



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 684

DATA: 07/10/2013

APPUNTI

STUDENTE: Taberna

MATERIA: Analisi dei Segnali

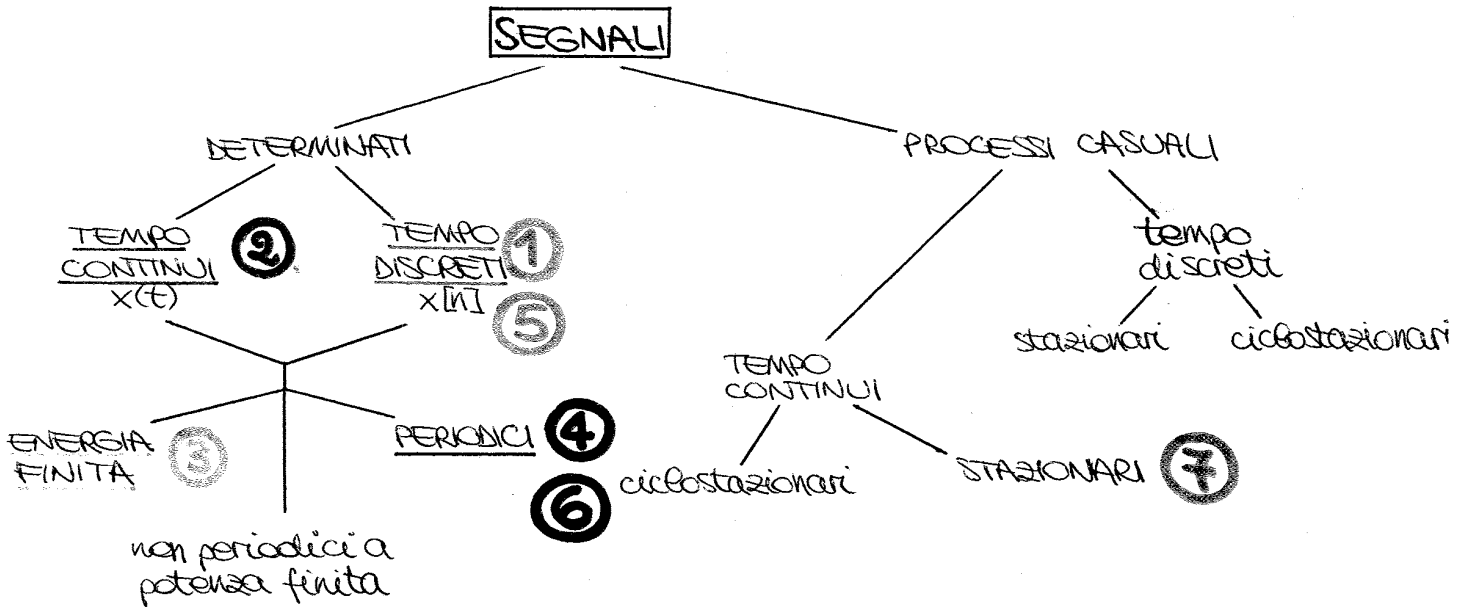
Prof. Visintin

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

ANALISI DEI SEGNALI



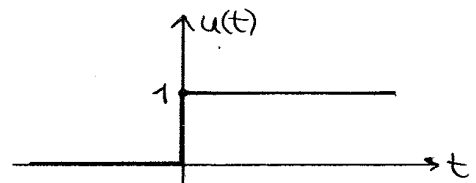
① SEGNALI TEMPO DISCRETI

- LINEARITÀ $y_1[n] = \sigma\{x_1[n]\}$
 $y_2[n] = \sigma\{x_2[n]\} \rightarrow \sigma\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 \sigma\{x_1[n]\} + a_2 \sigma\{x_2[n]\}$
- TEMPO INVARIANZA $y_1[n] = \sigma\{x_1[n]\}$
 $y_2[n] = \sigma\{x_2[n]\} = \sigma\{x_1[n-N]\} \rightarrow y_2[n] = y_1[n-N]$
- DELTA $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$
- USCITA DEL SISTEMA (CONVOLUZIONE) $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$
- CAMPIONAMENTO $x[n] \delta[n-k_0] = x[k_0] \delta[n-k_0]$
 $x[n] = x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$

② SEGNALI TEMPO CONTINUI

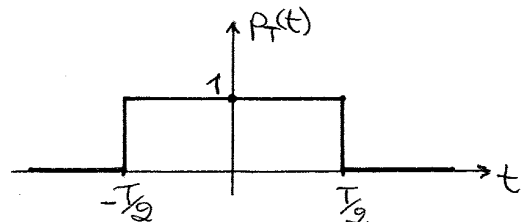
- SEGNALE GRADINO UNITARIO $u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



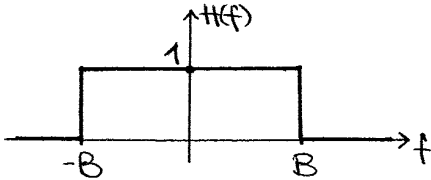
- SEGNALE PORTA $p_T(t)$

$$p_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



• FILTRI

• PASSABASSO di banda B

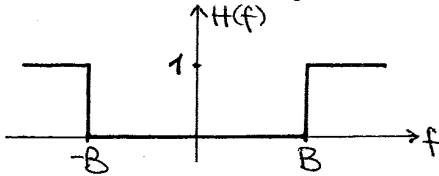


Banda a 3dB: $|H(B_{3dB})|^2 = \frac{1}{2} |H(0)|^2$

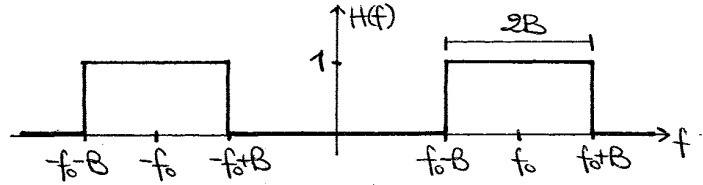
Banda a ndB: 1) $10 \log_{10} X = n$, $X = 10^{\frac{n}{10}}$

2) noto x, $|H(B_{ndB})|^2 = \frac{1}{X} |H(0)|^2$

• PASSA ALTO di frequenza di taglio B



• PASSABANDA di frequenza centrale f0 e banda 2B



③ SEGNALI A ENERGIA FINITA

• ENERGIA di x(t) $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$

• TEOREMA DI PARSEVAL $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$
 $\rightarrow \psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(f) df$

• SPETTRO DI ENERGIA $S_x(f) = |X(f)|^2$
 $S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2$

• FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE di x(t) $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \cdot x(t+\tau) dt$
 $\rightarrow R_x(\tau) = R_x(-\tau)$
 $\rightarrow R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_H(\tau)$

• DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ $|\int x(t)y(t) dt|^2 \leq \int |x(t)|^2 dt \cdot \int |y(t)|^2 dt$
 max per $x(t) \propto y(t)$

• PRODOTTO SCALARE $\langle x(t), y(t) \rangle = \int x^*(t) y(t) dt$
 $\rightarrow R_x(\tau) = \langle x(t), x(t+\tau) \rangle$ max per $\tau=0$
 $\rightarrow R_x(0) = E_x$

• FUNZIONI DI MUTUA CORRELAZIONE (CROSS CORRELATION) $R_{yx}(\tau) = \int x(t)y(t+\tau) dt$
 $R_{xy}(\tau) = \int y(t)x(t+\tau) dt$

• SPETTRI MUTUI $S_{yx}(f) = X^*(f) \cdot Y(f) = \int R_{yx}(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau$
 $S_{xy}(f) = X(f) \cdot Y^*(f) = \int R_{xy}(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau$

- SERIE DI FOURIER per un SEGNALE SINUSOIDALE $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$

$$\otimes X(f) = \mu_1 \delta(f - \frac{1}{T}) + \mu_{-1} \delta(f + \frac{1}{T})$$

- SERIE DI FOURIER per un TRENO DI DELTA $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$

$$\otimes X(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T})$$

- SIMMETRIE (se $x(t)$ e $x_T(t)$ sono reali)

$$X_T(f) = X_T^*(f)$$

$|X(f)|$ è pari

$\angle X(f)$ è dispari

$$|\mu_k| = |\mu_{-k}|$$

$$\angle \mu_k = -\angle \mu_{-k}$$

- POTENZA $\otimes P_x = \sum_k |\mu_k|^2$

- SPETTRO DI POTENZA $G_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 \delta(f - \frac{k}{T})$, $\otimes G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$

$$\text{infatti } \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \sum_k |\mu_k|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T}) df = \sum_k |\mu_k|^2 = P_x$$

- FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ G_x(f) \} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t+\tau) dt$$

$$R_x(0) = \sum_k |\mu_k|^2 = P_x$$

se $x(t)$ è reale, $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$

$|R_x(\tau)|_{\max}$ per $\tau = 0, \pm T, \pm 2T, \dots$ (perché $R_x(\tau)$ è periodica)

$$\otimes R_y(\tau) = R_h(\tau) * R_x(\tau)$$

↳ con $R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t+\tau) dt$ periodico

$R_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) h(t+\tau) dt$ non periodico !

5 SEGNALI TEMPO DISCRETI

- CAMPIONATORE $x(t) \rightarrow x(nT_s)$

T_s : INTERVALLO di campionamento

$f_s = \frac{1}{T_s}$: FREQUENZA di campionamento

- TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

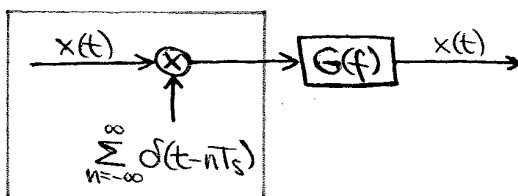
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) g(t - nT_s) \otimes$$

Occorre che:

- $f_s > 2B_x$
- $G(f)$ sia di tipo passabasso, con banda $> B_x$

$$\left(\text{oppure } G(f) = \begin{cases} T_s & |f| \leq f_s/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \right)$$

- SCHEMA DI CAMPIONAMENTO per un $x(t)$ strettamente limitato in banda



CAMPIONATORE IDEALE

- ENERGIA di $x[n]$ $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$
- SEGNALE PERIODICO di periodo M $x[n] = x[n+M]$
- POTENZA di un segnale periodico $P_x = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} |x[n]|^2$
- FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE
 - di un segnale a energia finita $R_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] x[n+m]$
 - di un segnale periodico $R_x(m) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x^*[n] x[n+m]$
- SISTEMA LTI STABILE $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$ (stabile in senso BIBO)
- CONVOLUZIONE $y[n] = \sum_k x[k] h[n-k] = x[n] * h[n]$
- TRASFORMATA ZETA di $x[n]$ $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$ non esiste per segnali periodici
 $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$ FUNZIONE DI TRASFERIMENTO
 $Y(z) = Z\{x[n] * h[n]\} = X(z) \cdot H(z)$ \otimes
- ESPANSIONE IN FRATTI SEMPLICI

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k}{b_0 + b_1 x + \dots + b_N x^N} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k}{b_N (x-p_1)(x-p_2)\dots(x-p_N)}$$
 - $k < N$
 - tutti poli distinti
 - poli semplici: $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{C_1}{x-p_1} + \frac{C_2}{x-p_2} + \dots + \frac{C_N}{x-p_N}$ con $C_k = \lim_{x \rightarrow p_k} \frac{N(x)}{D(x)} (x-p_k)$
 - poli multipli: $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-p} + \frac{B}{(x-p)^2}$ con $A = \lim_{x \rightarrow p} \frac{d}{dx} \left[\frac{N(x)}{D(x)} (x-p)^2 \right]$, $B = \lim_{x \rightarrow p} \frac{N(x)}{D(x)} (x-p)^2$
- CONDIZIONE DI STABILITÀ $|p| < 1$ per ogni polo

⑥ SEGNALI PERIODICI TEMPO DISCRETI

- BASE ORTONORMALE $B = \{\psi_k[n]\}_{k=0}^{N-1}$
 $\psi_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi k n / N}$ $n=0, 1, \dots, N-1$
 $\otimes \langle \psi_k[n], \psi_l[n] \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } k=l \\ 0 & \text{se } k \neq l \end{cases} \quad \langle \psi_k[n], \psi_k[n] \rangle = 1$
- BASE COMPLETA: ogni segnale è esprimibile come combinazione lineare degli $\psi_k[n]$
- Sviluppo in serie di Fourier $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \psi_k[n]$
 con $c_k = \langle x[n], \psi_k[n] \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \psi_k^*[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k n / N}$
- DFT (Discrete Fourier Transform) $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k n / N} = \sqrt{N} c_k$ ($k=0, \dots, N-1$)
 $\text{DFT}\{e^{j2\pi k n / N}\} = N \cdot \delta[k-1]$, $\text{DFT}\{e^{j2\pi (k-N) n / N}\} = N \cdot \delta[k-(N-1)]$

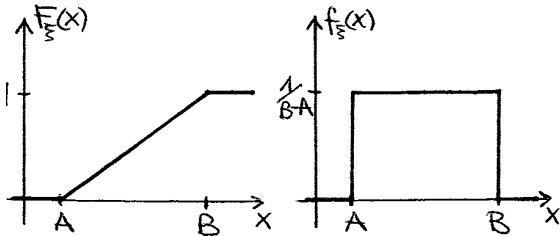
• VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

- assumono solo valori discreti in \mathbb{R}
- $F_{\xi}(x)$ crescente a gradini, $0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1$
- $f_{\xi}(x)$ con δ di Dirac

• VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

- assumono tutti i possibili valori in \mathbb{R} , $P\{\xi=x\}=0$
- $F_{\xi}(x)$ continua, monotona crescente, $0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1$
- $f_{\xi}(x)$ continua, sempre positiva (no δ di Dirac)

• DENSITÀ DI PROB. UNIFORME $\xi \in U(A, B)$



$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(u) du \quad \left. \begin{array}{l} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi}(x) = 1 \end{array} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) dx = 1$$

$$P\{\xi \in (x_1, x_2]\} = \int_{x_1}^{x_2} f_{\xi}(u) du = (x_2 - x_1) \frac{1}{B-A} \quad \text{se } A < x_1 < x_2 < B$$

• MEDIA/VALOR MEDIO $\mu_{\xi} = E\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\xi}(x) dx$

• VALOR QUADRATICO MEDIO $E\{\xi^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{\xi}(x) dx$

• VARIANZA $\sigma_{\xi}^2 = E\{(\xi - \mu_{\xi})^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_{\xi})^2 \cdot f_{\xi}(x) dx$

$$\sigma_{\xi}^2 = E\{\xi^2\} - \mu_{\xi}^2$$

• TEOREMA FONDAMENTALE DELLA MEDIA $E\{g(\xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_{\xi}(x) dx$

• DENSITÀ DI PROBABILITÀ GAUSSIANA $f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\xi}^2}(x - \mu_{\xi})^2}$

• FUNZIONE CARATTERISTICA $C_{\xi}(p) = E\{e^{ip\xi}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \cdot f_{\xi}(x) dx = \mathcal{F}\{f_{\xi}(x)\} \Big|_{-2\pi z = p}$

• DISTRIBUZIONE DI PROB. CUMULATIVA CONGIUNTA $F_{\xi, \eta}(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\}$
(per una coppia di v.a.)

• DENSITÀ DI PROB. CONGIUNTA $f_{\xi, \eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi, \eta}(x, y)$
(per una coppia di v.a.)

• TEOREMA FONDAMENTALE DELLA MEDIA $E\{g(\xi, \eta)\} = \iint g(x, y) \cdot f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy$
(per una coppia di v.a.)

• COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE $\rho_{\xi, \eta} = \frac{E\{(\xi - \mu_{\xi})(\eta - \mu_{\eta})\}}{\sigma_{\xi} \cdot \sigma_{\eta}} \quad -1 \leq \rho_{\xi, \eta} \leq 1$

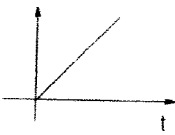
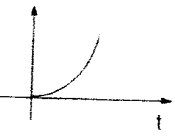
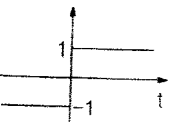
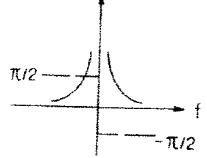
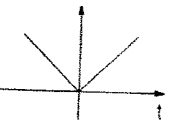
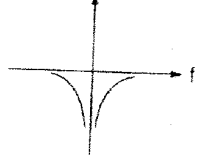
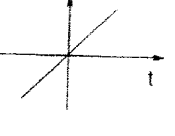
• COPIA DI V.A. STATISTICAMENTE INDIPENDENTI

• $F_{\xi, \eta}(x, y) = P\{\xi \leq x\} \cdot P\{\eta \leq y\} = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)$

• $f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y)$

• $\rho_{\xi, \eta} = 0$

4.5 - Tavole di Trasformate di Fourier

Funzione del tempo $x(t)$		Funzione della frequenza $X(f)$	
8	 $tu(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{-1}{(2\pi f)^2} + \frac{\delta(f)}{j4\pi f}$ $= \frac{1}{(j2\pi f)^2} + \frac{j\delta'(f)}{4\pi}$	
9	 $t^n u(t) = \begin{cases} t^n, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{n!}{(j2\pi f)^{n+1}} + \frac{\delta(f)n!}{2(j2\pi f)^n}$ $= \frac{n!}{(j2\pi f)^{n+1}} + j^n \frac{\delta^{(n)}(f)}{2(2\pi)^n}$	
10	 $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j\pi f}$	
11	 $ t $	$-\frac{1}{2\pi^2 f^2}$	
12	 t	$j \frac{\delta'(f)}{2\pi}$	
13	t^n $n \text{ intero } \geq 0$	$\frac{j^n \delta^{(n)}(f)}{(2\pi)^n}$	
14	$ t^n $ $n \text{ dispari}$	$\frac{2n!}{(j2\pi f)^{n+1}}$	

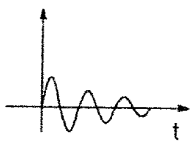
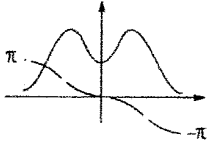
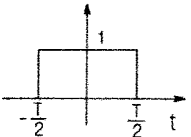
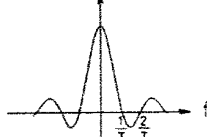
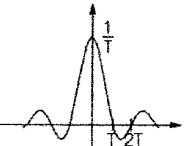
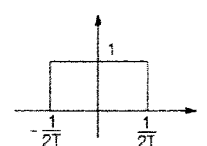
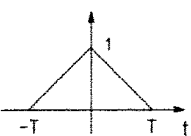
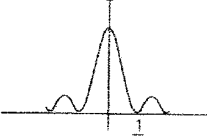
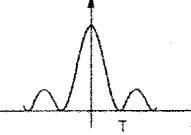
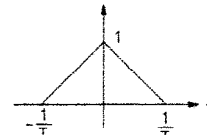
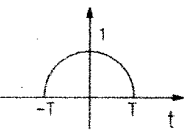
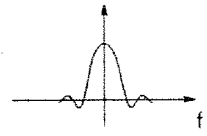
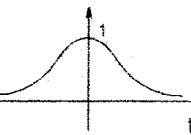
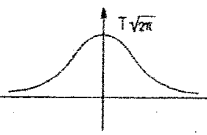
4.5 – Tavole di Trasformate di Fourier

55

Proprietà	Segnale	Trasformata di Fourier
	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{+j2\pi ft} df$	$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$
	$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f)e^{+j2\pi ft} df$	$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt$
linearità	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
inversione assi	$x(-t)$	$X(-f)$
coniugazione	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
anticipo o ritardo	$x(t \pm \theta)$	$X(f)e^{\pm j2\pi f\theta}$
scalamento in t	$x(kt)$	$\frac{1}{ k }X\left(\frac{f}{k}\right)$
scalamento in f	$\frac{1}{ k }x\left(\frac{t}{k}\right)$	$X(kf)$
parità	$x(t)$ reale	$\mathcal{R}\{X(f)\}$ pari
	$x(t)$ reale	$\mathcal{I}\{X(f)\}$ dispari
	$x(t)$ reale	$ X(f) $ pari
	$x(t)$ reale	$\arg\{X(f)\}$ dispari
	$x(t)$ reale e pari	$X(f)$ reale e pari
traslazione in f	$x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$X(f \mp f_0)$
modulazione	$x(t) \cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$
convoluzione	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau$	$X(f)Y(f)$
prodotto	$x(t)y(t)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} X(a)Y(f - a) da$
derivazione	$\dot{x}(t)$	$j2\pi fX(f)$
integrazione	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f}X(f) + X(0)\delta(f)$
dualità	$X(t)$	$x(-f)$

Tabella 4.1 – Proprietà della trasformata di Fourier

4.5 - Tavole di Trasformate di Fourier

	Funzione del tempo $x(t)$		Funzione della frequenza $X(f)$
22		$u(t)e^{-at} \sin(2\pi f_0 t),$ $a > 0$	$\frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$ 
23		$p_T(t) = \begin{cases} 1, & t < T/2 \\ 0, & t > T/2 \end{cases}$	$T \operatorname{Sinc}(fT)$ $= \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}$ 
24		$\frac{1}{T} \operatorname{Sinc}(t/T) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}$	$p_{1/T}(f) = \begin{cases} 1, & f < 1/2T \\ 0, & f > 1/2T \end{cases}$ 
25		$\operatorname{tri}(t/T) = \begin{cases} 1 - t /T, & t < T \\ 0, & t > T \end{cases}$	$T \operatorname{Sinc}^2(fT)$ $= T \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}$ 
26		$\frac{1}{T} \operatorname{Sinc}^2(t/T) = T \left[\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} \right]^2$	$\operatorname{tri}(fT) = \begin{cases} 1 - f T, & f < 1/T \\ 0, & f > 1/T \end{cases}$ 
27		$\sqrt{1 - (t/T)^2}, t < T$ 0, $ t > T$	$\frac{J_1(2\pi fT)}{2f}$ 
28		$e^{-t^2/2T^2}$	$T\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2 f^2 T^2}$ 

06.03.13

- Lo Presti, Neri "L'analisi dei segnali", CLUT
- Lo Presti, Neri "Introduzione ai processi casuali", CLUT
- Davis, Magli "Esercizi svolti di teoria dei segnali", CLUT

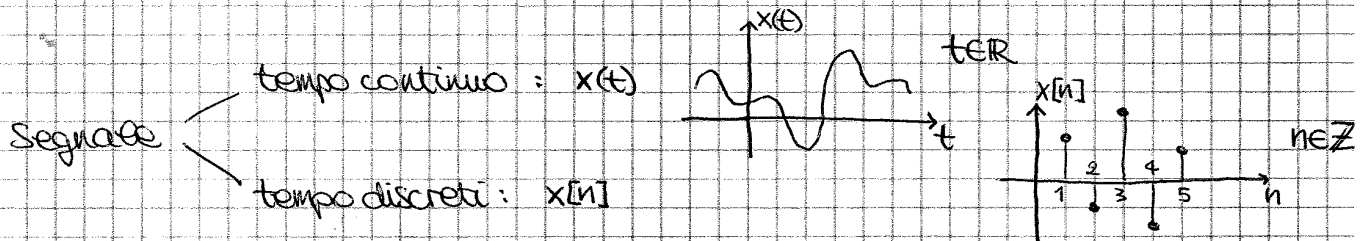
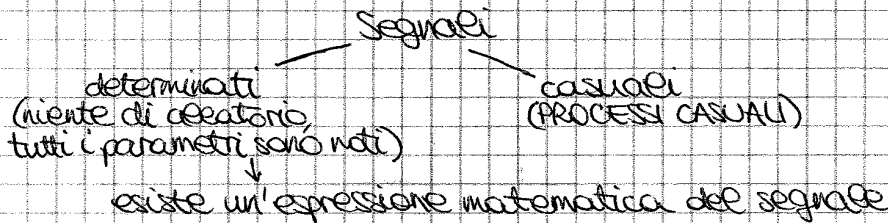
Esame scritto
26/6, 15/7, 2/9

- tempo continuo
- processi casuali
- tempo discreto
- + domande di teoria

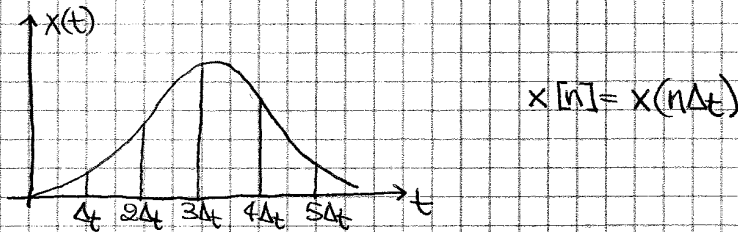
Per usare Octave online: www.cvberry.com/octave

07.03.13

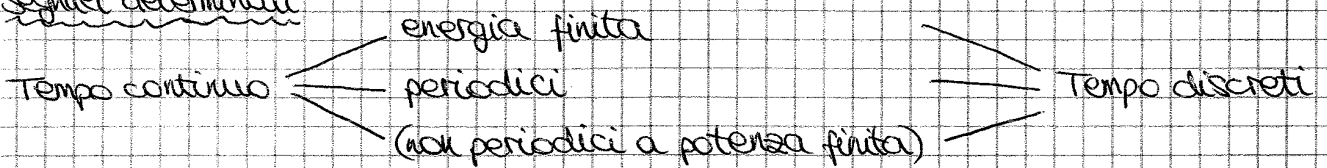
CLASSIFICAZIONE dei SEGNALI

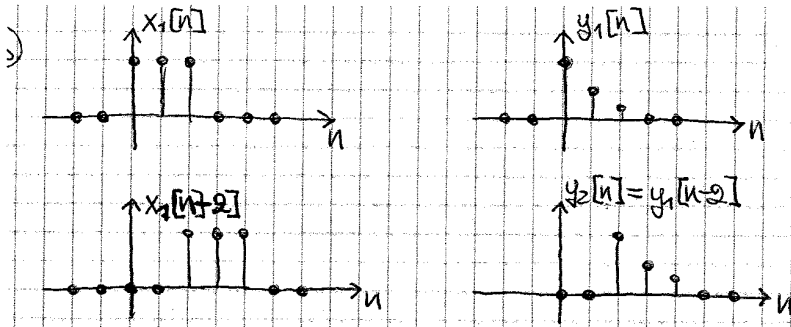


CAMPIONATORI: da una forma d'onda tempo continuo a una tempo discreto

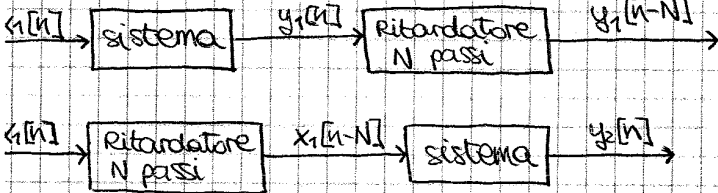


Segnali determinati





→ tempo invariante



Il sistema è tempo invariante se è possibile scambiare la posizione relativa di ritardatore e sistema senza che l'uscita cambi.

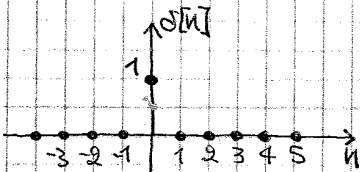
$$y_2[n] = y_1[n-N]$$

$$y_1[n] = \mathcal{G}\{x_1[n]\}$$

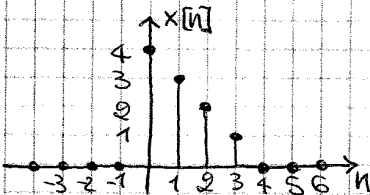
$$y_2[n] = \mathcal{G}\{x_2[n]\} = \mathcal{G}\{x_1[n-N]\}$$

sistema è tempo invariante se $y_2[n] = y_1[n-N]$

LTA



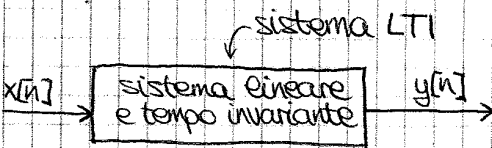
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



$$x[n] = 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$



$$y[n] = \mathcal{G}\{x[n]\}$$

$$y[n] = \mathcal{G}\{x[n]\} = \mathcal{G}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

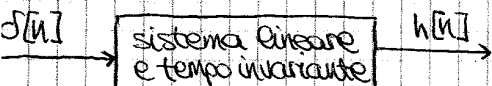
il sistema è lineare

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}\{x[k]\delta[n-k]\}$$

x[k] è un coefficiente moltiplicativo

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \mathcal{G}\{\delta[n-k]\}$$

il sistema è tempo invariante



$h[n]$: RISPOSTA ALL'IMPULSO

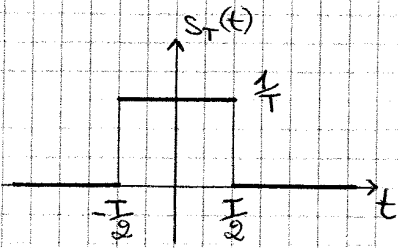
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$y[n]$ è la CONVOLUZIONE (discreta) tra $x[n]$ e $h[n]$

SISTEMA TEMPO CONTINUO

13.03.13

ELTA di DIRAC $\delta(t)$

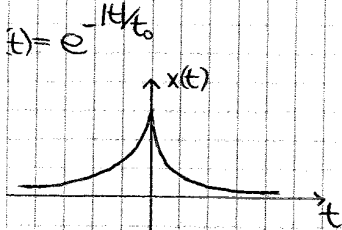


$$s_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

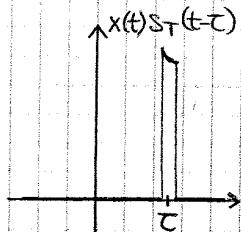
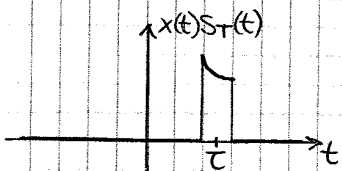
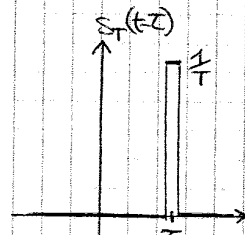
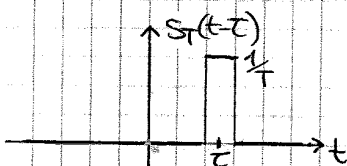
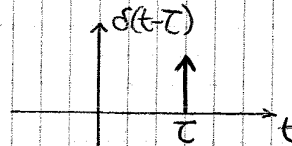
$$\int_{-\infty}^{\infty} s_T(t) dt = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} s_T(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



$$x(t) \delta(t-\tau) = \lim_{T \rightarrow 0} [x(t) s_T(t-\tau)]$$



CAMPIONAMENTO:

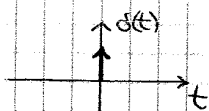
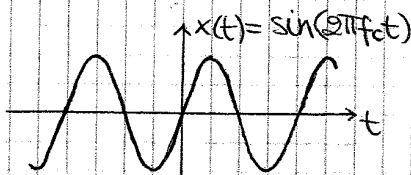
$$x(t) \delta(t-\tau) = x(\tau) \delta(t-\tau) \quad (\text{T.C.})$$

$$* \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-\tau) dt = x(\tau) \quad (\text{T.C.})$$

$$x[n] \delta[n-k_0] = x[k_0] \delta[n-k_0] \quad (\text{T.D.})$$

$$** x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (\text{T.C.})$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \quad (\text{T.D.})$$



$$x(t) \delta(t-t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) \delta(t-t_0) dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \overset{=1}{\delta(t-t_0)} dt = x(t_0)$$

$$\int x(\tau) \delta(t_0-\tau) d\tau = \int x(t_0) \delta(t_0-\tau) d\tau = x(t_0) \int \overset{=1}{\delta(t_0-\tau)} d\tau = x(t_0)$$

perché $\delta(t_0-\tau)$ vale ∞ per $\tau=t_0$,
così quando l'argomento vale zero

$$\int h(\tau) \omega(t-\tau) d\tau = \lambda \omega(t)$$

$$\omega(t-\tau) = \omega(t) g(\tau) : \text{ se } \omega(t) \text{ ha questa forma, allora } \int h(\tau) \omega(t) g(\tau) d\tau = \omega(t) \underbrace{\int h(\tau) g(\tau) d\tau}_{\lambda}$$

esponenziale soddisfa la condizione, infatti $e^{\omega(t-\tau)} = e^{\omega t} \cdot e^{-\omega \tau}$

funzione $\omega_s(t) = e^{st} \quad s \in \mathbb{C}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \omega_s(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{st} e^{-s\tau} d\tau = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{\lambda_s = H(s) \in \mathbb{C}}$$

$$\lambda_s = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

TRASFORMATA di LAPLACE di h(t) (per sistemi LTI)

↳ fz. complessa di variabile complessa

$$\omega_s = e^{st}, \quad \omega_s(t) * h(t) = \omega_s(t) \cdot H(s)$$

se si pone $s = j2\pi f$ si ottiene la TRASFORMATA di FOURIER (FER)

$$\omega_f(t) = e^{j2\pi f t}$$

$$\omega_f(t) * h(t) = \int h(\tau) \omega_f(t-\tau) d\tau = \int h(\tau) \cdot e^{j2\pi f (t-\tau)} d\tau = e^{j2\pi f t} \underbrace{\int h(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau}_{\lambda_f = H(f)} = \omega_f(t) \cdot H(f)$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

TRASFORMATA di FOURIER di h(t)

$H(f) \in \mathbb{C}$, FER (frequenza)

↳ FUNZIONE di TRASFERIMENTO oppure RISPOSTA in FREQUENZA

generale, Laplace → Fourier: $H(s) \rightarrow H(f) = H(s) \Big|_{s=j2\pi f}$

$$x(t) \delta(t-t_0) = x(t_0) \delta(t-t_0)$$

$$\int \delta(t) dt = 1$$

$$x(t) * h(t) = \int x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

$$H(f) = \int h(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

trasformate di Fourier: $H(f) = \int h(t) e^{-j2\pi ft} dt$
 $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$] trasformata di un sistema

$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int x(t) e^{-j2\pi ft} dt$ trasformata di un segnale

LINEARITÀ: $\mathcal{F}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$

e $x(t)$ è reale, allora $X^*(f) = X(-f)$

Dim. $X(f) = \int x(t) e^{-j2\pi ft} dt$
 $X^*(f) = \left[\int x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right]^* = \int x^*(t) e^{+j2\pi ft} dt = \int x(t) e^{j2\pi ft} dt = X(-f)$
 $x(t)$ reale, quindi $x^*(t) = x(t)$ $\downarrow = e^{j2\pi ft} t$

e $x(t)$ è reale, $|X(f)| = |X(-f)|$ → il modulo è una fz. pari

$\angle X(f) = -\angle X(-f)$ → la fase è una fz. dispari

Dim. $X(-f) = X^*(f)$, $X(f) = M(f) e^{j\psi(f)}$ con $M(f) = |X(f)|$ e $\psi(f) = \angle X(f)$

$M(f) e^{j\psi(f)} = \left[M(f) e^{j\psi(f)} \right]^*$

$M(f) e^{j\psi(f)} = M(f) e^{-j\psi(f)}$ per essere vera deve essere: $\begin{cases} M(-f) = M(f) \\ \psi(-f) = -\psi(f) \end{cases}$

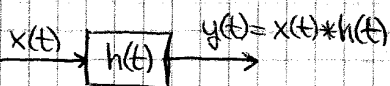
se $x(t)$ è reale, $\text{Re}\{X(f)\}$ è pari

$\text{Im}\{X(f)\}$ è dispari

Dim. $X(-f) = X^*(f)$, $X(f) = X_R(f) + j X_I(f)$

$X_R(-f) + j X_I(-f) = X_R(f) - j X_I(f) \Rightarrow \begin{cases} X_R(-f) = X_R(f) \\ X_I(-f) = -X_I(f) \end{cases}$

