NUMERO: 682

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Taberna

MATERIA: Elettrotecnica
Prof. Canavero

ELETTROTECNICA

G. Taberna

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 80

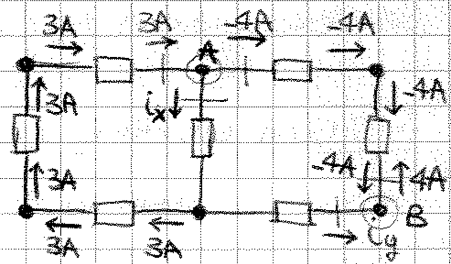
$i_1+i_3-i_2=0$ $\quad i_1+i_3+(-i_2)=0$ $\quad i_1+i_3+i_2'=0$

KCL_2 : $\boxed{\sum_{k \text{ entranti/uscenti}} i_k=0}$ (considero tutte le correnti)

ES.

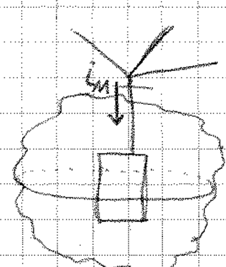
Applico KCL_1 nel nodo A: $3=-4+i_x \quad i_x=7A$

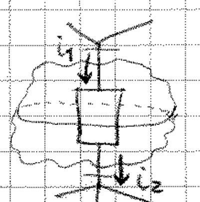
Applico KCL_1 in B: $i_y=4A$



MONOPÒLO

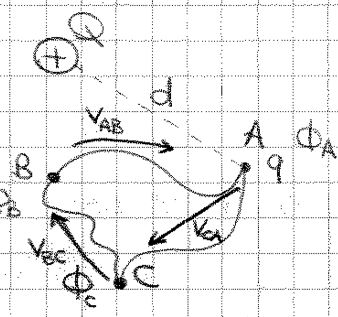
$KCL \rightarrow i_1=0$





BIPÒLO

$KCL \rightarrow i_1=i_2$



$\Phi_A > \Phi_B > \Phi_C$

$V_{AB}=\Phi_A-\Phi_B$

$V_{BC}=\Phi_B-\Phi_C$

$V_{CA}=\Phi_C-\Phi_A$

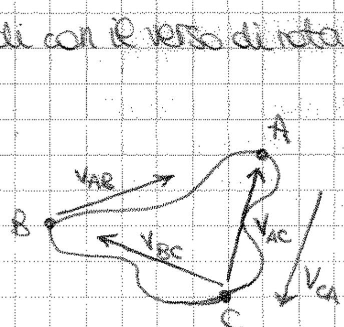
$V_{AB}+V_{BC}+V_{CA}=0$

le tensioni sono tutte equiverse!

LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI (KVL_1)

Ip: percorso chiuso $\quad \boxed{\sum_n V_n=0}$ $\quad V_n$ concordi con il verso di rotazione

Se scelgo il verso delle tensioni "a caso", la somma sarà $\neq 0$.
Basta trasformare le tensioni in modo da renderle equiverse.

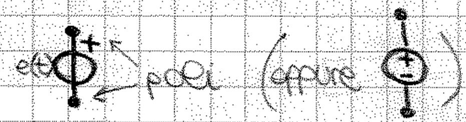


Sostituisco V_{AC} con $V_{CA}=-V_{AC}$

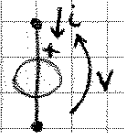
$V_{AB}+V_{BC}+(-V_{AC})=0 \qquad \underbrace{V_{AB}+V_{BC}}_{\text{accumulate}}=V_{AC}$

ELEMENTI ELETTRICI IDEALI - 1

• GENERATORE INDIPENDENTE DI TENSIONE



polo +: indica il punto a tensione più alta (punto a cui deve puntare la freccia della tensione)



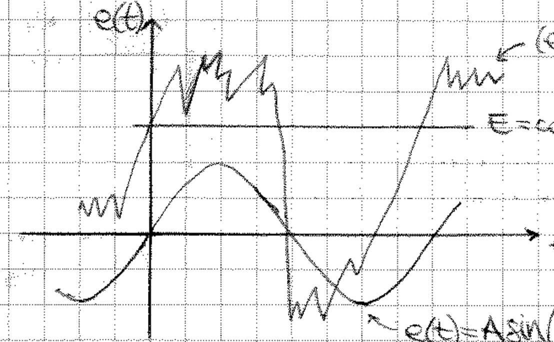
(non è importante la convenz. degli utilizzatori)

GRANDEZZA IMPRESSA

$\boxed{v = e(t)}$: tensione che il generatore produce (fz. del tempo)

EQUAZIONE DI FUNZIONAMENTO

(Es.)

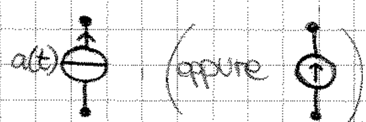


$e(t) = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$: tens. oscillante/alternata (es. presa)

L'eq. di funzionamento agisce solo sulla tensione; la corrente può essere di qualunque tipo

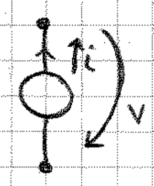
$\boxed{v = e(t) \quad \forall i}$

• GENERATORE INDIPENDENTE DI CORRENTE



freccia: indica la direzione di uscita delle cariche +

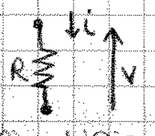
$\boxed{i = a(t) \quad \forall v}$



(non è importante la convenzione degli utilizzatori)

es. caricabatterie

• RESISTORE

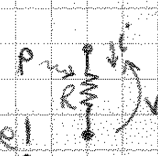


convenzione degli utilizzatori!

