NUMERO: 686

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Iannizzi

MATERIA: Fisica I + Esercizi
Prof. Penna

INTRODUZIONE ALL'ANALISI STATISTICA DEI DATI 6/03/12

Distribuzione gaussiana

Distribuzione di probabilità gaussiana è la distribuzione più comune tra quelle possibili in statistica.

Cerca di mettere ordine nella grande quantità di dati sperimentali. Se noi effettuiamo la stessa misura nelle stesse condizioni avremo dati leggermente differenti.

È nascosto un ATTRATTORE → valore centrale intorno al quale tutti i dati si annidano.

DESCRIZIONE della DISTRIBUZIONE delle MISURE RILEVATE

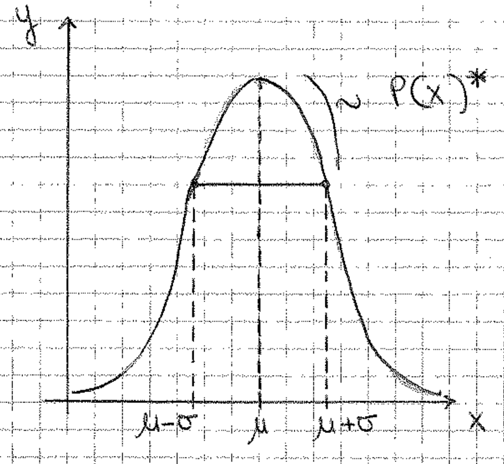
Misure con carattere casuale!

$$P(x;\mu;\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

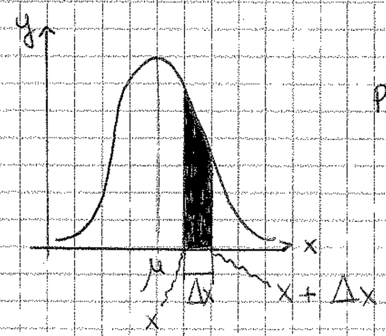
dove σ = deviazione standard / scarto quadratico medio / deviazione quadratica media [= misura della dispersione statistica]

μ = valore medio

σ^2 = varianza



* Significato



$P(x) \cdot \Delta x$ = area soprastante Δx

↓

in realtà (≅)

Densità di probabilità

Teorema del valor medio dell'integrale

↓

media integrale

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

In un esperimento si può misurare un osservabile direttamente o indirettamente

MISURA DIRETTA

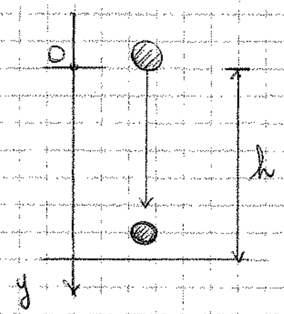
1. Altezza media degli studenti in aula
2. 1000 misure di lunghezza (es. del tavolo)
3. Misura del periodo di un pendolo

MISURA INDIRETTA

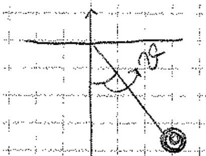
1. Misura della gravità (g)

$$y(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

$$g = \frac{2h}{t}$$ h e t sono misurate



2. Pendolo $I\phi'' + mlg\,\phi = 0$



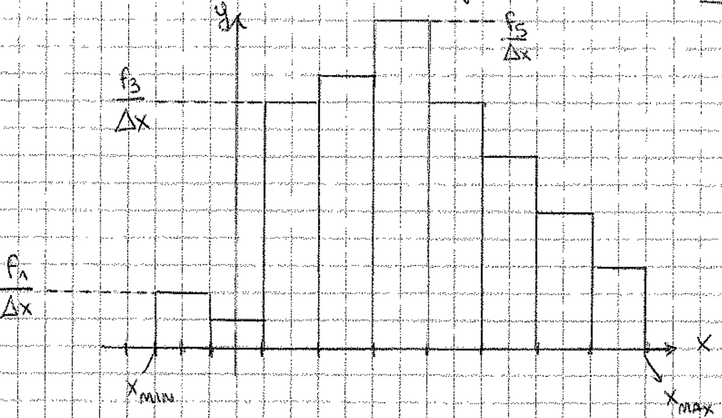
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$ Misuro la T per avere g.

ORGANIZZAZIONE dei DATI

Dalle misure ottengo: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ x = misure diverse oppure alcune saranno uguali

ISTOGRAMMA

Fisso n = numero delle CLASSI e fisso $\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{n}$



Definisco le FREQUENZE SPERIMENTALI

$$f_1 = \frac{N_1}{N}$$

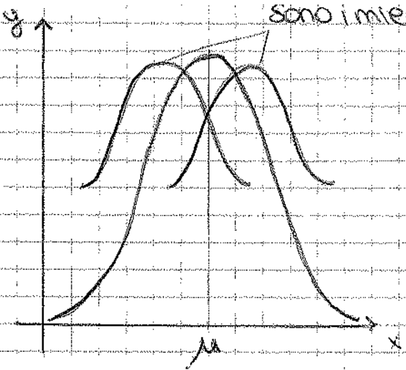
N = n° delle misure

$$f_2 = \frac{N_2}{N} \dots$$

$$f_k = \frac{N_k}{N} \dots$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 222

Sono i miei tentativi che si centrano sulla vera gaussiana.



• Che errore commetto sulla valutazione del valor medio sperimentale con $\bar{x}$?
$\downarrow$ μ

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_j = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x \quad \text{(Taylor)}$$

$$f(x_1, x_2) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) = f(x_1, x_2) + \frac{\delta f}{\delta x_1} \Delta x_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \Delta x_2$$

$\downarrow$ Taylor generalizzato a due variabili

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_m + \Delta x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_N) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta f}{\delta x_i} \Delta x_i$$

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_N + \Delta x_N) - f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta f}{\delta x_i} \Delta x_i$$

$$(\Delta f)^2 = \left(\sum_i \left(\frac{\delta f}{\delta x_i} \Delta x_i\right)\right) \cdot \left(\sum_j \frac{\delta f}{\delta x_j} \Delta x_j\right) =$$

stima dell'errore

$$= \sum_i \frac{\delta f}{\delta x_i} \Delta x_i \left[\frac{\delta f}{\delta x_i} \Delta x_i + \sum_{j \neq i} \frac{\delta f}{\delta x_j} \Delta x_j \right] =$$

$\frac{\delta f}{\delta x_j} = \frac{1}{N}$ perchè se derivo $\frac{x_1, x_2, \dots, x_N}{N}$ rispetto a x_1 o a x_2 ... o a x_N, ottengo sempre 1

??

$$= \sum_i \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2 =$$

$$= \sum_i \left(\frac{1}{N}\right)^2 (\Delta x_i)^2 =$$

$$\sum_j \Delta x_j \simeq \sum_{j \neq i} \Delta x_j = 0$$

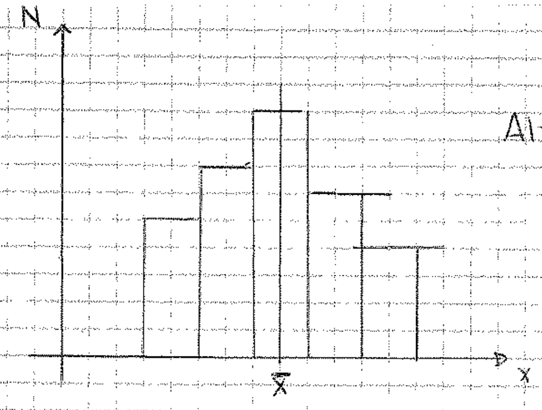
$$= \frac{1}{N^2} \sum_i (\Delta x_i)^2 =$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

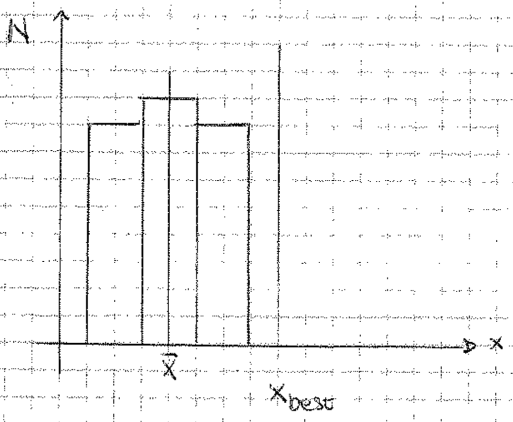
$$(\Delta f)^2 = \frac{1}{N^2} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow \boxed{\Delta f = \Delta \bar{x} = \frac{1}{N} \underbrace{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}}_{S}}$$

$\Delta f = \Delta \bar{x}$

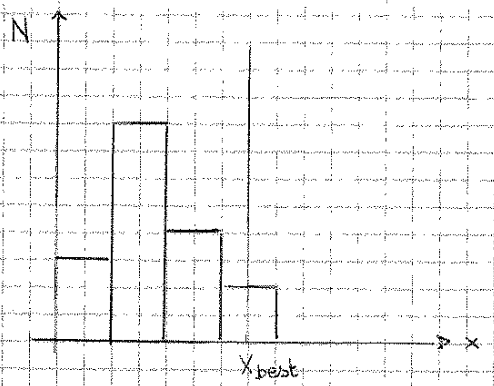
$$\Delta \bar{x} = \frac{S}{\sqrt{N}}$$



Alto accuratezza e bassa precisione

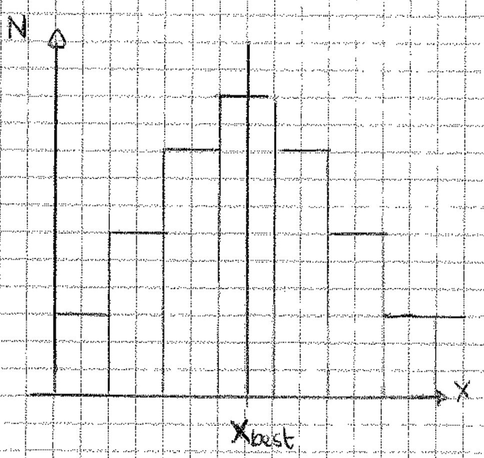


Alta precisione e bassa accuratezza

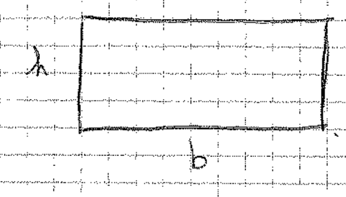


Né precisione né accuratezza

Situazione migliore!



Ma se noi vogliamo calcolare, ad es., l'area di un rettangolo, questo è MISURA INDIRETTA, perchè per essere ottenuto va fatta con passi successivi.



$b = 5,1\,cm \pm 0,1\,cm$

Quindi, l'incertezza sull'area??

$\Downarrow$

PROPAGAZIONE DELL'INCERTEZZA

$x = x_m \pm \Delta x$

↳ errore assoluto (per 1 o poche misure $= \frac{x_{max} - x_{max}}{2}$ o devia. standard per molte misure $\Delta\bar{x}$)

$q = f(x)$ FUNZIONE AD 1 VARIABILE. Quindi dovremmo calcolare le Δq.

Δq si calcola con lo sviluppo di Taylor

$f(x)$ la vogliamo approssimare con un polinomio attorno ad un punto x_0

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} (x - x_0) + \left.\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right|_{x=0} (x-x_0)^2 + o((x-x_0))$$

Per 2 variabili:

$$f(x,y) \cong f(x_0,y_0) + \left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_{P_0} \Delta x + \left.\frac{\delta f}{\delta y}\right|_{P_0} \Delta y + \left.\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}\right|_{P_0} \Delta x \Delta y + \left.\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right|_{P_0} (\Delta x)^2 + \left.\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\right|_{P_0} (\Delta y)^2$$

$P_0 = (x_0, y_0)$

(II ordine)

derivata totale xkè solo 1 variabile

Quindi $\Delta q = \left| \left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_{x=x_m} \right| \Delta x \Rightarrow q = \bar{q} \pm \Delta q$

valore assoluto perchè Δq deve essere positivo

incertezza sulla grandezza iniziale

$$= \left| \left(\frac{\delta q}{\delta x}\right)_{x=x_0} \right| \cdot \Delta x$$

Se $q = f(x,y,z)$ funz. a più variabili

$$\Delta q = \left|\frac{\delta f}{\delta x}\right| \Delta x + \left|\frac{\delta f}{\delta y}\right| \Delta y + \left|\frac{\delta f}{\delta z}\right| \Delta z$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ sono definiti positivi

ESEMPI:

- Somma (o differenza di grandezze) di grandezze

$$q = f(x,y,z) = \pm x \pm y \pm z$$

$$\left|\frac{\delta f}{\delta x}\right| = |\pm 1| = 1, \quad \left|\frac{\delta f}{\delta y}\right| = |\pm 1| = 1, \quad \left|\frac{\delta f}{\delta z}\right| = |\pm 1| = 1$$

$$\Delta q = 1 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y + 1 \cdot \Delta z = \Delta x + \Delta y + \Delta z$$

$$\frac{\Delta g}{g} = 0{,}201 = 20{,}1\ \%$$

Errore assoluto abb grande → vogliamo migliorare le misurazione. Quindi facciamo n misure dell'oscillazione

$n = 10$

$t' = 10\,T$ non necessariamente → $t' = 20{,}1\ s$

$\Delta t = \Delta T$ → risoluzione dello strumento

$$T' = \frac{t}{n} = 20{,}1\ s$$

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{(T')^2} = 4\pi^2 \frac{L}{\left(\frac{t}{n}\right)^2}$$

$$\Delta g = g\,\frac{\Delta L}{L} + 2g\,\frac{\Delta t}{t} \qquad \Delta g = \underbrace{\left|\frac{\delta g}{\delta L}\right|}_{\frac{4\pi^2}{\left(\frac{t}{n}\right)^2}} \Delta L + \underbrace{\left|\frac{\delta g}{\delta T'}\right|}_{2\cdot\frac{4\pi^2}{1}\frac{L}{(t/n)^3}} \Delta T' \quad \frac{\Delta t}{n}$$

$$\Delta g = 9{,}77\left(\cancel{10^{-3}} + 2\cdot\frac{0{,}25}{20{,}15}\right) = 9{,}77\cdot 0{,}02 =$$

$$= 0{,}20$$

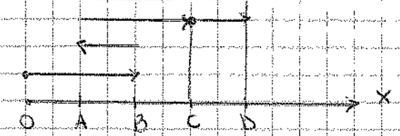
$$\frac{\Delta g}{g} = 0{,}02 = 2\%$$

9/03/12

CINEMATICA

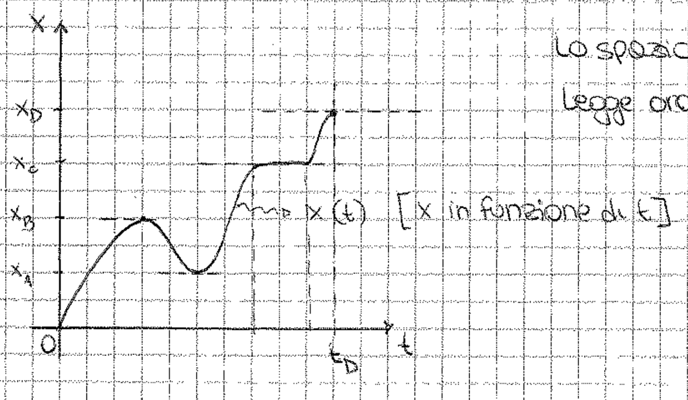
È preparatoria alla dinamica.

LEGGE ORARIA (una dimensione)

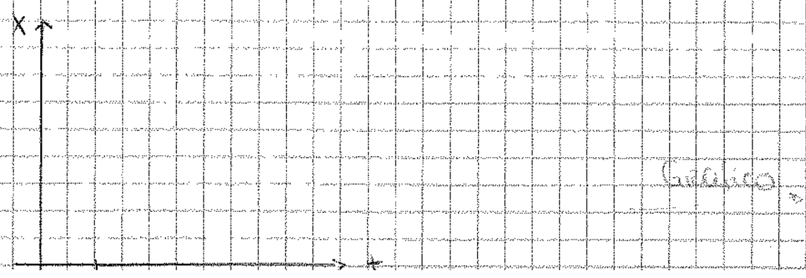


Lo spazio varia in funzione del tempo.

Legge oraria è una funzione del tempo.