TRASFORMATA di FOURIER dell'uscita di un sistema



$Y(f) = \int y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_t \left[\int_{\tau} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt = \int_{\tau} x(\tau) \left[\int_t h(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt \right] d\tau$

$\tau = u, t = u + \tau$

$Y(f) = \int_{\tau} x(\tau) \left[\int_{u=-\infty}^{\infty} h(u) e^{-j2\pi f(u+\tau)} du \right] d\tau = \int_{\tau} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} \left[\int_u h(u) e^{-j2\pi fu} du \right] d\tau = H(f) \int_{\tau} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$

$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$

TRASFORMATA di FOURIER dell'USCITA

$\mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \cdot \mathcal{F}\{h(t)\}$



$$x(t) = e^{j2\pi f t}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$H(f) = e^{-j\pi f T} \cdot T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}, \quad X(f) = \delta(f - f_0)$$

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) = \delta(f - f_0) H(f) = H(f_0) \delta(f - f_0)$$

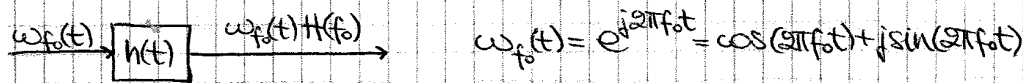
$$\mathcal{F}\{e^{j2\pi f t}\} = \delta(f - f_0) \rightarrow \text{linearità} \rightarrow \alpha \cdot \delta(f - f_0) = \mathcal{F}\{\alpha \cdot e^{j2\pi f t}\}$$

$$\rightarrow y(t) = H(f_0) e^{j2\pi f t}$$

20.03.13

part 26 : esercitazione h. 16-17.30 (aula 12A)

RIASSUNTO



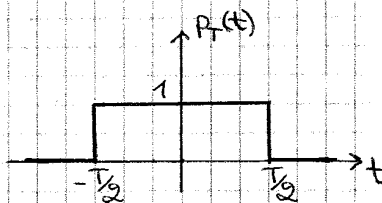
$$H(f_0) = \int h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau$$

sono infinite autofunzioni $w_f(t) = e^{j2\pi f t}$ (f ∈ ℝ) con autovalori

$$H(f) = \int h(t) e^{-j2\pi f t} dt : \text{TRASF. di FOURIER di } h(t)$$

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$p(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



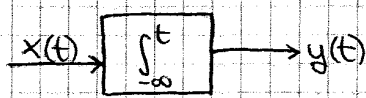
SEGNALE PORTA

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{p(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t} dt = \left. \frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}}{-j2\pi f} = \\ &= \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j} \cdot \frac{1}{\pi f} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \cdot \frac{T}{T} = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \end{aligned}$$

su Matlab esiste la funzione:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

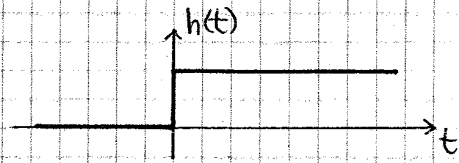
INTEGRAZIONE



$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$$

L'integratore è un sistema non stabile

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



GRADINO UNITARIO $u(t)$

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$H(f) = \frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}$$

Usare sempre $H(f) = \frac{1}{j2\pi f}$!

$$Y(f) = X(f)H(f) = X(f) \left[\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f} \right] = \frac{1}{2} X(0)\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

e $X(0) = 0$:

$$Y(f) = \mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^t x(u) du \right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

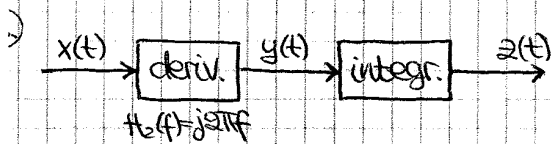


$$Y(f) = X(f)H_1(f)$$

$$Z(f) = Y(f)H_2(f) = (X(f)H_1(f))H_2(f) = X(f)[H_1(f) \cdot H_2(f)]$$

è voluto $z(t) = x(t)$, allora deve essere $H_1(f) \cdot H_2(f) = 1$, $H_1(f) = \frac{1}{H_2(f)} = \frac{1}{j2\pi f}$

unica ipotesi da verificare è che $X(0) = 0$



$$Z(f) = X(f)H_2(f) = X(f) \cdot j2\pi f$$

$$\rightarrow Y(0) = 0$$

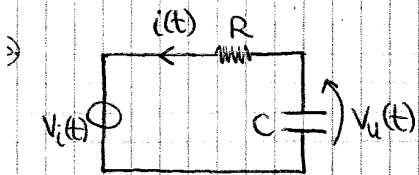
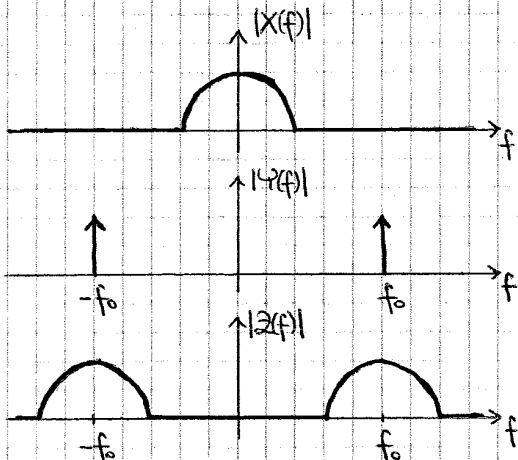
→ la funzione di trasferimento dell'integratore è correttamente

$$H_1(f) = \frac{1}{j2\pi f}$$

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$ $y(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ $z(t) = x(t) \cdot y(t)$

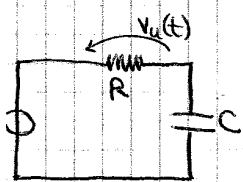
$Z(f) = X(f) * Y(f)$ $Y(f) = \frac{A}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$

$Z(f) = \frac{A}{2} [X(f) * \delta(f-f_0) + X(f) * \delta(f+f_0)] = \frac{A}{2} [X(f-f_0) + X(f+f_0)]$



$I(f) = \frac{V_i(f)}{R + \frac{1}{j2\pi f C}}$ $V_u(f) = \frac{1}{j2\pi f C} \cdot I(f) = \frac{1}{j2\pi f C} \cdot \frac{V_i(f)}{R + \frac{1}{j2\pi f C}} = V_i(f) \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$

$H_1(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$

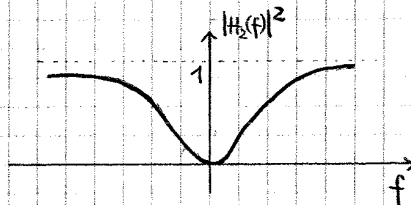
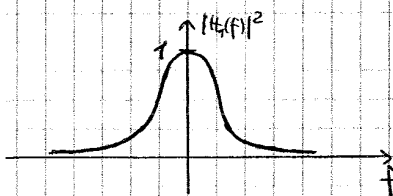


$V_u(f) = R I(f) = R \cdot \frac{V_i(f)}{R + \frac{1}{j2\pi f C}} = \frac{j2\pi f RC}{1 + j2\pi f RC} V_i(f)$

$H_2(f) = \frac{j2\pi f RC}{1 + j2\pi f RC} = \frac{1 + j2\pi f RC - 1}{1 + j2\pi f RC} = 1 - H_1(f)$

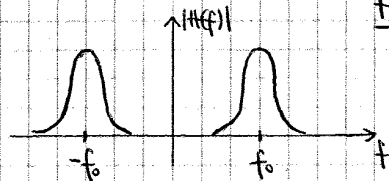
$|H_1(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi f RC)^2}$

$|H_2(f)|^2 = \frac{(2\pi f RC)^2}{1 + (2\pi f RC)^2}$



FILTRO PASSABASSO

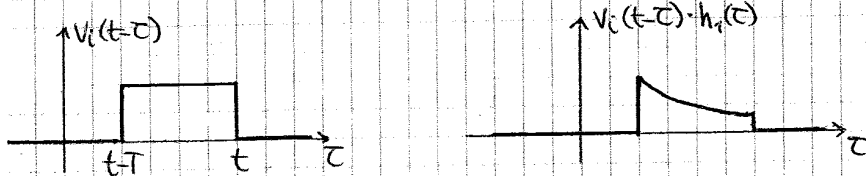
FILTRO PASSA ALTO



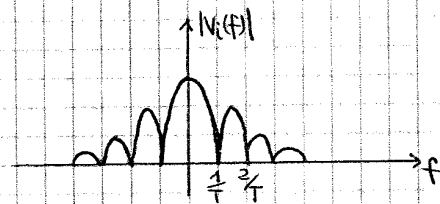
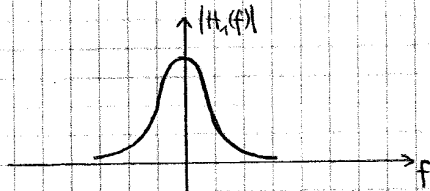
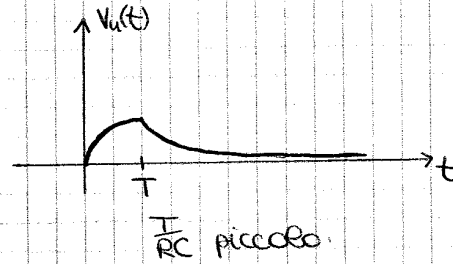
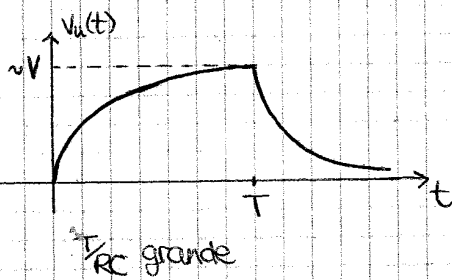
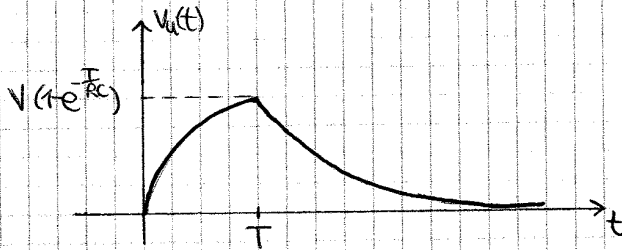
FILTRO PASSA BANDA

$$= \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} u(\tau) V d\tau = \frac{V}{RC} \cdot \frac{e^{-\frac{t-\tau}{RC}}}{-\frac{1}{RC}} \Big|_0^t = \frac{V}{RC} \frac{e^{-\frac{t-\tau}{RC}} - 1}{-\frac{1}{RC}} = \underline{V(1 - e^{-\frac{t}{RC}})} \text{ per } 0 < t < T$$

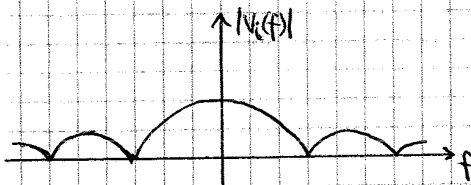
= 0 per $t < 0$



$$= \int_{t-T}^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} u(\tau) V d\tau = \frac{V}{RC} \frac{e^{-\frac{t-\tau}{RC}} - 1}{-\frac{1}{RC}} \Big|_{t-T}^t = \underline{V(e^{-\frac{(t-T)}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}})} \text{ per } t > T$$

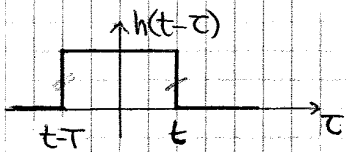
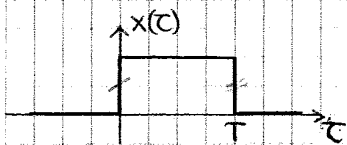


→ ottengo una $V_u(f) = H_r(f) \cdot V_i(f) \cong V_i(f)$



→ ottengo una $V_u(f)$ molto diversa da $V_i(f)$

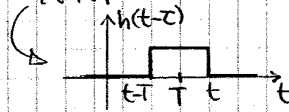
$$y(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



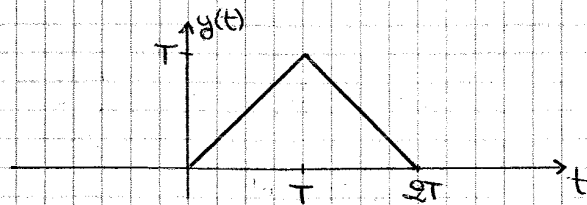
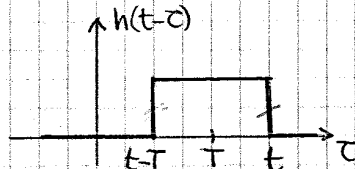
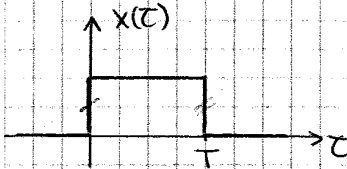
per $t < 0$: $y(t) = 0$

per $0 < t < T$: $y(t) = \int_0^t 1 \cdot d\tau = t$

per $t-T < \tau < T$, $T < t < 2T$: $y(t) = \int_{t-T}^T 1 \cdot d\tau = T - (t-T) = 2T - t$



per $t > 2T$: $y(t) = 0$



27.03.13

SO

EMI LTI

un sistema è lineare se, essendo $y_1(t) = \mathcal{C}\{x_1(t)\}$ e $y_2(t) = \mathcal{C}\{x_2(t)\}$, uscita $y(t)$ per l'ingresso $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ è $y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$

un sistema è tempo invariante se, essendo $y(t) = \mathcal{C}\{x(t)\}$, l'uscita per l'ingresso $x(t) = x(t-t_0)$ è $y'(t) = y(t-t_0)$

la risposta all'impulso di un sistema LTI è l'uscita $h(t)$ del sistema quando l'ingresso è $\delta(t)$

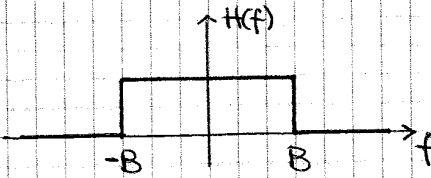
la funzione di trasferimento o risposta in frequenza di un sistema LTI è $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$

un sistema è fisicamente realizzabile se la sua risp. all'impulso gode delle seguenti proprietà:

- 1) $h(t) = 0$ per $t < 0$
- 2) $h(t) \in \mathbb{R}$

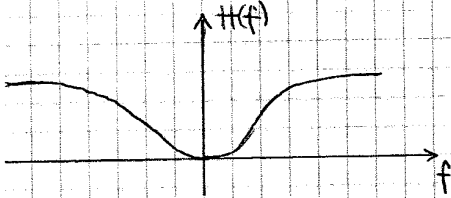
FILTRO PASSABASSO IDEALE di banda B ha funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



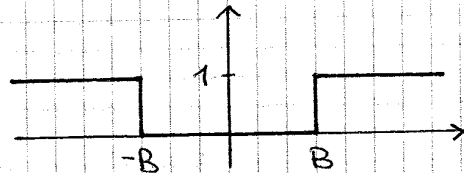
"BANDA" del filtro

FILTRO PASSA ALTO



elimina le variazioni lente (afor medio)

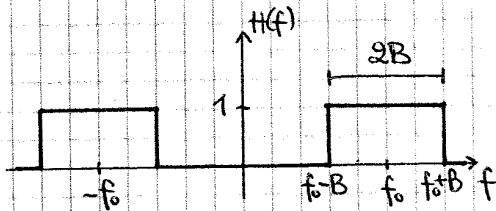
Filtro ideale:



B: "FREQUENZA di TAGLIO"

FILTRO PASSABANDA

Filtro ideale:

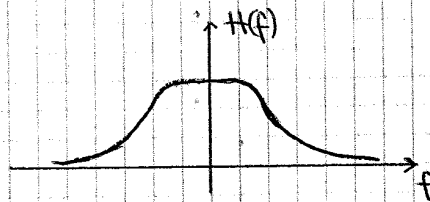


Filtro passabanda ideale con freq. centrale f_0 e banda $2B$

BANDA: estensione delle frequenze positive in cui la FAT vale 1 o un valore diverso da zero

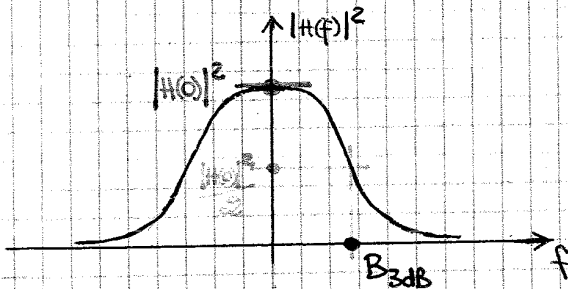
PASSABASSO $\rightarrow B$
PASSABANDA $\rightarrow 2B$

FILTRO PASSABASSO REALE



04.04.13

Banda a 3dB del filtro:



$$|H(B_{3dB})|^2 = \frac{1}{2} |H(0)|^2$$

$$(10 \log_{10} 2 = 3)$$

(scala lineare)

Banda a n dB: $10 \log_{10} x = n$, $x = 10^{\frac{n}{10}}$

• noto x, $|H(B_{ndB})|^2 = \frac{1}{x} |H(0)|^2$

DM. $y(t) = x^2(t)$ con $x(t)$ reale

$$\Psi(f) = X(f) * X(f) = \int X(u)X(f-u) du$$

$$\mathcal{E}_x = \int x^2(t) dt = \int y(t) dt = \Psi(0) = \int X(u)X(-u) du$$

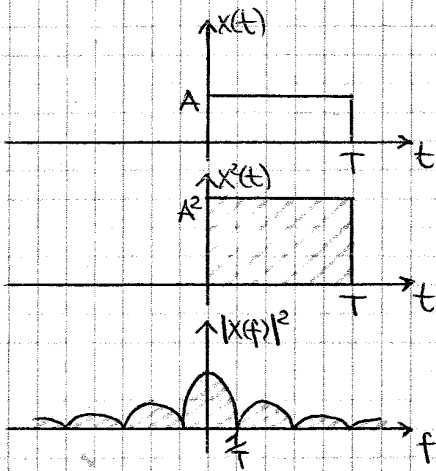
dato che $x(t)$ è reale, $X(-u) = X^*(u)$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_x = \int X(u)X(-u) du = \int X(u)X^*(u) du = \int |X(u)|^2 du = \int |X(f)|^2 df$$

