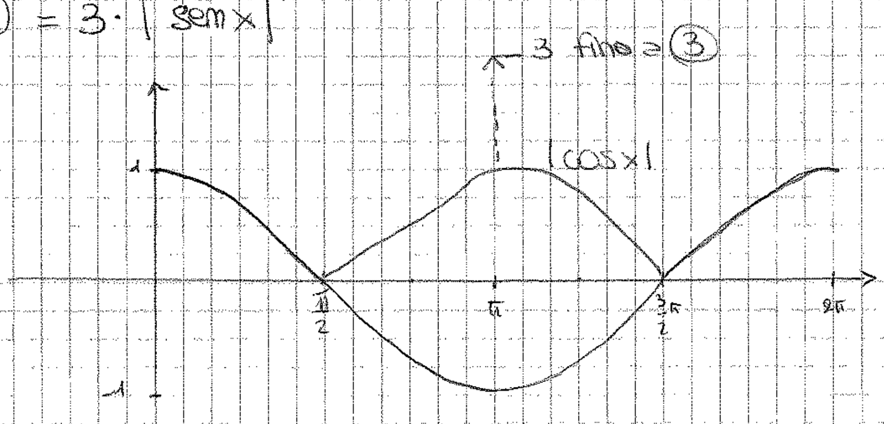


$f(x) = sen(x^2)$



* L'intervallo aumenta! Per cui anche la frequenza. Non ho limite!

$f(x) = 3 \cdot |sen\, x|$



$p = \pi$

$Im = [0, 3]$

$2x+1 \geq 0 \quad 2x-1 \geq 0$ (A)

$2x+1 < 0 \quad 2x-1 \geq 0$ (B)

$2x+1 < 0 \quad 2x-1 < 0$ (C)

$2x+1 \geq 0 \quad 2x-1 < 0$ (D)

(A)
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 2x+1 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 4x^2+4x+1 \geq x+1 \\ 4x^2-4x+1 \leq x+1 \end{cases}$$

(B) (C)
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 2x+1 < 0 \qquad \nexists x \\ \underbrace{2x+1}_{<0} \geq \underbrace{\sqrt{x+1}}_{\geq 0} \\ 2x+1 \geq \sqrt{x+1} \quad \nexists x \end{cases}$$

(D)
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 2x+1 \geq 0 \\ 2x-1 < 0 \\ 4x^2+4x+1 \geq x+1 \\ \forall x \\ \underbrace{2x-1}_{<0} \leq \boxed{\sqrt{x+1}}_{\geq 0} \end{cases}$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right] \qquad\qquad \left[-1, -\frac{3}{4}\right]$$

$$\text{dom } f = \left[-1, -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]$$

* L'insieme $A = \left\{x = 3 + \frac{3}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$

a) $\sup A = +\infty$

b) [illegible] max

c) ammette min

d) coincide con l'insieme delle $x \in \mathbb{R} : x > 2$

e) non è limitato

$n=5 \quad n=3 \quad n=2 \quad n=1$

$(3 \quad 3{,}6 \quad 4 \quad 4{,}5 \quad 6)$

$x > 3$ | $x \leq 6$

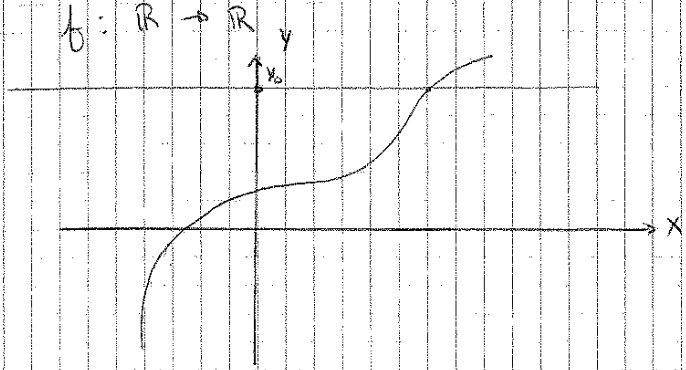
minoranti | maggioranti [illegible]

min $\nexists$ | $\sup = \max = 6$

$\inf = 3$

A livello grafico

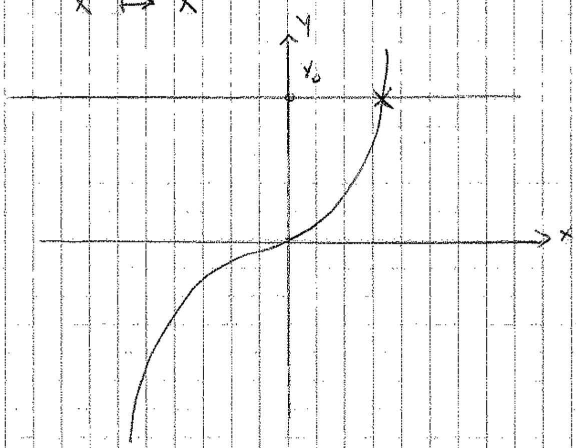
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



- f SURIETTIVA se $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ la retta $y = y_0$ interseca $\Gamma(f)$ almeno in un punto.
- f INIETTIVA se $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ la retta $y = y_0$ interseca $\Gamma(f)$ al più in un punto.

EX:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$



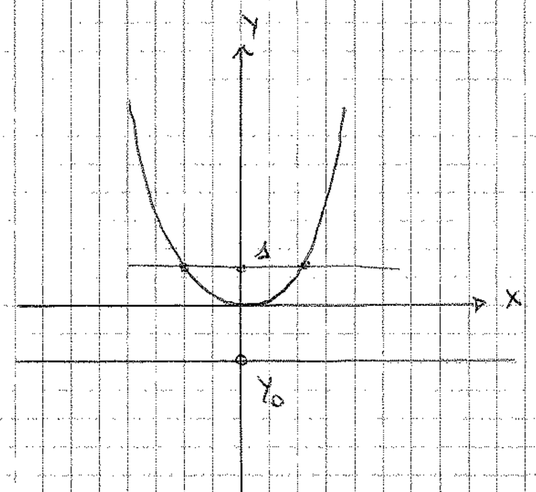
sia SURIETTIVA che INIETTIVA
la retta $y = y_0$ interseca $\Gamma(f)$ esattamente in un punto (con $x = \sqrt[3]{y_0}$) $\Rightarrow$ f sia suriettiva sia iniettiva.

EX:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_{\geq 0} \neq \mathbb{R}$
NON è suriettiva (codominio $= \mathbb{R}$)

fisso $y_0 < 0$ e la retta $y = y_0$ non interseca $\Gamma(f)$



f NON è INIETTIVA perchè
$1 \neq -1$ ma $f(1) = f(-1) = +1$
GRAF: la retta $y = 1$ incontra $\Gamma(f)$ in 2 punti

OSS: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
$x \mapsto g(x) = x^2$
Codominio: $\mathbb{R}_{\geq 0}$ allora
g è suriettiva ($\operatorname{Im} g = \mathbb{R}_{\geq 0}$ = codominio)

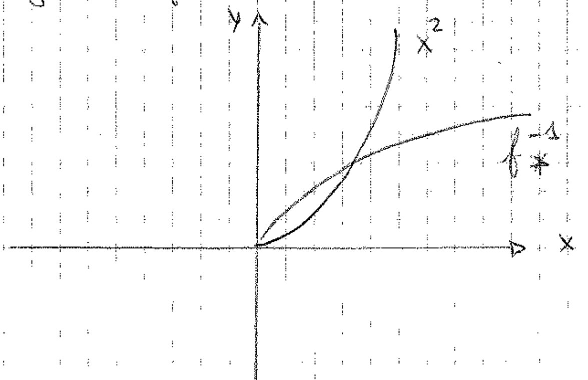
OSS: se restringo il dominio ad $\mathbb{R}_{\geq 0}$, ottengo l'iniettività.
$h: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto h(x) = x^2$
grafico

Def: $f: X \to Y$ è <u>BIETTIVA</u> se è INIETTIVA CHE SURIETTIVA

f BIETTIVA $\Rightarrow$ f INVERTIBILE ed f^{-1} INVERTIBILE $\Rightarrow (f^{-1})^{-1} = f$

OSS: Se f non è iniettiva, ma $\exists A \subseteq \mathrm{dom} f$ su cui la restrizione è iniettiva allora posso costruire l'inversa di tale restrizione.

EX: $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Non iniettiva, ma se restringo ad $A = \mathbb{R}_{\geq 0}$, ottengo una funzione iniettiva.



Definisco f^{-1}, con $\mathrm{Im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f \text{ RISTRETTA}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$

* TRATTASI della $\sqrt{\ }$.

Come la funzione SENO $\to$ non è invertibile, ma se prendo un dominio ristretto come $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ allora è invertibile.

MONOTONIA

$\boxed{I = \text{intervallo}}$

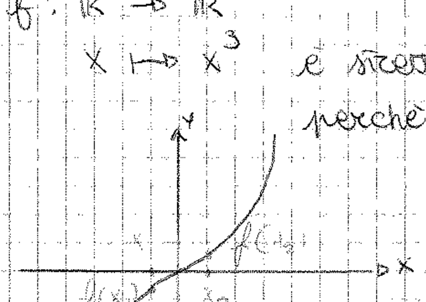
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dato $I \subseteq \mathrm{dom} f$ diciamo che f è <u>monotona crescente</u> su I se $\boxed{\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)}$

Def: f STRETTAMENTE MONOTONA CRESCENTE su I se $\forall x_1, x_2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

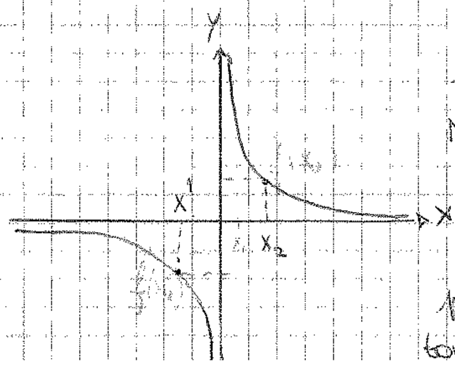
Per <u>decrescente</u> è la stessa cosa invertendo solo con $\geq$ / $>$.