$\boxed{v = R \cdot i}$ R dipende dall'elemento, un. misura: $\frac{V}{A} = \Omega$ (ohm)

↳ LEGGE DI OHM

R: RESISTENZA



Potenza assorbita: $p = v \cdot i = (R \cdot i) \cdot i$ $\boxed{p = Ri^2}$ > 0 → $R > 0$ sempre!

! Potenza sempre assorbita: trasform. di energia in calore (per attrito)

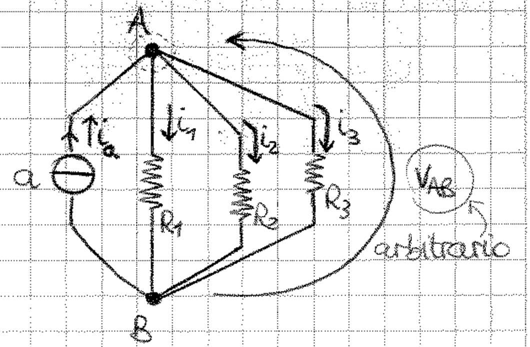
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 80

REGOLA del PARTITORE DI TENSIONE:

Ip. percorso chiuso con 1 generatore di tensione e resistori in serie

⟹ tensione parziale sul resistore k: $\boxed{v_k = e\,\frac{R_k}{\sum_n R_n} = e\,\underbrace{\frac{R_k}{R_{eq}}}_{}}$ FATTORE DI PARTIZIONE

ES.



Superficie chiusa in A ⟹ applico KCL

$\sum_{entr.} = \sum_{usc.}$ $\quad i_a = i_1 + i_2 + i_3$

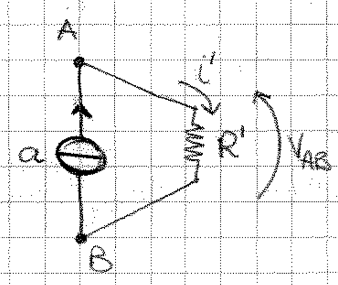
$a = \underbrace{\frac{V_{AB}}{R_1}}_{\text{legge di Ohm}} + \frac{V_{AB}}{R_2} + \frac{V_{AB}}{R_3}$

$a = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) V_{AB}$ $\qquad \underline{V_{AB} = \frac{a}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}$

$i_3 = \frac{V_{AB}}{R_3} = \underline{\frac{a/R_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}$ ...

ES.

$V_{AB} = R' \cdot a$



COLLEGAMENTO IN PARALLELO

Per avere la stessa tensione deve essere $\quad R' = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$

REGOLA DELLA RESISTENZA EQUIVALENTE DEL PARALLELO

Ip. circuito con tutti i resistori con la stessa tensione (collegati fra gli stessi due punti)

⟹ posso sostituire più resistori <u>in parallelo</u> (//) con un resistore equivalente e vale:

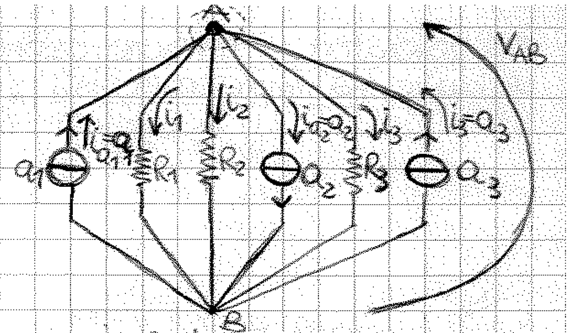
$$\boxed{R_{eq} = \frac{1}{\sum_k \frac{1}{R_k}}}$$

Altre scritture:
- $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_k \frac{1}{R_k}$
- $G_{eq} = \sum_k G_k$

Caso particolare: solo 2 resistori in parallelo

- $R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}} = \underline{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$

ES.

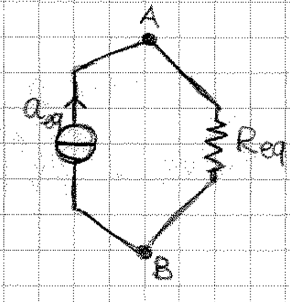


Applico KCL in A: $a_1+(-i_1)+(-i_2)+(-a_2)+(-i_3)+a_3=0$

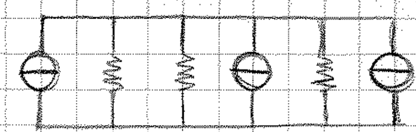
$$\underbrace{a_1-a_2+a_3}_{a_{eq}}=i_1+i_2+i_3$$

$$a_{eq}=V_{AB}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$

$$a_{eq}=\frac{V_{AB}}{R_{eq}}$$



equivalente a:



COROLLARIO: per circuiti parallelo $\boxed{a_{eq}=\sum_n a_n}$

COR.: se $R_j \ll R_k$ $(k=1,2,\dots,N)$

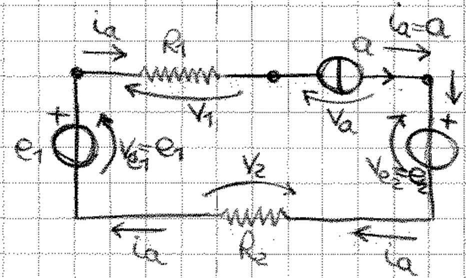
$$R_{eq}=\frac{1}{\sum_n \frac{1}{R_n}} \Rightarrow R_{eq}\cong R_j$$

$$\rightarrow \boxed{R_{eq}\leq R_j} \; !$$

COR. Se una R del parallelo è un corto circuito $(R=0) \Rightarrow \boxed{R_{eq}=0}$ (perché non può essere <0) !

ES.