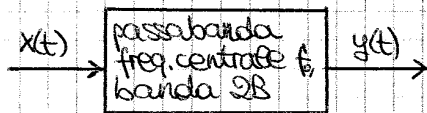
oppure

$$x(t) = \int X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$\mathcal{E}_x = \int x^2(t) dt = \int x(t) \cdot x(t) dt = \int \left[\int X(f) e^{j2\pi ft} df \right] \cdot \left[\int X(z) e^{j2\pi zt} dz \right] dt \dots$$



3)



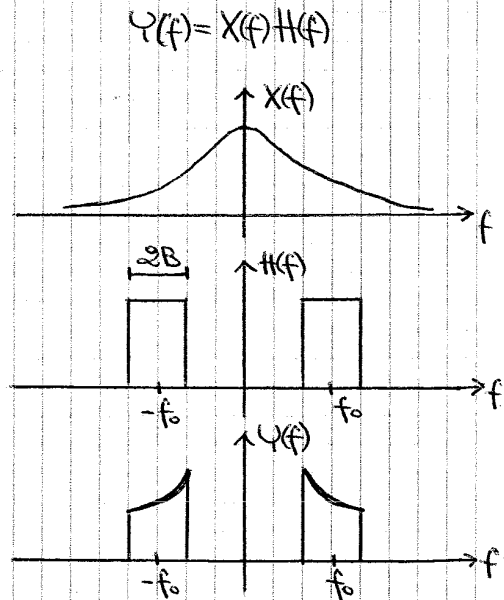
energia di $y(t)$?

$$\mathcal{E}_y = \int y^2(t) dt = \int |Y(f)|^2 df$$

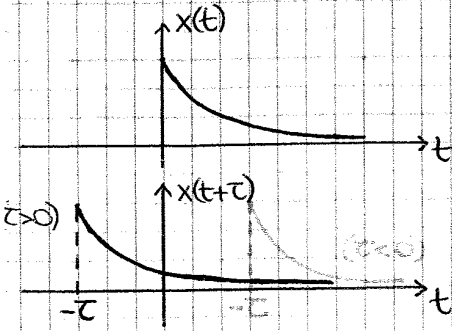
$$\mathcal{E}_y = \int |Y(f)|^2 df = \int |X(f)H(f)|^2 df = \int_{f_0-B}^{f_0+B} |X(f)|^2 df + \int_{-f_0+B}^{-f_0-B} |X(f)|^2 df$$

energia di $y(t)$ coincide con la porzione di energia di $x(t)$ contenuta nell'intervallo di freq. $[f_0-B, f_0+B]$

è $|X(f)|^2$ a dice come l'energia di $x(t)$ è distribuita a frequenza \rightarrow $|X(f)|^2$: SPETTRO di ENERGIA $S_x(f)$



$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t+\tau) dt$$

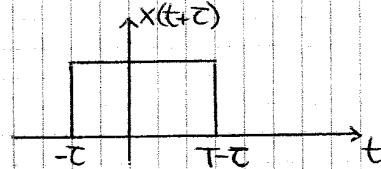
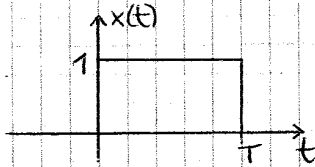


$$\begin{aligned} (\tau > 0) R_x(\tau) &= \int_0^{\infty} x(t) x(t+\tau) dt = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} \cdot e^{-\frac{(t+\tau)}{T}} dt = \\ &= e^{-\frac{\tau}{T}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{T}} dt = \frac{T}{2} e^{-\frac{\tau}{T}} \end{aligned}$$

$$(\tau < 0) R_x(\tau) = \int_{-\tau}^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-\frac{(t+\tau)}{T}} dt \quad t+\tau = u \quad t = u-\tau$$

$$R_x(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{(u-\tau)}{T}} e^{-\frac{u}{T}} du = e^{\frac{\tau}{T}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2u}{T}} du = \frac{T}{2} e^{\frac{\tau}{T}}$$

$$x(t) = p_T(t - \frac{T}{2})$$

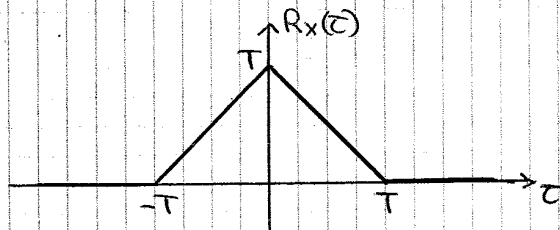


$$R_x(\tau) = \int x(t) x(t+\tau) dt$$

$$\tau > T: R_x(\tau) = 0$$

$$0 \leq \tau < T: R_x(\tau) = \int_0^{T-\tau} 1 dt = T - \tau$$

$$R_x(0) = T = \mathcal{E}_x$$



$$\tau > T, \tau < -T: R_x(\tau) = 0$$

$$-T < \tau < 0: R_x(\tau) = \int_{-\tau}^T 1 dt = T + \tau$$

definisce prodotto scalare tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$ a energia finita:

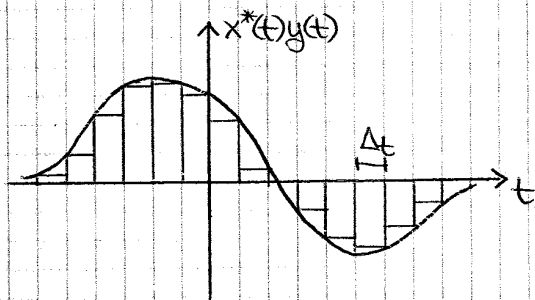
$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int x^*(t) y(t) dt$$

$$\langle y(t) \rangle \approx \sum x^*(k\Delta t) y(k\Delta t) \Delta t$$

$$= \begin{bmatrix} x(-\Delta t) \\ x(0) \\ x(\Delta t) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad R_y = \begin{bmatrix} y(-\Delta t) \\ y(0) \\ y(\Delta t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

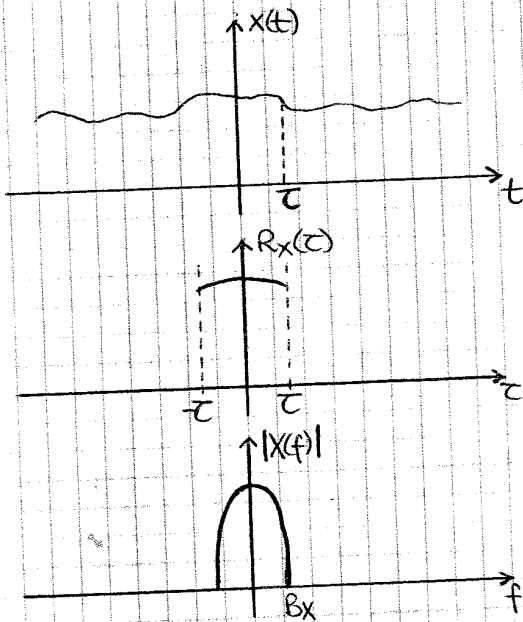
$$\langle y(t) \rangle \approx \Delta t \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

$$\langle x(t) \rangle = \int x^*(t) x(t) dt = \mathcal{E}_x \approx \Delta t \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$



risco il segnale $e(t) = x(t) - x(t+\tau)$
 $= \int e^2(t) dt = \int [x(t) - x(t+\tau)]^2 dt = \int x^2(t) dt + \int x^2(t+\tau) dt - 2 \int x(t)x(t+\tau) dt = E_x + E_x - 2R_x(\tau)$
 $= 2(E_x - R_x(\tau)) \rightarrow R_x(\tau) \leq E_x$ altrimenti $E_e < 0!$

E_e è piccola se $R_x(\tau) \approx E_x$
 $\rightarrow x(t)$ è simile a $x(t+\tau)$ perchè la loro differenza è piccola
 $\rightarrow x(t)$ varia lentamente in un intervallo di durata τ



Nell'intervallo $[-\tau, \tau]$, $R_x(\tau)$ si mantiene all'incirca al massimo $R_x(0)$

Segnale a banda B_x piccola

2) segnale $x(t)$ che varia lentamente ha:

- 1) trasformata di Fourier con banda stretta
- 2) spettro di energia con banda stretta (la maggior parte dell'energia del segnale $x(t)$ è confinata nelle basse frequenze)
- 3) funzione di autocorrelazione che varia lentamente

2) rischio $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x(t), y(t) \in \mathbb{R}$.

$$R_z(\tau) = \int z(t)z(t+\tau) dt = \int [\alpha x(t) + \beta y(t)][\alpha x(t+\tau) + \beta y(t+\tau)] dt =$$

$$= \alpha^2 \int x(t)x(t+\tau) dt + \beta^2 \int y(t)y(t+\tau) dt + \alpha\beta \int x(t)y(t+\tau) dt + \alpha\beta \int y(t)x(t+\tau) dt =$$

$$= \alpha^2 R_x(\tau) + \beta^2 R_y(\tau) + \alpha\beta \int x(t)y(t+\tau) dt + \alpha\beta \int y(t)x(t+\tau) dt$$

FUNZIONI DI MUTUA CORRELAZIONE (CROSS CORRELATION):

$$R_{yx}(\tau) = \int x(t)y(t+\tau) dt$$

$$R_{xy}(\tau) = \int y(t)x(t+\tau) dt$$

Lavorando in frequenza:

$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$$

$$Z(f) = \alpha X(f) + \beta Y(f)$$

$$\begin{aligned} S_z(f) &= |Z(f)|^2 = Z(f) \cdot Z^*(f) = [\alpha X(f) + \beta Y(f)] [\alpha X^*(f) + \beta Y^*(f)] = \\ &= \alpha^2 |X(f)|^2 + \beta^2 |Y(f)|^2 + \alpha\beta X(f)Y^*(f) + \alpha\beta X^*(f)Y(f) = \\ &= \alpha^2 S_x(f) + \beta^2 S_y(f) + \alpha\beta S_{xy}(f) + \alpha\beta S_{yx}(f) \end{aligned}$$

SPETRI MUTUI:

$$\begin{aligned} S_{yx}(f) &= X^*(f)Y(f) = \int \int R_{yx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ S_{xy}(f) &= X(f)Y^*(f) = \int \int R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{aligned}$$

DM $\int \int R_{yx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int \int \int x(t)y(t+\tau) dt e^{-j2\pi f\tau} d\tau$
 $t+\tau = u, \tau = u-t, d\tau = du$

$$\begin{aligned} \int \int R_{yx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau &= \int x(t) \left[\int_u y(u) e^{-j2\pi f(u-t)} du \right] dt = \int x(t) e^{j2\pi ft} \left[\int_u y(u) e^{-j2\pi fu} du \right] dt = \\ &= \int x(t) e^{j2\pi ft} Y(f) dt = X^*(f)Y(f) = S_{yx}(f) \end{aligned}$$

> Applicazione: ECOSGRAFIA

Gli ecografi funzionano a $1\text{MHz} \approx 18\text{MHz}$

Mando un ultrasuono, che penetra nei tessuti molli; se trova una discontinuità, provoca una riflessione. Per calcolare la distanza della discontinuità, misuro il tempo che impiega il segnale ad essere riflesso.

Viene trasmesso il segnale $x(t)$ e si riceve il segnale $y(t) = \alpha x(t-t_0)$, segnale ritardato di t_0 e assorbito di $\alpha < 1$.

Per semplicità considero $\alpha = 1$.

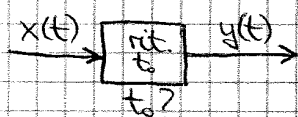
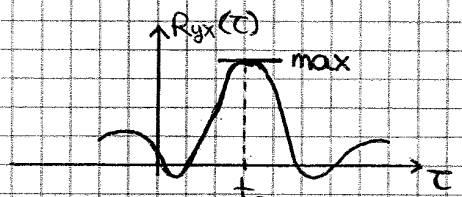
Il ricevitore calcola il prodotto scalare tra $x(t-\tau)$ e $y(t)$ per ogni possibile valore di τ e sceglie il τ che rende massimo il prodotto scalare.

$$\langle x(t-\tau), y(t) \rangle = \int x(t-\tau)y(t) dt = \int x(t-\tau)x(t-t_0) dt$$

$$t-\tau = u$$

$$\langle x(t-\tau), y(t) \rangle = \int x(u)x(u+\tau-t_0) du = R_x(\tau-t_0)$$

$$\text{Max} \langle x(t-\tau), y(t) \rangle = \text{max} R_x(\tau-t_0) = \Sigma_x \text{ per } \tau = t_0$$



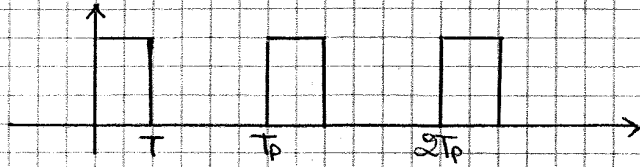
Si calcola la mutua correlazione tra $x(t)$ e $y(t)$ e si cerca il max della mutua correlazione; il valore di τ per il quale si trova il max è la stima di t_0 .

Se considero la velocità di propagazione del suono nel corpo umano costante (non è così), allora

$$v = \frac{2d}{t_0} \rightarrow d = \frac{v \cdot t_0}{2}$$

qd perché considero andata e ritorno del segnale

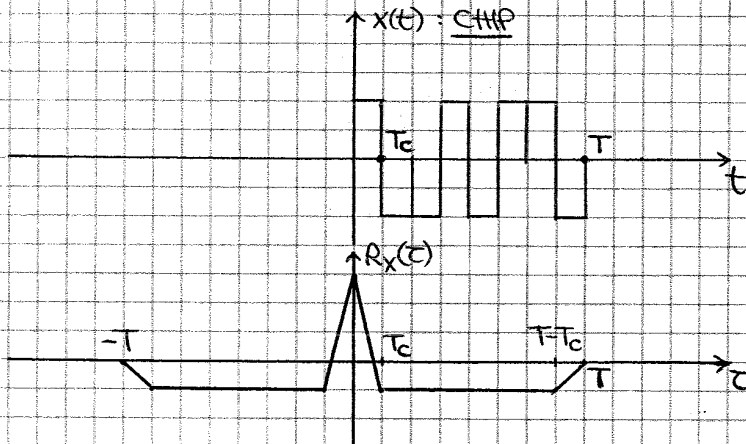
Devo trasmettere un segnale $x(t)$ ogni intervallo T_p ; T_p non dev'essere troppo ampio e dipende dalla distanza tra i max dei due segnali.



> Applicazione: GPS (nato nel 1980)

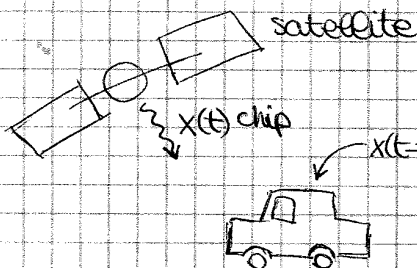
Conviene che $x(t)$ sia a banda larga.

Maximal length codes: danno luogo a un segnale tipo



$x(t)$ è continuo, ma messo ad analizzare un T alla volta.

$x(t)$: PN = "PSEUDO NOISE" (ha grafico simile al rumore di fondo)

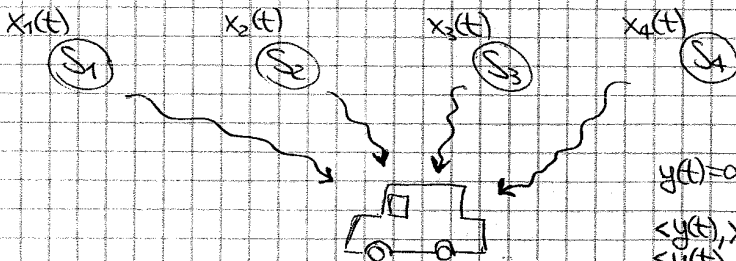


Distanza satellite-auto:

$$d = ct \quad (c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s})$$

Per conoscere la mia posizione ho bisogno di 4 satelliti:

- 3 per la posizione x, y, z
- 1 per sincronizzare l'orologio dell'auto e quello dei satelliti (per poi calcolare il ritardo t_0)



I segnali sono 4 segnali del tipo chip 1/-1, ma hanno codici diversi

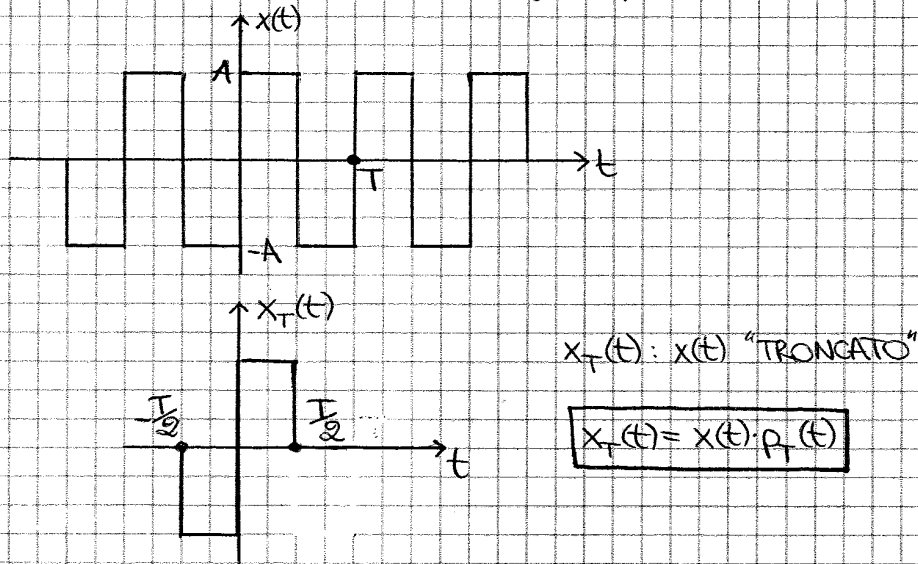
$$y(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \alpha_3 x_3(t) + \alpha_4 x_4(t)$$

$$\langle y(t), x_1(t-t) \rangle = \alpha_1 R_{x_1}(t-t) + \text{altri contributi}$$

$$\langle y(t), x_2(t-t) \rangle = \dots$$

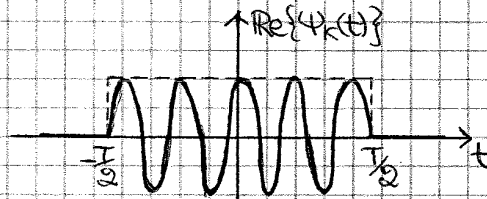
scegliendo opportunamente i codici, questi contributi sono trascurabili

strumento principale per l'analisi dei segnali periodici e la serie di Fourier.