EX:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$ è strettamente monotona crescente su $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$ perché se $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



EX: $f(x) = \frac{1}{x}$



$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

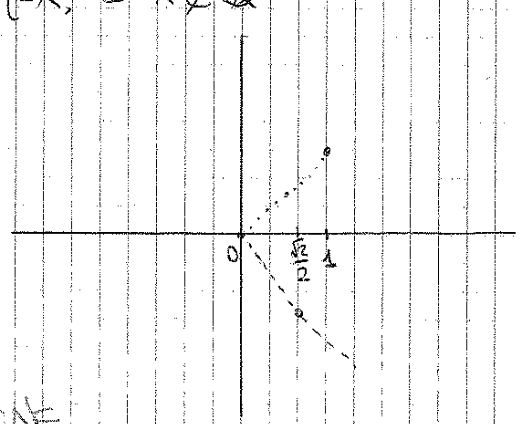
NON è MONOTONA DECRESCENTE su $\mathrm{dom} f$ (dovrebbe essere $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$) però f è strettamente monotona decrescente su $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$

Data $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, posso sempre suddividere I in ~~sottointervalli~~ sottointervalli su cui f è monotona? NO

Esempio:

$$f: [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

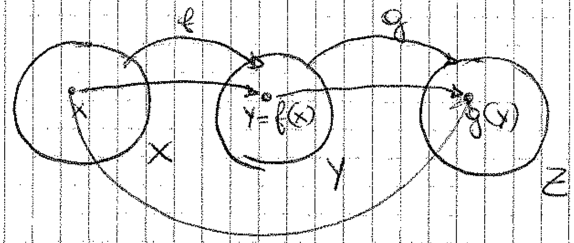


... = INFINITI PUNTI

Se fisso un intervallo ci sono infiniti n° $\mathbb{Q}$ e n° irrazionali.

f INIETTIVA, ma non MONOTONA su nessun I.

COMPOSIZIONE



Data $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ la composizione di f e g è la funzione $g \circ f: X \to Z$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Se $X = Y = Z$, posso considerare anche la composizione di g ed f, $f \circ g: X \to X$, ma in generale $f \circ g \neq g \circ f$

[$\circ$ = applicato ~~assorbito~~]

Esempio:

$$f(x) = 3^x, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3^x) = \sqrt{3^x}$ → ha associato a 3^x anche la $\sqrt{x}$.

  dominio $= \mathbb{R}$

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 3^{\sqrt{x}}$

  dominio $= \mathbb{R}_{\geq 0}$

Il dominio di $g \circ f$ è un sottoinsieme dom$f$

$$\text{dom}(g \circ f) = \{x \in \text{dom}f \,/\, f(x) \in \text{dom}g\}$$

TEOREMA

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) f, g INIETTIVE $\Rightarrow g \circ f$ INIETTIVA

b) f, g SURIETTIVE $\Rightarrow g \circ f$ SURIETTIVA dim. f DECRES. g CRESCENTE TH: $g \circ f$ DECRESCENTE, ovvero se $x_1 < x_2$, $(g \circ f)(x_1) \geq (g \circ f)(x_2)$

Th $\Leftrightarrow$ $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$

f decrescente $\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

g crescente $\Rightarrow g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$ CVD

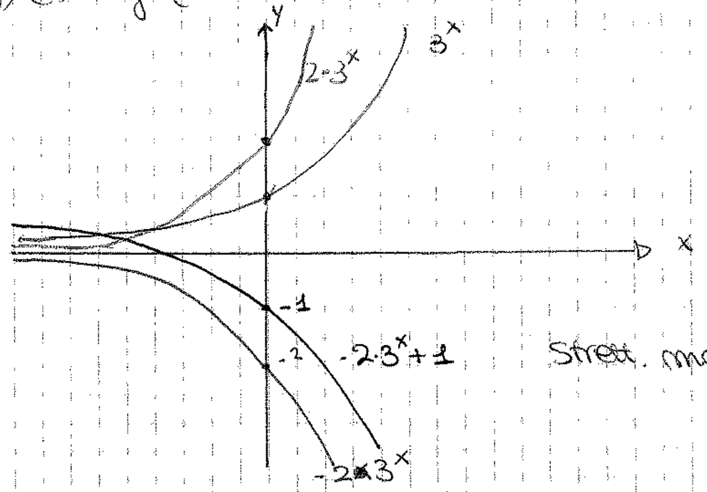
Esempio:

$f(x) = 3^x$, $g(x) = -2x + 1$

f strett. mon. crescente

g " " decrescente

$(g \circ f)(x) = g(3^x) = -2 \cdot 3^x + 1$



strett. mon. decrescente

PROP: se f invertibile, allora
- $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in \text{dom} f$
- $(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in \text{Im} f$

Ovvero la composizione di f e f^{-1} (e quella di f^{-1} ed f) è la funzione identica

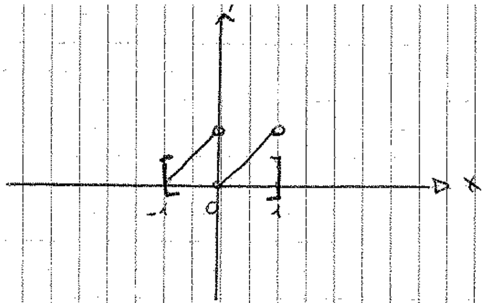
Esempio: $f(x) = 2^x$ $\quad f^{-1}(x) = \log_2 x$

- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(2^x) = \log_2(2^x)$ quindi x, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \mathbb{R}$

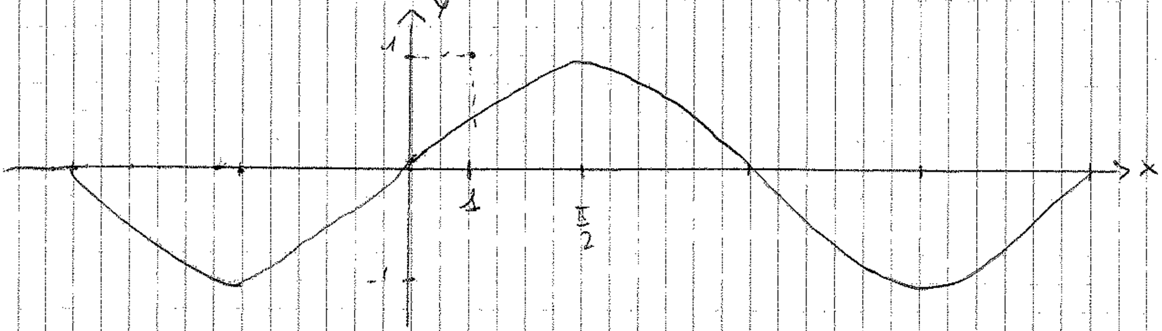
- $(f \circ f^{-1})(x) = f(\log_2 x) = 2^{\log_2 x}$ quindi x, $\forall x > 0$

Def: Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con dom f simmetrico risp a $\emptyset$ (cioè se $x \in \text{dom} f \Rightarrow -x \in \text{dom} f$)
- f è PARI se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \text{dom} f$
- f è DISPARI se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \text{dom} f$



$(g\circ f)(x) = g(M(x)) = \text{sen}(M(x))$

$\text{Im}(g\circ f) = g(\text{Im} f) = g(\text{Im}\, M) = g([0,1)) = [0, \text{sen}\,1)$



$\text{sen}(M(x))$ è periodica? Sì, $T=1$

$M, T=1$

$\text{sen}(M(x+1)) = \text{sen}(M(x))$

$(\text{sen}\circ M)$ ha periodo 1.

Esempio:

$f(x) = 2^x$

$g(x) = \text{sen}\,x$

$(f\circ g)$ = periodica? $\to f(g(x)) = 2^{\text{sen}x}$ $\quad f(g(x+2\pi)) = 2^{\text{sen}(x+2\pi)} = 2^{\text{sen}x}$ $\quad T = 2\pi$

$(g\circ f)$ = periodica? No

$\hookrightarrow g(f(x)) = \text{sen}(2^x)$

$g(f(x+2\pi)) = \text{sen}(2^{x+2\pi}) \neq \text{sen}(2^x)$

SUCCESSIONI

È una funzione $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che $\text{dom}(a) \supseteq \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0\}$

(cioè a deve essere definita $\forall n \geq n_0$).

$a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \longmapsto a(n) = a_n$ NOTAZIONE

Successione di termine n-esimo a_n è $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad a_n = a(n)$

Successione $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ $\quad$ Successione $\{a_n\}$

ES: La successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ È la successione di termine n-esimo

$a_n = \frac{1}{n}$ $\quad a: \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{R}$

$n \longmapsto \frac{1}{n}$

Es: succ $\{a_n\}$ $a_n = n^2 - 5$

$a_0 = -5$

$a_1 = -4$

$a_2 = -1$

$a_3 = 4$

$a_4 = 11$

$\forall n \geq 3,\ a_n > 0$

Quindi è definitivamente positiva.

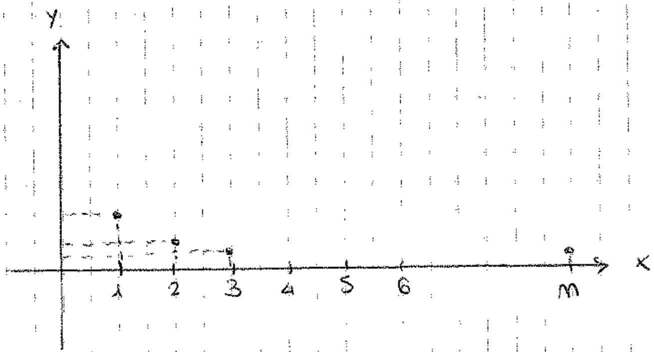
LIMITI

Es: succ $\{a_n\}$ $a_n = \frac{1}{n}$

Quando n è arbitrariamente grande, a_n diventa arbitrariamente piccolo.