CTO SERIE CON GENERATORE DI CORRENTE

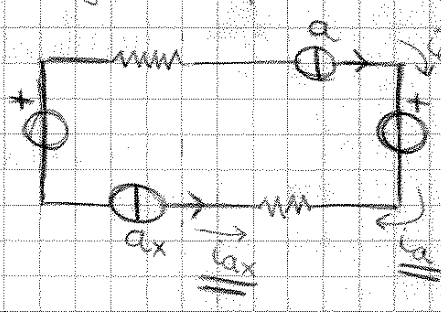


Applico KVL: $e_1+(-v_1)+(-v_a)+(-e_2)+(-v_2)=0$

$e_1+(-R_1 i_a)+(-v_a)+(e_2)+(-R_2 i_a)=0$

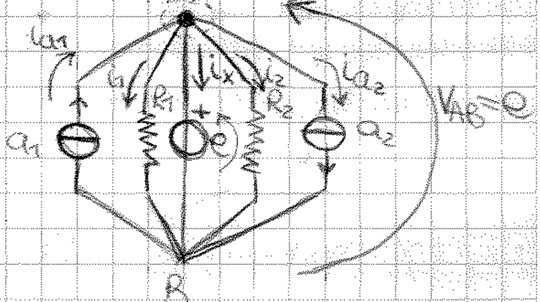
$V_a=e_1-R_1 a-e_2-R_2 a$

In questo tipo di circuito NON posso applicare la regola del partitore di tensione!



Serie di generatori di corrente possono esistere solo se hanno correnti impresse UGUALI!

ES. C.TO PARALLELO



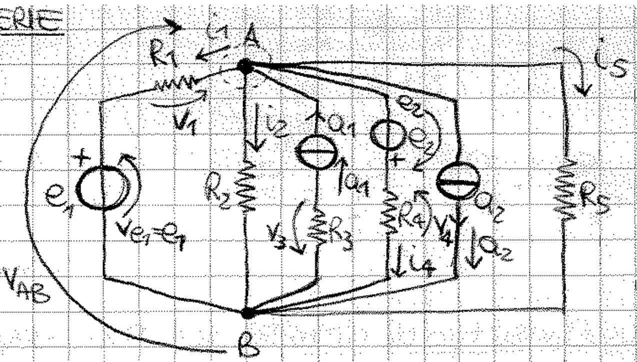
KCL in A: $a_1+(-i_1)+(-i_x)+(-i_2)+(-a_2)=0$

$a_1+\left(-\frac{e}{R_1}\right)+(-i_x)+\left(-\frac{e}{R_2}\right)+(-a_2)=0$

$i_x=a_1-\frac{e}{R_1}-\frac{e}{R_2}-a_2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 80

(ES.) CIRCUITO PARALLELO DI ELEMENTI SERIE



KCL in A: $i_1+i_2-a_1+i_4+a_2+i_5=0$

$V_{AB}=R_2 i_2 \qquad V_{AB}=R_5 i_5$

$V_{e_1}+V_1=V_{AB} \qquad e_1+R_1 i_1=V_{AB}$

$V_{AB}=V_4-e_2=R_4 i_4-e_2$

$$\frac{V_{AB}-e_1}{R_1}+\frac{V_{AB}}{R_2}-a_1+\frac{V_{AB}+e_2}{R_4}+a_2+\frac{V_{AB}}{R_5}=0$$

$$V_{AB}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)=\frac{e_1}{R_1}+a_1-\frac{e_2}{R_4}-a_2$$

$$V_{AB}=\frac{\frac{e_1}{R_1}+a_1-\frac{e_2}{R_4}-a_2}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}}$$

*

17.10.12

LUN 22: NO LEZIONE!

MER 24: ESERCITAZIONE h10-11.30

(ES) *
- e_1 appare con R_1, e_2 appare con R_4 } generatori di tensione + resistenze in serie
- $e_1>0$, $e_2<0$ } a seconda se concorde/discorde con V_{AB}
- $a_1>0$, $a_2<0$ } a seconda se punta verso A o B

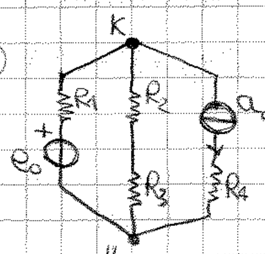
REGOLA (TEOR. di MILLMAN)

Ip. circuito con struttura in parallelo e rami con bipoli in serie

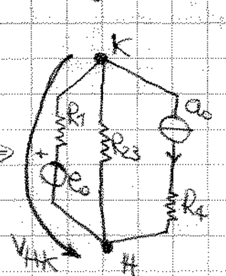
$$\Rightarrow \boxed{V_p=\frac{\underbrace{\sum_k \pm\frac{e_k}{R_k}}_{\text{generatori tens.}}+\underbrace{\sum_j \pm a_j}_{\text{g. corrente}}}{\underbrace{\sum_n {}^{1}/_{R_n}}_{\text{rami} \neq \text{g. corrente}}}}$$

Se non ci fosse un resistore in serie con un gen. di tensione, la V_p sarebbe = alla tensione fornita dal generatore.

(ES.)



$\Rightarrow$

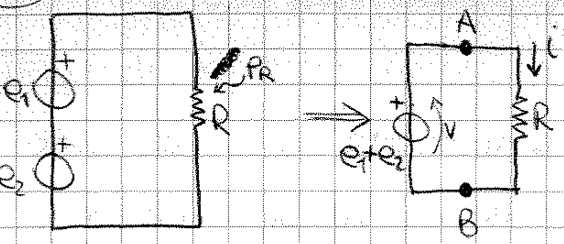


$R_{23}=R_2+R_3$

$$V_{HK}=\frac{-\frac{e_0}{R_1}+a_0}{{}^{1}/_{R_1}+{}^{1}/_{R_{23}}}$$

! NO $V_{HK}=\frac{-\frac{e_0}{R_1}+a_0}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$!

es.