Posso calcolare la serie di Fourier per $x_T(t)$:

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \quad p_T(t) = p_T(t) \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \right]$$



$$\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \int \psi_k(t) \psi_l^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \cdot e^{-j2\pi l \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(k-l) \frac{t}{T}} dt$$

• se $k=0$: $\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = 1$

• se $k \neq 0$: $\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \frac{1}{(j2\pi)^2} \frac{e^{j2\pi(k-l) \frac{t}{T}}}{j2\pi(k-l) \frac{t}{T}} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{T} \frac{e^{j\pi(k-l)} - e^{-j\pi(k-l)}}{j2\pi(k-l) \frac{t}{T}}$

$e^{j\pi} = -1 \rightarrow e^{j\pi(k-l)} = (-1)^{k-l}$

$\rightarrow \langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \frac{1}{T} \frac{(-1)^k e^{-j\pi l} - (-1)^l e^{j\pi k}}{j2\pi(k-l) \frac{t}{T}} = 0 \quad \langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = 0$

Posso definire un insieme di segnali $B = \{ \psi_k(t) \}_{k=-\infty}^{\infty}$ (k intero)

L'insieme dei segnali B è una BASE ORTONORMALE:

- segnali tutti ⊥ tra di loro $\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = 0$
- tutti segnali a energia unitaria $E = \langle \psi_k(t), \psi_k(t) \rangle = 1$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}} p_T(t)$$

$$M_k \triangleq \frac{1}{T} \int x_T(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} X_T(f) \Big|_{f=\frac{k}{T}}$$

M_k : coefficiente k-esimo della serie di Fourier

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}} p_T(t)$ è la serie di Fourier

Il segnale periodico $x(t)$ vale $x_T(t)$ nel periodo fondamentale $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Il segnale $x(t)$ è periodico di periodo T .

Il segnale $e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$ è anche periodico di periodo T per ogni k (anche se T potrebbe non essere il periodo più piccolo)

$\Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \quad -\infty < t < \infty$

(perché se l'uguaglianza vale tra $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, allora vale per tutto t)

Per un generico segnale periodico $x(t)$ si ha

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \quad (-\infty < t < \infty)$$

con $M_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} X(f) \Big|_{f=\frac{k}{T}}$ **NO!**

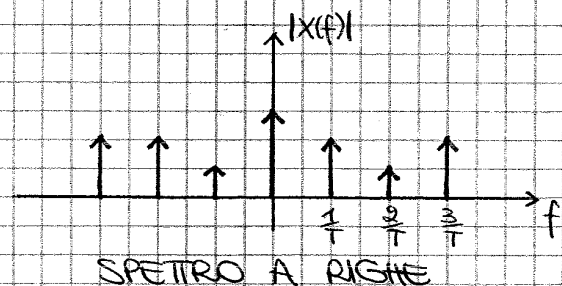
$$M_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} X_T(f) \Big|_{f=\frac{k}{T}}$$

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k \cdot \mathcal{F}\{e^{j2\pi k \frac{t}{T}}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

f_0 : frequenza fondamentale del segnale

$$f_0 = \frac{1}{T}$$



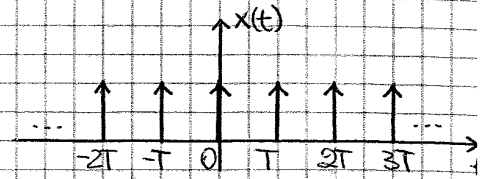
$$M_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \quad \text{è il valore medio di } x(t)$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi k t / T} = \mu_1 e^{j2\pi t / T} + \mu_{-1} e^{-j2\pi t / T} = \frac{A}{2} e^{j2\pi t / T} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi t / T}$$

$$X(f) = \mu_1 \delta(f - \frac{1}{T}) + \mu_{-1} \delta(f + \frac{1}{T})$$

ES) Segnate treno di delta

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_k \mu_k e^{j2\pi k t / T}$$

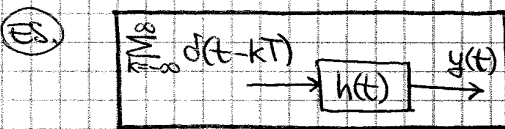
$$\mu_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k t / T} dt \quad x_T(t) = \delta(t)$$

$$\mu_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j2\pi k t / T} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \cdot 1 dt = \frac{1}{T} \quad \forall k$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k t / T}$$

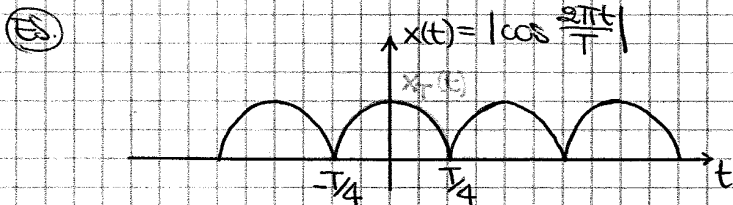
$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta(f - \frac{k}{T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T})$$

$$\mathcal{F}\{\sum \delta(t - kT)\} = \frac{1}{T} \sum \delta(f - \frac{k}{T})$$



$$Y(f) = X(f)H(f) = H(f) \cdot \frac{1}{T} \sum \delta(f - \frac{k}{T}) \rightarrow \text{già ricavata con } H(f) = X_T(f)$$

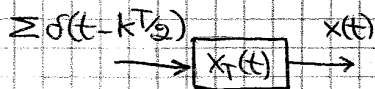
$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t) * \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$$



periodo $\frac{T}{2}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_T(t - k \frac{T}{2}) = x_T(t) + x_T(t - \frac{T}{2}) + x_T(t - T) + \dots$$

$$x(t) = \sum_k x_T(t - k \frac{T}{2}) = \sum_k x_T(t) * \delta(t - k \frac{T}{2}) = x_T(t) * \sum_k \delta(t - k \frac{T}{2})$$



anche se $x_T(t)$ non può essere la risposta all'impulso di un sistema fisicamente realizzabile perché è $\neq 0$ per $t < 0$

SIMMETRIE:

se $x(t)$ è reale, $x_T(t)$ è reale e $X_T(f)$ è tale che $X_T(-f) = X_T^*(f)$

$$X(f) = X_T(f) \stackrel{!}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta(f - \frac{k}{T})$$

- $|X(f)|$ è una fz. pari
- $\angle X(f)$ è una fz. dispari

$$\mu_k = \frac{1}{T} X_T(f) \Big|_{f=\frac{k}{T}}$$

- $|\mu_{-k}| = |\mu_k|$
- $\angle \mu_{-k} = -\angle \mu_k$

POTENZA

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_k \mu_k e^{j2\pi k t/T} \right) \cdot \left(\sum_n \mu_n e^{j2\pi n t/T} \right)^* dt =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k \sum_n \mu_k \mu_n^* \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi k t/T} \cdot e^{-j2\pi n t/T} dt = \frac{1}{T} \sum_k \sum_n \mu_k \mu_n^* T \delta_{kn} = \sum_k \mu_k \mu_k^* = \sum_k |\mu_k|^2$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi k t/T} \cdot e^{-j2\pi n t/T} dt = T \delta_{kn} = \begin{cases} T & \text{se } k=n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

nella sommatoria interna su n, solo il contributo per $n=k$ è diverso da zero

$$P_x = \sum_k |\mu_k|^2$$

ES) $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)} = \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-j2\pi f_0 t}$ ($f_0 = \frac{1}{T}$)

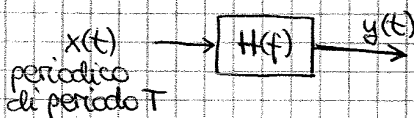
$$\mu_1 = \frac{A}{2} e^{j\theta}$$

$$\mu_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\theta}$$

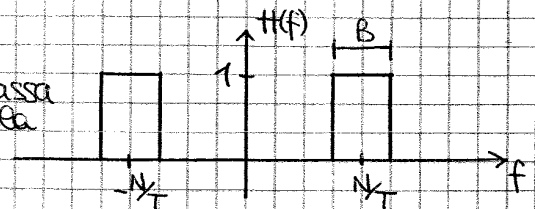
$$P_x = |\mu_1|^2 + |\mu_{-1}|^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$$

Ogni segnale sinusoidale di ampiezza A, ha potenza $P = \frac{A^2}{2}$!

SPETTRO DI POTENZA



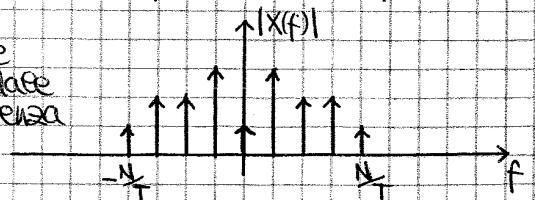
$0 < B < \frac{1}{T}$ così passa una sola δ !



$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta(f - \frac{k}{T})$$

$$Y(f) = H(f) X(f) = \mu_N \delta(f - \frac{N}{T}) + \mu_{-N} \delta(f + \frac{N}{T})$$

segnale sinusoidale di frequenza N/T

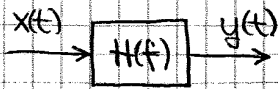


$$P_y = |\mu_N|^2 + |\mu_{-N}|^2$$

Si definisce lo spettro di potenza del segnale periodico di periodo T:

$$G_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 \delta(f - \frac{k}{T}) \neq |X(f)|^2 !$$

ES



Nota $G_x(f)$ e $H(f)$, calcolare $G_y(f)$

$$X(f) = \sum_k \mu_k \delta(f - \frac{k}{T})$$

$$Y(f) = X(f)H(f) = H(f) \sum_k \mu_k \delta(f - \frac{k}{T}) = \sum_k \mu_k H(f) \delta(f - \frac{k}{T}) = \sum_k \mu_k H(\frac{k}{T}) \delta(f - \frac{k}{T})$$

$$y(t) = \sum_k \nu_k e^{j2\pi k t / T} \rightarrow \nu_k = \mu_k H(\frac{k}{T})$$

$$G_y(f) = \sum_k |\nu_k|^2 \delta(f - \frac{k}{T}) = \sum_k |\mu_k|^2 \underbrace{|H(\frac{k}{T})|^2}_{|H(f)|^2} \delta(f - \frac{k}{T}) = |H(f)|^2 \sum_k |\mu_k|^2 \delta(f - \frac{k}{T}) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2 G_x(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} * \mathcal{F}^{-1}\{G_x(f)\} = R_h(\tau) * R_x(\tau)$$

$$R_y(\tau) = R_h(\tau) * R_x(\tau)$$

$$\rightarrow R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X^*(t) X(t+\tau) dt \quad (\text{segnale periodico})$$

$$\rightarrow R_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) h(t+\tau) dt \quad (\text{segnale non periodico})$$

SEGNALE CARDIACO

19.04.13

In situazione normale: si alternano battito atriale e battito ventricolare (60 battiti/min)

- Extrasistole atriale: battiti prematuri atriali (fenomeno benigno, $\frac{3 \text{ pers}}{100}$)
- Extrasistole ventricolare: battito prematuro ventricolare isolato
- Blocco atrio-ventricolare di 1° grado: blocco del nodo che funziona da (2° grado) filtro passa-basso (per regolare la frequenza dei battiti)
- Blocco di branca destra/sinistra (zone di flusso rapido del sangue): anomalie delle contrazioni della contrazione dx o sx
- Emblocco anteriore sx
- Flutter atriale con conduzione 3:1: aritmie, con grande frequenza
- Fibrillazione atriale: l'atrio non riesce più a contrarsi (tetania)

SEGNALE: rappresentazione monodimensionale di informazione

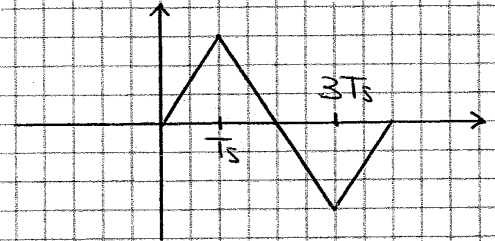
INFORMAZIONE: valori reali/complessi, misura dell'energia del processo

Molti segnali biomedici non sono funzione del tempo (es. nell'elaborazione di immagini, l'intensità è funzione delle coord. spaziali x e y)

La dinamica di ogni fenomeno reale misurabile deriva dall'interazione tra sorgenti di energia e modificatori (dissipatori)

a)

n	x(nT _s)	g(t-nT _s)
-1	0	
0	0	
1	1	g(t-T/4)
2	0	
3	-1	g(t-3T/4)
4	0	
5	0	

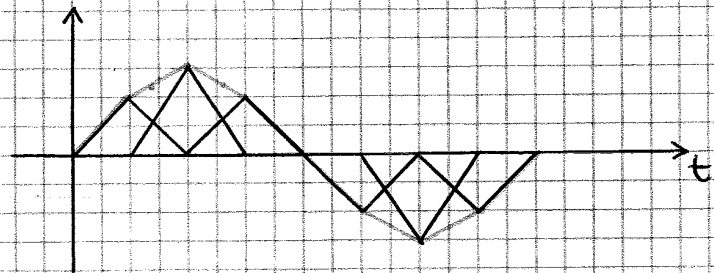


$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)g(t-nT_s) = x(T_s)g(t-T_s) + x(3T_s)g(t-3T_s) = g(t-T_s) - g(t-3T_s)$$

b) T_s = T/8

n	x(nT _s)
0	0
1	1/√2
2	1
3	1/√2
4	0
5	-1/√2
6	-1
7	-1/√2
8	0

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)g(t-nT_s) = \frac{1}{\sqrt{2}}g(t-T_s) + g(t-2T_s) + \frac{1}{\sqrt{2}}g(t-3T_s) + \dots - \frac{1}{\sqrt{2}}g(t-5T_s) - g(t-6T_s) - \frac{1}{\sqrt{2}}g(t-7T_s) + \dots$$



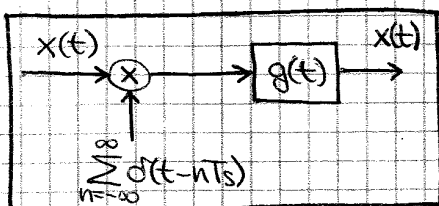
INTERPOLAZIONE LINEARE tra i valori di campionamento

Vogliamo che sia esattamente $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)g(t-nT_s)$. L'incognita è g(t), oltre ad un intervallo di campionamento T_s.

f_s = 1/T_s : FREQUENZA di CAMPIONAMENTO [campioni/s] ([Hz])

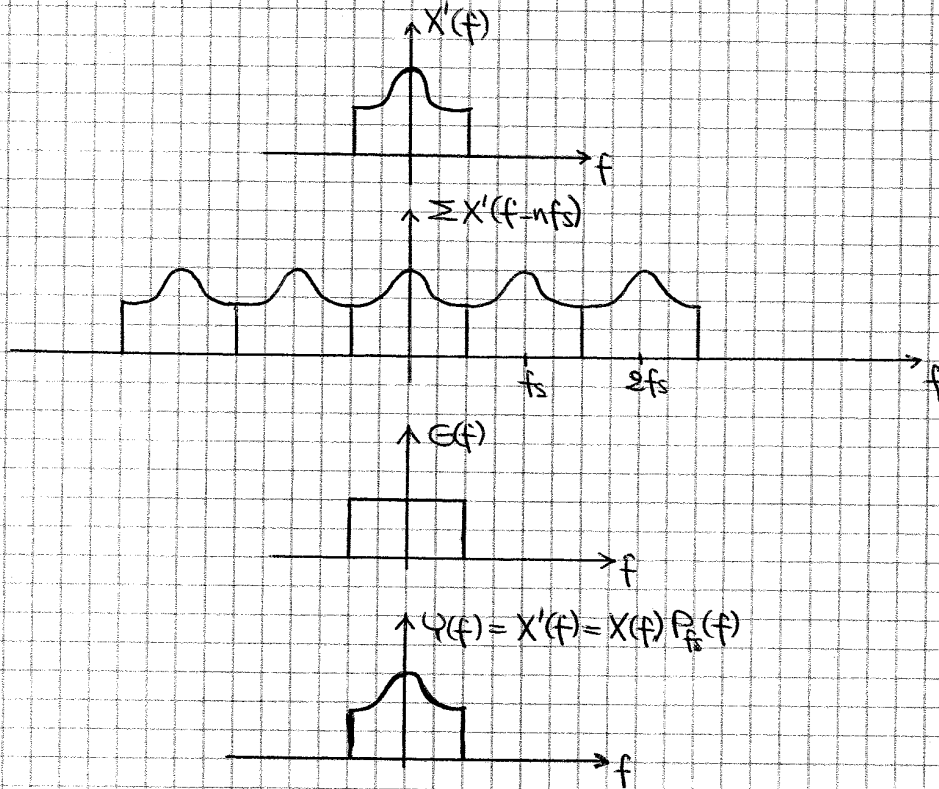
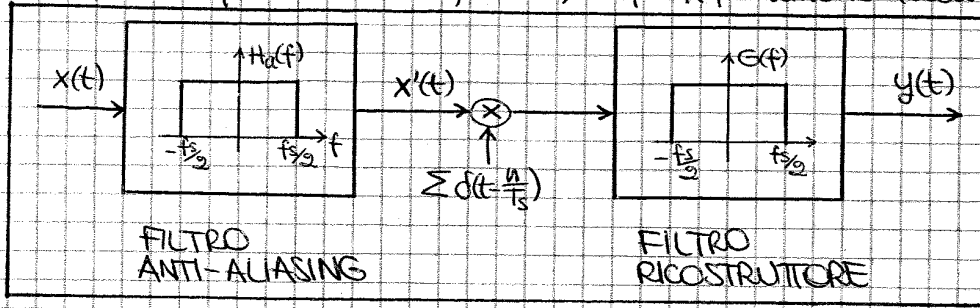
⊗ combinazione dei segnali della base completa {g(t-nT_s)}