VELOCITÀ MEDIA (v_m)



esempio

$v(t) = \text{costante} = v$

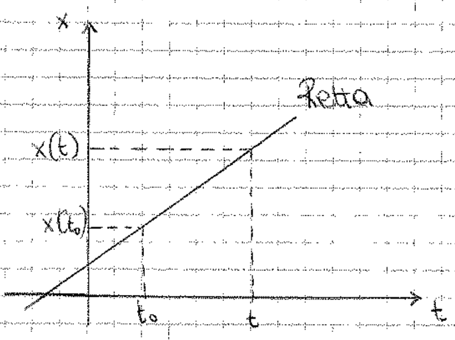
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + v \int_{t_0}^{t} 1\,ds$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x(t_0) + v\,(t - t_0)}$$

⚠ Non è v funzione di $(t-t_0)$, ma è una moltiplicazione

MOTO UNIFORME



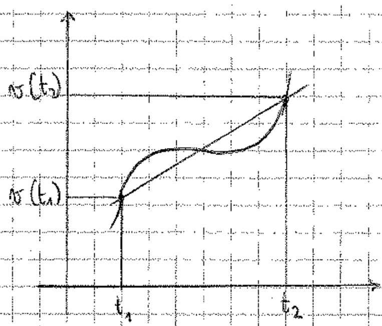
Il moto uniforme è quel moto in cui in ogni istante la velocità istant. coincide con la veloc. media

Il movimento di un punto materiale che si sposta lungo una retta con velocità costante è detto moto uniforme

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = v$$

ACCELERAZIONE MEDIA

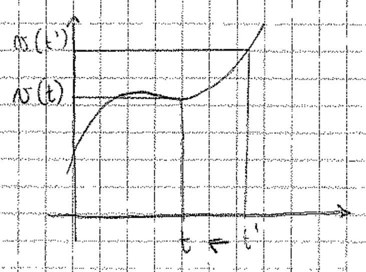
$$a_m = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$



ACCELERAZIONE ISTANTANEA

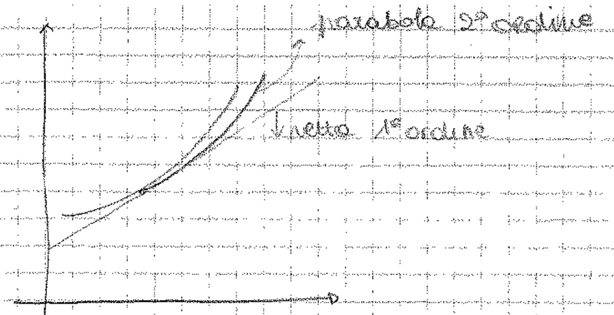
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\lim_{t' \to t} \frac{v(t') - v(t)}{t' - t}$$

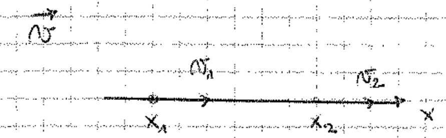


• Se conosco l'accel. istant posso ricavare $v(t)$?

$$\frac{dv}{dt} = a(t) \rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dv}{ds}\,ds = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$



• APPLICAZIONE: Relazione tra spazio percorso e velocità nel moto uniformemente accel.



$$v(t) = v_0 + at$$

$$v_0 = v(t_0)$$

$$v_0 = v(t_0) \quad t_0 = 0$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

$$t_0 = t_1 : \quad v_1 = v(t_1) = v_0 \quad ; \quad x_1 = x(t_1) = x_0$$

$$t_2 : \quad v_2 = v(t_2) \quad ; \quad x_2 = x(t_2)$$

$$v_2 = v(t_2) = v_0 + at_2 = v_1 + at_2$$

$$x_2 = x(t_2) = x_1 + v_1 t_2 + \frac{a}{2}(t_2 - \cancel{t_1})^2 \quad (t_1 = 0)$$

$$= x_1 + v_1 t_2 + \frac{a}{2} t_2^2$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = v_1 t_2 + \frac{a}{2} t_2^2 \\ v_2 - v_1 = at_2 \rightarrow t_2 = \frac{v_2 - v_1}{a} \end{cases}$$

Relazione tra spazio percorso e velocità

$$x_2 - x_1 = v_1 \frac{(v_2 - v_1)}{a} + \frac{a}{2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{a^2}$$

$$= \frac{2(v_1 v_2 - v_1^2) + v_2^2 + v_1^2 - 2 v_1 v_2}{2a} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$$

$$\boxed{a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(x_2 - x_1)}}$$

Come si misura? SISTEMA INTERNAZIONALE

lunghezza	x	metri	m
tempo	t	secondi	s
velocità	v	metri al secondo	m/s
accelerazione	a	metri al secondo²	m/s^2

In un moto vario $\rightarrow$ $x(t') = x(t) + v(t)(t'-t) + \frac{1}{2} a(t)(t'-t)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} \frac{d^n x}{dt^n}(t'-t)^n + \ldots$

- Quale equaz. differenziale caratterizza il moto smorzato?

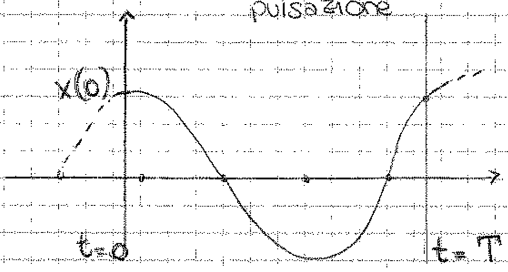
$$a = \frac{dv}{dt} = -k v_0 e^{-kt} = -k v(t)$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + kv = 0} \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} = 0}$$

MOTO ARMONICO (semplice)

$$x(t) = A \sin(\underbrace{\omega}_{\text{pulsazione}} t + \varphi)$$



$$x(0) = A \sin\varphi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(T) = A\sin(\omega T + \varphi) = A\sin(2\pi + \varphi) = A\sin(\varphi) = x(0)$$

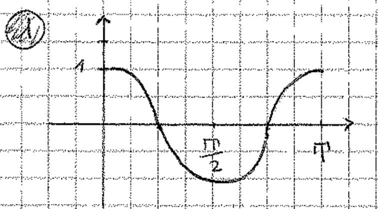
Esempio 1:

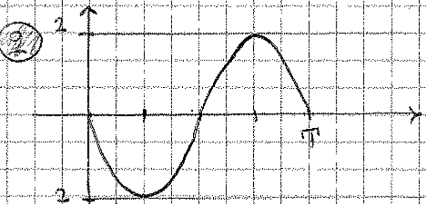
$A = 1 \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$

$$x(t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \sin(\omega t)\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\cos(\omega t) = \cos(\omega t)$$

Esempio 2:

$A = 2 \quad \varphi = \pi \rightarrow x(t) = 2\sin(\omega t + \pi)$
$$= -2\sin(\omega t)$$

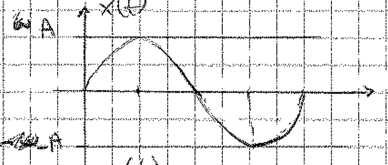


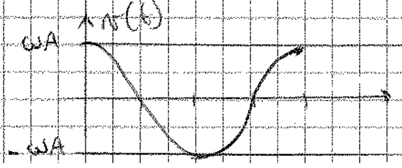


1 $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ $\quad \varphi = 0$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$ 2

$$= \omega A\cos(\omega t + \varphi)$$ derivata dello spazio



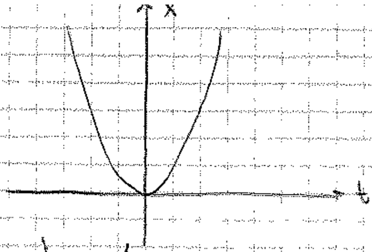


$\varphi = 0$

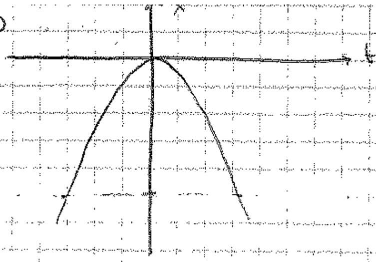
$v = A\omega\cos(\omega t)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 222

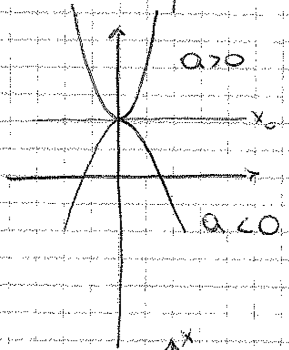
$v_0 = 0$
$a > 0$
$x_0 = 0$



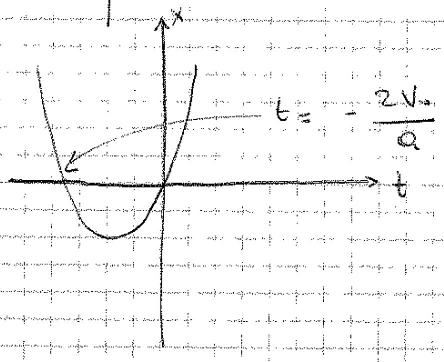
$a < 0$



$x_0 \neq 0$
$a \gtrless 0$



$x_0 = 0$
$v_0 > 0$
$x = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 =$
$t \left(v_0 + \frac{a}{2} t \right)$

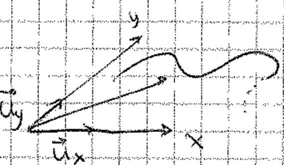


MANCA ULTIMO GRAFICO

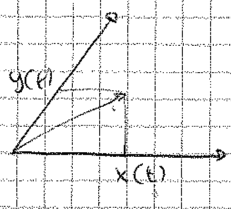
MOTO PLANARE

13/03/12

Vettore posizione

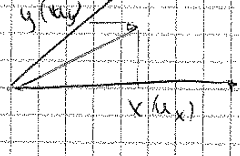


$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y$$



$(u_x)^2 = u_x \cdot u_x = 1$

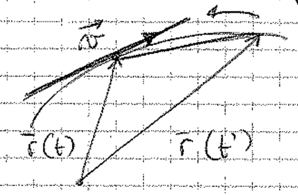
$u_y^2 = 1$



$$\vec{v}(t) = \hat{u}_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} + u_z \frac{dz}{dt}$$

$$= \hat{u}_x v_x(t) + \hat{u}_y v_y(t) + \hat{u}_z v_z(t)$$

Il vettore velocità rispetto alla curva sarà tangente.



$t' \to t$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}(t)$$

• Se conosco $\bar{v}(t)$ posso ricavare $\vec{r}(t)$?

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\bar{r}}{ds} ds = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(s)\, ds$$

$$\left[\bar{r}(s)\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \bar{v}(s)\, ds$$

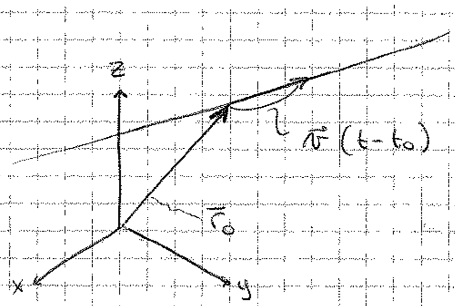
$$\boxed{\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \bar{v}(s)\, ds}$$

MOTO UNIFORME

$$\vec{v}(t) = v = cost \quad \forall t$$

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \bar{v} \int_{t_0}^{t} 1\, ds$$

$$\bar{r}(t) = \underbrace{\bar{r}(t_0)}_{\bar{r}_0} + \vec{v}(t - t_0)$$



Grazie a questo → il moto unif. è quel moto x cui la velocità media Vistante è uguale alla velocità istantanea.

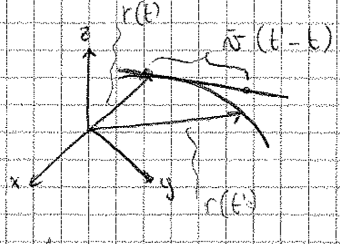
$$\frac{\bar{r}(t) - \bar{r}_0}{t - t_0} = \vec{v}$$

Taylor

$$\vec{r}(t') = \vec{r}(t) + \frac{d\bar{r}}{dt}(t' - t)$$

$t' > t$

$$= \vec{r}(t) + \vec{v}(t)(t' - t)$$



Va vicino al punto che io voglio trovare

ACCELERAZIONE MEDIA

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

ACCELERAZIONE ISTANTANEA

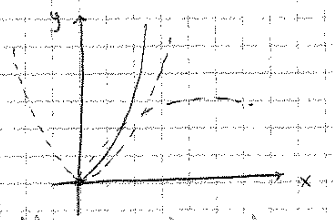
$$\vec{a}(t) = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y + v_z \hat{u}_z\right) =$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{dv_y}{dt} u_y + \frac{dv_z}{dt} u_z =$$

$$= a_x(t)\,\hat{u}_x + a_y(t)\,\hat{u}_y + a_z(t)\, u_z$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_{0x}} \\ y = v_{0y} \dfrac{x}{v_{0x}} + \dfrac{a_y}{2} \dfrac{x^2}{v_{0x}^2} \end{cases}$$

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x + \frac{a_y x^2}{2 v_{0x}^2}$$ EQ. di una PARABOLA passante per l'origine



⇒ È sempre una parabola? NO perchè può essere:

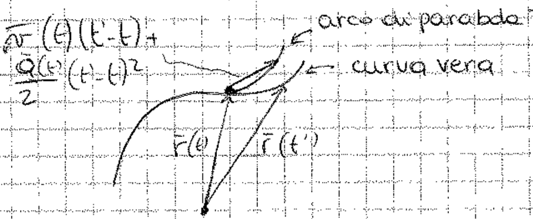
- ACCELERAZIONE NULLA
- ACCELERAZIONE e VELOCITÀ (COME VETTORI) SONO // ⇒ MOTO RETTILINEO UNIFORM. ACCELER.

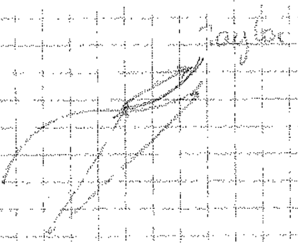
Formula di Taylor

$$\bar{r}(t') = \vec{r}(t) + \frac{d\bar{r}}{dt}(t'-t) + \frac{1}{2}\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}(t'-t)^2 + \dots$$

$t' > t$

$$\bar{r}(t') \cong \bar{r}(t) + \bar{v}(t)(t'-t) + \frac{\bar{a}(t)}{2}(t'-t)^2$$



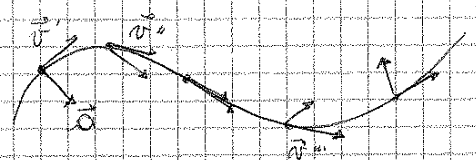


La formula di Taylor permette di approssimare una curva in ogni punto con una parabola.

ACCELERAZIONE 13/03/12

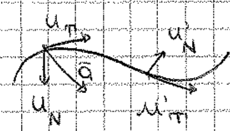
↳ normale e tangenziale

In un moto VARIO (moto generico)



Della velocità posso rappresentarla correttamente.
L'accelerazione no.

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$



Il vettore generico $\vec{a}$ può essere decomposto in una parte che è tangenziale e una normale alla parte tangenziale.

Quindi

$$= a_N \hat{u}_N + a_T \hat{u}_T$$

$$\left[\vec{F} \rightarrow u_F = \frac{\bar{F}}{|\bar{F}|}, \quad \vec{F} = \pm |\vec{F}|\, \hat{u}_F \right]$$

versore associato a F

Obiettivo: trovare a_N e a_T come esplicite. →

$$\frac{\Delta \hat{u}}{|\Delta \hat{u}|} = \text{VERSORE TANGENTE} = \hat{u}_\perp$$

$$\frac{|\Delta \hat{u}|}{\Delta t} = \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{DERIVATA ANGOLARE}$$

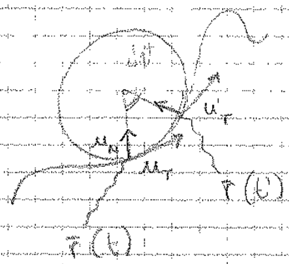
simbolo del prodotto vettoriale

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \hat{u}_\perp \frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta}\, \hat{u}_z \wedge \hat{u}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\, \hat{u}_T)$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v \frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v \frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_N$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{dS}{dt}\cdot\frac{1}{R}$$



$$\Delta\vartheta = \frac{\Delta S}{R}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v}{R}\frac{dS}{dt}\hat{u}_N$$

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

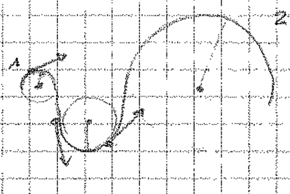
$$a_N = \frac{v^2}{R} \qquad \text{CVD}$$

Non ho usato un riferimento cartesiano, ma grandezze intrinseche. No descrizioni esplicite. Vale x qualunque tipo di curva.