$\downarrow$

idea che si formalizza con il limite.



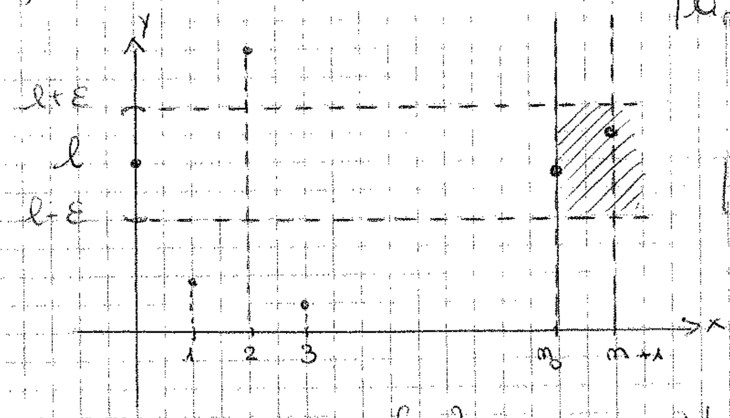
Fissato $\varepsilon > 0$ (arbitrariamente piccolo) riesco a trovare un certo $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tale che da n_0 in poi, $a_n < \varepsilon$.

Def: La successione $\{a_n\}$ si dice CONVERGENTE al LIMITE $l \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \text{ tale che } \forall n \geq n_0, \text{ si ha } |a_n - l| < \varepsilon$$

Si scrive $\lim_{n \to \infty} a_n = l$

$a_n \to l,\ n \to +\infty$



$$|a_n - l| < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon}$$

Es: Successione costante $\{a_n\}$, $a_n = c$ $\forall n$ ammette limite e $\lim_{n \to \infty} a_n = c$

dim: Th: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ tale che $\forall n \geq n_0$

$|a_n - c| < \varepsilon$

ma $a_n = c$ $\forall n$ $\Rightarrow$ $|a_n - c| = 0$ $\forall n$

TAUTOLOGIA

Quindi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0\ (=0)$ tale che $\forall n \geq n_0$ $|a_n - c| = 0 < \varepsilon$

Teorema: se $\{a_n\}$ converge a l, allora anche $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ convergono ad l.

IN PARTICOLARE $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ convergono a 2 LIMITI $l_1 \neq l_2 \Rightarrow$ $\{a_n\}$ NON CONVERGE

ES: la successione $\{(-1)^n\}$ è limitata, ma non è convergente.

posto pari $\rightarrow$ succ costante $+1$

" dispari $\rightarrow$ " " -1

Perchè la succ dei term. di posto pari converge al limite $+1$, qu. dei posti dispari converge al limite -1.

ESERCITAZIONI

$f(x^2): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

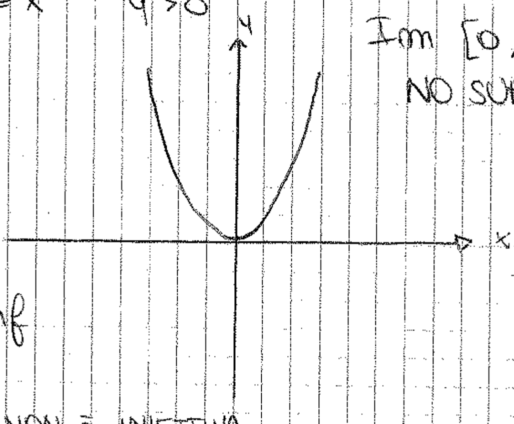
$y = x^2 \quad y > 0$

Im $[0, +\infty]$

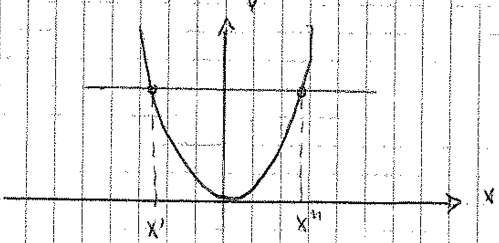
NO SURIETTIVA

$f: \text{dom} f \subseteq X \rightarrow Y$

SURIETTIVA: $\text{Im} f = Y$

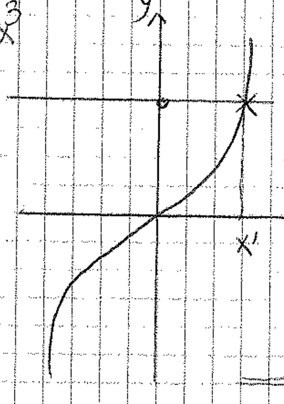


INIETTIVA: $\forall y \in \text{Im} f, \exists! \, x \in \text{dom} f$



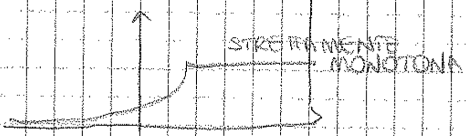
NON è INIETTIVA

$y = x^3$



È INIETTIVA

$\boxed{\text{INIETTIVA} \Leftrightarrow \text{INVERTIBILE}}$



Monotona crescente:

$\forall x_1, x_2, \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Monotona strettamente crescente:

$\forall x_1, x_2 \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Monotona decrescente:

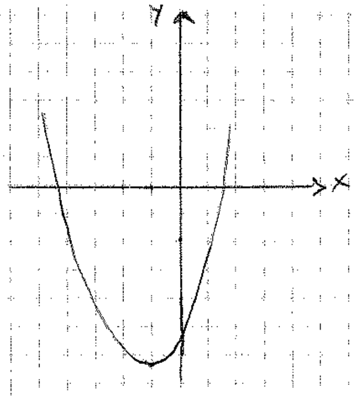
$\forall x_1, x_2, \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

- Strettamente monotona in dom$f$ $\Rightarrow$ INIETTIVA (l'inversa è strettamente monotona)
- f e g monotone $\Rightarrow$ $f \circ g$ monotona

$\Gamma(f)$

$\text{dom} f = \mathbb{R}$

$V = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$

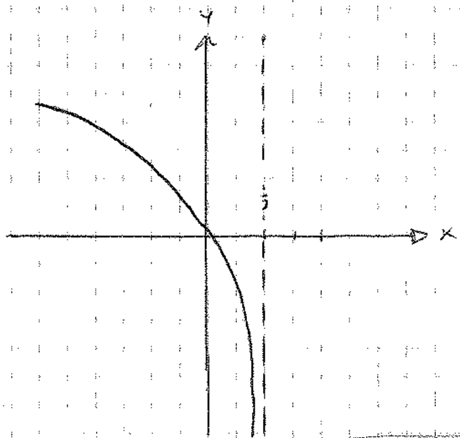


$\text{Im} f = \left[-\frac{13}{4}, +\infty\right)$

$\Gamma(g)$

$1-2x > 0 \quad , \quad x < \frac{1}{2}$

$\text{dom} f \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$



$\text{Im} g = \mathbb{R}$

$g \circ f = \log_{10}(-2x^2-2x+7)$

$\text{dom}(g \circ f) = -2x^2-2x+7 > 0$

$2x^2+2x-7 < 0$

$\text{dom}(g \circ f) = \left(\frac{-1-\sqrt{15}}{2}, \frac{-1+\sqrt{15}}{2}\right)$

$x < \begin{matrix} \frac{-1-\sqrt{15}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{15}}{2} \end{matrix}$

FAI PER CASA!

$f(x): x^2-7x+7$

$g(x): \frac{7}{2} + \sqrt{x-\frac{7}{4}}$

$f \circ g = ?$

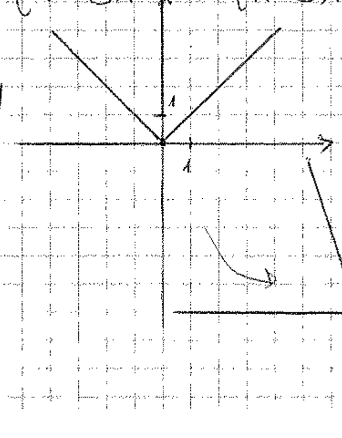
• $f(x) = x^2+3x \qquad g(x) = |x|$

① $f \circ g = ?$ ② $g \circ f = ?$

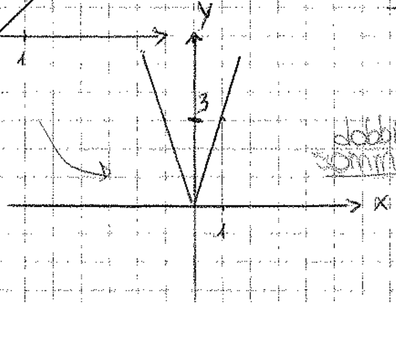
① $f \circ g = (|x|)^2 + 3|x| = x^2+3|x| \qquad \text{dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$

Per trovare l'immagine

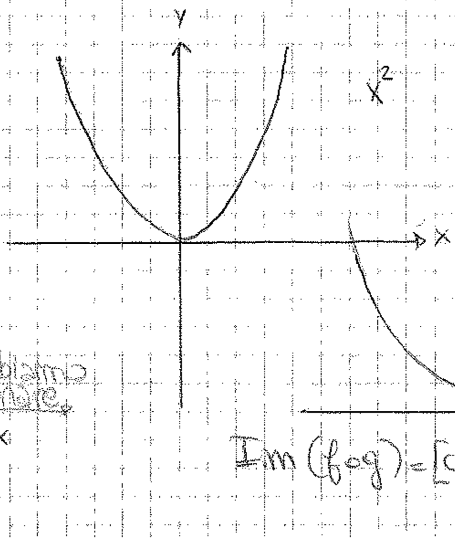
$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+3x \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ x^2-3x \end{cases}$