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)g(t-nT_s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot [d(t-nT_s) * g(t)] = [\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)d(t-nT_s)] * g(t) \\ &= [\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)d(t-nT_s)] * g(t) = [x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(t-nT_s)] * g(t) \end{aligned}$$



equivalente a

Se utilizzo questo sistema, invece, $Y(f) = X(f)$ almeno nella banda $[-\frac{T_s}{2}, \frac{T_s}{2}]$:



RIPASSO

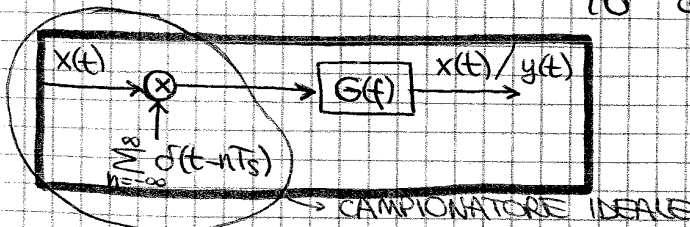
09.05.13

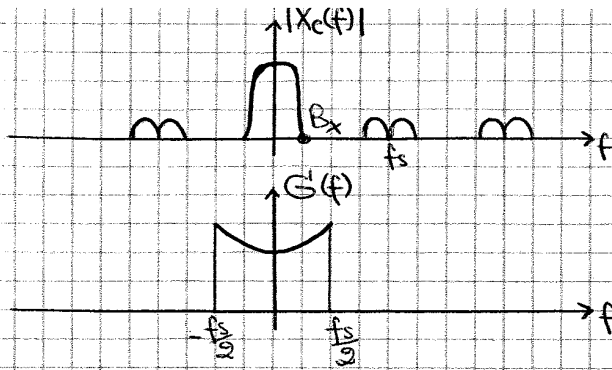
$x(t)$ di banda B_x

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) g(t - nT_s)$$

$x(nT_s)$ = campione di $x(t)$
 T_s = intervallo di campionamento ($f_s = 1/T_s$)

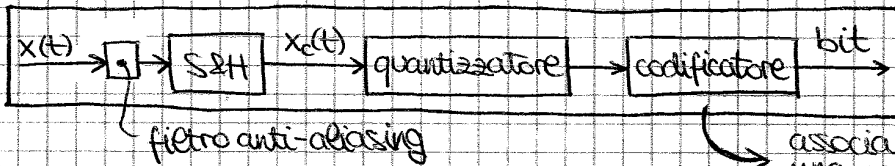
Th. camp.: occorre che la freq. di campionamento sia maggiore di $2B_x$ e che $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(f)\}$, con $G(f) = \begin{cases} T_s & |f| \leq f_s/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$





$$G'(f) = P_{fs}(f) \frac{T_s}{V(f)}$$

ADC = Analog to Digital Converter



associa ad ogni livello quantizzato una codifica in bit (0 e 1)

ES) Campionamento GSM

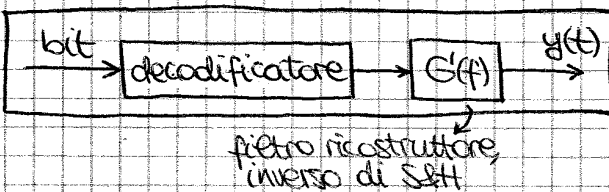
$f_s = 8 \text{ kHz}$
13 bit per campione

All'uscita dell'ADC i bit vengono generati a velocità $R_b = 13 \cdot 8000 \text{ bit/s}$

Ogni $T_s = \frac{1}{8000} \text{ s}$ ho un campione che viene convertito in 13bit

$$T_{\text{bit}} = \frac{T_s}{13}, \text{ bit rate (velocità)} = R_b = \frac{1}{T_{\text{bit}}} = \frac{13}{T_s} = 13 f_s = 13 \cdot 8000 \text{ bit/s}$$

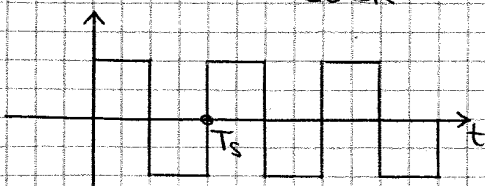
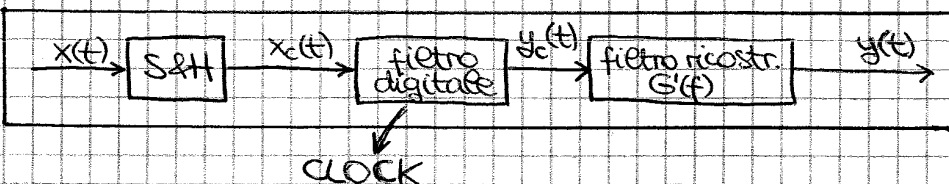
DAC = Digital to Analog Converter



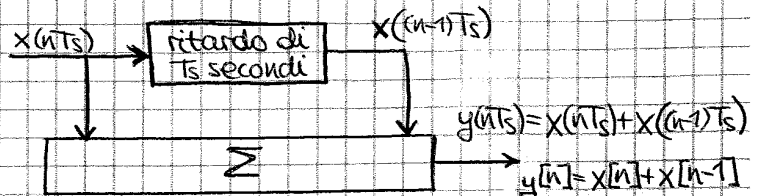
$y(t) \neq x(t)$ perché:

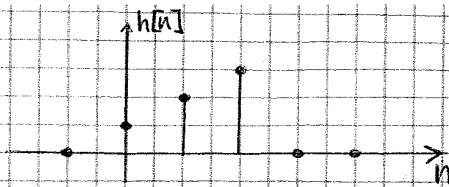
- $x(t)$ ha tipicamente banda $> f_s/2$
- il quantizzatore fa perdere informazione
- i filtri anti-aliasing e ricostruttore non sono ideali

FILTRI DIGITALI (non tengo conto di quantizzatore e codificatore)



Filtro digitale sensibile ai FRONTI del clock \rightarrow si "attiva" ogni T_s secondi



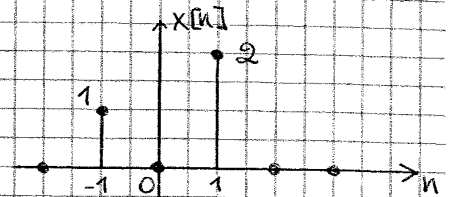


$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

$$x[n] = \sum_k x[k] \delta[n-k]$$

(equivalente a $x(t) = \int x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$)

$$x[n] = x[-1] \delta[n+1] + x[0] \delta[n] + x[1] \delta[n-1]$$



Se $x[n]$ generico è l'ingresso del sistema LTI con risp. imp. $h[n]$, quale è l'uscita $y[n]$?

$$y[n] = \mathcal{G}\{x[n]\} = \mathcal{G}\left\{\sum_k x[k] \delta[n-k]\right\} = \sum_k x[k] \mathcal{G}\{\delta[n-k]\} = \sum_k x[k] h[n-k]$$

$$y[n] = \sum_k x[k] h[n-k] = x[n] * h[n] \quad \text{CONVOLUZIONE}$$

Voglio trovare le autofunzioni per la convoluzione discreta e quindi il segnale $w[n]$ tale che:

$$w[n] * h[n] = \sum_k w[k] h[n-k] = \lambda w[n]$$

$$\sum_k w[k] h[n-k] = \sum_k h[k] w[n-k] \rightarrow \text{cerco } w[n] \text{ tale che } \sum_k h[k] w[n-k] = \lambda w[n]$$

Utilizzo $w[n] = z^n$ (con $z \in \mathbb{C}$) come possibile autofunzione:

$$\sum_k h[k] z^{n-k} = z^n \sum_k h[k] z^{-k} = z^n \cdot \lambda$$

Per l'autofunzione $w[n] = z^n$, l'autovettore λ vale $\lambda = \sum_k h[k] z^{-k} = H(z)$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO NEL SISTEMA

$$H(z) = \sum_k h[k] z^{-k} \quad : \quad \text{TRASFORMATA ZETA della risp. imp. } h[n]$$

Per il tempo continuo:

• $w(t) = e^{st} \rightarrow H(s) = \text{TRASF. LAPLACE}$ (\neq per segnali periodici)

• $w(t) = e^{j2\pi ft} \rightarrow H(f) = \text{TRASF. FOURIER}$ ($w(t) = e^{st} |_{s=j2\pi f}$)

La trasformata zeta è l'analogo della transf. di Laplace; non esiste per i segnali periodici

Se $x[n]$ è un segnale tempo discreto, allora si definisce la sua trasformata zeta come:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

⊕ $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = \delta[0] z^{-0} = 1$

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$$

• $\mathcal{Z}\{n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n x[n] z^{-n}$ $\frac{d}{dz} z^{-n} = -n z^{-n-1}$

$\mathcal{Z}\{n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n x[n] z^{-n-1} \cdot z = -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (-n z^{-n-1}) = -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{d}{dz} z^{-n} =$
 $= -z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \right) = -z \frac{d}{dz} X(z)$

$\mathcal{Z}\{n x[n]\} = -z \frac{d}{dz} X(z)$

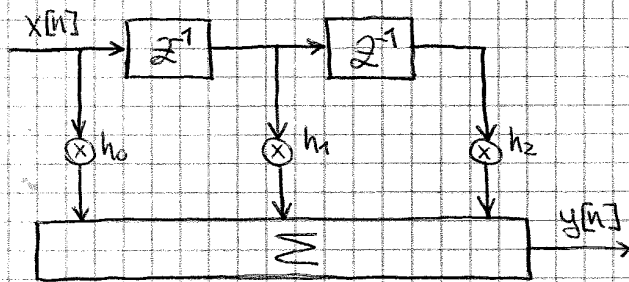
• $\mathcal{Z}\{n \alpha^n u[n]\} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-\alpha} \right) = -z \frac{(z-\alpha) - z}{(z-\alpha)^2} = -z \frac{-\alpha}{(z-\alpha)^2} = \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}$

$\mathcal{Z}\{n \alpha^n u[n]\} = \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}$

$\mathcal{Z}\{n \alpha^{n-1} u[n]\} = \frac{z}{(z-\alpha)^2}, |z| > 1$ (ROC)

• **$\mathcal{Z}\{h[n] * x[n]\} = H(z) \cdot X(z)$**

Suppongo di avere un sistema semplice, non ricorsivo:

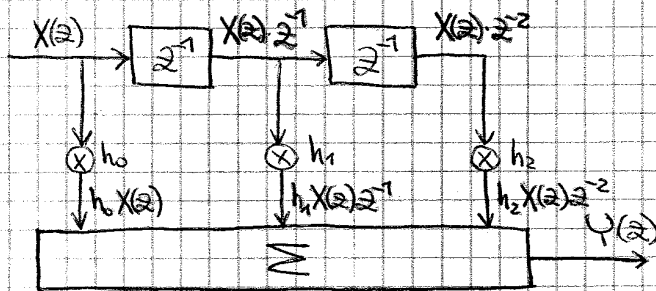


SISTEMA NON RETROAZIONATO
(FEED FORWARD)

SISTEMA FIR
(FINITE IMPULSE RESPONSE)

↓
durata finita di h[n]

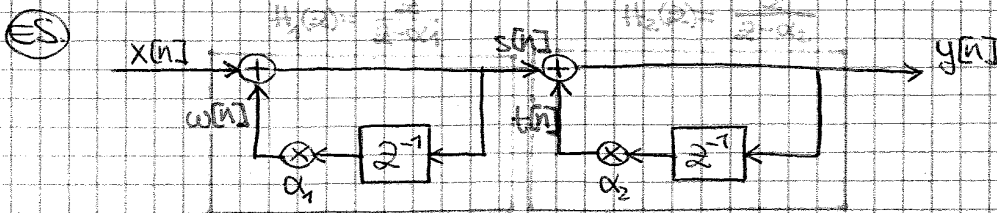
Suppongo di conoscere X(z), calcolo Y(z)



$Y(z) = h_0 X(z) + h_1 X(z) z^{-1} + h_2 X(z) z^{-2} = X(z) [h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}]$

$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$

$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = h_0 \delta[n] + h_1 \delta[n-1] + h_2 \delta[n-2]$



$$Y(z) = S(z) + T(z) = (X(z) + W(z)) + T(z)$$

$$S(z) = \frac{X(z)}{1 - \alpha_1 z^{-1}}, \quad Y(z) = \frac{S(z)}{1 - \alpha_2 z^{-1}} = \frac{\frac{X(z)}{1 - \alpha_1 z^{-1}}}{1 - \alpha_2 z^{-1}} = \frac{X(z)}{(1 - \alpha_1 z^{-1})(1 - \alpha_2 z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \alpha_1 z^{-1})(1 - \alpha_2 z^{-1})} = \frac{z}{z - \alpha_1} \cdot \frac{z}{z - \alpha_2} = \frac{z^2}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)}$$

oppure divido il sistema in sottosistemi:

$$Y(z) = \underbrace{H_1(z)} \cdot \underbrace{H_2(z)} \cdot X(z) \quad \rightarrow \quad H(z) = H_1(z) H_2(z) = \frac{z}{z - \alpha_1} \cdot \frac{z}{z - \alpha_2}$$

oppure

$$\begin{cases} S(z) = X(z) + W(z) \\ W(z) = S(z) z^{-1} \alpha_1 \end{cases} \quad S(z) = X(z) + S(z) \alpha_1 z^{-1} \rightarrow S(z) = \frac{X(z)}{1 - \alpha_1 z^{-1}} = X(z) \frac{z}{z - \alpha_1}$$

$$\begin{cases} Y(z) = S(z) + T(z) \\ T(z) = Y(z) z^{-1} \alpha_2 \end{cases} \quad Y(z) = S(z) + Y(z) \alpha_2 z^{-1} \rightarrow Y(z) = \frac{S(z)}{1 - \alpha_2 z^{-1}} = S(z) \frac{z}{z - \alpha_2}$$

$$\Rightarrow Y(z) = X(z) \frac{z}{z - \alpha_1} \cdot \frac{z}{z - \alpha_2} = H(z)$$

ESPANSIONE IN FRATTI SEMPLICI

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k}{b_0 + b_1 x + \dots + b_N x^N} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k}{(b_N) (x - p_1)(x - p_2) \dots (x - p_N)}$$

supponiamo che $p_i \neq p_e \quad \forall i \neq e$
(tutti poli distinti)

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{c_1}{x - p_1} + \frac{c_2}{x - p_2} + \dots + \frac{c_N}{x - p_N} \quad \leftarrow \text{poli distinti! } k < N$$

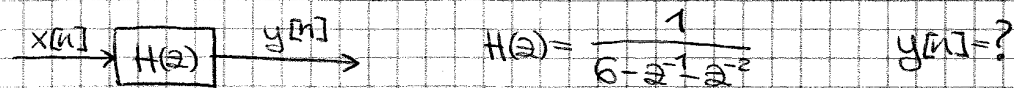
$$\frac{N(x)}{D(x)} (x - p_1) = \frac{c_1}{x - p_1} (x - p_1) + \frac{c_2}{x - p_2} (x - p_1) + \dots + \frac{c_N}{x - p_N} (x - p_1)$$

$$\frac{N(x)}{D(x)} (x - p_1) \Big|_{x=p_1} = c_1 + 0 + \dots + 0 = c_1$$

$$\lim_{x \rightarrow p_1} \frac{N(x)}{D(x)} (x - p_1) = c_1$$

ES) UCCIOTTO ☺

$$x[n] = 6\delta[n+2] + 5\delta[n+1] + 22\delta[n] + 6\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$



$$X(z) = 6z^2 + 5z + 22 + 6z^{-1} - 2z^{-2}$$

in modo da rendere positivi tutti gli esponenti delle z

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{6z^2 + 5z + 22 + 6z^{-1} - 2z^{-2}}{6 - z^{-1} - z^{-2}} \cdot \frac{z^2}{z^2} = \frac{6z^4 + 5z^3 + 22z^2 + 6z - 2}{6z^2 - z - 1}$$

$\begin{array}{r} 6z^4 + 5z^3 + 22z^2 + 6z - 2 \\ -6z^4 + z^3 + z^2 \\ \hline 6z^3 + 23z^2 + 6z - 2 \\ -6z^3 + z^2 + z \\ \hline 24z^2 + 7z - 2 \\ -24z^2 + 4z + 4 \\ \hline 11z + 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6z^2 - z - 1 \\ z^2 + z + 4 \\ \hline z^2 + z + 4 \\ \hline 0 \end{array}$	$Y(z) = z^2 + z + 4 + \frac{11z + 2}{6z^2 - z - 1}$
---	--	---

Trovo i poli: $6z^2 - z - 1 = 0 \quad z = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} \quad z_1 = \frac{1}{2}, z_2 = -\frac{1}{3}$

$$6z^2 - z - 1 = 6\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right) \rightarrow p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = -\frac{1}{3}$$

$$Y(z) = z^2 + z + 4 + \frac{11z + 2}{6\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)} = z^2 + z + 4 + \frac{1}{6}G(z) \quad G(z) = \frac{11z + 2}{\left(z - p_1\right)\left(z - p_2\right)} = \frac{C_1}{z - p_1} + \frac{C_2}{z - p_2}$$

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{11z + 2}{z(z - p_1)(z - p_2)} = \frac{C_0}{z} + \frac{C_1}{z - p_1} + \frac{C_2}{z - p_2}$$

$$C_0 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{G(z)}{z} z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{11z + 2}{z(z - p_1)(z - p_2)} z = \frac{2}{p_1 p_2} = \frac{2}{-\frac{1}{6}} = -12$$

$$C_1 = \lim_{z \rightarrow p_1} \frac{11z + 2}{z(z - p_1)(z - p_2)} (z - p_1) = \frac{11p_1 + 2}{p_1(p_1 - p_2)} = \frac{11 \cdot \frac{1}{2} + 2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} = 15 \cdot \frac{6}{5} = 18$$

$$C_2 = \frac{11p_2 + 2}{p_2(p_2 - p_1)} = \frac{-\frac{11}{3} + 2}{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)} = -6$$

$$Y(z) = z^2 + z + 4 + \frac{11z + 2}{6z^2 - z - 1} = z^2 + z + 4 + \frac{1}{6} \left[C_0 + C_1 \frac{z}{z - p_1} + C_2 \frac{z}{z - p_2} \right]$$

$$y[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + 22\delta[n] + \frac{1}{6} C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{6} C_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

ES) Data $H(z) = \frac{1+z^{-2}}{1-1,2z^{-1}+0,7z^{-2}}$, creare il software per MATLAB

• Trovo l'eq. alle differenze:

$$H(z) = \frac{1+z^{-2}}{1-1,2z^{-1}+0,7z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad Y(z)[1-1,2z^{-1}+0,7z^{-2}] = X(z)(1+z^{-2})$$

$$Y(z) = Y(z)1,2z^{-1} - Y(z)0,7z^{-2} + X(z) + X(z)z^{-2}$$

$$y[n] = 1,2y[n-1] - 0,7y[n-2] + x[n] + x[n-2]$$

• Matlab:

```
clear all;
close all;
N=100; % numero passi simul.
```

```
x=zeros(N,1); x(1)=0;
```

```
y=zeros(N,1);
```

```
for n=2:N,
    y(n)=1,2*y(n-1)-0,7*y(n-2)+x(n)+x(n-2);
```

```
end;
```

$$\otimes y(1)=x(1),$$

$$y(0)=x(0)$$

$$y(2)=1,2y(1)+x(2);$$

$$y(1)=1,2y(0)+x(1)$$

La trasformata zeta di segnali periodici a tempo discreto NON esiste!