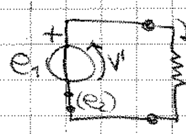


$i = \frac{e_1+e_2}{R}$ $\quad \underbrace{V}_{e_1+e_2} = Ri$

$p = v \cdot i = (e_1+e_2)\,\frac{e_1+e_2}{R} = \frac{(e_1+e_2)^2}{R}$

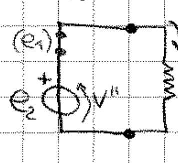
oppure con sovrapposizione degli effetti:

① $i'_R = k_1 e_1$, $e_2 = 0$



$i'_R = \frac{\overset{e_1}{V'}}{R}$ $\quad P'_R = V' \cdot i'_R = \frac{e_1^2}{R}$

② $i''_R = k_2 e_2$, $e_1 = 0$

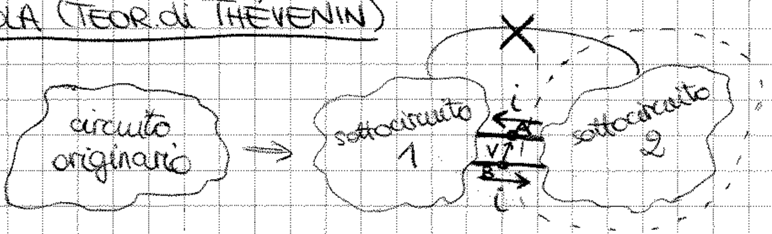


$i''_R = \frac{\overset{e_2}{V''}}{R}$ $\quad P''_R = V'' \cdot i''_R = \frac{e_2^2}{R}$

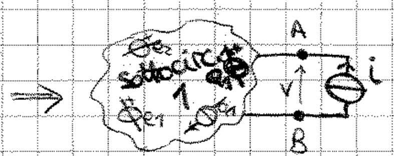
$P_R \neq P'_R + P''_R$!

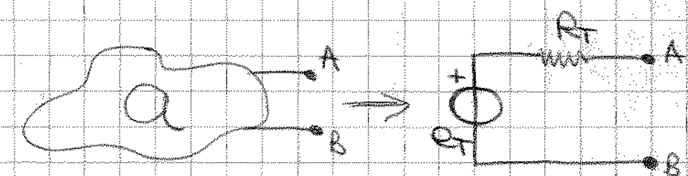
La sovrapposizione degli effetti **NON vale** per le potenze (solo v e i), perché non è una operazione lineare

REGOLA (TEOR. di THÉVENIN)



Ip. due sottocircuiti connessi solo attraverso 2 conduttori (=bipolo)



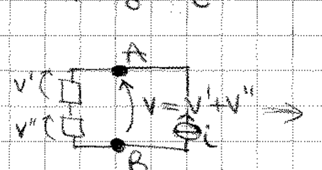


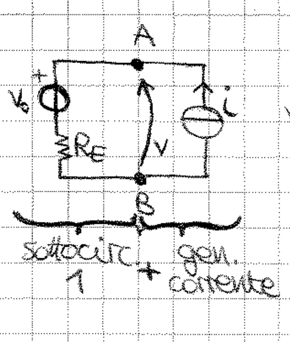
Applico la comb. lineare dei generatori: $V = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3a_1 + k_4a_2 + k_5 i$ — contributo esterno

k_5 ha le dimensioni di R $\Rightarrow k_5 = R_E$

$k_1e_1 + k_2e_2 + k_3a_1 + k_4a_2 = V_0$ (contenuto interno): è certamente una tensione

$V = V_0 + R_E i$

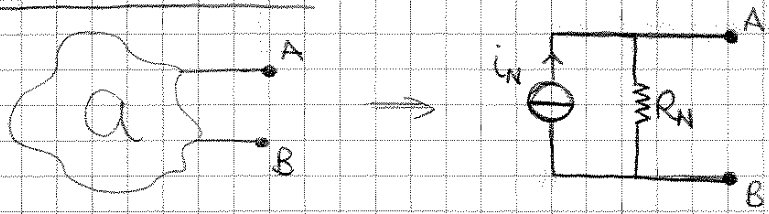




$v = V_0 + R_E i$

29.10.19

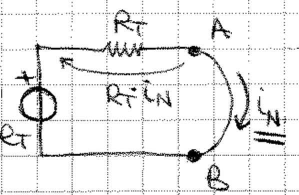
TEOR. di NORTON



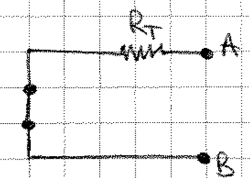
i_N : corrente di corto circuito di a in AB

R_N : resistenza equivalente di a

EQ. di THEVENIN → EQ. di NORTON

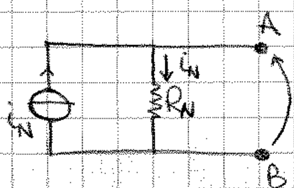


$e_T = R_T \cdot i_N$ $\boxed{i_N = \frac{e_T}{R_T}}$

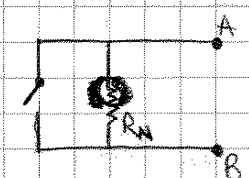


$R_{eq} = R_T \Rightarrow \boxed{R_N = R_T}$

EQ di NORTON → EQ di THEVENIN



v_{AB} = tensione a vuoto $v_{AB} = R_N \cdot i_N \Rightarrow \boxed{e_T = R_N \cdot i_N}$



$R_{eq} = R_N \Rightarrow \boxed{R_T = R_N}$

$$R_T = \frac{e_T}{i_N} = \boxed{R_N = \frac{\text{tensione a vuoto di } a}{\text{corrente di corto circuito di } a}} = R_T$$