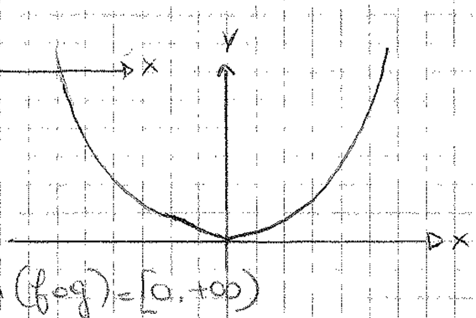
$|x|$



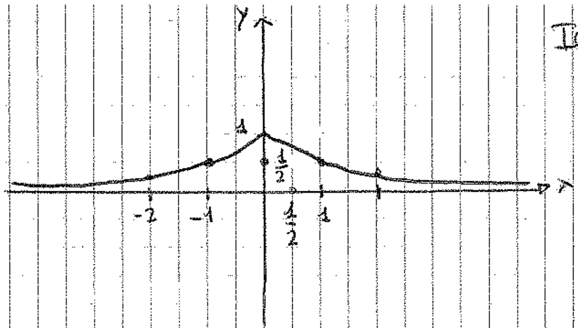
dobbiamo sommare



x^2



$\text{Im}(f \circ g) = [0, +\infty)$

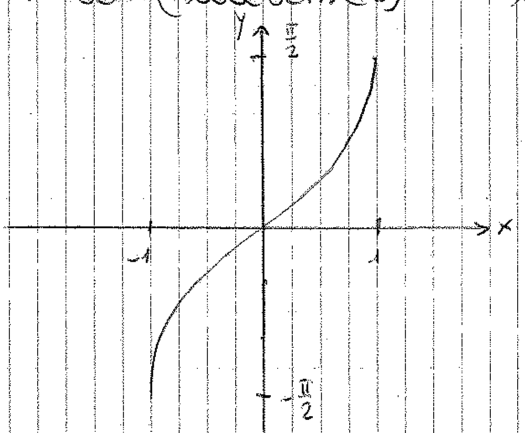


$\mathrm{Im}(g \circ f) = [0, 1]$

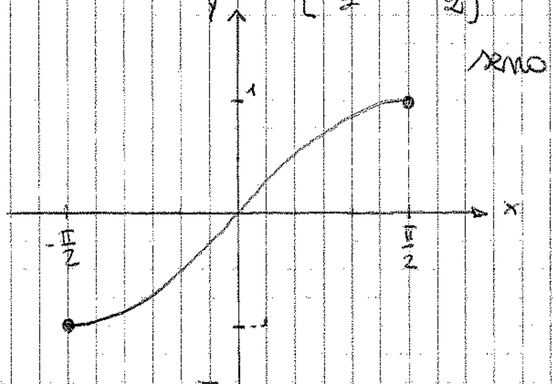
funzione PARI

ESERCIZIO

$f(x)$: $\mathrm{sen}(\mathrm{arcsen}(x))$ $\quad$ $\mathrm{dom}\, f = [-1, +1]$



Im di arcsen $= \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$

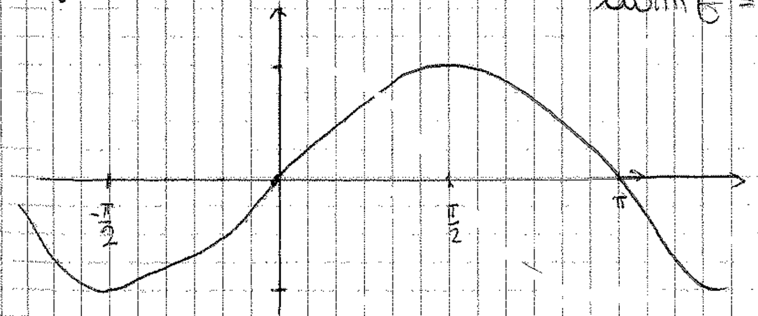


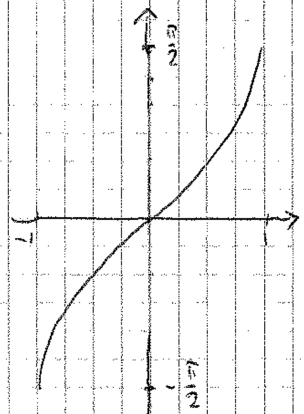
$\boxed{f(x) = x}$ solo nel dominio $[-1, +1]$

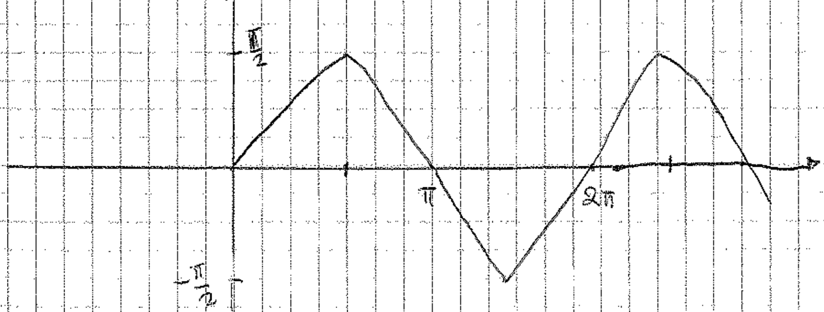
$\forall x \in [-1, +1]$

$\mathrm{Im}\, f(x) = [-1, +1]$

$f(x)$ $\mathrm{arcsen}(\mathrm{sen}(x))$ $\quad$ $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$





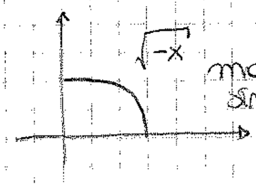


$\mathrm{Im}\, f = \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$

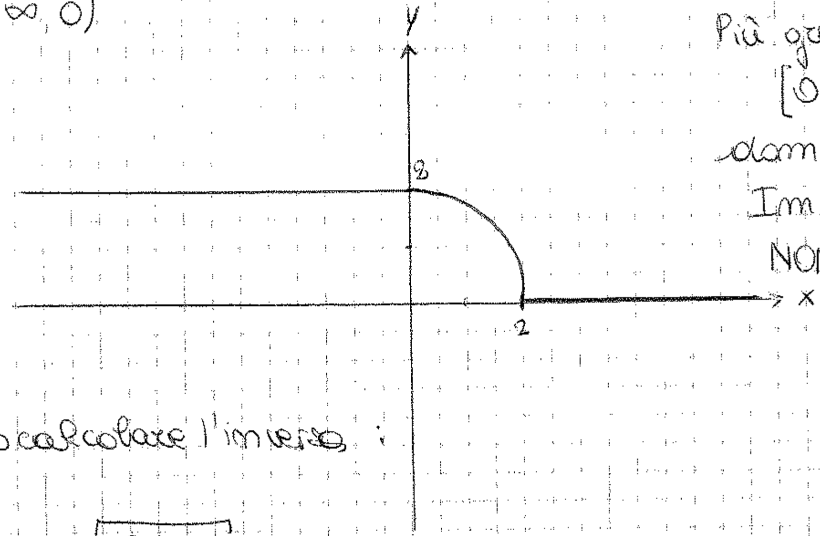
- Intervallo più grande in cui $f(x)$ è invertibile :

$$f(x) = \sqrt{2 - |x| + |x-2|}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \quad x \geq 2 \quad [2, +\infty) & f(x) = \sqrt{2 - x + x - 2} = 0 \\ x \geq 0 \quad x < 2 & f(x) = \sqrt{2 - x + 2 - x} = \sqrt{-2x + 4} \\ x < 0 \quad x \geq 2 & f(x) = \text{NON HA SENSO !} \\ x < 0 \quad x < 2 \quad (-\infty, 0) & f(x) = \sqrt{2 + x - x + 2} = 2 \end{cases}$$



monotona strett. decrescente



Più grande I:
$[0, 2]$
$\text{dom} f = \mathbb{R}$
$\text{Im} f = [0, 2]$
NON è SURIETTIVA su $\mathbb{R}$, ma SURIETTIVA in $[0, 2]$

Voglio calcolare l'inverso :

$$f\big|_{[0,2]} = \sqrt{-2x + 4}$$

$$y = \sqrt{-2x + 4}$$

$$\Downarrow$$

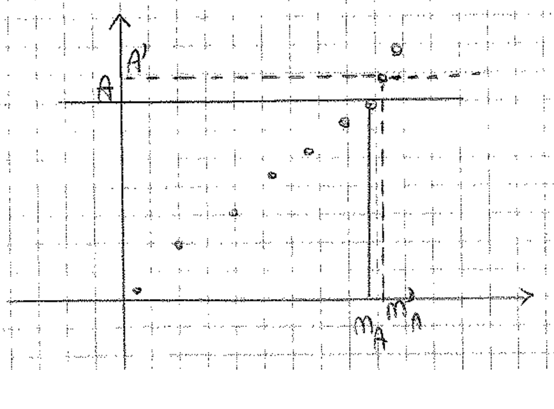
$$y^2 = -2x + 4 \qquad 2x = 4 - y^2 \qquad x = 2 - \frac{y^2}{2}$$

LIMITI

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l \quad \text{se} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \boxed{\forall n > n_0}, \ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

dove la successione è definita

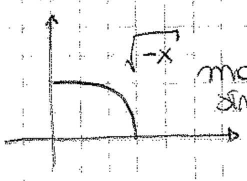
$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty \quad \text{se} \quad \forall A > 0 \ \exists n_A : \forall n > n_0, \ n \geq n_A \Rightarrow a_n > A$$