APPLICAZIONI

- Moto uniforme

$$v = |v| = cost$$



$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{(essendo la velocita' costante)}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} \qquad a_{N_1} = \frac{v^2}{R_1} > a_{N_2} = \frac{v^2}{R_2}$$

$$\vec{a} \equiv \vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\hat{u}_N \neq 0$$

- Moto rettilineo

Circonferenza con raggio ∞.

$$\vec{a} = a_T\hat{u}_T + a_N\hat{u}_N \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} \to \text{questo tende a zero} \qquad R \to \infty$$

ESERCITAZIONI del 15/03/12

- Analisi delle incertezze:

- Misura diretta di 1 grandezza singola:

$x = x_{best} \pm \Delta x$ valore centrale o valore misurato

$x_{best} = x$ (valore letto)

Δx = risoluzione dello strumento

- Poche misure <20 $\quad x_{best} = \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{N}$

$$\Delta x = \frac{\max\{x_i\} - \min\{x_i\}}{2}$$

- Molte: $x_{best} = \bar{x}$

$$\Delta x = \sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

- Propagazione delle incertezze: misure indirette

$q = f(x, y, \dots)$

- Singole poche $\quad \Delta q = \left|\frac{\delta q}{\delta x}\right| \Delta x + \left|\frac{\delta q}{\delta y}\right| \Delta y + \dots$

- Molte $\quad \Delta q = \sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 \Delta \bar{x} + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2 \Delta \bar{y} + \dots}$

Esempio:

Prodotto di potenze (relazione monomia)

$q = f(x, y, z) = x^a y^b z^c$ [MONOMIO]

$$\frac{\partial f}{\delta x} = a x^{a-1} y^b z^c = \frac{a}{x} q$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}, \quad \frac{\delta f}{\delta z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta q}{q} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \bar{x}}{x}\right)^2 a^2 + \left(\frac{\Delta \bar{y}}{y}\right)^2 b^2 + \left(\frac{\Delta \bar{z}}{z}\right)^2 c^2}$$

FISICA

Studia i fenomeni naturali

↳ F. MODERNA: atomi, costituenti atomi, ...

↳ F. CLASSICA: studio oggetti macroscopici

  ↳ RELATIVISTICA: oggetti che hanno $v \simeq c$ (veloc. luce)

  ↳ NON RELATIVISTICA: oggetti che hanno velocità "quotidiane"

    ↳ MECCANICA \ TERMODINAMICA → meccanica

    ↳ ELETTROMAGNETISMO, ONDE

      ↳ CINEMATICA: descrizione geometrica dell'evoluz. nel tempo degli oggetti in moto

→

secondo tratto

$$\begin{cases} x(t) = s + v_1 (t - t_1) + \frac{1}{2} \overset{-\frac{1}{2}|a_2|}{a_2} (t - t_1)^2 \\ v(t) = v_1 - |a_2| (t - t_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t_2) = d = s + v_1 (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} |a_2| (t_2 - t_1)^2 \\ 0 = v(t_2) = v_1 - |a_2| (t_2 - t_1) \end{cases}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{v_1}{|a_2|}$$

$$d = s + v_1 \left(\frac{v_1}{|a_2|} \right) - \frac{1}{2} |a_2| \cdot \left(\frac{v_1}{|a_2|} \right)^2$$

$$d = s + \frac{v_1^2}{|a_2|} - \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{|a_2|} = s + \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{|a_2|}$$

$$\Downarrow$$

prendiamo "s" del I tratto e sostituiamo

$$d = \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{a_1} + \frac{v_1^2}{|a_2|} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_1^2}{|a_2|} = \frac{1}{2} \frac{v_1^2 |a_2| + v_1^2 a_1}{a_1 |a_2|} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{v_1^2 (|a_2| + a_1)}{a_1 |a_2|} = d$$

Con questa formula possiamo ricavare v_1 e poi t_2

$$v_1 = \sqrt{\frac{2d \cdot a_1 |a_2|}{a_1 + |a_2|}} \qquad t_2 = t_1 + \frac{v_1}{|a_2|} = \frac{v_1}{a_1} + \frac{v_1}{|a_2|} = v_1 \frac{|a_2| + a_1}{a_1 |a_2|}$$

$$\boxed{t_2} = \frac{\sqrt{2d}\ \cancel{\sqrt{|a_2| a_1}}}{\cancel{\sqrt{|a_2| + a_1}}} \cdot \frac{(|a_2| + a_1)^{\frac{1}{2}}}{(a_1 \cdot |a_2|)^{\frac{1}{2}}} = \boxed{\sqrt{2d \cdot \frac{|a_2| + a_1}{|a_2| a_1}}}$$

ora mettiamo i dati

$$t_2 = \sqrt{2 \cdot 10^3 \frac{3{,}8 + 2{,}5}{(3{,}8 \cdot 2{,}5)}}\ s = 36{,}4\ s$$

$$\frac{m (m s^{-2} + m s^{-2})}{m^2 \cdot s^{-4}} = \frac{m^2 s^{-2} + m^2 s^{-2}}{m^2 \cdot s^{-4}} = \sqrt{\frac{m^2 s^{-2}}{m^2 \cdot s^{-4}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{s^2}}} = \sqrt{1 \cdot s^2} = \sqrt{s^2} = s$$

ESERCIZIO 1.5

Un punto parte all'istante $t = 0$ con velocità v_0 dall'origine lungo il verso positivo dell'asse x ed è soggetto ad accelerazione cost $-a$. Un secondo punto parte con veloc iniziale nulla all'istante $t = 0$ dalla posizione $x = x_0 > 0$ e accelera uniform. con accelerazione a. Determinare se il 1° raggiunge il 2°.

Studiare il caso numerico:

$a = 2\ m s^{-2}$

$v_0 = 6\ m/s$

$x_0 = 4{,}5\ m$

Moto armonico $\rightarrow$ $x(t) = \underset{\text{ampiezza}}{A} \sin \overbrace{(\underset{\text{pulsazione}}{\omega} t + \varphi)}^{\text{fase del moto}}$ fase iniziale

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0}$$

Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ Frequenza $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

Un punto che si muove di moto armonico con periodo $T = 4,4\,s$ si trova al tempo $t=0$ nella posizione $x(t) = 0,28\,m$ con velocità $v = -2,5\,ms^{-1}$. Scrivere l'eq. del moto e calcolare i valori max della velocità e dell'accel.

$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \\ x(0) = A \sin\varphi \end{cases}$$ Condizioni iniziali

$v(0) = \omega A \cos\varphi$

$$\omega \cdot \frac{x(0)}{v(0)} = \frac{A \sin\varphi}{\omega A \cos\varphi} \cdot \omega$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega\, x(0)}{v(0)}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{x(0)}{v(0)} = \frac{2 \cdot 3,14}{4,4\,s} \cdot \left(-\frac{0,28}{2,5}\right) = -0,16$$

$\varphi = \operatorname{arctg}\varphi = \operatorname{arctg}(-0,16) = -0,16$

$\varphi = -0,16 + \pi = 2,98$

$\operatorname{tg}(\varphi') = \operatorname{tg}(\varphi' + \pi) = -0,1599$

$\varphi' = \varphi$

$\varphi = 2,98$

$= -0,1599$

$\cancel{x^2(t) = A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}$ $\begin{cases} x^2(0) = A^2 \sin^2\varphi \\ v^2(0) = \omega^2 A^2 \cos^2\varphi \end{cases}$

$x(0) > 0$

$x(0) = A \sin\varphi > 0$

$\sin\varphi > 0$

$\varphi > 0$

$$x^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2} = A^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

$$A = \sqrt{x^2(0) + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 1,77\,m$$

$$x(t) = 1,77 \cdot \sin(1,43t + 2,98)$$

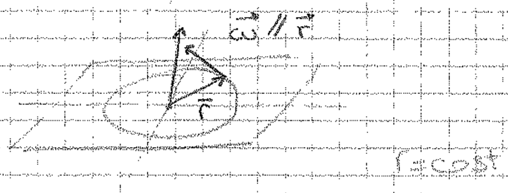
$$v_{max} = \omega A = 2,53\,m/s$$

$$|a_{max}| = \omega^2 A = 3,62\,m/s^2$$

Moto circolare

$$\vec{v} = r\dot{\vartheta}\hat{u}_\vartheta = r\dot{\vartheta}\hat{u}_z \wedge \hat{u}_r$$

$$= \underbrace{\dot{\vartheta}\hat{u}_z}_{\vec{\omega}} \wedge \underbrace{r\hat{u}_r}_{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\vartheta}\hat{u}_\vartheta\right) =$$

$$= \left(\ddot{r}\hat{u}_r + \dot{r}\frac{d\hat{u}_r}{dt}\right) + \left(\dot{r}\dot{\vartheta}\hat{u}_\vartheta + r\ddot{\vartheta}\hat{u}_\vartheta + r\dot{\vartheta}\frac{d\hat{u}_\vartheta}{dt}\right) =$$

$$= \ddot{r}\hat{u}_r + \dot{r}\dot{\vartheta}\hat{u}_\vartheta + \dot{r}\dot{\vartheta}\hat{u}_\vartheta + r\ddot{\vartheta}\hat{u}_\vartheta - r\dot{\vartheta}^2\hat{u}_r =$$

$$\boxed{\frac{d\hat{u}_\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta}(-\hat{u}_r)}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{u}_r + 2\dot{r}\dot{\vartheta}\hat{u}_\vartheta + r\ddot{\vartheta}\hat{u}_\vartheta - r\dot{\vartheta}^2\hat{u}_r$$

$$\vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)}_{\text{accelerazione radiale}}\hat{u}_r + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})}_{\text{accelerazione angolare}}\hat{u}_\vartheta$$

$\dot{r} = 0$ per calcolare il moto circolare

⚠ NON CONFONDERE $\begin{cases} a_N \\ a_T \end{cases}$

CASI PARTICOLARI

1) Moto radiale uniforme : $\vartheta = \text{cost}$ $\dot{\vartheta} = 0 \Rightarrow \ddot{\vartheta} = 0$

$\vec{a} = \ddot{r}\hat{u}_r = 0$ $\qquad \dot{r} = \text{cost}$

$\ddot{r} = \text{cost} = 0$

$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r$

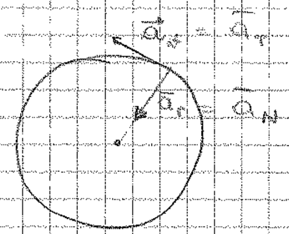
2) Moto radiale uniformemente accelerato: $\dot{\vartheta} = 0$ ($\vartheta = \text{cost}$) $\dot{r} \neq 0$ $\ddot{r} = \text{cost}$

$\vec{a} = \ddot{r}\hat{u}_r \qquad \vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r$

3) Moto circolare : $r = \text{cost} \Rightarrow \dot{r} = 0$

$$\vec{a} = \underbrace{-r\dot{\vartheta}^2\hat{u}_r}_{a_N} + \underbrace{r\ddot{\vartheta}\hat{u}_\vartheta}_{a_T}$$

$\vec{v} = r\dot{\vartheta}\hat{u}_\vartheta$

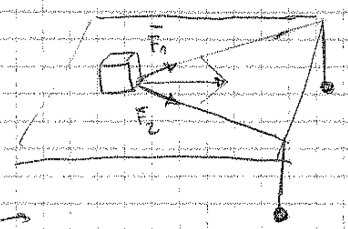


... SOTTOCASI ...

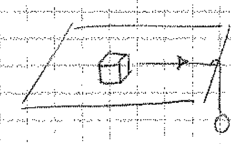
Moto circolare uniforme : $\dot{\vartheta} = \text{cost}$ $\ddot{\vartheta} = 0$

Moto uniformemente accelerato: $\ddot{\vartheta} = \text{costante}$

forza $F = |F|\,\hat{u}$



composizione di forze



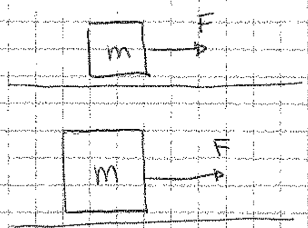
$\vec{F} = m\vec{a}$

m esprime una proprietà del corpo: la RILUTTANZA a mutare il suo stato di moto

data $\vec{F}$ $\begin{cases} m: & \vec{a} = \vec{F}/m \\ m': & \vec{a}' = \vec{F}/m' = \dfrac{\vec{F}}{Nm} = \dfrac{\vec{a}}{N} \end{cases}$ $\qquad m' = Nm$

$\vec{F}\begin{cases} |\vec{a}|, & m \\ |\vec{a}'|, & m' \end{cases}$ $\quad \dfrac{m'}{m} = \dfrac{a}{a'} \Rightarrow$ misuro una qualunque massa m' avendo m come campione.

$m'a' = F = ma \qquad m = kg \;(SI)$



$\vec{F} = m\vec{a}$ Collega le forze (interazione con l'ambiente) con la cinematica, in particolare gli aspetti cinematici.

$\vec{F} = \cancel{F}$ è un campo di forze

$\vec{F} = u_x F_x(x,y,z) + u_y F_y(x,y,z) + u_z F_z(x,y,z)$

$\vec{F}(\vec{r}) \qquad \vec{r} = (x,y,z)$

$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x,y,z) \\ m\ddot{y} = F_y(x,y,z) \\ m\ddot{z} = F_z(x,y,z) \end{cases}$ $\Rightarrow$ 3 equazioni differenziali, risolvendo le quali determino le soluzioni $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$

$m\underbrace{\ddot{r}}_{\vec{a}} = F$

Moto smorzato $\ddot{x} + kx = 0$ $\ddot{x} = a = cost = \dfrac{F}{m}$ $m\ddot{x} + kx = 0$ $k/m = \omega^2$

<u>Unità di forza</u>

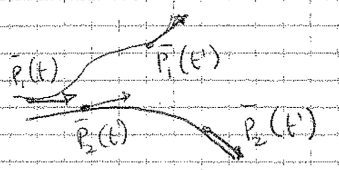
$1\,N = 1\,kg \cdot m/s^2$ Forza da applicare ad una massa di 1 kg per avere un'accelerazione di $1\,m/s^2$

$1\,kg_p = 1\,kg \; 9{,}8\,\dfrac{m}{s^2}$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0$$

LEGGE di CONSERVAZIONE della QUANTITÀ di MOTO

$\rightarrow \vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) = \text{COSTANTE}$



20/03/12

$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{|r_2 - r_1|}$

Forze:
- Forza gravitazionale
- Forza elettrostatica
- (Forza debole/forte)

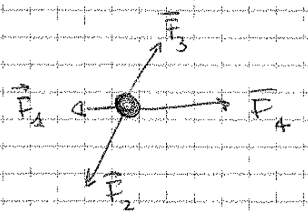
} forze fondamentali

Forze statistiche:
- Forza di attrito (statico / dinamico)
- " " " viscoso
- Forza elastica

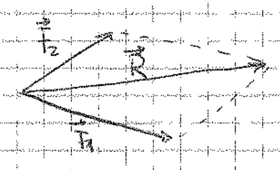
RISULTANTE delle FORZE

Un corpo sotto l'azione contemporanea di molte forze

Risultante $\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N$



Esempio con 2 forze:



II principio $\vec{R} = m\vec{a}$

La formula per $\vec{R}$ esprime il PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE delle FORZE.

EQUILIBRIO STATICO

Un corpo è in equilibrio statico se $\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0 \rightarrow m \cdot \vec{a} = \vec{R} = 0$

Equazione vettoriale che dice 3 cose

1) $R_x = \sum_i F_{xi} = 0$

2) $R_y = \sum_i F_{yi} = 0$

3) $R_z = \sum_i F_{zi} = 0$

ES: $\vec{F}_1 = 3u_x + 6u_y \quad (3, 6, 0)$

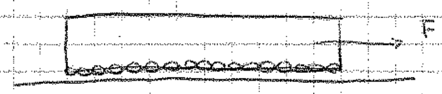
$\vec{F}_2 = 2u_x + 4u_z - 3u_y \quad (2, -3, 4)$

$\vec{F}_3 = -5u_x - 3u_y - 4u_z \quad (-5, -3, -4)$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (3+2-5)u_x + (6-3-3)u_y + (0+4-4)u_z = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 222

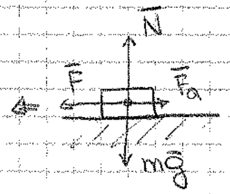
2) CASO DINAMICO:



C'è velocità. Se avevo un numero n di legami, ora in movimento, il n° diminuisce abbondantemente. Quindi ho legami meno diffusi.

Il coefficiente $\mu_s > \mu_v$ SEMPRE

Se c'è movimento:



$$F_a = \mu_v N = \mu_v mg$$

$$m\ddot{x} = -\bar{F} + \bar{F}_a \qquad a = \ddot{x}$$

FORZA VISCOSA

Si manifesta nel moto di un corpo dentro un fluido.

$$\vec{F}_v = -\overbrace{mk}^{\gamma}\,\vec{v}$$

"proprietà chimiche-fisiche" del corpo

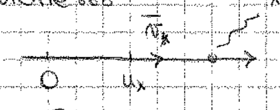
$$m\bar{a} = \bar{F}_v \Rightarrow m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}_v \Rightarrow \cancel{m}\frac{d\bar{v}}{dt} = -\cancel{m}K\vec{v} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = -K\vec{v}}$$

K = coefficiente di smorzamento

$K = 6\pi r$ (corpo sferico)

In una dimensione...