ELEMENTI ELETTRICI IDEALI - 2

• GENERATORE DIPENDENTE DI TENSIONE

$\boxed{\hat{e} = \alpha v_x}$ — v_x → tensione tra due punti del circuito

$\boxed{\hat{e} = r_m i_x}$ — i_x → corrente nel circuito

α: costante, adimensionata

r_m: costante, dimensioni di una resistenza (Ω)

} quantità date dal costruttore

• GENERATORE DIPENDENTE DI CORRENTE

$\boxed{\hat{i} = \beta i_x}$

$\boxed{\hat{i} = g_m v_x}$

β: cost, adimensionata

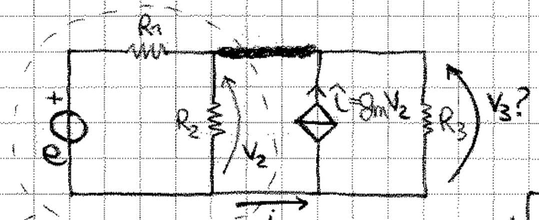
g_m: cost, dimensioni di una conduttanza ($S = \frac{1}{\Omega}$)

} date dal costruttore

→ "GENERATORI PILOTATI"

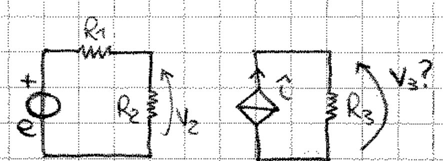
v_x, i_x: "quantità pilotanti/pilota"

ES.



monopolo ⇒ $i_0 = 0$

La dipendenza di $\hat{i}$ da V_2 può avvenire anche a distanza !



Applico il partitore di tensione a sinistra: $V_2 = e \frac{R_2}{R_1+R_2}$

$\hat{i} = \underbrace{g_m e \frac{R_2}{R_1+R_2}}$: $\hat{i}$ è noto, è diventato un generatore indipendente

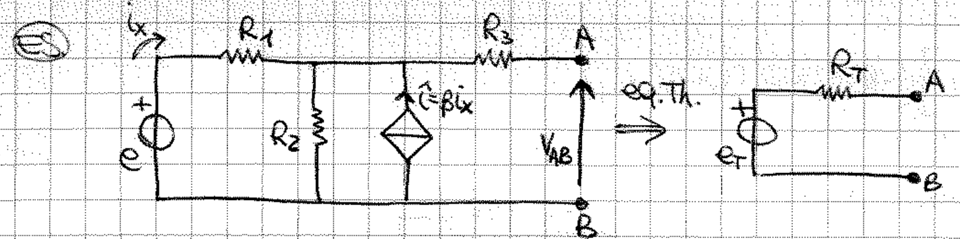
$V_3 = R_3 \hat{i} = \underbrace{R_3 g_m e \frac{R_2}{R_1+R_2}}$

REGOLA DI SOLUZIONE:

1) Trovo la quantità pilotante, considerando il generatore come indipendente
2) Il generatore dipendente diventa noto: lo tratto come generatore indipendente
3) Trovo l'incognita del circuito

31.10.12

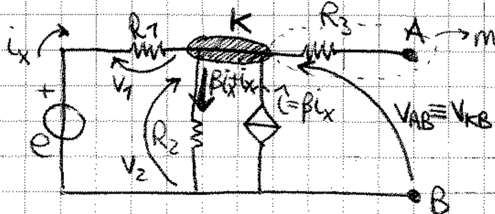
Es)



1) Calcolo e_T

$\Rightarrow$ V_{AB} a vuoto?

1a) Calcolo la quantità pilotante i_x



A $\rightarrow$ monopolo $(i=0)$

$V_{AB} \equiv V_{KB}$ $\quad V_2 = R_2(\beta+1)i_x \quad V_1 = R_1 i_x$

Applico KVL sul percorso chiuso a sinistra: $e = R_1 i_x + R_2 i_x(\beta+1)$

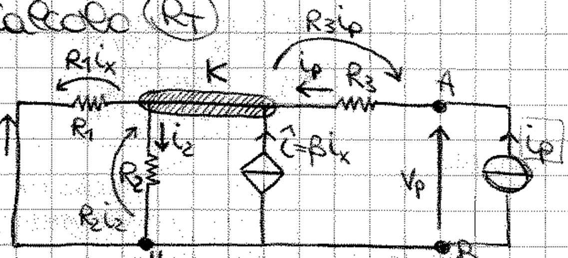
$$\underline{i_x = \frac{e}{R_1 + R_2(\beta+1)}}$$

1b) $\underline{\hat{i} = \beta \frac{e}{R_1+R_2(\beta+1)}}$ diventa noto

1c) V_{AB} a vuoto $= V_{KB} = V_2$ $\qquad \underline{V_{AB} = R_2(\beta+1)\frac{e}{R_1+R_2(\beta+1)}}$

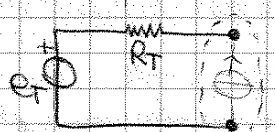
$$\underline{e_T = \frac{e R_2(\beta+1)}{R_1+R_2(\beta+1)}}$$

2) Calcolo R_T



$\rightarrow$ da considerare come <u>quantità nota</u> (alla fine dei calcoli si deve elidere)

I <u>generatori dipendenti</u> devono essere lasciati <u>accesi</u> perchè secondo Thévenin:



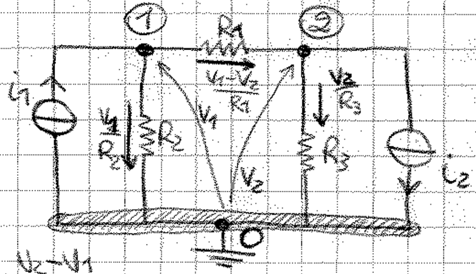
$\rightarrow$ bisogna tenere conto di questo gen. di corrente, che fa sì che scorra una corrente i_x nel circuito (e quindi una V_x), dalle quali dipendono i generatori dipendenti del circuito

$\Rightarrow$ <u>solo</u> gen. INDIPENDENTI spenti!