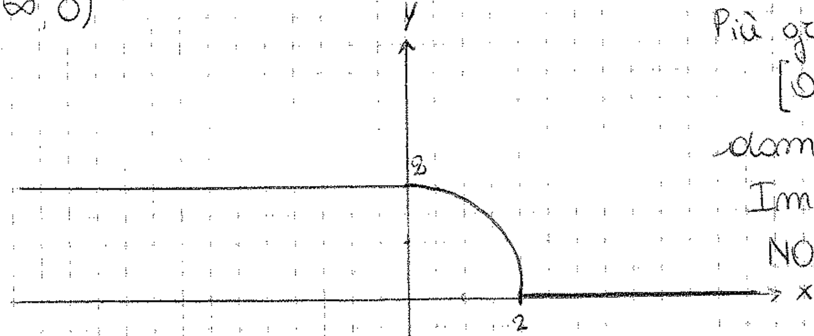
- Intervallo più grande in cui $f(x)$ è invertibile:

$f(x) = \sqrt{2 - |x| + |x-2|}$

$$\begin{cases} x \geq 0 \quad x \geq 2 \quad [2, +\infty) & f(x) = \sqrt{2-x+x-2} = 0 \\ x \geq 0 \quad x < 2 & f(x) = \sqrt{2-x+2-x} = \sqrt{-2x+4} \\ x < 0 \quad x \geq 2 & f(x) = \text{NON HA SENSO!} \\ x < 0 \quad x < 2 \quad (-\infty, 0) & f(x) = \sqrt{2+x-x+2} = 2 \end{cases}$$



monotona strett. decrescente



Più grande I:
$[0, 2]$

dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = [0, 2]$

NON è SURIETTIVA su $\mathbb{R}$, ma SURIETTIVA in $[0, 2]$

Voglio calcolare l'inverso:

$f|_{[0,2]} = \sqrt{-2x+4}$

$y = \sqrt{-2x+4}$

$\Downarrow$

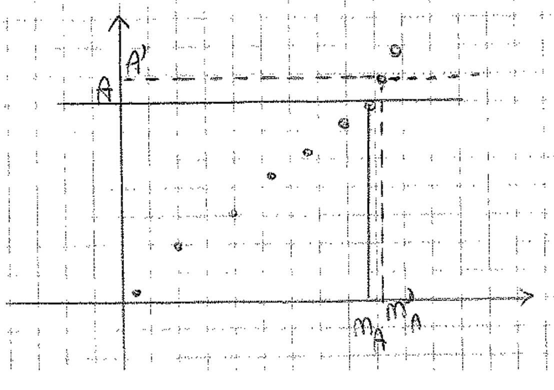
$y^2 = -2x + 4 \quad 2x = 4 - y^2 \quad x = 2 - \frac{y^2}{2}$

LIMITI

$\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \boxed{\forall n > n_0}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$

dove la successione è definita

$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ se $\forall A > 0 \ \exists n_A : \forall n > n_0, n \geq n_A \Rightarrow a_n > A$



<u>Def</u>: La successione $\{a_n\}$ è <u>POSITIVAMENTE DIVERGENTE</u> (o ha limite $+\infty$) se $\forall M>0$ (è quanto GRANDE voglio) $\exists n_0 = n_0(M)$ tale che $\forall n \geq n_0$, $a_n > M$.

Si scrive: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (a_n grande quanto voglio)

$\{a_n\}$ è <u>NEGATIVAMENTE DIVERGENTE</u> (o ha limite $-\infty$)

$\forall M>0$, $\exists n_0 = n_0(M)$ tale che $\forall n \geq n_0$, $a_n < -M$

Si scrive: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Esempio:

$$\lim_{n\to\infty} \log_2(n) = +\infty$$

<u>dim</u> $\forall M>0$, $\exists n_0 / \forall n > n_0$

$$\log_2 n > M$$

$\log_2 n > M \iff$

La funzione 2^x è monotona crescente $\Rightarrow 2^{\log_2 n} > 2^M \iff n > 2^M$

Questo è vero per la proprietà archimedea, <u>ovvero</u> $\forall M>0$, $\exists n_0 = [2^M]+1$ tale che $n_0 > 2^M \Rightarrow \forall n \geq n_0$, $n > 2^M$ cioè $\log_2 n > M$

CVD

<u>Def</u>: La successione $\{a_n\}$ è <u>REGOLARE</u> se <u>CONVERGE o DIVERGE</u>.

Negli altri casi è <u>INDETERMINATA</u>.

TEOREMA $\{a_n\}$ <u>LIMITATA</u> e <u>MONOTONA</u> allora è <u>CONVERGENTE</u>.

<u>dim</u>: $\{a_n\}$ mon. DECRESCENTE $(a_{n+1} \leq a_n)$.

L'insieme $\{a_n\}$ è LIMITATO $\Rightarrow$ ammette inf. Pongo $l = \inf\{a_n\}$

Proviamo che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$

$l = \inf\{a_n\}$ è il più grande dei minoranti $\Rightarrow$ se $l' > l$, l' non è minorante. Ovvero $\forall \varepsilon > 0$, $l+\varepsilon$ non è minorante. Cioè $\exists a_{n_0}$ tale che $a_{n_0} < l+\varepsilon$. Inoltre $\forall n \geq n_0$, $a_n \leq a_{n_0} \leq l+\varepsilon$ e $a_n \geq l$ $\forall n$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0, \quad \underset{\text{estremo inferiore}}{l} \leq a_n < l+\varepsilon \Rightarrow \underset{\text{definizione di limite}}{\boxed{l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon}}$$

CVD

Riguarda p. 23

TEOREMA: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = m \in \mathbb{R}$

Allora:
1) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = l \pm m$

2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = l \cdot m$

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$, $m \neq 0$

4) $\lim_{n\to\infty} (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot l$ $\alpha \in \mathbb{R}$

dim:
$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = l + m$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \ / \ \forall n \geq n_0, \ |a_n + b_n - (l+m)| < \varepsilon \iff$

$\iff |(a_n - l) + (b_n - m)| < \varepsilon$

Uso il fatto che:

$|(a_n \mp l) + (b_n - m)| = |a_n - l| + |b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

So che se fisso $\frac{\varepsilon}{2}$, $\exists n_0$ tale che $\forall n \geq n_0$ CVD

$|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2}$

OSS: Il teorema vale anche in casi più generali, ovvero se $l = \pm\infty$, $m = \pm\infty$, ammesso che le espressioni abbiano senso.

ES: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ $\Rightarrow \lim (a_n + b_n) = +\infty$

$\Rightarrow \lim (a_n \cdot b_n) = +\infty$

ma $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = ?$

$$\boxed{\text{Se } \lim_{n\to\infty} a_n = l, \ \lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \text{ allora } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0}$$

ES: $\lim_{n\to\infty} n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n \cdot n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^a = +\infty, \forall a > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0, \ \forall a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 4n + 5}{3n^3 + 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(1 + \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(3 + \frac{2}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\lim \left(1 + \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n^3}\right)}{\lim \left(3 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{\lim 1 + \lim \frac{4}{n^2} + \lim \frac{5}{n^3}}{\lim 3 + \lim \frac{2}{n}} = \frac{1+0+0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow \quad x-1 > \frac{3}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad x > \boxed{\frac{3}{\varepsilon}+1}$ Fissato ε, pongo $B = \frac{3}{\varepsilon}+1$ e, se $x > B \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$

ANALOGAMENTE:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\forall A > 0, \exists B > 0$ t.c. se $x > B \Rightarrow f(x) > A$

$\Leftrightarrow \forall I_A(+\infty), \exists I_B(+\infty)$ t.c. se $x \in I_B(+\infty) \Rightarrow f(x) \in I_A(+\infty)$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall A > 0, \exists B > 0$ t.c. $x > B \Rightarrow f(x) < -A$

Se $x \in I(+\infty)$, allora

$I_a(-\infty) = (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$ $f(x) \in I(-\infty)$

- Se f definita in un intorno di $-\infty$ diciamo che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

se $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0$ t.c. se $x < -B$, allora $|f(x) - l| < \varepsilon$

Analogo per $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

② LIMITI AL FINITO e CONTINUITÀ

* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ $\quad x_0 = \mathbb{R}$

$f(x)$ definita in un intorno di x_0 (può non essere definita in x_0)

* Posso rendere $f(x)$ arbitrariamente vicino ad l prendendo x sufficientemente vicino ad x_0 (ma $x \neq x_0$)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. se $\underbrace{0 < |x - x_0|}_{= x \neq x_0} < \delta$, allora $|f(x) - l| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall I_\varepsilon(l) \; \exists I_\delta(x_0)$ t.c. se $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$

ESEMPIO

$f(x) = 3x - 1$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 5 \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c. se $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow$
$|(3x-1) - 5| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |3x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$

Basta prendere $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ per ottenere la tesi.

$\Box$

Continuità

f definita in un intorno di x_0, f è $\boxed{\text{CONTINUA}}$ in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

① Questo limite esiste
② f è definita
③ i 2 valori sono =

OVVERO

1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$

2) f definita in x_0

3) $\lim = f(x_0)$

OVVERO: f continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ [se vale $\emptyset$ allora $f(0) - f(0) = 0$]

OVVERO: f continua in x_0. Se $\forall I_\varepsilon(f(x_0))$, $\exists I_\delta(x_0)$ t.c. se $x \in I_\delta(x_0)$
$\Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(f(x_0))$

Esempio:

$f(x) = 3x - 1$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ INOLTRE $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 5 = f(2)$

Quindi f è continua in $x_0 = 2$

Fisso $x_0 \in \mathbb{R}$. Provo che $f(x) = 3x - 1$ è continua in x_0

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$f(x_0) = 3x_0 - 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$|f(x) - f(x_0)| = |3x - 1 - (3x_0 - 1)| = |3x - 3x_0| = 3|x - x_0| < \varepsilon$

$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{3}$

Scelgo $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ e se $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Def: f CONTINUA in $I \subseteq \text{dom} f$ se f continua in ogni punto di I.

Quindi $f(x) = 3x - 1$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

TEOREMA: Le funzioni elementari (polinomi, sin ($\mathbb{R}$), cos ($\mathbb{R}$), tan ($x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$), cotg, esponenziali ($\mathbb{R}$) e le loro inverse) sono continue nel loro dominio.