$\vec{v} = v\,u_x$



$$\frac{dv}{dt} = -Kv \qquad \text{Soluzione: } v(t) = v_0\,e^{-kt}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{K}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

$x(\infty)$ = LUNGHEZZA DI PENETRAZIONE $\qquad x(0) = 0$

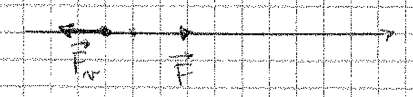
$x(\infty) = v_0/K$

Forza viscosa combinata ad una forza costante: — chiedi

$$R = F - mKv \Rightarrow \vec{R} = \vec{F} + \vec{F}_v$$

NON È PIÙ UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA

$$m\frac{dv}{dt} = F - mKv$$



$$\frac{dv}{dt} + Kv = \frac{F}{m}$$ (*) vedi altra pagina

$$dv = \left(\frac{F}{m} - Kv\right)dt$$

$$\int \frac{dv}{F/m - Kv} = \int dt = t$$

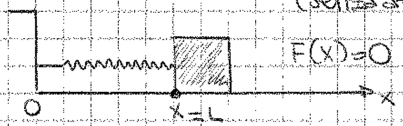
$$\frac{d^n f}{dt^n} + c_1\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + \dots + c_{n-2}\frac{df}{dt} + c_{n-1} f \neq 0 \qquad = 0$$

$$-\frac{1}{K}\ln\left(\frac{F}{m} - Kv\right) + c = t$$

→

FORZA ELASTICA

(senza attrito)

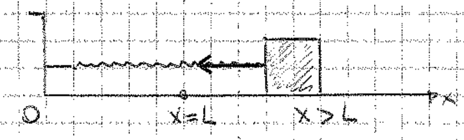


$F(x)=0$

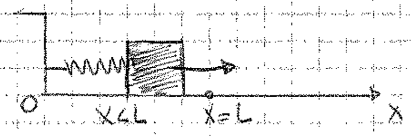
L = lunghezza a riposo

k = costante elastica

$$\boxed{F(x) = -k\,(x-L)}$$

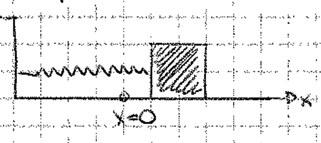


$F(x)<0$

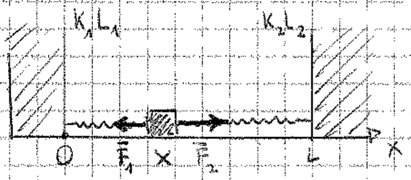


$F(x)>0$

Caso speciale



$F(x) = -kx$



$L > L_1 + L_2$

$$F_{TOT}(x) = -K_1(x-L_1) + K_2(L-x-L_2)$$

II PRINCIPIO: $F = m\,a$

$$-k(x-L) = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \overbrace{\frac{k}{m}}^{\omega^2} x = \frac{kL}{m}$$

$$x(t) = \underbrace{A\,\text{sen}(\omega t+\varphi)}_{\text{SOLUZ. CASO OMOGENEO}} + L \quad \text{soluzione particolare}$$

$x(0) = A\,\text{sen}\,\varphi + L$

$v(0) = \omega A\cos\varphi + L$

etc...

$a(0) = -\omega^2 A\,\text{sen}\,\varphi - L$

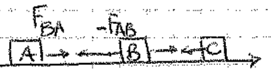
$* \; N = \dfrac{mg}{\cos\theta}$ lo sostituisco nella 3ª

$$m a_N = \frac{mg}{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta \rightarrow \cancel{m} \frac{v^2}{R} = \operatorname{tg}\theta \, \cancel{m} g \Rightarrow \frac{v^2}{R} = \operatorname{tg}\theta \, g$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{r \operatorname{tg}\theta \, g}$$

$m_A = 10 \text{ kg}$ $\qquad T_{AB} = -T_{BA}$

$m_B = 15 \text{ kg}$



$a = ?$ T_{BA} T_{CB} ?

$m_C = 20 \text{ kg}$

$F = 50 \text{ N}$

$F_{BC} = T_{CB}$

ESERCITAZIONI del 23/03/12

- Un punto si muove di moto smorzato esponenzialmente ($\tau = 75 s$); la velocità iniziale è v_0, lo spazio percorso è $x = 1,8 m$

a) Calcolare il valore di v_0

Si supponga, invece, che il moto sia uniformemente decelerato;

b) quanto vale l'accelerazione?

c) quanto dura il moto?

Moto smorzato → moto vario

$a = -K v$

$$[K] = \frac{[a]}{[v]} = \frac{[\cancel{m}]}{[s^2]} \cdot \frac{[\cancel{s}]}{[\cancel{m}]} = s^{-1}$$

In generale:

$$a = \frac{dv}{dt} \; ; \quad \frac{dv}{dt} = -K v \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_0^t -K \, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -Kt \Rightarrow v = v_0 \cdot e^{-kt}$$

$K = \dfrac{1}{\tau} \rightarrow v = v_0 \cdot e^{-t/\tau}$ $\qquad \tau = 75 s \quad x(\infty) = 1,8 m$

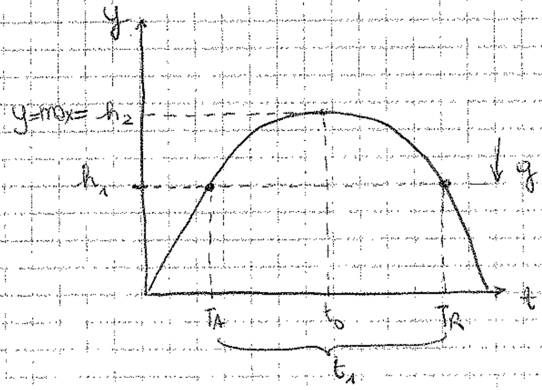
$v = v_0 \cdot e^{t/\tau} \rightarrow$ LEGGE ORARIA: integrare rispetto a t

$$x(t) = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{x_0} + \int_0^t v(t') \, dt'$$

$$x(t) = \int_0^t v_0 \, e^{-\frac{t'}{\tau}} dt' \Rightarrow x(t) = v_0 \int_0^t e^{-\frac{t'}{\tau}} dt' \Rightarrow$$

$$x(t) = -\tau v_0 \left[e^{-t'/\tau} \right]_0^t \Rightarrow x(t) = -\tau v_0 \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) \Rightarrow$$

- Una persona affacciata alla finestra al 1° piano di una casa ad una altezza $h_1 = 3{,}77\,m$ dal suolo, vede una palla lanciata dal suolo con una velocità v_0. La palla ripassa davanti alla persona dopo un tempo $t_1 = 1{,}04\,s$. Calcolare l'altezza massima raggiunta dalla palla rispetto al suolo e calcolare la velocità iniziale v_0.



$t_1 = t_R - t_A$

$t_0 = 0 \qquad y_0 = 0$

$$y(t) = \underset{0}{y_0} + v_0\,(t - \underset{0}{t_0}) - \frac{1}{2} g\,(t - \underset{0}{t_0})^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ y(t) = h_1 \end{cases}$$

$h_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ Vogliamo trovare t

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + h_1 = 0$$

$$t_{AR} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh_1}}{g} = \begin{cases} (-)\ T_A \\ (+)\ T_R \end{cases}$$

$$t_1 = t_R - t_A = \frac{2}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gh_1}$$

$$t_1 = \frac{2}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gh_1} \Rightarrow \frac{g}{2} t_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh_1} \Rightarrow \frac{g^2}{4} t_1^2 = v_0^2 - 2gh_1 \Rightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g^2}{4} t_1^2 + 2gh_1} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{(9{,}8\,m/s^2)^2}{4} \cdot (1{,}04\,s)^2 + 2 \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot 3{,}77\,m} = 9{,}99\,m/s$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \overset{\text{PER TROVARE IL MASSIMO}}{=} 0 \rightarrow v(t) = v_0 - g t_0 = 0$$

$$t_0 = \frac{v_0}{g}$$

$$y(t) \Rightarrow y(t_0) = v_0 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \cancel{g} \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = 5{,}09\,m$$

$y(t_0) = 5{,}09\,m$

$$x\left[\operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2} g \frac{x}{v_0^2 \cos^2\theta}\right] = 0$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2} g \frac{x}{v_0^2 \cos^2\theta} \Rightarrow x = \frac{2}{g} \frac{v_0^2 \cos^{\cancel{2}}\theta \sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}$$

$$x_G = \frac{2}{g} v_0^2 \cos\theta \sin\theta$$

$$x_{MAX} = \frac{v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$

$$y(x_{MAX}) = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$
altezza max

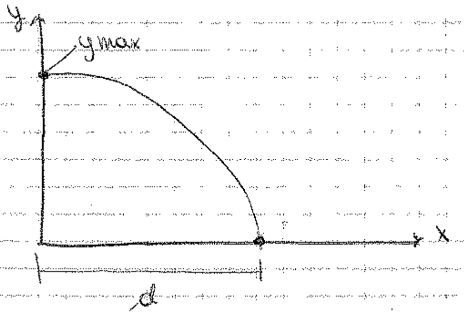
$$\frac{dx_G}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{2v_0^2}{g}(-\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 0$$
$$\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$$

$$(x_G)_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$ GITTATA MASSIMA

TEMPO di VOLO

$$t_G = x_G / v_0 \cos\theta = \frac{2x_{MAX}}{v_0 \cos\theta} = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

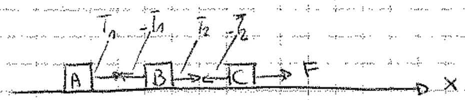
SE AVESSIMO un PROIETTILE



23/03/12

Esercizio

F, m_A, m_B, m_C



$$\begin{cases} m_a a = T_1 \\ m_B a = T_2 - T_1 \\ m_C a = F - T_2 \end{cases}$$

Incognite $\begin{cases} T_1 \\ T_2 \\ a \end{cases}$

$$m_a a + m_B a + m_C a = \cancel{T_1} + \cancel{T_2} - \cancel{T_1} + F - \cancel{T_2}$$

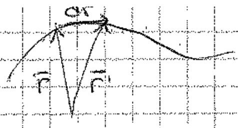
$$(m_a + m_B + m_C)a = F$$

$$a = \frac{F}{\underbrace{m_a + m_B + m_C}_{M}}$$

$$T_1 = m_a / M \cdot F$$

$$T_2 = F - m_C a = F - m_C / M\, F = \frac{m_A + m_B}{M} F$$

$$W_{AB} = \int_{A\,(\gamma)}^{B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad \gamma \to \gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$$



INTEGRALE di LINEA che esprime il LAVORO

N.B. $\vec{F}(\vec{r}) = F_x(\vec{r})\hat{u}_x + F_y(\vec{r})\hat{u}_y + F_z(\vec{r})\hat{u}_z$

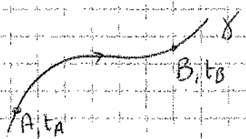
Funzione di una variabile vettoriale a valori vettoriali

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt$$

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= d(x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y + z(t)\hat{u}_z) \\ &= \hat{u}_x dx + \hat{u}_y dy + \hat{u}_z dz = \\ &= \hat{u}_x \dot{x} dt + \hat{u}_y \dot{y} dt + \hat{u}_z \dot{z} dt \\ &= (\hat{u}_x \dot{x} + \hat{u}_y \dot{y} + \hat{u}_z \dot{z}) dt \end{aligned}$$

$$W_{AB} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \left(F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} \right) dt$$

$$\left(\vec{F} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \right) dt$$



$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \left[F_x\left(x(t), y(t), z(t)\right) \dot{x}(t) + F_y\left(x(t), y(t), z(t)\right) \dot{y}(t) + F_z\left(x(t), y(t), z(t)\right) \dot{z}(t) \right] dt$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} f(t)\, dt$$

TEOREMA dell'ENERGIA CINETICA

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2(t) \quad , \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$W_{AB} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{Th}{=} \frac{m}{2} \vec{v}_B^2 - \frac{m}{2} \vec{v}_A^2$$

sopravvive solo la tangenziale che è // alla $\vec{v}$

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt \underset{\text{II LEGGE di NEWTON}}{=} \int_{t_A}^{t_B} m\vec{a} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_A}^{t_B} m\left(\cancel{\vec{a}_N} + \vec{a}_T\right) \vec{v}\, dt =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} m \frac{dv}{dt} \underbrace{\hat{u}_T \cdot v \hat{u}_T}_{1} dt = \int_{t_A}^{t_B} m v \frac{dv}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2} v^2\right) dt =$$

$$= \left[\frac{m}{2} v^2(t) \right]_{t_A}^{t_B} = \frac{m}{2} v^2(t_B) - \frac{m}{2} v^2(t_A) = \frac{m}{2} \vec{v}_B^2 - \frac{m}{2} \vec{v}_A^2$$

$\vec{v}_A = \vec{v}(t_A)$

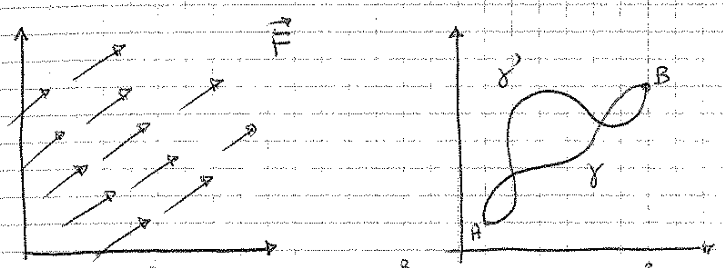
$\vec{v}_B = \vec{v}(t_B)$

C.V.D.

Altro modo...

$$W_{AB} = \ldots = \int^{t_B} m \overset{\vec{a}}{\frac{d\vec{v}}{dt}} \vec{v}\, dt = \int^{t_B} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2} \vec{v}^2\right) dt = \text{RITROVO LO STESSO RISULTATO} =$$

Lavoro di una forza costante



Il cammino percorso sembra non influenzare il W_{AB}

$$W_{AB} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\int_{A\,\gamma}^{B} d\vec{r} = \vec{F}\int_{A}^{B}\left(\hat{u}_x dx + \hat{u}_y dy + \hat{u}_z dz\right) =$$

$$= \vec{F}\cdot\left(\hat{u}_x\int_{x_A}^{x_B} dx + \hat{u}_y\int_{y_A}^{y_B} dy + \hat{u}_z\int_{z_A}^{z_B} dz\right) = \vec{F}\cdot\left(\hat{u}_x(x_B - x_A) + \hat{u}_y(y_B - y_A) + \hat{u}_z(z_B - z_A)\right) =$$

$= \vec{F}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) =$ Il cammino non conta, importa solo il punto iniziale e il punto finale.

$\parallel \quad U(\vec{r}) =$ energia potenziale $= -\vec{F}\cdot\vec{r} + c$

$$= -\left(U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A)\right)$$

Premessa:

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int f(x)\,dx = \exists F(x) = F(x) + c$$

Corollario

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x)\,dx = F(x_B) - F(x_A)$$

Definizione di CAMPO di FORZE CONSERVATIVE:

$\vec{F}$ è conservativo se esiste un campo scalare $E_p(\vec{r})$ "energia potenziale" tale che il lavoro da A a B nello spazio ambiente è dato da

$$W_{AB} = \int_{A\;\gamma}^{B} \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = -\left[E_p(\vec{r}_B) - E_p(\vec{r}_A)\right]$$

$\gamma \to$ eliminabile

$$E_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}_A) + \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}$$

$\vec{r}_B$ generico

TEOREMA

Condizione necessaria e sufficiente affinché il campo di forze $\vec{F}$ sia conservativo è che ~~il lavoro di una forza conservativa~~

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = W_\Gamma = 0 \quad \forall\Gamma$$

$\hookrightarrow$ cammino arbitrario

INTEGRALE di CIRCUITAZIONE

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\nabla E_p \cdot d\vec{r}$$

27/03/12

CAMPI di FORZA CONSERVATIVA

1) $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} = -\left[E_p(\vec{r}_B) - E_p(\vec{r}_A)\right]$

2) Se $\vec{F}$ conservativo $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \Gamma$

Se $\oint_\Gamma \vec{F}\, d\vec{r} = 0,\ \forall \Gamma \Rightarrow \vec{F}$ è conservativo

3) Se è nota $E_p(\vec{r})$, $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla E_p(\vec{r})$

Teorema di conservazione dell'energia meccanica

Da Teorema dell' E_c:

$$W_{AB} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}\, d\vec{r} = E_c^B - E_c^A \qquad E_c = \frac{m}{2} \vec{v}^2$$

→ però riguarda forze conservative

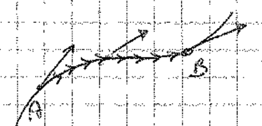
Per forze conservative: $\qquad E_p^B = E_p(\vec{r}_B)$

$$\left.\begin{array}{l} W_{AB} = -(E_p^B - E_p^A) \\ W_{AB} = E_c^B - E_c^A \end{array}\right\} \rightarrow E_c^B - E_c^A = -(E_p^B - E_p^A)$$

$$\Downarrow$$

$$E_c^A + E_p^A = E_c^B + E_p^B$$

$$\Downarrow$$



Energia meccanica $E_c + E_p = \text{cost} \quad \forall t$

È un riflesso della natura conservativa del campo che sto utilizzando.