!
- devo inserire agli estremi un generatore di corrente di prova $(i=i_p)$
- R_T = coeff. di proporzionalità tra v_p e i_p

→ applico il KCL a tutti i nodi e trovo un sistema di (N-1) equazioni con (N-1) tensioni nodali come incognite

Es. $N=3$ nodi



2 tens. nodali → sistema 2x2

KCL sul nodo ①: $i_1 = \frac{V_1}{R_2} + \frac{V_1 - V_2}{R_1}$

KCL sul nodo ②: $i_2 + \frac{V_2}{R_3} = \frac{V_1-V_2}{R_1}$ $\quad i_2 + \frac{V_2}{R_3} + \frac{V_2 - V_1}{R_1} = 0$

Sistema: $\begin{cases} V_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + V_2\left(-\frac{1}{R_1}\right) = i_1 \\ V_1\left(-\frac{1}{R_1}\right) + V_2\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_1}\right) = -i_2 \end{cases}$

$[\ ]\cdot[\ ] = [\ ]$ — matrice coeff $\underline{A}$, vettore incognite $\underline{V}$, termini noti $\underline{b}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

A

- in tutte le posizioni di $\underline{A}$ appaiono termini del tipo $1/R$
- in posizioni 11 e 22 si trova la somma dell'inverso di tutte le R collegate al relativo nodo

→ REGOLA: i termini del tipo A_{ii} contengono la somma degli inversi delle R collegate al nodo i:

$$\boxed{\underset{(\text{diag})}{A_{ii}} = \sum_{\substack{n \\ \text{collegate a } i}} \frac{1}{R_n}}$$

- nelle altre posizioni trovo l'inverso della R collegata tra i due nodi (con segno −)

⇒ REGOLA: i termini del tipo A_{ij} contengono la somma degli inversi delle R collegate tra il nodo i e il nodo j (con segno −):

$$\boxed{\underset{(\neq \text{diag})}{A_{ij}} = -\sum_{\substack{p \\ \text{collegate a } i \text{ e } j}} \frac{1}{R_p}}$$

- matrice simmetrica dei coeff.

⇒ REGOLA: la matrice $\underline{A}$ dei coefficienti è simmetrica

b

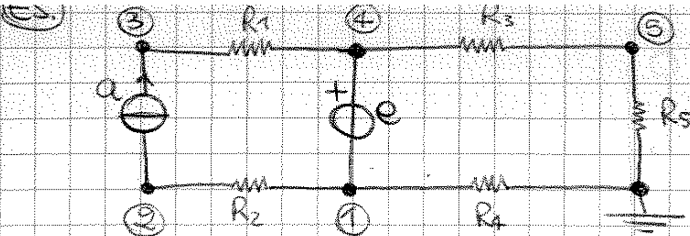
- i_1 è riferito a V_1, i_2 a V_2 perchè sono i gen. di corrente collegati ai rispettivi nodi
- $i_1>0$, $i_2<0$ a seconda del verso

⇒ REGOLA:

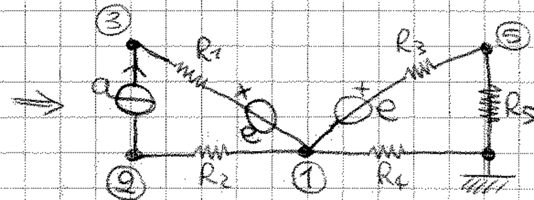
$$\boxed{b_m = \sum_{\substack{s \\ \text{gen. corr.} \\ \text{nodo } m}} \pm i_s}$$

(+ entrante, − uscente)

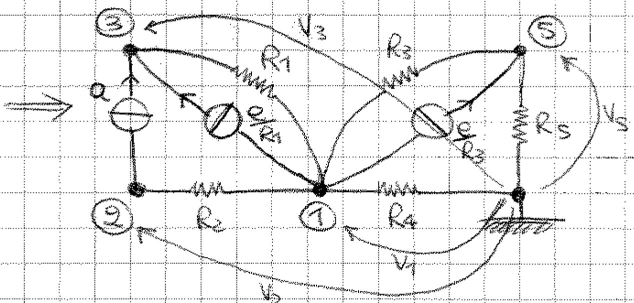
ES.



N=6 nodi
1 gen. tensione



N'=5 nodi



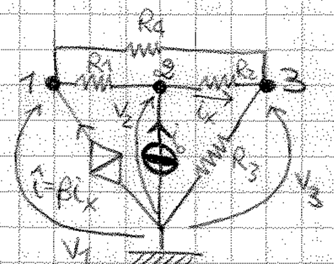
4 tensioni nodali

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & 0 & 0 & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{e}{R_1}-\frac{e}{R_3} \\ -a \\ +a+\frac{e}{R_1} \\ +\frac{e}{R_3} \end{bmatrix}$$

05.11.12

METODO DEI NODI CON GEN. PILOTATI

① Considero il gen. pilotato come indipendente:



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\hat{i} \\ +i_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

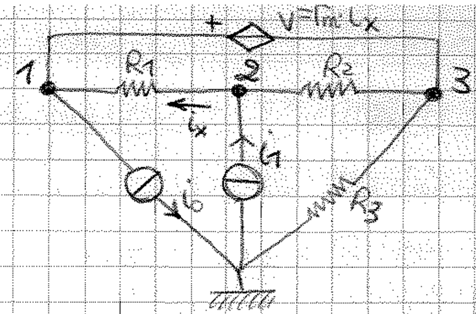
$$\hat{i} = \beta i_x = \beta\left(\frac{V_{R_2}}{R_2}\right) = \beta\,\frac{V_2-V_3}{R_2}$$