Quindi per calcolare

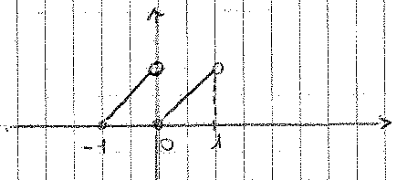
$$\lim_{x \to 2} f(x) = -3x + 1 + x^2$$

$f(x) = x^2 - 3x + 1$ continua $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = -1$

ES: $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0$, ma $f(0) = 2$ NON È CONTINUA

ES: $f(x) = M(x) \qquad x_0 = 0$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ t.c. se $0 < x - 0 < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$

Suppongo raggio < 1 e

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ x+1 & x \in [-1,0) \end{cases}$$

Quindi $|f(x)| = |x|$ se $0 < x < 1$
$|x| = x < \varepsilon$ Quindi la condizione $|f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow x < \varepsilon$ su ogni intorno destro di 0 di raggio < 1.

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$ Perché in ogni intorno $I_\delta^-(0)$ con $\delta < 1$, $f(x) = x + 1$

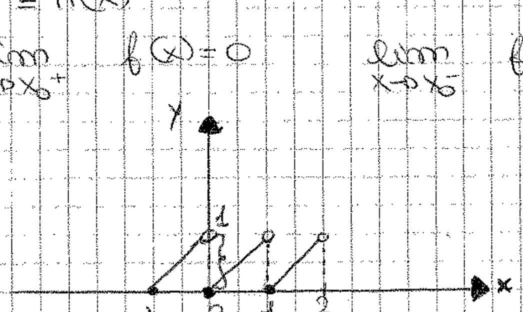
$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x + 1 = 1$

TEOREMA

f definita in un intorno di x_0 (tranne al più in x_0) ha limite l per $x \to x_0$ se e solo se ha limite destro e sinistro per $x \to x_0$ e questi coincidono.

Def: f definita in un intorno di x_0 (tranne al più in x_0) se
$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R} \qquad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R}$
ed $l \neq m$, diciamo che x_0 è un <u>PUNTO di DISCONTINUITÀ di 1^a SPECIE</u> (= SALTO)

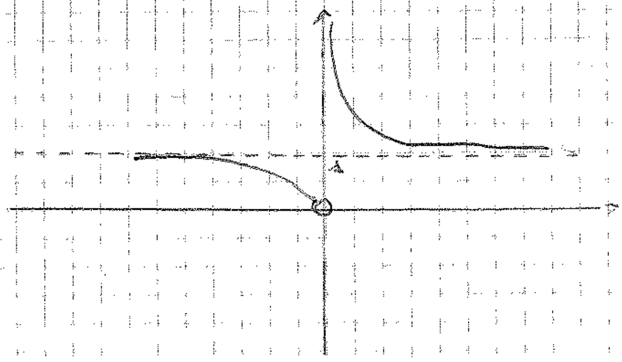
ES: $f(x) = M(x)$
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = 1$ c'è un salto in $x_0 = 0$ (~~[illegible]~~
(anzi $\forall x_0 \in \mathbb{Z}$)



$$\text{SALTO} = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

(Nella mantissa salto $= 0 - 1 = \boxed{-1}$)

2) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$



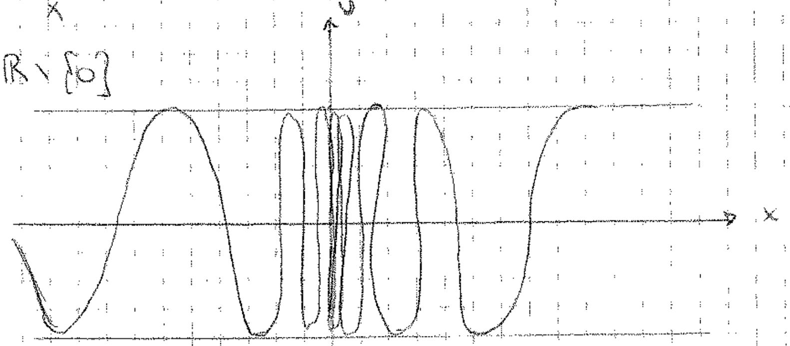
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

2ª specie

3) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ $\quad x \to 0$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$\nexists \lim_{x \to 0^+} f(x)$ $\quad \nexists \lim_{x \to 0^-} f(x)$ $\quad \boxed{\text{2ª SPECIE !!!}}$

<u>Def</u>: f definita in un intorno destro di x_0, dico che f è CONTINUA A DESTRA di x_0 se

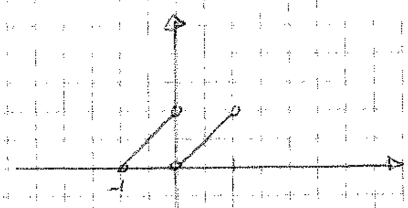
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$\left(\text{sinistra} \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)\right)$

<u>ES</u>:

$f(x) = M(x)$

$f(0) = 0$



$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{CONTINUA A DESTRA di 0, NON CONTINUA A SINISTRA.}$$

f CONTINUA in x_0 $\Leftrightarrow$ CONTINUA a dx e a sx

TEOREMA (LIMITI PER FUNZIONI MONOTONE)

f monotona e definita almeno sull'intorno dx $I^+(x_0) \setminus \{x_0\}$. Allora $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ($\in \mathbb{R}$, o ∞). Inoltre

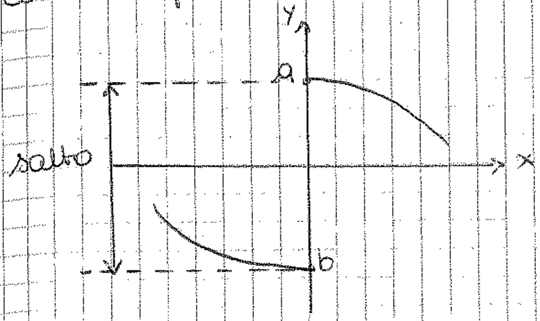
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} \inf \{ f(x) / x \in I^+(x_0) \setminus \{x_0\} \} & f \text{ CRESCENTE} \\ \sup & f \text{ decrescente} \end{cases}$$

$$A = \{ f(x) / x \in I^+(x_0) \setminus \{x_0\} \}$$

(La stessa cosa vale se al posto di x_0 ho $-\infty$)

D. 1^ SPECIE

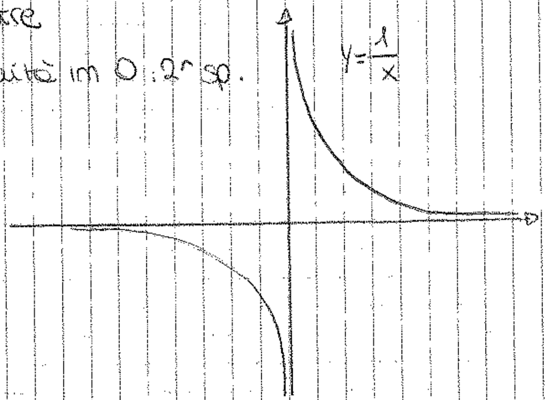
Esistono finiti e diversi limiti sinistro e destro.

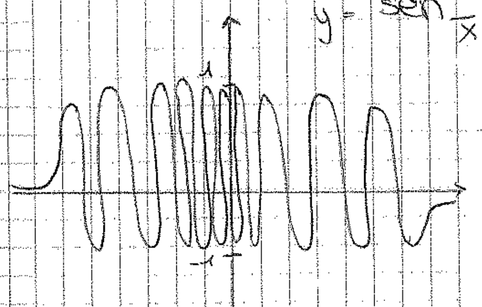


D. 2^ SPECIE

Tutte le altre

Discontinuità in 0 : 2^ sp.





Non so quanto vale per cui disc. di 2^ specie

Esempio:

$y = 3x + 2$ usando la definizione di limite.

In $x_0 = 1$ è continua?

$|f(x) - l| < \varepsilon \qquad |x - x_0| < \delta$

$|x - 1| < \delta$

$|3x + 2 - (3 \cdot (1) + 2)| < \varepsilon$

$|3x + \cancel{2} - 3 - \cancel{2}| < \varepsilon$

$|3x - 3| < \varepsilon$

$3|x - 1| < \varepsilon$

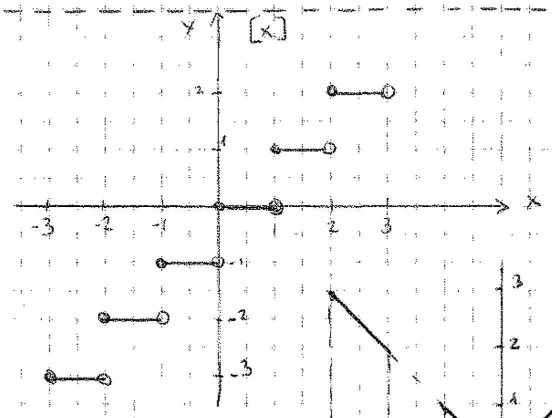
$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta_\varepsilon$