Quando il campo non è conservativo non posso scrivere il lavoro come differenza di E_p.

$\vec{F}_a$: campo non conservativo

$$\int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}_a\, d\vec{r} \neq -(U_B - U_A)$$

Forza complessiva agente su m: $\vec{F} + \vec{F}_a = -\nabla E_p + \vec{F}_a$

$$W_{AB} = \int_{A\,\gamma}^{B} (\vec{F} + \vec{F}_a)\, d\vec{r} = E_c^B - E_c^A \ ; \ W_{AB} = \int_{A\,\gamma}^{B} (\vec{F} + \vec{F}_a)\, d\vec{r} =$$

conservativo

$$= -(E_p^B - E_p^A) + \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}_a \cdot d\vec{r}$$

$$E_c^B - E_c^A = -(E_p^B - E_p^A) + \underbrace{\int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}_a\, d\vec{r}}_{W'_{AB}}$$

→

$N = mg\cos\alpha$

$ma_{\parallel} = -mg\,\text{sen}\alpha - \mu_d\, mg\cos\alpha$

$F_a = \mu_d\, N = mg\cos\alpha$

Conosco $F_a = \mu_d\, mg\cos\alpha \Rightarrow$ bilancio energetico

$$E_c^B - E_c^A = -\left(E_p^B - E_p^A\right) + W'_{AB}$$

$$E_p(y) = mg\,y + \cancel{C}$$

$$0 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -\left(mg\,y_B - mg\,\overset{0}{y_A}\right) + \int_A^B \vec{F}_a\, d\vec{s}$$

$$-\frac{1}{2} m v_A^2 = -mg\,y_B + \int_{s_A}^{s_B} \left(-F_a\,\hat{u}_s\right) \hat{u}_s\, ds$$

$$-\frac{m}{2} v_A^2 = -mg\,y_B - \int_{0}^{s_B} F_a \cdot ds$$

RICORDATELO SEMPRE !!

$$s_B\,\text{sen}\alpha = y_B$$

$$-\frac{m}{2} v_A^2 = -mg\,s_B\,\text{sen}\alpha - F_a\, s_B$$

$$\frac{m}{2} v_A^2 = s_B\left(mg\,\text{sen}\alpha + F_a\right)$$

$$s_B = \frac{\cancel{m} v_A^2}{2\,\underbrace{\cancel{m}g(\text{sen}\alpha + \mu_d\cos\alpha)}_{a_{\parallel}}}$$

Se non ci fosse attrito $\rightarrow$ s_B avrebbe un valore maggiore !!

Altro modo:

$$ma_{\parallel} = -mg\,\text{sen}\alpha - \mu_d\, mg\cos\alpha$$

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\left(\text{sen}\alpha + \mu_d\cos\alpha\right)$$

$$s(t) = \underset{\substack{\parallel\\0}}{s_0} + \underset{\substack{\parallel\\v_A}}{v_0}\, t + \frac{a_{\parallel}}{2} t^2 \Rightarrow \begin{cases} s(t) = v_A t - \frac{1}{2}|a_{\parallel}|\, t^2 \\ v(t) = \frac{ds}{dt} = v_A - |a_{\parallel}|\, t \end{cases}$$

Trovare t per cui $v = 0$

$$v(t_B) = v_A - |a_{\parallel}|\, t_B = 0$$

$$t_B = \frac{v_A}{|a_{\parallel}|}$$

$$s(t_B) = v_A t_B - \frac{1}{2}|a_{\parallel}|\, t_B^2 \Rightarrow s(t_B) = \frac{v_A^2}{|a_{\parallel}|} - \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{|a_{\parallel}|} = \frac{v_A^2}{2|a_{\parallel}|}$$

$\rightarrow$

Esempio (lezione precedente)

$\vec{F} = cost$ $\qquad W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left(E_p(\vec{r}_B) - E_p(\vec{r}_A)\right)$

$E_p(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \vec{r} + C$ $\qquad \vec{F} = \hat{u}_x F_x + \hat{u}_y F_y + \hat{u}_z F_z = cost$

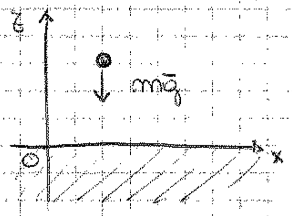
$$\vec{F} = -\nabla E_p = -\nabla(-\vec{F}\vec{r} + \cancel{C}) = +\nabla(\vec{F} \cdot \vec{r}) = \nabla(F_x \cdot x + F_y \cdot y + F_z \cdot z) =$$

$$= \hat{u}_x \frac{\partial}{\partial x}(F_x x + F_y y + F_z z) + \hat{u}_y \frac{\partial}{\partial y}(F_x x + F_y y + F_z z) + \hat{u}_z \frac{\partial}{\partial z}(F_x x + F_y y + F_z z) =$$

$$= \hat{u}_x \frac{\partial}{\partial x}(x F_x) + \hat{u}_y \frac{\partial}{\partial y}(y F_y) + \hat{u}_z \frac{\partial}{\partial z}(z F_z) =$$

$$= \hat{u}_x F_x + \hat{u}_y F_y + \hat{u}_z F_z = \vec{F} \qquad CVD$$

Energia potenziale gravitazionale



$\vec{F} = -mg\,\hat{u}_z$

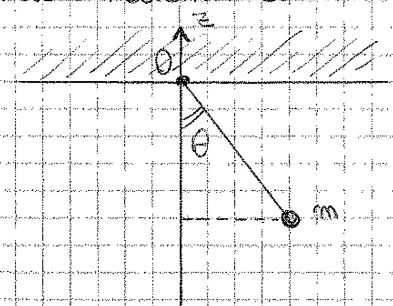
$F_x = 0 = F_y \;,\; F_z = -mg$

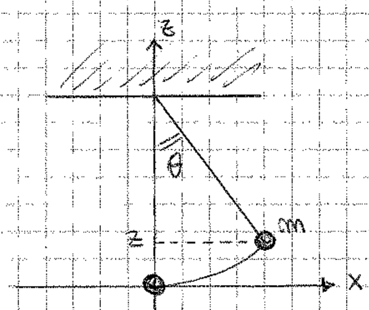
$E_p(z) = -\vec{F} \cdot \vec{r} + \cancel{C} = -(-mg\hat{u}_z) \cdot \vec{r} + C$

$E_p(z) = mgz + C$

Grafico dell'energia potenziale del pendolo

Pendolo matematico





$E_p = 0$

$E_p(z) = mgz$ $\qquad E_p(z) = mgz + C =$

$\Rightarrow z = -R\cos\theta$

$= -mgR\cos\theta + C \Rightarrow$

$\Rightarrow E_p(\theta = 0) = 0 \Rightarrow C = mgR$

$$E_p(\theta) = mgR \cdot (1 - \cos\theta)$$

$E_p(\theta) \geq 0$ SEMPRE!!

grafico →

Il tratto DA $\Rightarrow$ la velocità è costante $v_D = v_A$

Salita

$$\delta > \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$$

$$E = \frac{m}{2} v^2 + mgz$$

$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{m}{2} v_A^2 + mg \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{z_A} = m/_2\, v_B^2 + mgz_B$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} v_D^2 = \frac{m}{2} v_B^2 + mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{v_D^2 - 2gh} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{K}{m}\delta^2 - 2gh}$$

$$= 0,44 \text{ m/s}$$

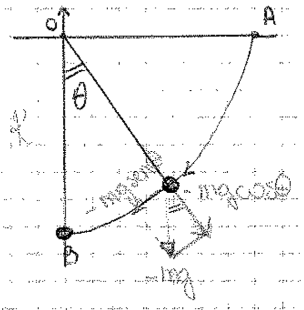
ESERCIZIO 2

Calcolare Ep di un pendolo semplice con una massa m e la velocità in B se m è inizialmente ferma in A. Trovare la tensione della fune nel punto B.

$v_B = ?$

$T_B = ?$

m ferma in A



$\downarrow \bar{g}$

$V = R\dot{\theta}$

$z = -R\cos\theta$

$$E = \frac{m}{2} v^2 + mgz$$

$$\underset{\downarrow 0}{\frac{m}{2} v_A^2} + (mgz_A + \cancel{c}) = \frac{m}{2} v_B^2 + (mgz_B + \cancel{c})$$

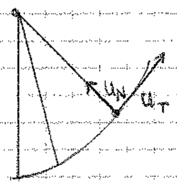
$$\frac{m}{2} V_B^2 = \frac{m}{2} \cancel{v_A^2} + mg(\underset{0}{z_A} - \underset{(-R)}{z_B})$$

$$\frac{m}{2} v_B^2 = +R$$

$$v_B^2 = 2gR \Rightarrow v_B = \sqrt{2gR}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2mgR}{m}} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gR}$$

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$



$$\vec{T} = T\hat{u}_N$$

$$\begin{cases} ma_N = T - mg\cos\theta \\ ma_T = -mg\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

$$m\frac{V^2}{R} = T - mg\cos\theta$$

$$T_B = mg\cos\underset{\downarrow 0}{\theta_B} + \frac{m}{R} V_B^2$$

$$= mg + \frac{m}{R} 2gR = 3mg$$

$$T(\theta) = mg\cos\theta + \frac{m}{R} V^2$$ conservazione energia.

$$V^2 = \frac{2}{m}E + 2gR\cos\theta$$

$d \equiv x(t_1)$

↳ tempo di caduta del proiettile

Eq. moto del bersaglio <u>fermo</u>:

$$x_B(t) = x_{0B} + \underbrace{v_{0B}\, t}_{0}$$

$$x_B(t) = x_{0B} \equiv d'$$

Dobbiamo determinare $x(t_1) = d$

$$\begin{cases} d = x(t_1) = v_{0x}\, t_1 \\ y(t_1) = h - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0 \end{cases}$$ Il proiettile è caduto

$$\Downarrow$$

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$t_1^2 = 2h/g$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$ tempo di caduta!

$$d \equiv x(t_1) = v_{0x} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = *$$ Dobbiamo scrivere in metri

$$v_{0x} = 400\ \frac{km}{h} = \frac{400\,000\ m}{3600\ s} = 111,1\ m/s$$

$$* = 111,1\ \frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 400 m}{9,8 m/s^2}} = 1003,89\ m \quad [x(t_1) \equiv d]$$

Ora dobbiamo mettere a sistema con l'eq del moto del proiettile.

$$\begin{cases} x(t_1) = d \\ x_B(t_1) = d' \end{cases} \qquad d = d' = x_B(t_1) \qquad ok!$$

ORA... Eq del moto quando il bersaglio è in moto

$$x_B(t) = x_{1B} + v_{1B}\, t$$

$$\begin{cases} x_B(t_1) = x_{1B} + v_{1B}\, t_1 \\ x(t_1) = d = v_{0x}\, t_1 \end{cases}$$

$$\Downarrow \quad x_B(t_1) = x(t_1)$$

$$v_{0x}\, t_1 = x_{1B} + v_{1B}\, t_1$$

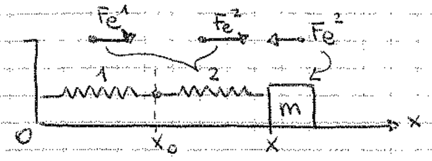
$$d' \equiv x_{1B} = v_{0x}\, t_1 - v_{1B}\, t_1$$

$$d' = (v_{0x} - v_{1B})\, t_1 \Rightarrow 878,4\ m \qquad \boxed{d' \neq d} \quad \boxed{d' < d}$$

DINAMICA del PUNTO

Es. 2.7

Un punto materiale di massa $m = 0{,}4$ kg è attaccato a due molle con costanti $K_1 = 20\ \frac{N}{m}$ $K_2 = 30$ N/m. Calcolare il periodo delle oscillazioni armoniche del punto.



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$F_m = m\ddot{x} = -K_2(x - x_0 - L_2)$$

↳ condizione di riposo della molla 2.

$$F_0 = m_0\ddot{x} = 0 = K_2(x - x_0 - L_2) - K_1(x_0 - L_1)$$

$\downarrow m_0 \to 0$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -K_2(x - x_0 - L_2) \\ K_2(x - x_0 - L_2) - K_1(x_0 - L_1) = 0 \end{cases}$$

→ Ricaviamo $x_0 \Rightarrow K_2(x - L_2) - K_2 x_0 - K_1 x_0 + K_1 L_1 = 0$

$$x_0(K_2 + K_1) = K_2(x - L_2) + K_1 L_1$$

$$x_0 = \frac{K_2(x - L_2) + K_1 L_1}{K_2 + K_1}$$ lo sostituiamo nella prima eq:

$$m\ddot{x} = -K_2 x + K_2 \frac{K_2(x - L_2)}{K_2 + K_1} + K_2 \frac{K_1 L_1}{K_2 + K_1} + K_2 L_2$$

$$m\ddot{x} = \cancel{\frac{-K_2(K_2+K_1)x + K_2^2 x - K_2^2 L_2}{K_2 + K_1}} = \frac{-K_2(K_2 + K_1)(x - L_2) + K_2^2(x - L_2)}{K_2 + K_1} + \frac{K_2 K_1 L_1}{K_2 + K_1} =$$

$$= \frac{-K_2^2 - K_2 K_1 + K_2^2}{K_2 + K_1} \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{K_2 K_1}{K_2 + K_1}(x - L_2) + \frac{K_2 K_1 L_1}{K_2 + K_1}$$

$$m\ddot{x} = -\underbrace{\boxed{\frac{K_2 K_1}{K_2 + K_1}}}_{\omega^2} x + \underbrace{\frac{K_2 K_1}{K_2 + K_1} L_2 + \frac{K_2 K_1}{K_2 + K_1} L_1}_{\frac{K_2 K_1}{K_2 + K_1}(L_2 + L_1)}$$ ⇒ forma canonica

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{(K_2 K_1)}{(K_2 + K_1)m}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 50}{20 \cdot 30}} \cong 1{,}15\ s$$

Es. 2.9

Un corpo di massa $m_1 = 3$ kg è attaccato ad una molla, $K = 25$ N/m. Sopra m_1, massa $m_2 = 1$ kg. Coefficiente di attrito statico tra i due $\mu_s = 0{,}4$. Calcolare la max elongazione rispetto alla posizione di riposo che può avere la molla se non si vuole che m_2 si muova rispetto ad m_1.

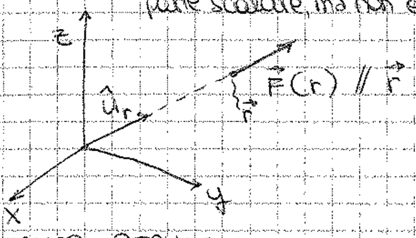
→

CALCOLO DELL'ENERGIA POTENZIALE di un campo di forza CENTRALE

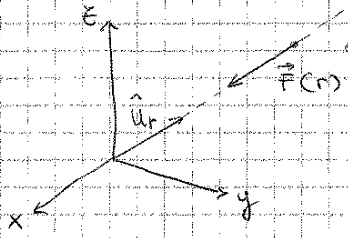
30/03/12

$$\vec{F}(\vec{r}) = \underbrace{F(r)}_{\text{parte scalare, ma non è la norma}} \hat{u}_r$$

La direzione passa sempre per un punto fisso detto centro della forza e il modulo è funzione della distanza dal centro stesso.