Modifico il sistema: $\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)V_1 - \frac{1}{R_1}V_2 - \frac{1}{R_4}V_3 = \beta\frac{V_2}{R_2} - \beta\frac{V_3}{R_2}$

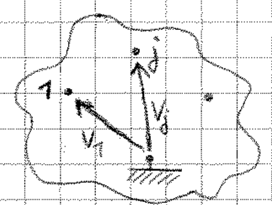
$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)V_1 - \left(\frac{1}{R_1}+\frac{\beta}{R_2}\right)V_2 - \left(\frac{1}{R_4}-\frac{\beta}{R_2}\right)V_3 = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 80

ES



TENSIONE NODALE COME COMBINAZIONE LINEARE DI GENERATORI



$$\underbrace{\overbrace{\underline{A}}^{\text{mai generatori}} \cdot \underbrace{\underline{V}}_{\text{incognite}} = \underline{b}}_{}$$

$\underline{b}$: gen. indipendenti

Uso il metodo di Cramer per la soluzione:

$$V_j = \frac{\det\left[A \vdots \overset{\text{colonna } j}{b} \vdots\right]}{\det \underline{\underline{A}}}$$

$\det A = \Delta_A$

$$V_j = \frac{\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & b_1 & \vdots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & b_2 & \vdots & A_{n2} \\ A_{n1} & A_{n2} & b_n & \vdots & A_{nn} \end{bmatrix}}{\Delta_A}$$

Calcolo il det a numeratore rispetto alla colonna della b:

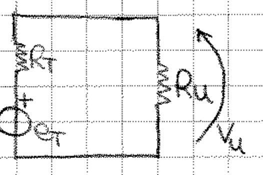
$$V_j = \frac{\pm b_1 \begin{vmatrix} A_{21} \dots \\ \dots \end{vmatrix} \pm b_2 \begin{vmatrix} A_{11} & A_{31} \dots \\ \dots \end{vmatrix} \pm \dots}{\Delta_A}$$

$\Rightarrow$ una qualsiasi tensione nodale è una combinazione lineare di tutti i generatori

$$V_u = -\frac{A\frac{e_T}{R_T}}{\frac{A}{R_f}+\frac{1}{R_f}+\frac{1}{R_T}} \simeq -\frac{A\frac{e_T}{R_T}}{A/R_f} \cong \underline{-\frac{e_T R_f}{R_T}}$$

- Se $\underline{R_f > R_T \rightarrow V_u > e_T}$: "AMPLIFICATORE"
- CONFIGURAZIONE INVERTENTE: $e_T > 0 \rightarrow V_u < 0$; $e_T < 0 \rightarrow V_u > 0$ (Th. attaccato al polo −)
  (dovuta al segno −)

(ES.) Vantaggio:

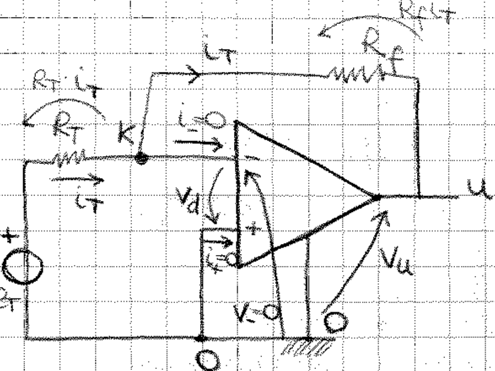


$$V_u = e_T \frac{R_u}{R_u + R_T} \rightarrow V_u \text{ sarà sempre} < e_T \,!$$

Rischio di ottenere un segnale troppo basso: devo usare un amplificatore operazionale!

$V_K = 0$ (rispetto al polo di riferimento)
↳ K corrisponde a 0

(2) $V_- = 0$ ma non c'è un corto circuito tra − e il riferimento
⇓
K è in corto circuito VIRTUALE



Circuito chiuso $0 \rightarrow Th. \rightarrow K \rightarrow Op\,Amp \rightarrow 0$

KVL: $e_T = R_T i_T + \cancel{V_-}$ ($V_- \simeq 0$) $\qquad i_T = \frac{e_T}{R_T}$

Nel nodo K: R_T con corrente i_T, i_-, R_f con corrente i_f
ma $i_- = 0 \Rightarrow i_T = i_f$

Percorso chiuso: $u \rightarrow R_f \rightarrow K \rightarrow Op\,Amp \rightarrow 0 \rightarrow u$

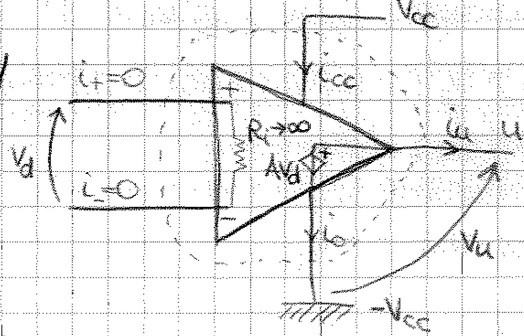
KVL: $V_u + R_f i_T = V_- \xrightarrow{V_- = 0} V_u + R_f i_T = 0 \quad V_u = -R_f i_T = \underline{-R_f \frac{e_T}{R_T}}$

07.11.12

KCL sulla sup. chiusa:

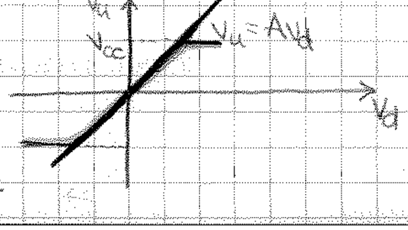
$$\underbrace{i_+ + i_- + i_{cc}}_{\text{entranti}} = \underbrace{i_0 + i_u}_{\text{uscenti}}$$

può arrivare corrente anche dall'interno del dispositivo!