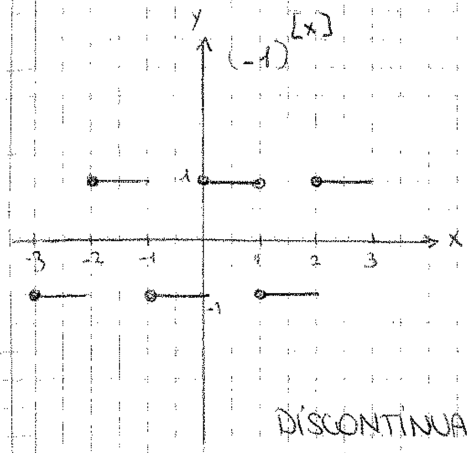
CASA

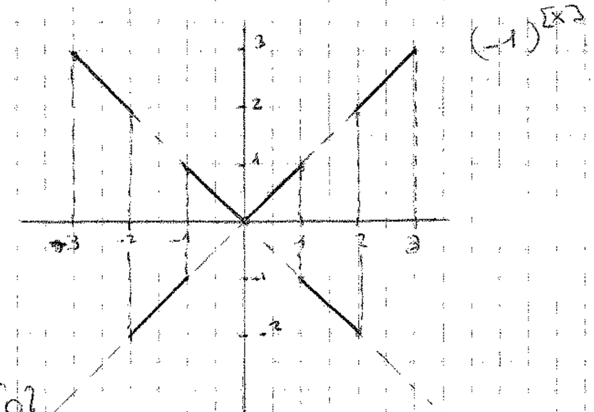
Dov'è discontinua

$f(x) = [\operatorname{arctg} x]$ Fai grafico

$f(x) = (-1)^{[x]} \cdot x$







DISCONTINUA in $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

FORME INDETERMINATE

- $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, ∞^0

- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 2x + 100}{-100x^3 + x^2 + 1}$ $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3\left(1 - \cancel{\frac{2}{x^2}}^{0} + \cancel{\frac{100}{x^3}}^{0}\right)}{x^3\left(-100 + \cancel{\frac{1}{x}}^{0} + \cancel{\frac{1}{x^3}}^{0}\right)} = \frac{1}{-100} = -\frac{1}{100}$$

- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^{10} - x^6 + 1}{4x^{10} - 1} = \frac{x^{10}\left(1 - \cancel{\frac{1}{x^4}}^{0} + \cancel{\frac{1}{x^{10}}}^{0}\right)}{x^{10}\left(4 - \cancel{\frac{1}{x^{10}}}^{0}\right)} = \frac{1}{4}$

- $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9}$ $\boxed{\frac{0}{0}}$

$$= \frac{(x+1)(x^2-x-2)}{(x+1)(x^3+x^2-9x-9)} = \frac{\cancel{(x+1)^2}(x-2)}{\cancel{(x+1)^2}(x-3)(x+3)} = +\frac{3}{8}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + 0x^2 - 3x - 2 & x+1 \\
-x^3 - x^2 & \overline{x^2 - x - 2} \\
\hline
// \quad -x^2 & \\
+x^2 + x & \\
\hline
// \quad -2x & \\
+2x + 2 & \\
\hline
// \quad // &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^2 - x - 2 & x+1 \\
 & \overline{x-2}
\end{array}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} = \frac{(x+1)\left[\sqrt{6x^2+3}-3x\right]}{\underbrace{6x^2+3-9x^2}_{-3(x+1)(x-1)}} = \frac{\cancel{(x+1)}\left[\sqrt{6x^2+3}-3x\right]}{-3\cancel{(x+1)}(x-1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{-3(x-1)} = \frac{3+3}{6} = 1$$

↘ sostituito con -1

Casa

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3+2} - \sqrt{x^3+2x^2+1} \qquad \left[-\frac{2}{3}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x} \qquad [3]$$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$t = \cos x$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n-4^n}{1+4^n} = \frac{\cancel{4^n}\left(\frac{3^n}{4^n}-1\right)}{\cancel{4^n}\left(\frac{1}{4^n}+1\right)} = \frac{\overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}^{0}-1}{\underbrace{\frac{1}{4^n}}_{0}+1} = -1$$

28/10/11

TEOREMA

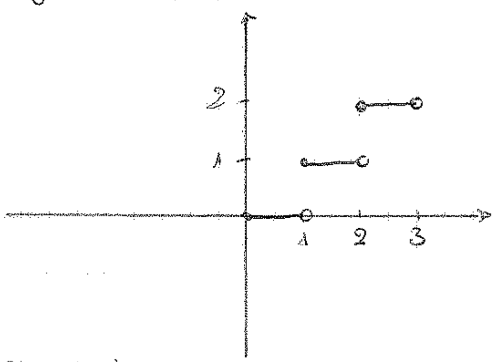
f definita e monotòna in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ allora esistono limiti destro e sinistro di f per $x \to x_0$ e

1) f CRESCENTE allora $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

2) f DECRESCENTE $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

Esempio:

$f(x) = [x]$ crescente su $\mathbb{R}$



In un intorno di $x_0 = 1$ valgono le ipotesi del teorema ed in effetti:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$, $f(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} \leq f(1) \leq \lim\limits_{x\to 1^+}$

COROLLARIO:

se f definita e monotona in un intorno x_0 allora o f continua in x_0 oppure c'è un salto.

Q1

Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -5$ allora

a) $\exists \varepsilon < 10^{-4} : |a_n+5| < \varepsilon \ \forall n > 2011$

b) $a_n < 0 \ \forall n > 10^{12}$

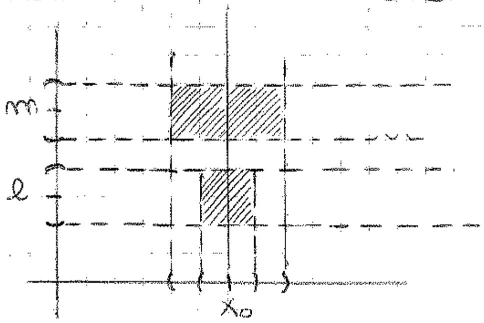
c) $\exists M > 0 : |a_n+5| < 10^{-2} \ \forall n > M$ ← è proprio la def. di limite ... $\forall \varepsilon > 10^{-2}$

d) $a_n = -5 \ \forall n \in \mathbb{N}$

e) ... Tutti ...

$I(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow$ ASSURDO.

CVD.



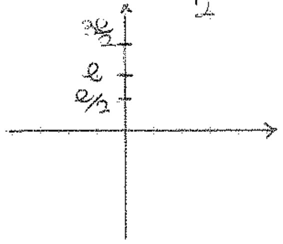
Ha senso dire IL limite di $f(x)$ per x tendente a c

TEOREMA (di PERMANENZA del SEGNO)

Se f ammette limite l $(\in \overline{\mathbb{R}})$ per $x \to c$ $(\in \mathbb{R})$ e se $l>0$ o $l=+\infty$, allora esiste un intorno di c, $I(c)$, tale che f è positiva in $I(c) \setminus \{c\}$.

dimostrazione: suppongo $l \in \mathbb{R}$, $l>0$

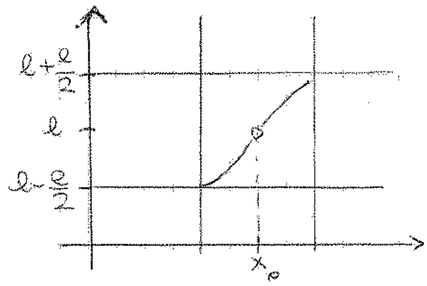
Fisso $\varepsilon = \frac{l}{2}$, allora



$\forall y \in I_\varepsilon(l)$ si ha $y>0$

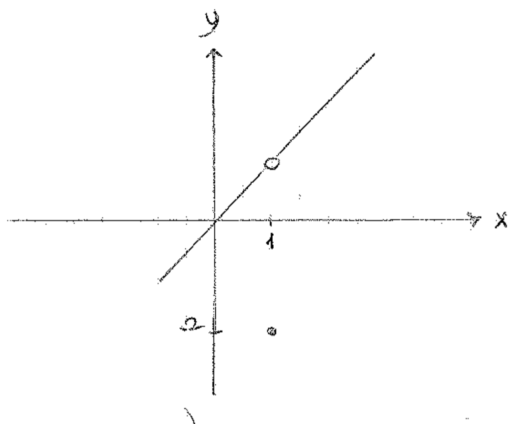
Dunque fissato $\varepsilon = \frac{l}{2}$

$\exists$ intorno $I(c)$ di c tale che se $x \in I(c) \setminus \{c\}$ allora $f(x) \in I_\varepsilon(l) \Rightarrow f(x)>0$. CVD



Esempio: $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ -2, & x = 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 > 0$



Però non esistono intorni $I(1)$ tali che $\forall x \in I(1)$ si abbia $f(x)>0$ (devo togliere il centro $x_0=1$)

$l+\varepsilon < g(x) < l+\varepsilon$ ovvero $\lim_{x\to c} g(x) = l$

CVD

Esempio: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{x}}_{f(x)} \leq \underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{g(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{h(x)} \quad \forall x > 0 \; [(0,+\infty)]$

ma $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

Funzione che tende a zero moltiplicata per una funzione infinita $\rightarrow$ il prodotto tende ancora a zero.

COROLLARIO

f limitata in un intorno di c, g tale che

$\lim_{x\to c} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = 0$

dim.: Ipotesi: $\exists\, I(c)$ ed $\exists M > 0$ (costante positiva) tale che $\forall x \in I(c)\setminus\{c\}$ si ha $|f(x)| < M$

$\Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < M|g(x)|$ [se $g(x)$ tende a $\emptyset$, allora anche $|g(x)|$ ten[de] a $\emptyset$

Inoltre $\lim_{x\to c} g(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to c} |g(x)| = 0$

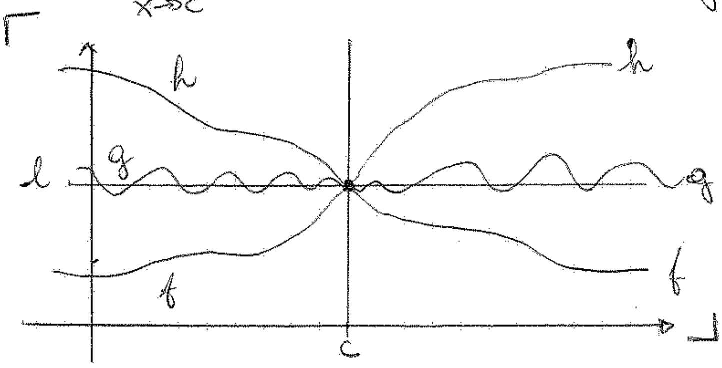
$\Rightarrow \lim_{x\to c} M\cdot|g(x)| = 0$ per il teorema del confronto

$\Rightarrow \lim_{x\to c} |f(x)\cdot g(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = 0$ CVD