(es. del segnale $x[n] = A \cos(\frac{2\pi}{M}n + \theta)$, $n \in \mathbb{Z}$)

Se un segnale periodico discreto ha periodo N può essere espresso nel suo periodo fondamentale come combinazione lineare dei seguenti segnali discreti:

$$\Psi_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \quad n=0, \dots, N-1$$

$$\langle \Psi_k[n], \Psi_\ell[n] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_k[n] \Psi_\ell^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{j2\pi k \frac{n}{N}} e^{-j2\pi \ell \frac{n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-\ell)\frac{n}{N}}$$

• se $k=\ell$: $\langle \Psi_k[n], \Psi_k[n] \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1 = 1$

• se $k \neq \ell$: $\langle \Psi_k[n], \Psi_\ell[n] \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-\ell)\frac{n}{N}}$

riprende $\sum_{n=0}^{N-1} a^n$ con $a = e^{j2\pi(k-\ell)/N}$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$$

= 1 (k-ℓ giri di 2π)

$$\langle \Psi_k[n], \Psi_\ell[n] \rangle = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi(k-\ell)}}{1 - e^{j2\pi(k-\ell)/N}} = 0$$

Base ortonormale: $B = \left\{ \Psi_k[n] \right\}_{k=0}^{N-1}$

B completa per qualsiasi segnale di ingresso

FFT (Fast Fourier Transform): implementazione efficiente della DTFT
 IFFT (Inverse FFT)

Su Matlab: $X = \text{fft}(x);$
 $x = \text{ifft}(X);$

$\varphi_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi k n / N}$ è definito solo per $n=0, \dots, N-1$ ma in realtà è un segnale periodico di periodo N
 $\varphi_k[n] = \varphi_k[n+N]$

Se $x[n]$ è periodico di periodo N :

1) posso scrivere

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi k n / N} \quad \text{per } n=0, \dots, N-1$$

2) $x[n+N] = x[n]$

$e^{j2\pi k n / N}$ è periodico di periodo N

→ 3) l'espressione $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi k n / N}$ è valida per ogni $n \in \mathbb{Z}$ perché $x[n]$ è periodico e anche $X(k)$ lo è.

Per il tempo continuo:
 $x(t)$ periodico di periodo T
 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k e^{j2\pi k t / T}$ $M_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi k t / T} dt$

ES) $x[n] = A \cos(2\pi \frac{n}{N} + \theta)$ $n \in \mathbb{Z}$

DFT di $x[n] = ?$

$x[n]$ periodica di periodo N

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k n / N}$$

$$x[n] = \frac{A}{2} \left[e^{j(2\pi \frac{n}{N} + \theta)} + e^{-j(2\pi \frac{n}{N} + \theta)} \right]$$

$$X(k) = \frac{A}{2} \cdot \text{DFT} \left\{ e^{j(2\pi \frac{n}{N} + \theta)} \right\} + \frac{A}{2} \cdot \text{DFT} \left\{ e^{-j(2\pi \frac{n}{N} + \theta)} \right\} = \frac{A}{2} e^{j\theta} \cdot \text{DFT} \left\{ e^{j2\pi \frac{n}{N}} \right\} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} \cdot \text{DFT} \left\{ e^{-j2\pi \frac{n}{N}} \right\}$$

$$\text{DFT} \left\{ e^{j2\pi \frac{n}{N}} \right\} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{n}{N}} \cdot e^{-j2\pi k n / N} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi (k-1) n / N} = \frac{1 - e^{j2\pi (k-1) N / N}}{1 - e^{j2\pi (k-1) / N}} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 1 \\ N & \text{se } k = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{DFT} \left\{ e^{j2\pi \frac{n}{N}} \right\} = N \cdot \delta[k-1]}$$

perché rimane:
 $\sum_{n=0}^{N-1} 1 = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$

Il generico segnale periodico di periodo N può essere scritto come

$$x[n] = x[0]x_\delta[n] + x[1]x_\delta[n-1] + \dots + x[N-1]x_\delta[n-(N-1)]$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]x_\delta[n-k]$$

Definisco $h_N[n] = x_\delta[n] * h[n]$ (uscita in corrispondenza del treno di delta)

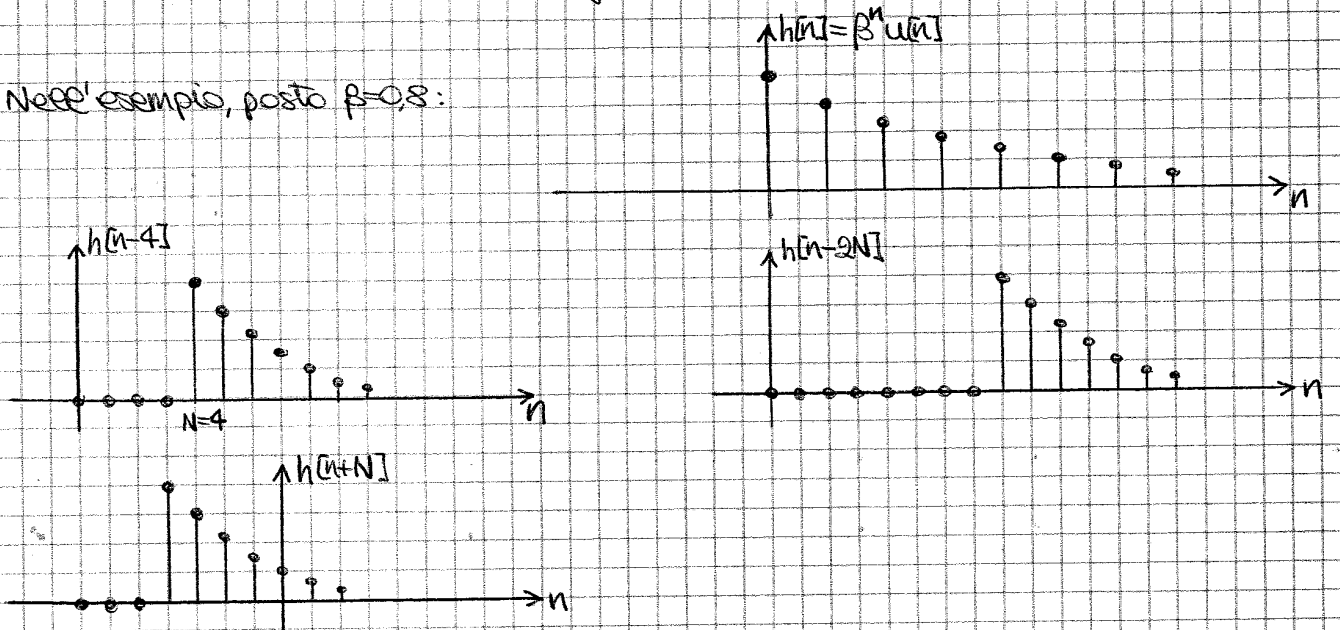
$$h_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_\delta[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} d[k-sN] \right) h[n-k] = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} d[k-sN] h[n-k] \right)$$

$\hookrightarrow \neq 0$ solo per $k=sN$ ($G=1$)

$$h_N[n] = \sum_{s=-\infty}^{\infty} h[n-sN]$$

segnale periodico di periodo N
(come l'ingresso)

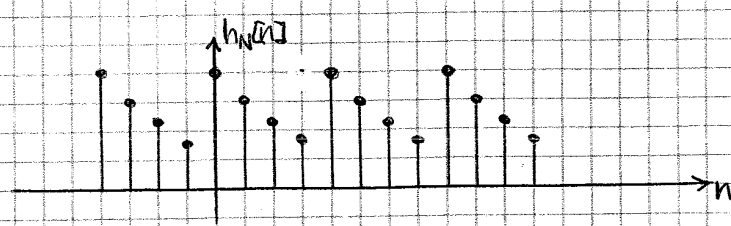
Nece' esempio, posto $\beta=0,8$:



$h_N[n] = \sum_{s=-\infty}^{\infty} h[n-sN]$
 • per $n=0$: $h_N[0] = \sum_{s=-\infty}^{\infty} h[0-sN] = \sum_{s=-\infty}^{\infty} h[0-sN]$ pongo $k=-s$
 solo i contributi negativi fino a $s=0$ sono $\neq 0$

$$h_N[0] = \sum_{k=0}^{\infty} h[kN] = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{kN} \stackrel{u[n]}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{kN} = \frac{1}{1-\beta^N}$$

• per n generico: $h_N[n] = \sum_{s=-\infty}^{\infty} h[n-sN] = \sum_{k=0}^{\infty} h[n+kN] = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{n+kN} = \beta^n \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{kN} = \frac{\beta^n}{1-\beta^N}$
 $h_N[n]$ è periodico



- Applico la DFT su $x[n]$ immaginando sia periodica di periodo 9
- Applico la DFT a $h_n[n]$ immaginando sia stata periodicizzata di periodo 9
- $\Psi(k) = X(k)H_N(k)$
- $y[n] = \text{IDFT}\{\Psi(k)\}$

$$N = N_x + N_y - 1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j2\pi kn/N}, \quad H_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

$$\Psi(k) = H_N(k) X(k) \rightarrow y[n] = \text{IDFT}\{\Psi(k)\}$$

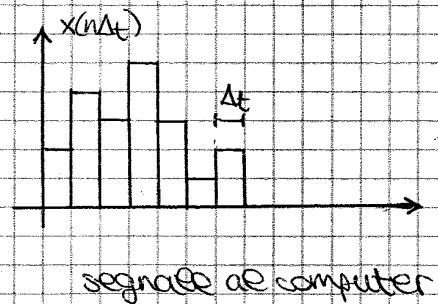
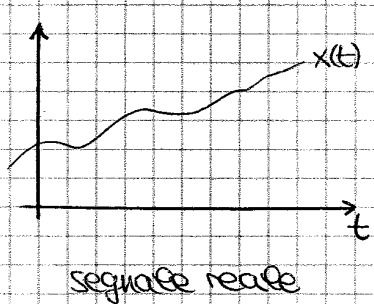
In Matlab:

```

x = ones(7,1);
h = [1;2;1];
Ny = length(x) + length(h) - 1;
N = 2^(ceil(log2(Ny))); % ceil fornisce l'intero superiore
X = fft(x);
x1 = [x; zeros(N-length(x)-1)];
h1 = [h; zeros(N-length(h)-1)];
H = fft(h1);
Psi = X * H;
y = ifft(Psi);
    
```

→ "ZERO PADDING"

21.05.13

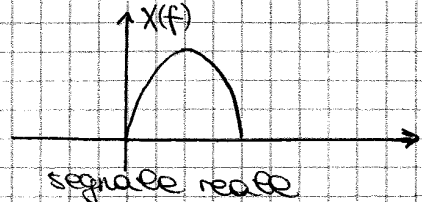


$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \sum x(n\Delta t) e^{j2\pi f n \Delta t} \Delta t \leftarrow \text{segnale periodico } X(f+F) = X(f)$$

infatti se prendo $F = \frac{1}{\Delta t}$:

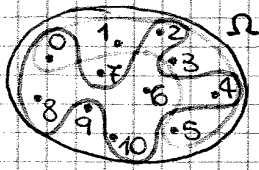
$$e^{j2\pi(f + \frac{1}{\Delta t})n\Delta t} = e^{j2\pi f n \Delta t} \cdot e^{j2\pi \frac{1}{\Delta t} n \Delta t} = e^{j2\pi f n \Delta t} \cdot e^{j2\pi n} = e^{j2\pi f n \Delta t} \cdot 1 = e^{j2\pi f n \Delta t}$$



LEGGI DI DE MORGAN

- 1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- 2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

DIAGRAMMA DI VENN



PRODOTTO CARTESIANO tra Ω_1 e Ω_2

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{ (\omega_i^{(1)}, \omega_j^{(2)}) \mid \omega_i^{(1)} \in \Omega_1 \wedge \omega_j^{(2)} \in \Omega_2 \}$$

ES $\Omega_1 = \{AI, FI, ELT, ELN, AS, MM, BIS\}$ $\Omega_2 = \{voti \geq 18\}$

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{ (AI, 18), (AI, 19), \dots, (AI, 30L), (FI, 18), (FI, 19) \dots \}$$

cardinalità di $\Omega_1 = N_1$
 " " " $\Omega_2 = N_2$
 " " " $\Omega_1 \times \Omega_2 = N_1 N_2$

ESPERIMENTO: es lancio del dado

EVENTO: possibile risultato dell'esperimento

SPAZIO CAMPIONE: insieme dei possibili eventi associati all'esperimento

ES. Esperimento: lancio del dado

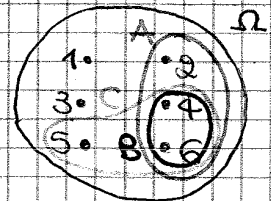
Spazio campione: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ = insieme degli eventi semplici

Eventi complessi: es. $A = \{\text{il dado restituisce un numero pari}\}$

$B = \{\text{il dado restituisce un numero pari} > 3\}$

studio prima $C = \{\text{il dado restituisce un numero} > 3\}$

poi $B = A \cap C$



Definizione assiomatica della probabilità:

- 1) la probabilità $P\{A\}$ di un evento A è sempre ≥ 0
- 2) la probabilità di un evento certo è 1 $P\{\Omega\} = 1$
- 3) se A e B sono due eventi mutuamente esclusivi ($A \cap B = \emptyset$), allora $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$

Se A e B sono mutuamente esclusivi, sono anche statisticamente indipendenti;

NO!

$$P\{A \cap B\} \stackrel{?}{=} P\{A\} \cdot P\{B\}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad (\text{mutuamente esclusivi})$$

$$P\{\emptyset\} = 0$$

→ per due eventi mutuam. esclusivi, $P\{A \cap B\} = 0 \neq P\{A\} \cdot P\{B\}$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

1) Esperimento: un amico lancia il dado e vi chiede di indovinare il risultato

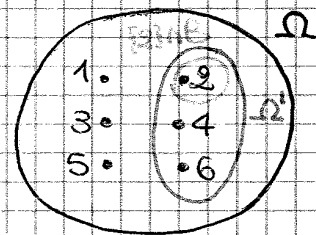
$$P\{\text{vincita}\} = \frac{1}{6}$$

2) Esperm.: l'amico lancia il dado e vi dice che è uscito un numero pari

$$P\{\text{vincita}\} = \frac{1}{3}$$

$$\text{In } \Omega, P\{\{2\}\} = P\{\{4\}\} = P\{\{6\}\} = \frac{1}{6}$$

$$P\{\Omega\} = P\{\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}\} = 1$$



$B = \{\text{esce un numero pari}\}$

$P\{\text{vincita} | B\}$: "prob. di vincita condizionata dal verificarsi dell'evento B"

Regola di BAYES

1) Misura di probabilità di vincita. Lancio il dado N volte e conto il numero di volte N_f in cui si verifica l'evento "esce 2" e quindi indovino.

$$P\{\text{vincita}\} \approx \frac{N_f}{N}$$

2) Lancio il dado e registro solo i risultati che ottengo quando si verifica l'evento B. ottengo N_B casi di verifica dell'evento B e all'interno di questi casi ottengo N_{fB} volte il valore 2.

$$P\{\text{vincita} | B\} \approx \frac{N_{fB}}{N_B} = \frac{N_{fB}}{N} \cdot \frac{N}{N_B} \approx P\{\text{vinc.} \cap B\} \cdot \frac{1}{P\{B\}}$$

Regola: $P\{\text{vinc.} \cap B\} = P\{\text{vincita} | B\} \cdot P\{B\}$

$$P\{A \cap B\} = P\{A, B\} = P\{A | B\} \cdot P\{B\} = P\{B | A\} \cdot P\{A\}$$

$$\text{ES. } P\{\text{vincita} | B\} = P\{\{2\} | B\} = \frac{P\{\{2\} \cap B\}}{P\{B\}} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

ES) In un'urna sono contenute 4 palline, rispettivamente di colore rosso R, verde V, blu B, giallo G. Si estrae una 1^a pallina e poi una 2^a pallina senza aver reinserto la prima.

a) indicare lo spazio campione (coppie ordinate)

b) Calcolare le prob. dei due eventi:

A = escano una pallina rossa e una blu

B = escano una rossa e una blu oppure una rossa e una gialla

a)

2 ^a estr.		R	V	G	B
1 ^a estr.	R				
	V				
	G				
	B				

b) $P\{A\} = \frac{2}{12}$

$P\{B\} = \frac{4}{12}$

12 eventi elementari equiprobabili

oppure con i teoremi:

$$P\{A\} = P\{A|I^{\circ}R\} \cdot P\{I^{\circ}R\} + P\{A|I^{\circ}V\} \cdot P\{I^{\circ}V\} + P\{A|I^{\circ}G\} \cdot P\{I^{\circ}G\} + P\{A|I^{\circ}B\} \cdot P\{I^{\circ}B\} =$$

$$= P\{IB|IR\} \cdot P\{IR\} + 0 + 0 + P\{IR|IB\} \cdot P\{IB\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$$

c) Calcolare la prob. dell'evento A, sapendo che le due palline estratte hanno colore diverso

Informazione ovvia: $\Omega' \equiv \Omega \rightarrow P = \frac{2}{12}$

ES) In un paese il 50% delle donne è di colore castano, il 30% è biondo, il 20% è rosso.