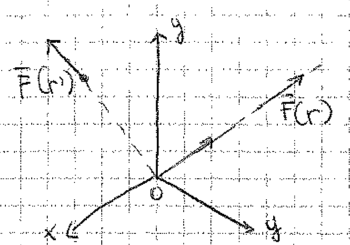
CAMPO di REPULSIONE

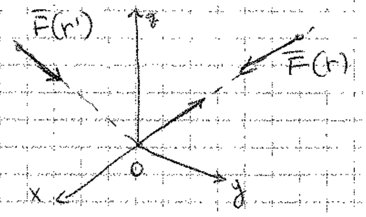


CAMPO d' ATTRAZIONE

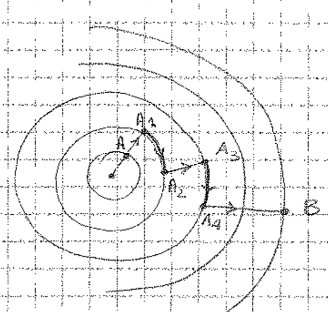
$r = |\vec{r}|$ Il modulo del campo $|\vec{F}| = |F(r)|$ non varia su una sfera di raggio r.

$$F(r) = -\frac{K}{r^2}$$



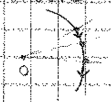


$$W_{AB} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} =$$



$$= \int_{A}^{A_1} \vec{F} d\vec{r} + \cancel{\int_{A_1}^{A_2} \vec{F} d\vec{r}} + \int_{A_2}^{A_3} \vec{F} d\vec{r} + \cancel{\int_{A_3}^{A_4} \vec{F} d\vec{r}} + \int_{A_4}^{B} \vec{F} d\vec{r} =$$

Considerata la natura del campo (radiale) saranno tutti uguali gli spostamenti?
2 tipi tipologie di cammino:
↳ RADIALI: AA_1, A_2A_3, A_4B
↳ LUNGO LE SFERE: A_1A_2, A_3A_4
Vanno a zero i cammini lungo le sfere

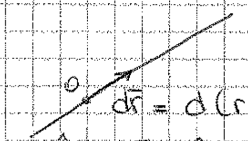


$$\hat{u}_r \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{A_1}^{A_2} \left(-\frac{K}{r^2}\right) \underbrace{\hat{u}_r \cdot d\vec{r}}_{0} \quad \text{Quindi posso cancellare} \quad = 0$$

$$\Rightarrow W_{AB} = \int_{A}^{A_1} \left(-\frac{K}{r^2}\right) \hat{u}_r \cdot d\vec{r} + \int_{A_2}^{A_3} \left(-\frac{K}{r^2}\right) \hat{u}_r \cdot d\vec{r} + \int_{A_4}^{B} \left(-\frac{K}{r^2}\right) \hat{u}_r \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{r_A}^{r_1} \left(-\frac{K}{r^2}\right) dr + \int_{r_2}^{r_3} \left(-\frac{K}{r^2}\right) dr + \int_{r_4}^{r_B} \left(-\frac{K}{r^2}\right) dr =$$



$$d\vec{r} = d(r\hat{u}_r) = \hat{u}_r dr$$

$$\hat{u}_r \cdot d\vec{r} = \underbrace{\hat{u}_r \cdot \hat{u}_r}_{1} dr = dr$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} \left(-\frac{K}{r^2}\right) dr$$

$$W_{AB} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} \left(-\frac{K}{r^2}\right) dr = \left[\frac{K}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{K}{r_B} - \frac{K}{r_A} = -\left[E_p(r_B) - E_p(r_A)\right]$$

$$\boxed{E_p(r) = -\frac{K}{r} + c}$$

TEOREMA del MOMENTO ANGOLARE (per un punto materiale)

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \wedge m\bar{v}) = m\frac{d}{dt}(\bar{r}\wedge\bar{v}) = m\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\wedge\bar{v} + \bar{r}\wedge\frac{d\bar{v}}{dt}\right) =$$

$$= m\left(\cancel{\vec{v}\wedge\vec{v}}^{\,0} + \bar{r}\wedge\vec{a}\right) = m\,\vec{r}\wedge\vec{a} = \vec{r}\wedge\vec{F} = \vec{M}$$

$\vec{F} = m\vec{a}$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

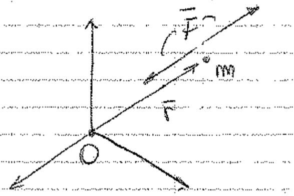
Che cosa vuol dire $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$? $\vec{L}$ è costante

$\vec{L} = m\vec{r}\wedge\vec{v}$ = costante nonostante $\vec{r}, \vec{v}$ varino in generale nel tempo.

$$\begin{cases} o\ \vec{F} = 0 \\ \text{oppure } \vec{r}\wedge\vec{F} = 0, \begin{cases}\vec{F}\neq 0 \\ \vec{r}\neq 0\end{cases}\end{cases}$$

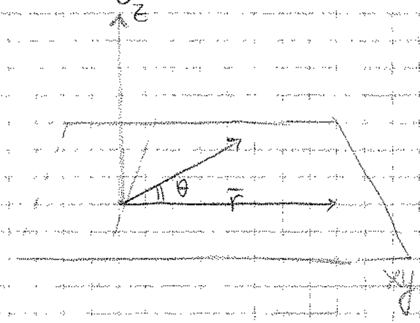
$\vec{r}\,/\!/\,\vec{F} \Rightarrow$ tutti i campi centrali! ☺

TEOREMA del MOMENTO ANGOLARE e FORZE CENTRALI

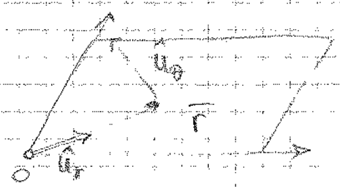


$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\wedge\vec{F} = 0$ perché $\vec{r}\,/\!/\,\vec{F}$ in ogni punto!

$\vec{L} = \text{cost} = m\vec{r}\wedge\vec{v}$



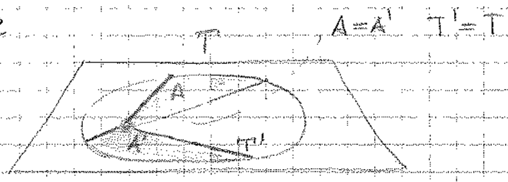
$$\begin{cases}\bar{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta \\ \bar{r} = r u_r\end{cases}$$

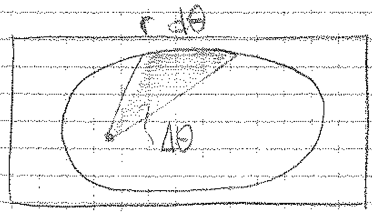


$$\vec{L} = m(r\hat{u}_r)\wedge(\dot{r}\cancel{\hat{u}_r} + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta) =$$

$$\hat{u}_r\wedge\hat{u}_\theta = \hat{u}_z \Rightarrow \underbrace{mr^2\dot{\theta}}_{\text{costante}}\hat{u}_z = \text{costante}$$

$$L_z = mr^2\dot{\theta} = \text{costante}$$





"Triangolorde" infinitesimo

$$dA = \frac{1}{2}r\times r\,d\theta$$

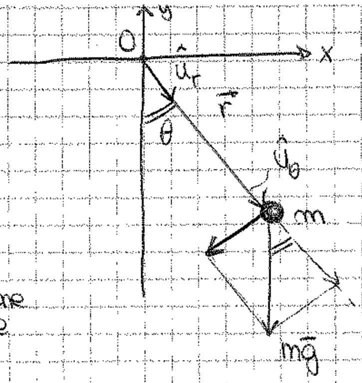
$$dA = \frac{dA}{dt}\cancel{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt}\cancel{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \text{velocità areolare} = \frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2m}mr^2\dot{\theta} = \frac{L_z}{2m} =$$

= COSTANTE [illegible] L_z [illegible]

PENDOLO



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \underbrace{m\vec{g}}_{F}$$

$r = cost$ (filo!)

$$\vec{L} = \ldots = mr^2 \dot{\theta} \hat{u}_z$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = mr^2 \underbrace{\ddot{\theta}}_{\text{accelerazione angolare}} \hat{u}_z$$

$$\vec{r} \wedge m\vec{g} = (r\hat{u}_r) \wedge mg\,sen\theta\,(-\hat{u}_\theta)$$

$$= -rmg\,sen\theta\,\hat{u}_z$$

$$mr^{\cancel{2}} \ddot{\theta} \cancel{\hat{u}_z} = -\cancel{r}mg\,sen\theta\,\cancel{\hat{u}_z}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{r} sen\theta = 0}$$

θ "piccolo"

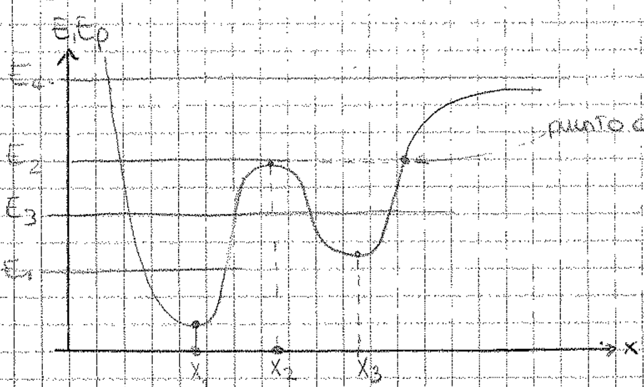
$$sen\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 \ldots$$ Le potenze + grandi non vengono considerate

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0 \quad [\text{moto armonico}]$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{r}$$

$$\theta(t) = A\,sen(\omega t + \varphi)$$

GRAFICO



In x_1, x_2, x_3 : $\frac{dE_p}{dx} = 0$

$$F(x) = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$$ punti di $\begin{cases} max \\ min \end{cases}$ = punti di equilibrio

- Punti x_1 e x_3 (minimi di Ep) sono punti di equilibrio stabile.
  Allontanando la massa di poco da x_1 e x_3 inizia un moto oscillatorio nell'intorno del punto di equilibrio
- Punto x_2 (massimo di Ep) è un punto di equilibrio INSTABILE.
  Appena sposto m da x_2, m si allontana arbitrariamente da x_2

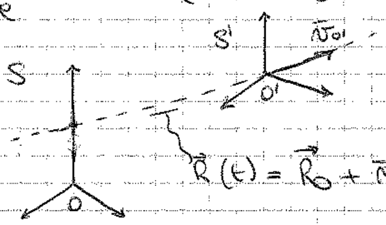
E(x)

S è inerziale ⇒ S' è inerziale

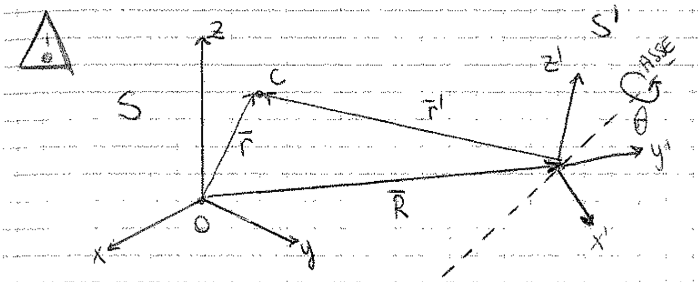
$\vec{a}' = \vec{a}$

$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{O'}$ costante

$\vec{r}' = \vec{r} - (\vec{R}_0 + \vec{v}_{O'} \cdot t)$



Le trasformazioni galileiane sono tali che l'accelerazione $\vec{a}$ di un corpo rimane invariato nonostante il cambio di sistema



NO

x // x' $\hat{u}'_x$ $\hat{u}'_y$ $\hat{u}'_z$ ruotano attorno all'asse

y // y'

z // z'

$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$

$\vec{\omega} = \hat{u}_A \cdot \dot{\theta}$ ← velocità angolare

$\hat{u}_A$ ↓ VERSORE CHE GIACE SULL'ASSE

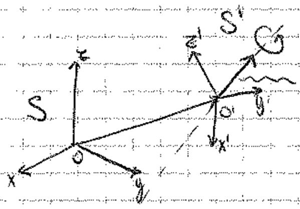
$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z$

$\vec{R} = X\hat{u}_x + Y\hat{u}_y + Z\hat{u}_z$

NOVITÀ

$\vec{r}' = x'\hat{u}'_x + y'\hat{u}'_y + z'\hat{u}'_z$ con i versori della base in rotazione (quindi sono dipendenti dal tempo, t)

TEOREMA delle VELOCITÀ RELATIVE



Th: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{r}'}_{\text{effetto rotazionale}}$

⇕

$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{O'} - \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

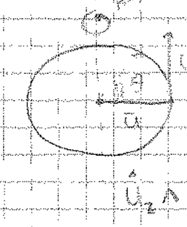
$\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\text{velocità in S}} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_{O'} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$ (*)

(*) $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\hat{u}'_x + y'\hat{u}'_y + z'\hat{u}'_z\right) = \frac{dx'}{dt}\hat{u}'_x + x'\frac{d\hat{u}'_x}{dt} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}'_y + y'\frac{d\hat{u}'_y}{dt} +$

$+ \frac{dz'}{dt}\hat{u}'_z + z'\frac{d\hat{u}'_z}{dt} =$

$= \underbrace{v'_x \hat{u}'_x + v'_y \hat{u}'_y + v'_z \hat{u}'_z}_{\vec{v}'} +$

$+ x'\frac{d\hat{u}'_x}{dt} + y'\frac{d\hat{u}'_y}{dt} + z'\frac{d\hat{u}'_z}{dt} = \vec{v}' \ldots$



$\frac{d\hat{u}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{u}_\perp = \vec{\omega} \wedge \hat{u}$

$\hat{u}_z \wedge \hat{u} = \hat{u}_\perp$ $\quad \dot{\theta}\hat{u}_z$

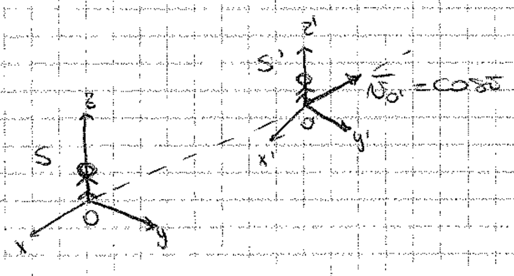
turn the page →

Principio di Relatività Galileiano

Le leggi fisiche sono le stesse per tutti gli osservatori che descrivono i fenomeni da sist. inerziali cioè da sist. collegati da una trasformazione di Galileo.

$\Leftrightarrow$ "le leggi della fisica sono invarianti per trasformazioni galileiane"

$$S \to S' \quad \begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} \\ \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{O'} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases}$$



1) LEGGE di INERZIA:

Se $\vec{v} = cost$ in $S \Rightarrow \vec{v}' = \underset{cost}{\vec{v}} - \underset{cost}{\vec{v}_{O'}} = cost$ in S'

2) LEGGE di NEWTON:

In S: $\vec{F} = m\vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$

In S': $\vec{F} = m\vec{a}' = m \cdot \vec{a}$

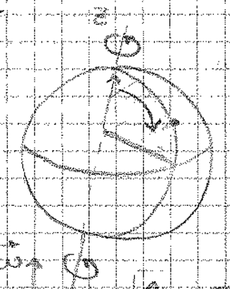
3) LEGGE di CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ di MOTO:

In S: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = cost$ nel tempo

In S': $m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_{O'}) + m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_{O'}) =$

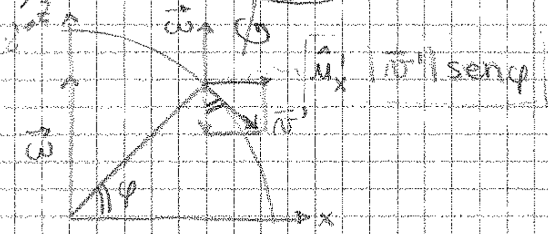
$= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 - (m_1 + m_2)\vec{v}_{O'} =$ costante

ESEMPIO 1: Treno lungo un meridiano



$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

$$m\vec{a}' = \underbrace{m\vec{a}}_{\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R} = 0} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}' - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$



$$m\vec{a}' = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \dots$$

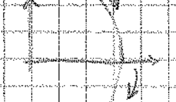
$$= -2m\omega\,\hat{u}_z \wedge \hat{u}_x'\,|\vec{v}'|\,sen\varphi \Rightarrow$$

$\Rightarrow m\vec{a}' = \boxed{-2m\omega|\vec{v}'|\,sen\varphi\;\hat{u}_y'}$ Forza di Coriolis

$\hat{u}_z \wedge \hat{u}_x = \hat{u}_y$ Quindi la forza viene verso di me !!

forza fittizia, se $\omega = 0$ non ci sarebbe questa forza.