$\boxed{\text{CASO B}}$ Se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ e se $\exists$ intorno $I(c)$ t.c. g definita su $I(c)\setminus\{c\}$ e si ha $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I(c)\setminus\{c\}$

Allora $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$

(La stessa cosa: $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ e $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \lim_{x\to c} g(x) = -\infty$)



CASO (A) *

ES: $f(x) = x^2 + 2\,\text{sen}(x^2) + 3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$

$\text{sen}(x^2) \geq -1, \; \forall x$

$2\,\text{sen}(x^2) \geq -2 \quad \forall x$

$2\,\text{sen}(x^2) + 3 \geq 1 \quad \forall x$

$\Rightarrow f(x) \geq x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Inoltre $\lim_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ALGEBRA dei LIMITI

- $+\infty + (+\infty) = +\infty$
- $+\infty + a = +\infty \quad , \forall a \in \mathbb{R}$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $-\infty - (+\infty) = -\infty$
- $+\infty \cdot a = \begin{cases} +\infty & , a > 0 \\ -\infty & , a < 0 \end{cases}$
- $-\infty \cdot a = \begin{cases} -\infty & , a > 0 \\ +\infty & , a < 0 \end{cases}$
- $\dfrac{+\infty}{a} = \begin{cases} +\infty & , a > 0 \\ -\infty & , a < 0 \end{cases}$
- $\dfrac{-\infty}{a} = \begin{cases} -\infty & , a > 0 \\ +\infty & , a < 0 \end{cases}$
- $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0 \quad , \forall a \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{a}{0} = \infty \quad (a \neq 0)$ Il segno dipende dal segno di a $\begin{bmatrix} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{bmatrix}$

NON DEFINITE

$+\infty - (+\infty), \quad +\infty + (-\infty), \quad \pm\infty \cdot 0, \quad \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \dfrac{0}{0}$

FORME INDETERMINATE di TIPO ALGEBRICO

TEOREMA

$\lim_{x \to c} f(x) = \ell \qquad \lim_{x \to c} g(x) = m \qquad \ell, m \in \overline{\mathbb{R}}$

allora:
1) $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m$
2) $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \ell \cdot m$
3) $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = \dfrac{\ell}{m} \qquad (g(x) \neq 0 \text{ in } I(c) \setminus \{c\})$

Tutto questo se l'espressione a secondo membro ha senso.

DIMOSTRAZIONE: $\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = \ell + m$

Th: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. se $x \in I_\delta(c) \setminus \{c\}$ allora

$[f(x) + g(x)] \in I_\varepsilon(\ell + m) \Leftrightarrow |f(x) + g(x) - (\ell + m)| < \varepsilon$

IPOTESI: $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists \delta_1 > 0$ t.c. se $x \in I_{\delta_1}(c) \setminus \{c\}$ allora $f(x) \in I_{\frac{\varepsilon}{2}}(\ell)$

$(\Leftrightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2})$

$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists \delta_2 > 0$ t.c. se $x \in I_{\delta_2}(c) \setminus \{c\}$ allora $f(x) \in I_{\frac{\varepsilon}{2}}(m) \Rightarrow$

$|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$

c) $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$ $\qquad g(x) = x$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (f - g) = +\infty - (+\infty) \qquad \lim_{x \to +\infty} \cancel{x} - \frac{1}{x^2} - \cancel{x} = 0$

d) $f(x) = \frac{x}{2} \qquad g(x) = x$

$\lim_{x \to +\infty} (f - g) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{2} - x \right) = -\infty$

e) $f(x) = x + \operatorname{sen} x \qquad g(x) = x$

$\lim_{x \to +\infty} (f - g) = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \quad \nexists$

Questo significa $\infty - \infty \Rightarrow$ ovvero può valere tanti risultati, per cui non sappiamo il risultato.

LIMITE NOTEVOLE

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \left(\text{forma indet. } \frac{0}{0} \right)$

DIMOSTRAZIONE $\quad f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è PARI $\left(f(-x) = f(x) \right.$. Quoziente tra 2 funz dispari = pari

perché $f(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{sen}(x)}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = f(x)$

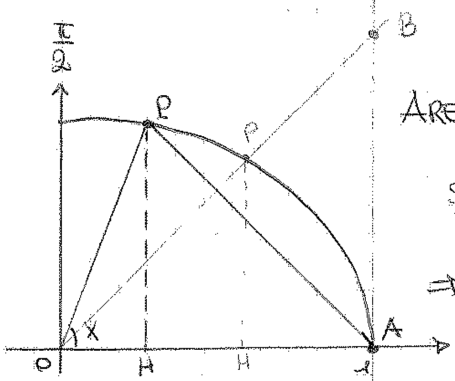
Quindi basta provare che $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (PROPRIETÀ SIMMETRIA)

Quindi considero solo $x > 0$

Osservo che $x \geq \operatorname{sen} x$, $\forall x > 0$ (viene dimostrato)

(se $x > \frac{\pi}{2}$, BANALE)

$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$



AREA $(\widehat{OPA}) \leq$ AREA $(\widehat{OPA})$

$\frac{\operatorname{sen} x}{2} \leq \frac{x}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x \leq x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$

AREA $\widehat{OAB} \geq$ AREA $\widehat{OPA} = \frac{x}{2}$

$\frac{tg x}{2}$

$\Rightarrow tg x \geq x \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \geq x \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \cos x \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ CONFRONTO

$\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} =}$

Il teorema vale anche nel caso in cui al posto di $f(x)$ ho una successione $\{a_n\}$, $a_n \to l$, cioè, se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ e $\lim_{y\to l} g(y) = m$

allora $\lim_{x\to\infty} g(a_n) = m$

Se ho due successioni a_n e b_n che tendono a l, ma i lim $\neq$, no comp.

Se $\exists \{a_n\} e \{b_n\}$ tali che $a_n \to l$ e $b_n \to l$, ma

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} g(b_n)$$

Allora $\nexists \lim_{y\to l} g(y)$

ES: $\nexists \lim_{x\to+\infty} \cos x$

Prendo $a_n = 2\pi n$, $b_n = 2\pi n + \pi$

$a_n \to +\infty$ $\quad b_n \to +\infty$

$g(a_n) = \cos(2\pi n) = +1 \quad \forall n$
$g(b_n) = \cos(2\pi + \pi) = -1 \quad \forall n$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to+\infty} g(a_n) = 1 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} g(b_n) = -1}$$

$$\nexists \lim_{x\to+\infty} g(y) = \cos y$$

ESERCITAZIONI del 3/11/11

• $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{x}$ $\qquad$ TEOREMA ⊛ $\lim_{x\to c} \frac{\operatorname{sen}(g(x))}{g(x)} = 1$

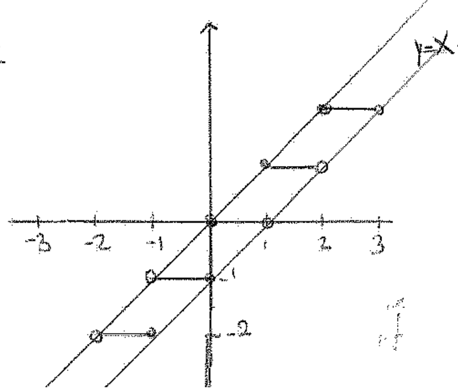
se $\lim_{x\to c} g(x) = 0$

$$= \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{x} =$$

$$= \underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}}_{1} = 1$$

• $\lim_{x\to\infty} \frac{[x]}{x}$

$x-1 < [x] \leq x$



PER RISOLVERE → TEOREMA DEI CONFRONTI

$$\underbrace{\frac{x-1}{x}}_{1} < \frac{[x]}{x} \leq \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \to 1$$

$$\frac{x\left(1-\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}\right)}{x} = 1$$

LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad (a>0)$$

$$\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\right)$$

• $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{5n} = \left(1+\frac{1}{4n}\right)^{5n\cdot\frac{4}{4}} = \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}}_{e}\right]^{\frac{5}{4}} = e^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{e^5} = e\sqrt[4]{e}$$

• $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+2}{2n+3}\right)^n = \frac{(4n+2)^n}{(2n+3)^n} = \frac{(4n)^n\cdot\left(1+\frac{2}{4n}\right)^n}{(2n)^n\cdot\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n} =$$

$$= \left(\frac{4}{2}\right)^n \xrightarrow{} +\infty \cdot \frac{\left(1+\frac{2/4}{n}\right)^n \to e^{\frac{2}{4}}}{\left(1+\frac{3/2}{n}\right)^n \to e^{\frac{3}{2}}} = +\infty$$

• $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+2}\right)^{\sqrt{n^2+2}} =$$

$$=\frac{n^2-n+1}{n^2+n+2} = \frac{n^2\overbrace{+n-n}^{0}-n\overbrace{+1-1}^{0}+1}{n^2+n+2} = \frac{n^2+n+2-2n-1}{n^2+n+2} = \frac{n^2+n+2}{n^2+n+2} -$$

$$-\frac{2n+1}{n^2+n+2} = 1-\frac{2n+1}{n^2+n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n+1}{n^2+n+2}\right)^{\sqrt{n^2+2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n^2+n+2}{2n+1}}\right)^{\sqrt{n^2+2}} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n^2+n+2}{2n+1}}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2n+1}\cdot\sqrt{n^2+2}\cdot\frac{2n+1}{n^2+n+2}} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1-\frac{1}{\frac{n^2+n+2}{2n+1}}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2n+1}}}_{e^{-1}}\right]^{\sqrt{n^2+2}\cdot\frac{2n+1}{n^2+n+2}\to 2} \quad (**)$$

$$(**)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2}\cdot\frac{2n+1}{n^2+n+2} =$$

$$= \boxed{n}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\cdot\frac{n\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = 2$$

$\square = |n|\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}$

Quando ho una successione non c'è bisogno del valore assoluto, $n\in\mathbb{N}$

$$= (e^{-1})^2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$