Sapendo che:

- le brune arrivano sempre in orario
- le bionde arrivano in orario il 60% delle volte
- le rosse arrivano in orario il 20% delle volte

Calcolare 1) la prob. che una donna arrivi in orario = A
2) la prob. che la donna sia bruna sapendo che è arrivata in orario

1) $P\{A\} = \left(\frac{50}{100} \cdot \frac{100}{100}\right) + \left(\frac{30}{100} \cdot \frac{60}{100}\right) + \left(\frac{20}{100} \cdot \frac{20}{100}\right) = \frac{1}{2} + \frac{9}{50} + \frac{1}{25} = \frac{36}{50}$

2) $P\{Bruna|A\} = \frac{P\{A, B\}}{P\{A\}} = \frac{P\{A|B\} \cdot P\{B\}}{P\{A\}} = \frac{\frac{100}{100} \cdot \frac{50}{100}}{\frac{36}{50}} = \frac{25}{36}$

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ CUMULATIVA: $F_{\xi}(x) \triangleq P\{\xi \leq x\} \quad x \in \mathbb{R}$

ES. Lancio del dado

$$F_{\xi}(0) = P\{\xi \leq 0\} = 0$$

$$F_{\xi}(1^-) = P\{\xi \leq 1\} = 0$$

$$F_{\xi}(1) = P\{\xi \leq 1\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{6}$$

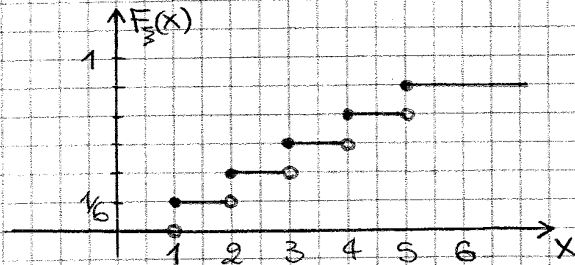
$$F_{\xi}(1^+) = P\{\xi \leq 1^+\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{6}$$

$$F_{\xi}(2^-) = \frac{1}{6}$$

$$F_{\xi}(2) = P\{\xi \leq 2\} = P\{\xi = 1 \cup \xi = 2\} = \frac{2}{6}$$

$$F_{\xi}(3) = P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} = \frac{3}{6}$$

$$F_{\xi}(6) = P\{\xi \leq 6\} = 1$$



$$0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1$$

$F_{\xi}(x)$ è crescente

$F_{\xi}(x)$ è continua da destra in presenza di discontinuità

DENSITÀ DI PROBABILITÀ (ddp)

$$f_{\xi}(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_{\xi}(x)$$

dove $f_{\xi}(x) = 0$, significa che la variabile aleatoria non può assumere quei valori

ES. Lancio del dado $f_{\xi}(x) = ?$

per $x < 1$ $f_{\xi}(x) = 0$

per $1 < x < 2$ $f_{\xi}(x) = 0$

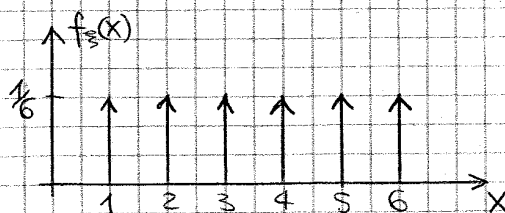
per $x = 1$ $f_{\xi}(x) = \frac{1}{6} \delta(x-1)$

trovo una δ perché ho una funzione gradino e so che:

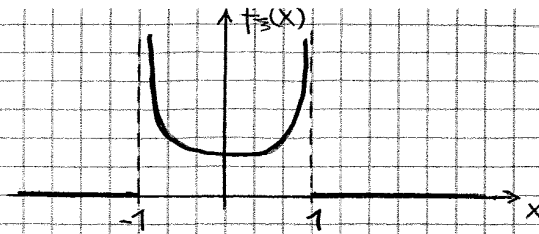
$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t) \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{6} u(x-1) + \frac{1}{6} u(x-2) + \frac{1}{6} u(x-3) + \dots + \frac{1}{6} u(x-6)$$

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{6} \delta(x-1) + \frac{1}{6} \delta(x-2) + \dots + \frac{1}{6} \delta(x-6)$$



ES $\theta \in \mathcal{U}(-\pi, \pi)$
 $\xi = \cos(\theta)$



Significato del grafico:

- ξ può assumere solo i valori $(-1, 1)$
- c'è una maggiore probabilità che ξ assuma valori che tendono a ± 1

! Per le variabili aleatorie continue, la probabilità che ξ valga un valore preciso è sempre nulla, mentre è diversa da zero la probabilità che ξ appartenga a un intervallo di valori.

$P\{\xi = x_i\} = 0$ infatti $P\{\xi = x_i\} = P\{\xi \in (x_i, x_i)\} = \int_{x_i}^{x_i} f_\xi(u) du = 0$

$P\{\xi \in [x_i, x_j]\} \neq 0, \forall i \neq j$

MEDIA

$E\{\xi\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x) dx = \mu_\xi$

↳ = aspettazione = valor medio = valore atteso

ES nel caso di v.a. discreta : lancio del dado

X_k = risultato del lancio k-esimo

N lanci effettuati

$\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$

n_1 = n° di volte in cui $x_k = 1$... n_6 = n° di volte in cui $x_k = 6$

$n_1 + n_2 + \dots + n_6 = N$

→ somma di variabili aleatorie

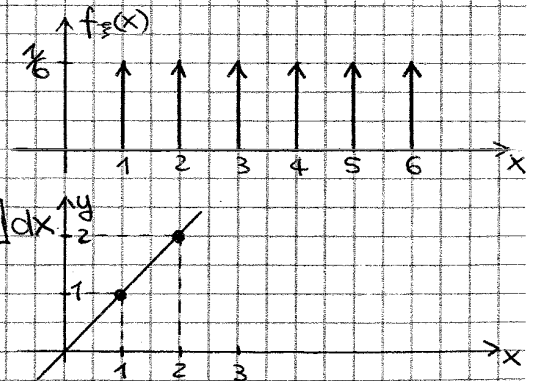
→ $\bar{x} = \frac{n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 2 + \dots + n_6 \cdot 6}{N} \cong P\{\xi=1\} \cdot 1 + P\{\xi=2\} \cdot 2 + \dots + P\{\xi=6\} \cdot 6$

Usando la formula:

$f_\xi(x) = \frac{1}{6} \delta(x-1) + \frac{1}{6} \delta(x-2) + \dots + \frac{1}{6} \delta(x-6)$

$E\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x) dx = \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} x [\delta(x-1) + \delta(x-2) + \dots + \delta(x-6)] dx$

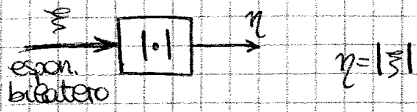
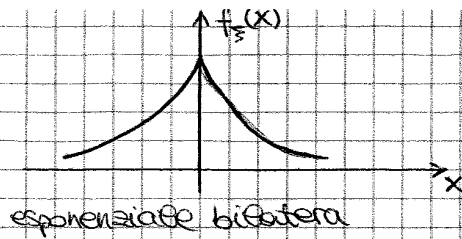
$E\{\xi\} = \frac{1}{6} [1 + 2 + \dots + 6] = P\{\xi=1\} \cdot 1 + P\{\xi=2\} \cdot 2 + \dots + P\{\xi=6\} \cdot 6$



VALOR QUADRATICO MEDIO

$E\{\xi^2\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_\xi(x) dx$

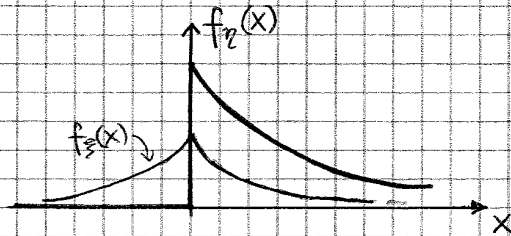
ES. $f_{\xi}(x) = \frac{\beta}{2} e^{-\beta|x|}$
 modello matematico per il segnale vocale



$\xi \in (-\infty, \infty)$, $\eta \in (0, +\infty)$

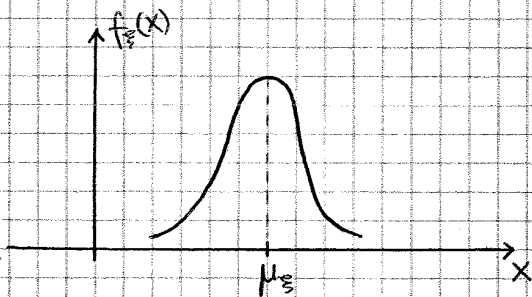
"Ribaltò" il ramo azzurro e sommo:

$f_{\eta}(x) = \beta e^{-\beta x} u(x)$



DENSITA' di PROBABILITA' GAUSSIANA

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\xi}^2}(x-\mu_{\xi})^2}$$



$\xi \in \mathcal{N}(\mu_{\xi}, \sigma_{\xi}^2)$: insieme "normale" o gaussiano

$E\{\xi\} = \int x f_{\xi}(x) dx = \mu_{\xi}$

$E\{\xi^2\} = \int x^2 f_{\xi}(x) dx = \sigma_{\xi}^2 + \mu_{\xi}^2$

Più piccola è la varianza, più decade velocemente.

COPIE DI VARIABILI ALEATORIE ξ, η

• DISTRIBUZIONE di PROB. CUMULATIVA CONGIUNTA

$$F_{\xi, \eta}(x, y) \triangleq P\{\xi \leq x, \eta \leq y\}$$

• DENSITA' di PROB. CONGIUNTA

$$f_{\xi, \eta}(x, y) \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi, \eta}(x, y)$$

ES. Caso di coppia di v.a. statisticamente indipendenti:

$$F_{\xi, \eta}(x, y) = P\{\xi \leq x\} \cdot P\{\eta \leq y\} = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)$$

$$f_{\xi, \eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} F_{\xi}(x) \right) F_{\eta}(y) \right] = \frac{\partial}{\partial y} [f_{\xi}(x) F_{\eta}(y)] = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y) = f_{\xi, \eta}(x, y)$$

FUNZIONE CARATTERISTICA di una variabile aleatoria ξ

$$C_{\xi}(p) \triangleq E\{e^{jp\xi}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jpx} f_{\xi}(x) dx$$

$$\mathcal{F}\{f_{\xi}(x)\} = \int f_{\xi}(x) e^{-j2\pi x} dx \quad \text{con } -2\pi x = p$$

TEOR. FONDAMENTALE NELLA MEDIA per una coppia di v.a.

$$E\{g(\xi, \eta)\} = \iint g(x, y) f_{\xi\eta}(x, y) dx dy$$

COEFF. di CORRELAZIONE tra due v.a. ξ e η

$$\rho_{\xi\eta} \triangleq \frac{E\{(\xi - \mu_{\xi})(\eta - \mu_{\eta})\}}{\sigma_{\xi} \sigma_{\eta}} \quad -1 \leq \rho_{\xi\eta} \leq 1$$

• Se ξ e η sono stat. indipendenti:

$$\begin{aligned} E\{(\xi - \mu_{\xi})(\eta - \mu_{\eta})\} &= \iint (x - \mu_{\xi})(y - \mu_{\eta}) f_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \iint (x - \mu_{\xi})(y - \mu_{\eta}) f_{\xi}(x) f_{\eta}(y) dx dy = \\ &= \int (x - \mu_{\xi}) f_{\xi}(x) dx \cdot \int (y - \mu_{\eta}) f_{\eta}(y) dy = \underbrace{E\{\xi - \mu_{\xi}\}}_{=0} \cdot \underbrace{E\{\eta - \mu_{\eta}\}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \rho_{\xi\eta} = 0$ il coeff. indica quanto le variabili ξ e η sono legate tra loro $\rightarrow E\{\xi - \mu_{\xi}\} = E\{\xi\} - E\{\mu_{\xi}\} = \mu_{\xi} - \mu_{\xi} = 0$

05.06.13

DENSITA' di PROB. GAUSSIANA per una coppia di v.a.

$$\underline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

$$E\{\xi_1\} = \mu_1 \quad E\{\xi_2\} = \mu_2$$

$$\sigma_{\xi_1}^2 = \sigma_1^2 \quad \sigma_{\xi_2}^2 = \sigma_2^2$$

$$\text{coeff. corr. } \rho = \frac{E\{(\xi_1 - \mu_1)(\xi_2 - \mu_2)\}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

$$f_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \underline{L}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} [x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2] \underline{L}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\underline{L} = E\left\{ \begin{bmatrix} \xi_1 - \mu_1 \\ \xi_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 - \mu_1, \xi_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \right\} = E\left\{ \begin{bmatrix} (\xi_1 - \mu_1)^2 & (\xi_1 - \mu_1)(\xi_2 - \mu_2) \\ (\xi_1 - \mu_1)(\xi_2 - \mu_2) & (\xi_2 - \mu_2)^2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\underline{L}) = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \rho^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 = (1 - \rho^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2$$

$$\sqrt{\det \underline{L}} = \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_1 \sigma_2$$

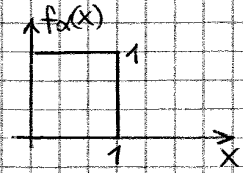
$$\underline{L}^{-1} = \frac{1}{(1 - \rho^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho \sigma_1 \sigma_2 \\ -\rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

se, ad es., $t_1 > 0$: $\xi_1 = \alpha e^{-t_1/t_0}$

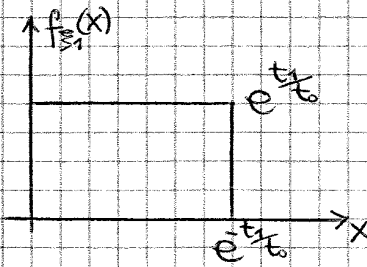
$E\{\xi_1\} = E\{\alpha e^{-t_1/t_0}\} = e^{-t_1/t_0} \cdot E\{x\} = \left(\frac{1}{2}\right) e^{-t_1/t_0}$ perché $\alpha \in U(0,1)$ quindi la media è $\frac{1}{2}$

$E\{\xi_1^2\} = E\{\alpha^2 e^{-2t_1/t_0}\} = e^{-2t_1/t_0} \cdot E\{x^2\} = \frac{1}{3} e^{-2t_1/t_0}$

$E\{x^2\} = \int x^2 f_x(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$



ddp (densità di probabilità) di $\xi_1 = \alpha e^{-t_1/t_0}$:
 $\xi_1 \in U(0, e^{-t_1/t_0})$



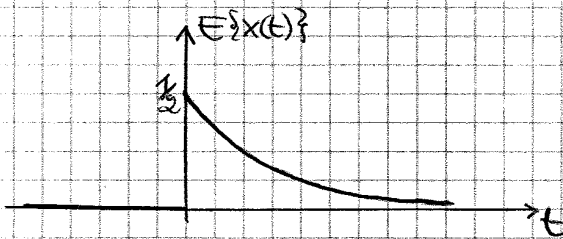
Ora considero t_1 variabile :

$E\{x(t)\} = \frac{1}{2} e^{-t/t_0}$ ($t > 0$)
 ← sostituisco t_1 con t nelle espressioni di prima

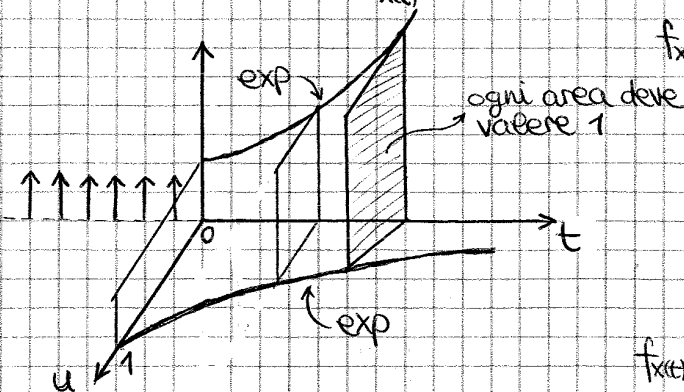
$E\{x(t)\} = E\{\alpha e^{-t/t_0} u(t)\} = E\{x\} \cdot e^{-t/t_0} \cdot u(t) = \frac{1}{2} e^{-t/t_0} u(t)$
 ← immagino t fissato

per $t < 0$, $x(t) = \alpha e^{-t/t_0} u(t) = 0$: variabile pseudoaleatoria che vale 0 con probabilità 1

La ddp di $x(t)$ per $t < 0$ è $f_x(x) = \delta(x)$



ddp del processo casuale $f_{x(t)}(u; t)$:



$f_{x(t)}(u; t) = \begin{cases} \delta(u) & \text{per } t < 0 \\ \dots & \text{per } t > 0 \end{cases}$

ogni area deve valere 1

$f_{x(t)}(u; t) du = P\{x(t) \in [u, u+du]\}$