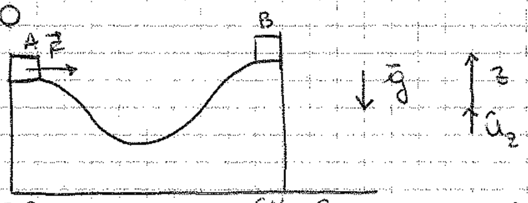
Quindi effetto d'erosione sul binario di dx da Nord a Sud



inversione della forza di Coriolis

ESERCITAZIONI DEL 12/04/12

Es. 2.10



$$\begin{cases} W_{AB} = ? \\ v_B = ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ z_A = 0{,}5\,m \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B = 2\,m \\ z_B = 0{,}8\,m \end{cases} \qquad v_A = 0$$

$$m = 5\,kg \qquad \vec{F} = F_x \hat{u}_x \quad , \quad F_x = 20\,N$$

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F} + m\vec{g} = \overset{I}{F_x \hat{u}_x} - \overset{II}{mg\,\hat{u}_z}$$

$$E_k^A + E_p^A = E_k^B + E_p^B \qquad \text{CONS. ENERGIA MECC.}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p \rightarrow \text{ricaviamo } E_p \rightarrow E_p = -\int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

$$\vec{F} = \frac{d}{d\vec{x}} E_p \ldots$$

$$E_p^{I} = \int^0 F_x\,dx = -F_x x$$

$$E_p^{II} = mgz \rightarrow \left(-\int [-mg]\,dz \right)$$

$$E_{p_{TOT}} = -F_x x + mgz$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\frac{1}{2} m\vec{v}_A^2 + \left(mgz_A - F_x x_A \right) = \frac{1}{2} m \vec{v}_B^2 + \left(mgz_B - F_x x_B \right)$$

$$\vec{v}_A = v_x^A + v_y^A \qquad \vec{v}_B = v_x^B + v_y^B$$

$$\frac{1}{2} m \underbrace{(v_x + v_y)_A^2}_{0} + (mgz_A - F_x \underset{0}{x_A}) = \frac{1}{2} m (v_x + \underset{0}{v_y})_B^2 + (mgz_B - F_x x_B)$$

$$mgz_A = \frac{1}{2} m (v_{xB})^2 + (mgz_B - F_x x_B)$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = mgz_A - mgz_B + F_x x_B$$

$$= mg(z_A - z_B) + F_x x_B$$

$$v_{xB}^2 = \frac{2}{m} \left[mg(z_A - z_B) + F_x x_B \right] = 10{,}12\,m^2/s^2 \Rightarrow \boxed{v_{xB} = 3{,}2\,m/s}$$

$$W_{AB} = \frac{1}{2} m v_{xB}^2 - \frac{1}{2} m \underset{0}{v_A^2} = \frac{1}{2} m v_{xB}^2 = 25{,}3\,J$$

Teorema dell'energia cinetica

Oppure

$$W_{AB} = -\Delta E_p = -\left(E_p^B - E_p^A \right) = -mg(z_B - z_A) + F_x(x_B - \cancel{x_A}) = 25{,}3\,J$$

LEGGI ORARIE

$$\begin{cases} x_1(t) = v t - \frac{1}{2}|a_1| t^2 \\ x_2(t) = \frac{1}{2} a_2 t^2 \end{cases} \rightarrow t = t_0 \begin{cases} x_1 = v t_0 - \frac{1}{2}|a_1| t_0^2 \\ x_2 = \frac{1}{2} a_2 t_0^2 \end{cases}$$

Sostituiamo l'espressione t_0

$$x_1(t_0) = \frac{v^2}{a_2+|a_1|} - \frac{1}{2}|a_1|\frac{v^2}{(a_2+|a_1|)^2} = \frac{(2a_2+|a_1|)v^2}{2(a_2+|a_1|)^2}$$

$$x_2(t_0) = \frac{a_2 v^2}{2(a_2+|a_1|)^2}$$

Siccome $a_2 = \frac{f-F}{m_2} \Rightarrow a_2 = \frac{\mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1+m_2)g}{m_2} =$

$$= \frac{1}{m_2}\left[\mu_1 m_1 - \mu_2(m_1+m_2)\right]g = 0{,}65\ m/s^2$$

$$a_1 = \frac{f}{m_1} \Rightarrow a_1 = -\frac{\mu_1 \cancel{m_1} g}{\cancel{m_1}} = -\mu_1 g = -5{,}88\ m/s^2$$

Ricaviamo x_1

$\boxed{x_1(t_0) = 0{,}758\ m}$ Percorso di m_1 finchè i due corpi non procedono "incollati".

$x_2(t_0) = 0{,}069 m$

↳ distanza percorsa dalla m_2 fino a

Dove m_2 si ferma rispetto al piano?

$\boxed{x_1 = x_2 \equiv x} \Rightarrow a_1 = a_2 \equiv a$ ($a_1 = \ddot{x}_1$, $a_2 = \ddot{x}_2$, $a = \ddot{x}$)

$$\begin{cases} m_1 a_1 = -F_{as} \\ m_2 a_2 = -F + F_{as} \end{cases}$$

$(m_1+m_2)a = -F$
↳ $-\mu_2(m_1+m_2)g$

$x(t) = x_2(t_0) + v_2(t_0)t + \frac{1}{2} a t^2$

↳ $a = -\mu_2 \frac{\cancel{m_1+m_2}}{\cancel{m_1+m_2}} g = -\mu_2 g = -1{,}96\ m/s^2$

$v_1(t_0) = v_2(t_0) = a_2 t_0 = 0{,}30\ m/s$

$v(t) = \underbrace{v_2(t_0)}_{\text{noto}} + \underbrace{a}_{\text{noto}} t = 0$

$v_2(t_0) = -at$

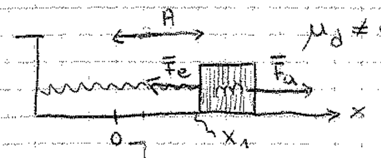
$t_f = \frac{v_2(t_0)}{a} = \frac{0{,}30}{-(-1{,}96)} = 0{,}15 s$

$\rightarrow x(t_f) = 0{,}069 + 0{,}30 \cdot 0{,}15 + \frac{1}{2}(-1{,}96)(0{,}15)^2 =$
$= (0{,}069 + 0{,}023)\ m =$
$= 0{,}092 m$

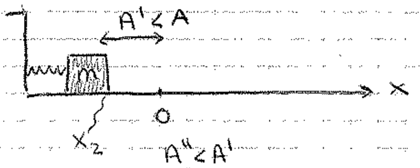
Oscillatore armonico smorzato da una forza di attrito costante: 13/04/12

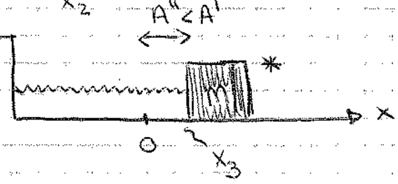
MOTO PSEUDO PERIODICO

$\mu_d \neq 0$! $\quad F_e(x) = -Kx$



O = posizione di riposo





* non torna nella posizione che aveva nella prima situazione.

1) Da $x = x_1$ a $x = x_2 \Rightarrow ma = -Kx \Rightarrow m\ddot{x} = -Kx + F_a$

Da $x = x_2$ a $x = x_3 \Rightarrow m\ddot{x} = -Kx - F_a$

1ª fase
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{F_a}{K} + A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \\ v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

2ª fase
$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{F_a}{K} + A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \\ v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

2) Bilancio energetico

- Trasporto da $x = x_1$ a $x = x_2$

$$\underset{0 \text{ in } x_2}{E_K^f} - \underset{0 \text{ in } x_1}{E_K^i} = -\left(E_p^f - E_p^i\right) + \int_{x_i}^{x_f} F_a\,dx \qquad E_p(x) = \frac{K}{2}x^2 \qquad F_a = \mu_d mg$$

$$0 = -\left(\frac{K}{2}\underset{A'^2}{x_f^2} - \frac{K}{2}\underset{A^2}{x_i^2}\right) + F_a(\underset{-A'}{x_f} - \underset{A}{x_i})$$

$$\frac{K}{2}\left(A'^2 - A^2\right) = \mu mg(-A' - A)$$

$$\frac{K}{2}(A' - A)\cancel{(A' + A)} = -\mu mg\,\cancel{(A' + A)}$$

$$\frac{K}{2}(A' - A) = -\mu mg$$

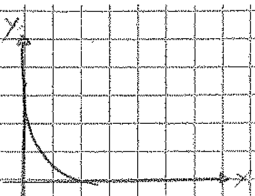
$$A' = A - \frac{2\mu m}{K}g$$

Se non ci fosse attrito $A' = A$ in quanto $\mu = 0$.

- Trasporto da x_2 a x_3:

$$\underset{0 \text{ in } x_3}{E_K^f} - \underset{0 \text{ in } x_2}{E_K^i} = -\left(\underset{\frac{K}{2}A''^2}{E_p^f} - \underset{\frac{K}{2}A'^2}{E_p^i}\right) + \int_{x_2}^{x_3}(-F_a)\,dx \rightarrow$$

1) Smorzamento forte:



$\gamma^2 > \omega_0^2$

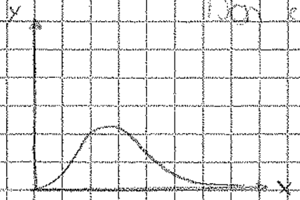
$\to R = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \text{reale}$

$R < \gamma \Rightarrow \boxed{\alpha_1, \alpha_2 < 0}$

$$x(t) = A e^{t(-\gamma - R)} + B e^{t(-\gamma + R)} = e^{-t\gamma}\left(A e^{-tR} + B e^{tR}\right)$$

2) Smorzamento critico:

Non c'è mai oscillazione!



$\gamma^2 = \omega_0^2$

$\gamma \to \omega_0$

$$x(t) \overset{th}{=} e^{-\gamma t}(at + b)$$

$$x(t) = e^{-t\gamma}\left(A e^{-Rt} + B e^{Rt}\right)$$

$R \to 0 \quad \Downarrow$ Taylor

$$= e^{-t\gamma}\left(A - ARt + \frac{A}{2}R^2 t^2 + \ldots + B + BRt + \frac{BR^2 t^2}{2} + \ldots\right)$$

$$= e^{-t\gamma}\left(\underbrace{(A+B)}_{b} + \underbrace{(B-A)R}_{a}\, t + \ldots\right)$$

3) Smorzamento debole:

$$\gamma^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$= -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\omega$$

$$\alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\omega$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$x(t) = A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t} = A e^{-\gamma t + i\omega t} + B e^{-\gamma t - i\omega t} =$$

$$= e^{-\gamma t}\left(A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}\right) \qquad x^* = x \longleftrightarrow A^* = B$$

$$= e^{-\gamma t}\left(A e^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}\right) \qquad A = \frac{A_0}{2} e^{i\phi}$$

$$= e^{-\gamma t}\left(\frac{A_0}{2} e^{i\omega t + i\phi} + \frac{A_0}{2} e^{-i\omega t - i\phi}\right) =$$

$$= \frac{A_0}{2} e^{-\gamma t}\left(e^{i\omega t + i\phi} + e^{-i(\omega t + \phi)}\right) =$$

c'è anche un effetto di oscillazione

$$= A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

Grafico →

$$\begin{cases}(\omega_0^2-\omega^2)\,\text{sen}\,\phi + 2\gamma\omega\cos\phi = 0\\ A(\omega_0^2-\omega^2)\cos\phi - 2\gamma A\omega\,\text{sen}\,\phi - \frac{F_0}{m} = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\gamma\omega = -R\,\text{sen}\,\phi \\ \omega_0^2-\omega^2 = R\cos\phi\end{cases}$$

È LECITO FARLO! ORA SOSTITUISCO

$R\cos\phi\,\text{sen}\,\phi + (-R\,\text{sen}\,\phi)\cos\phi = 0$ OK!

$AR\cos\phi\cos\phi - A(-R\,\text{sen}\,\phi)\,\text{sen}\,\phi = \frac{F_0}{m}$

$\to RA(\underbrace{\cos^2\phi + \text{sen}^2\phi}_{1}) = \frac{F_0}{m}$

$A = \frac{F_0}{mR}$

$(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2-\omega^2)^2 = R^2\,\text{sen}^2\phi + R^2\cos^2\phi = R^2$

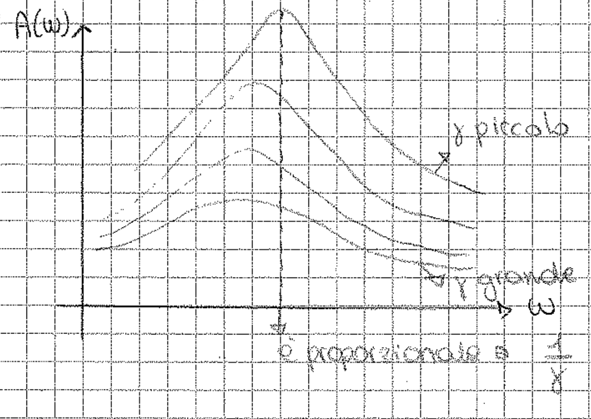
Da questo:

$$A = \frac{F_0}{mR} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

$$-\frac{R\,\text{sen}\,\phi}{R\cos\phi} = -\text{tg}\,\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$\text{tg}\,\phi = \frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

RISONANZA IN AMPIEZZA



$$\frac{dA}{d\omega} = 0 = \frac{F_0\left(-\frac{1}{2}\right)\left[-4\omega(\omega_0^2-\omega^2)+8\gamma^2\omega\right]}{m(\dots)^{3/2}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$8\gamma^2\omega = 4\omega(\omega_0^2-\omega^2)$$

$$2\gamma^2 = (\omega_0^2-\omega^2)$$

MASSIMO $\Leftarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$

La dissipazione in questo caso è la salva vita, perché avrei $\omega_0=\omega$ e quindi avrei $\infty \Rightarrow$ oscillazioni troppo grandi.

17/04/12

Ripasso:

$m\ddot{x} = -Kx - \lambda\dot{x} + F_0\,\text{sen}(\omega t)$

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = \frac{F_0}{m}\,\text{sen}(\omega t)$

$\lambda = 2\gamma \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m}$

$X(t) = \underbrace{x(t)}_{\text{soluzione omogenea}} + x_{sp}(t)$

Soluzione (di prova) particolare $x_{sp}(t) = A\,\text{sen}(\omega t+\phi)$ ... $\Rightarrow$ è una soluz. che va bene se...

$$\begin{cases}\text{tg}\,\phi = \frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\\ A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\end{cases}$$

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{F_0}{m} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left[-4\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+8\gamma^2\omega\right]}{\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0 ? \Rightarrow 2\gamma^2 - \left(\omega_0^2-\omega^2\right) = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$$

Quanto vale A nella ω_{max}?

$$A(\omega_{max}) = \frac{F_0}{2\gamma m\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}$$

RISONANZA IN ENERGIA

Calcolo la POTENZA MASSIMA fornita dal motore esterno, $F(t)$.

$$P(t) = \frac{dE_k}{dt} = v(t)\,F(t) = A\omega\cos(\omega t+\phi)\,F_0\,\text{sen}(\omega t) =$$

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad A\omega\left(\cos(\omega t)\cos\phi - \text{sen}(\omega t)\,\text{sen}\phi\right)F_0\,\text{sen}(\omega t)$$

$$= A\omega F_0\left(\cos(\omega t)\,\text{sen}(\omega t)\cos\phi - \text{sen}^2(\omega t)\,\text{sen}\phi\right) =$$

$$= A\omega F_0\left(\frac{1}{2}\text{sen}(2\omega t)\cos\phi - \text{sen}\phi\,\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{1}{T}A\omega F_0\int_0^T\left[\underbrace{\frac{\cos\phi}{2}\,\text{sen}(2\omega t)}_{\text{va a zero } *} - \frac{\text{sen}\phi}{2} + \underbrace{\frac{\text{sen}\phi}{2}\cos(2\omega t)}_{\text{va a zero } *}\right]dt$$

VALOR MEDIO

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= -\frac{A\omega F_0}{\cancel{T}}\frac{\text{sen}\phi}{2}\cancel{T} = \boxed{\langle P(t)\rangle = -\frac{A\omega F_0\,\text{sen}\phi}{2}}$$

$$* \int_0^T \text{sen}(2\omega t)\,dt = \left[-\frac{\cos(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^T = 0$$

$$\omega \to \frac{2\pi}{T}$$

$$* \int_0^T \cos(2\omega t) = \left[\frac{\text{sen}(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^T = 0$$

$$\langle P(t)\rangle = \frac{-F_0^2\,\omega\,\text{sen}\phi}{2m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}} \qquad \text{sen}\phi = \frac{-2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\boxed{\langle P(t)\rangle = \frac{F_0^2\,\gamma\,\omega^2}{m\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2\right]}}$$

È massima per $\omega = \omega_0$

$$\frac{d\langle P\rangle}{d\omega} = \frac{F_0^2\gamma}{m}\left[\frac{2\omega}{D} - \frac{\omega^2\left(-4\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+8\gamma^2\omega\right)}{D^2}\right]$$

derivata del denominatore

$$= \frac{F_0^2\gamma}{mD^2}\left[2\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + \cancel{8\omega^3\gamma^2} + 4\omega^3\left(\omega_0^2-\omega^2\right) - \cancel{8\gamma^2\omega^3}\right] =$$

$$= \frac{F_0^2\gamma}{mD^2}\underbrace{\left[2\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + 4\omega^3\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\right]}_{2\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left(\omega_0^2-\omega^2+2\omega^2\right)} \qquad \boxed{= 0 \text{ se } \omega = \omega_0}$$

$$2\omega\left(\omega_0^2+\omega^2\right)\left(\omega_0^2-\omega^2\right)$$

TEOREMA

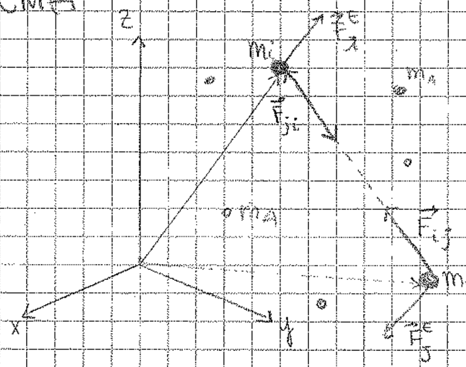
$$\vec{V}_{cm} = \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{M}\sum_j m_j \vec{r}_j(t) = \frac{1}{M}\sum_j m_j \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{1}{M}\sum_j m_j \vec{v}_j$$

$$M\vec{V}_{cm} = \sum_j m_j \vec{v}_j = \sum_j \vec{p}_j = \vec{P}_{TOT}$$

sono tutte le quantità di moto!

$$\vec{A}_{cm} = \frac{d\vec{V}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{M}\sum_j m_j \vec{v}_j = \frac{1}{M}\sum_j m_j \vec{a}_j$$

TEOREMA



Il sistema NON è ISOLATO!

$\forall m_j \ \exists \ \vec{F}^E_j$

$\forall (m_j, m_i)$

$\exists \ \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

$$\vec{R}_i = \vec{F}^E_i + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji}$$

FORZE INTERNE

$$\vec{A}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M}\sum_i \vec{R}_i = \frac{1}{M}\sum_i \left(\vec{F}^E_i + \sum_{j\neq i}\vec{F}_{ji}\right) =$$

II principio di Newton

$$= \frac{1}{M}\sum_i \vec{F}^E_i + \underbrace{\frac{1}{M}\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji}}_{0}$$

$\vec{F}_{12}, \vec{F}_{13}, \vec{F}_{14}, \dots, \vec{F}_{21}, \vec{F}_{23}, \vec{F}_{24}$ si annullano tutte!

$\forall \ F_{ij} \ \exists$ nella doppia somma $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ per cui la doppia sommatoria $= 0$

$$M\vec{A}_{cm} = \sum_i \vec{F}^E_i = \vec{R}^E$$

Corollario

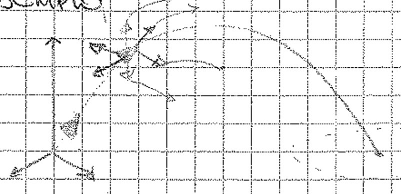
Se il sistema è isolato $\Rightarrow \vec{R}^E = \sum_i \vec{F}^E_i = 0 \Rightarrow M\vec{A}_{cm} = 0 \Rightarrow \vec{V}_{cm} =$ costante

Centro di massa del sistema solare è posizionato vicino al Sole e si muove con velocità costante.

$\Rightarrow P_{TOT} = M\vec{V}_{cm} = cost! \ \to$ 2 masse $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = cost$

$$P_{TOT} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

ESEMPIO



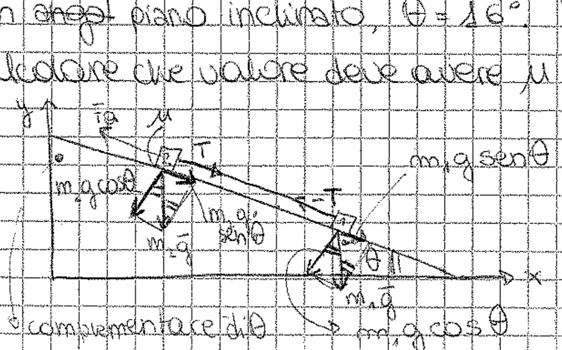
$\vec{R}^E = M\vec{g}$ Prima, ma anche dopo l'esplosione

Quindi i pezzi si muovono seguendo il centro di massa.

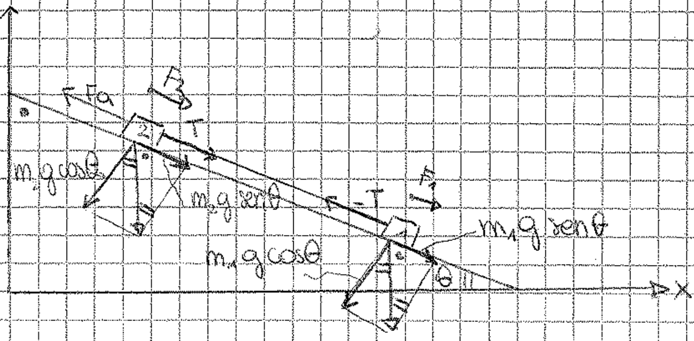
ESERCITAZIONI 19/04/12

ES 2.21

Due corpi di masse $m_1 = 0,48$ kg $m_2 = 0,76$ kg collegati da un filo scendono lungo un ~~angol~~ piano inclinato, $\theta = 16°$. Tra il piano.
Calcolare che valore deve avere μ affinché il moto sia uniforme.



$\mu d = ?$



$$\begin{cases} F_1 = m_1 a_1 = -T + m_1 g \, sen\theta \\ F_2 = m_2 a_2 = T + m_2 g \, sen\theta + (-\mu N) \end{cases}$$

$-\mu N$ → Forza di attrito

$N = m_2 g \cos\theta$

$a_1 = a_2 = 0$ affinché il moto sia uniforme

$$\begin{cases} 0 = -T + m_1 g \sin\theta \\ 0 = T + m_2 g \sin\theta - \mu m_2 g \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_1 g \sin\theta \\ T = -m_2 g \sin\theta + \mu m_2 g \cos\theta \end{cases}$$

$m_1 g \sin\theta = -m_2 g \sin\theta + \mu m_2 g \cos\theta$

$\mu m_2 \cancel{g} \cos\theta = m_1 \cancel{g} \sin\theta - m_2 \cancel{g} \sin\theta$

$\mu m_2 \cos\theta = (m_1 + m_2) \sin\theta$

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_2} tg\theta = 0,47$$

$\theta = 16° \cdot \frac{\pi}{180°} = 0,28$ rad

$tg\theta = 0,29$

Es. 2.39

Ad un blocco di $m = 0,85$ kg in quiete viene applicato $F = 470$ N durante $t = 10^{-2}$ s
A seguito di ciò, il blocco scivola lungo un piano orizzontale liscio ed entra in una guida circolare di $r = 1,6$ m. ✓

✓

Per quale velocità la massa si stacca dalla guida per quell'angolo θ?

$\frac{m}{R} v_B'^2 - 2mg + 3mg\cos\theta = 0$

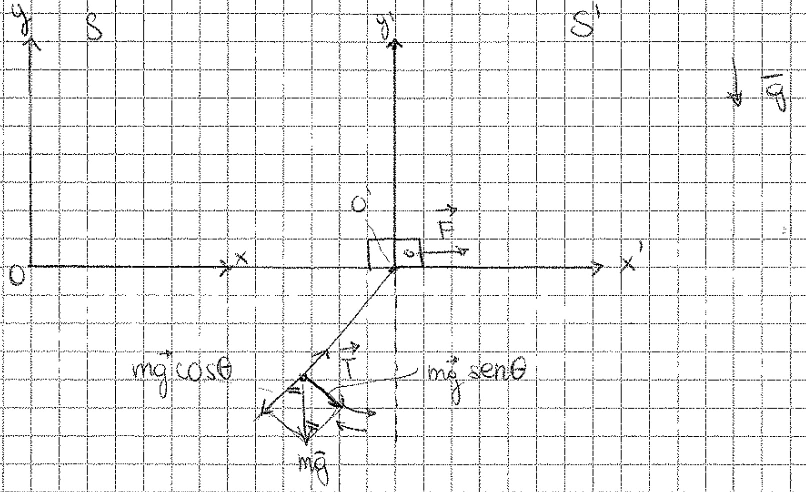
$v_B'^2 = Rg(2 - 3\cos\theta) = \frac{7}{2} Rg = 54,9\ m^2/s^2$, $\boxed{v_B' = 7,4\ m/s}$ velocità in B affinché la massa si distacchi in $\theta = \frac{2}{3}\pi$

ES. 3.6

Un pendolo semplice con $L = 0,4$ m è appeso ad un supporto che avanza con $A = 5\ m/s^2$. Calcolare l'angolo di equilibrio rispetto alla verticale e il periodo di piccole oscillazioni rispetto alla verticale.

$l = 0,4$ m

$A = 5\ m/s^2$



1) $S \to S'$

$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$, $\vec{R} = \vec{OO'}$

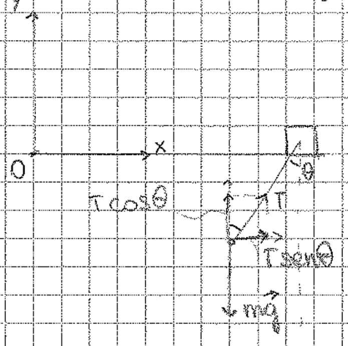
$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{O'}$

$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}_{O'}$, $\vec{A}_{O'} = \vec{A}\,\hat{u}_{x'}$ $\quad m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{A}_{O'}$ Forze in gioco

$m\vec{a} = \vec{R}$ Risultante delle forze sul punto attaccato al pendolo $= m\vec{g} + \vec{T}$

In componenti:

$$\begin{cases} ma_y = -mg + T\cos\theta \\ ma_x = 0 + T\,sen\theta \end{cases}$$



Equilibrio : $\vec{a}' = 0$

$$\begin{cases} ma'_x = ma_x - mA = 0 \\ ma'_y = ma_y + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T\,sen\theta - mA = 0 \\ T\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T\,sen\theta = mA = F_{x'} \\ T\cos\theta = mg = F_{y'} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ se li divido $\Rightarrow$ $tg\,\theta = \frac{A}{g} = \frac{5\ m\,s^{-2}}{9.8\ m\,s^{-2}} = \boxed{0,51}$

$\theta = 27°$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_j m_j \vec{r}_j \wedge \vec{v}_j = \qquad \vec{v}_j - \vec{V}_p \qquad \frac{d}{dt}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right) \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)$$

$$= \sum_j m_j \frac{d}{dt}(\vec{r}_j \wedge \vec{v}_j) = \sum_j m_j \left[\frac{d\vec{r}_j}{dt} \wedge \vec{v}_j + \vec{r}_j \wedge \frac{d\vec{v}_j}{dt}\right]$$

$$= \sum_j m_j \left[(\vec{v}_j - \vec{V}_p) \wedge \vec{v}_j + \vec{r}_j \wedge \vec{a}_j\right] = \qquad \vec{F}_j$$

$$= \sum_j \left[\underbrace{m_j \vec{v}_j \wedge \vec{v}_j}_{0} - m_j \vec{V}_p \wedge \vec{v}_j + \vec{r}_j \wedge m\vec{a}_j\right] =$$

$$= -\sum_j \vec{V}_p \wedge m_j \vec{v}_j + \sum_j \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j =$$

$$= -\vec{V}_p \wedge \underbrace{\sum_j m_j \vec{v}_j}_{M\vec{V}_{cm}} + \sum_j \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j =$$

$$= -M\vec{V}_p \wedge \vec{V}_{cm} + \sum_j \vec{r}_j \wedge \left(\vec{F}_j^E + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}\right)$$

$$= -M\vec{V}_p \wedge \vec{V}_{cm} + \sum_j \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j^E + \sum_j \sum_{i \neq j} \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij} \quad \text{va via!!}$$

$\forall$ coppia (i, j) $\exists$ sia $\vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij}$ sia $\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji}$

$\vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij} + \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji}$ nella doppia somma $= \underbrace{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}_{0} \wedge \vec{F}_{ij}$

$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -M\vec{V}_p \wedge \vec{V}_{cm} + \vec{M}^E$$

($\vec{M}^E$ = momento complessivo delle forze esterne $= \sum_j \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j^E$)

Ci sono 4 casi importanti (2 + frequenti) in cui $\vec{V}_p \wedge \vec{V}_{cm} = 0$. Quindi la formula si semplifica ulteriormente $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E}$ $\Downarrow$

1) $\vec{V}_p = 0$ (il polo è immobile) Quando lo troviamo? Ad esempio nel pendolo fisico, dove il polo è posizionato nel perno).

2) $\vec{V}_{cm} = 0$ (il centro di massa è fermo rispetto a O). Ad esempio, un disco ruota ma, pur non essendo $\vec{v} = 0$, le componenti dell'altezza sono uguali a zero.

3) P coincide con il centro di massa.

4) $\vec{V}_p \parallel \vec{V}_{cm}$

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Se $\vec{M}^E = 0$ ⚠

$\vec{L}$ costante per tutti i corpi del sist. solare

$\Rightarrow \sum_j \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j^E = 0 \begin{cases} \vec{F}_j^E = 0 \quad \forall j \\ \text{Somma delle (risultante } \vec{R}^E = 0) \\ \vec{F}_j^E = 0 \end{cases}$

$\vec{F}_j^E \cong 0$

$\vec{F}_{ij} \neq 0$

$\Downarrow$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \iff \vec{L} = \sum_j m_j \vec{r}_j \wedge \vec{v}_j = \text{COSTANTE}$$

2° TEOREMA di KÖNIG

$$E = E_k = \sum_j \frac{m_j}{2} \vec{v}_j^{\,2} = \sum_j \frac{m_j}{2} \left(\vec{V}_{cm} + \vec{v}\,'_j\right)^2 = \sum_j \frac{m_j}{2} \left(\vec{V}_{cm}^{\,2} + 2\,\vec{V}_{cm} \cdot \vec{v}\,'_j + \vec{v}\,'^{2}_j\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_j m_j\right)}_{M} \vec{V}_{cm}^{\,2} + \underbrace{\sum_j m_j \vec{V}_{cm} \cdot \vec{v}\,'_j}_{*} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_j m_j \vec{v}\,'^{2}_j}_{E'_k} = \boxed{\underbrace{\frac{M}{2}\vec{V}_{cm}^{\,2}}_{\text{orbitale}} + \underbrace{E'_k}_{\text{interna}}}$$

$$* \quad m_1 \vec{V}_{cm} \cdot \vec{v}\,'_1 + m_2 \vec{V}_{cm} \cdot \vec{v}\,'_2 =$$

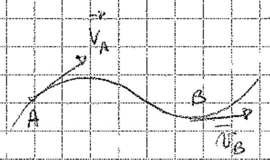
$$= \vec{V}_{cm} \left(m_1 \vec{v}\,'_1 + m_2 \vec{v}\,'_2\right)$$

Quindi posso portare fuori $\vec{V}_{cm}$ dalla sommatoria.

TEOREMA di CONSERVAZIONE dell'ENERGIA MECCANICA

Per 1 particella:

$$E_k^B + E_p^B = E_k^A + E_p^A$$



$E_p(\vec{r})$ = energia potenziale

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla_p E_p \qquad E_k + E_p = \text{cost}$$

Per più particelle:

Tesi:

$$E_k^B + E_p^B = E_k^A + E_p^A$$

$$E_k^B = \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_{jB}^{\,2}$$

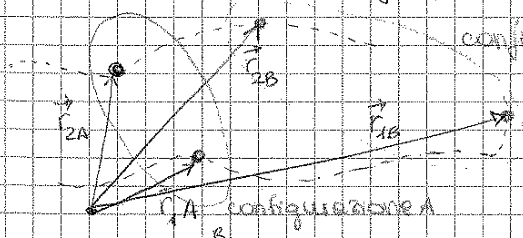
$$E_k^A = \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_{jA}^{\,2}$$

$$E_p^B = \underline{\underline{\mathcal{U}_B^E}} + \mathcal{U}_B^I = \sum_j \mathcal{U}^E(\vec{r}_{jB}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \mathcal{U}_{ij}^B$$

$$E_p^A = \underline{\underline{\mathcal{U}_A^E}} + \mathcal{U}_A^I = \sum_j \mathcal{U}^E(\vec{r}_{jA}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \mathcal{U}_{ij}^A$$

$$\mathcal{U}_{ij} = \mathcal{U}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \Rightarrow \vec{F}_{ij}$$ Sono sempre funzione (del modulo) della distanza

$\frac{1}{2}$? Lo metto perché riguarda sempre 2 particelle alla volta. Perché altrimenti conterei due volte le energie potenziali (una per ogni coppia).



$$W_{AB} = \sum_j \int_A^B \vec{F}_j \cdot d\vec{r}_j = \sum_j \left(\frac{m_j}{2} \vec{v}_{jB}^{\,2} - \frac{m_j}{2} \vec{v}_{jA}^{\,2}\right) = E_k^B - E_k^A$$

per il teorema dell'energia cinetica

OPPURE

$$W_{AB} = \sum_j \int_A^B \vec{F}_j \, d\vec{r}_j = \sum_j \int_A^B \left(\vec{F}_j^E + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}^I\right) \cdot d\vec{r}_j = \underbrace{\sum_j \int_A^B \left(\vec{F}_j^E\right) d\vec{r}_j}_{(1)} + \underbrace{\sum_j \sum_{i \neq j} \int_A^B \vec{F}_{ij} \, d\vec{r}_j}_{(2)} \rightarrow$$