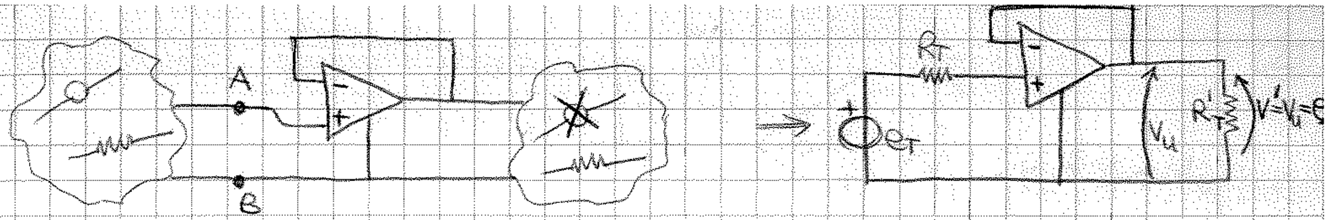
Tensione a vuoto dell'uscita: $V_u = A V_d$

Caratteristica dell'Op Amp ideale

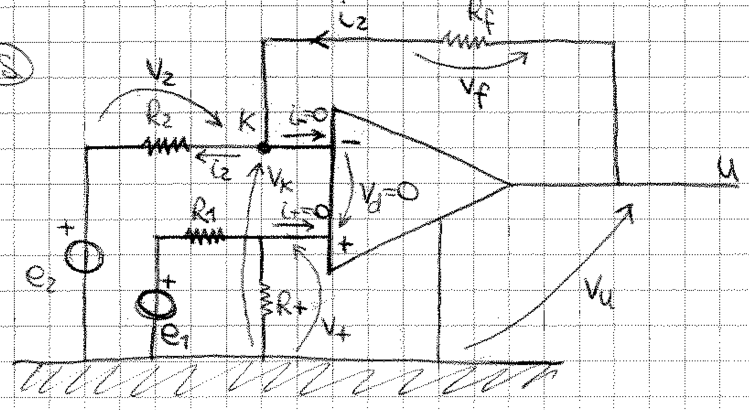


Nella realtà la caratteristica vale fino per $-V_{cc} \leq V_u \leq V_{cc}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 80



ES



- Partitore di tensione: $V_+ = e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+}$
- $V_K = V_+$
- KVL a sinistra: $V_2 + e_2 = V_K$ $\quad R_2 i_2 + e_2 = V_K$

$$i_2 = \frac{V_K - e_2}{R_2} = \frac{e_1\frac{R_+}{R_1+R_+} - e_2}{R_2}$$

- KVL a destra: $V_u = V_K + V_f$ $\quad V_u = e_1\frac{R_+}{R_1+R_+} + R_f i_2 = e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+} + R_f \frac{e_1\frac{R_+}{R_1+R_+}-e_2}{R_2}$

$$V_u = e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+} + \frac{R_f}{R_2} e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+} - \frac{R_f}{R_2}e_2 = e_1 \frac{R_+\left(1+\frac{R_f}{R_2}\right)}{R_1+R_+} - \frac{R_f}{R_2} e_2 =$$

$$= \underbrace{e_1 \frac{\cancel{R_+}\left(1+\frac{R_f}{R_2}\right)}{\cancel{R_+}\left(1+\frac{R_1}{R_+}\right)} - \frac{R_f}{R_2} e_2}$$

differenza pesata tra i due generatori del circuito

Scelgo $1+\frac{R_f}{R_2} = \left(1+\frac{R_1}{R_+}\right)\frac{R_f}{R_2}$: posso perché ho l'arbitrarietà di R_f e R_+

$$\Rightarrow V_u = e_1\frac{R_f}{R_2} - e_2\frac{R_f}{R_2} = \underbrace{\frac{R_f}{R_2}(e_1-e_2)}$$

: AMPLIFICATORE DIFFERENZIALE (utile per confrontare segnali)

con $\frac{R_2+R_f}{\cancel{R_2}} = \frac{R_+ + R_1}{R_+ \cancel{R_2}} R_f$ $\quad \cancel{R_f}\left(\frac{R_2}{R_f}+1\right) = \frac{\cancel{R_+}\left(1+\frac{R_1}{R_+}\right)}{\cancel{R_+}}\cancel{R_f}$ $\quad \cancel{1}+\frac{R_2}{R_f} = \cancel{1}+\frac{R_1}{R_+}$ $\quad \underbrace{\frac{R_2}{R_f}=\frac{R_1}{R_+}}$!

*/ Suppongo che i generatori possano avere solo i valori binari 0/1

- $(e_1, e_2, e_3) = (0,0,0) = 0 \rightarrow V_u = 0$
- $= (1,0,0) = 1 \rightarrow |V_u| = \frac{R_f}{R_1}$
  $(0,1,0) = 2 \rightarrow |V_u| = \frac{R_f}{R_2}$
- $= (1,1,0) = 3 \rightarrow |V_u| = \frac{R_f}{R_1} + \frac{R_f}{R_2}$
  $[2^0 \; 2^1 \; 2^2]$
- $= (0,0,1) = 4 \rightarrow |V_u| = \frac{R_f}{R_3}$
- $= (1,0,1) = 5 \rightarrow |V_u| = \frac{R_f}{R_1} + \frac{R_f}{R_3}$

Scelgo:

$\frac{R_f}{R_1} = 1 \rightarrow R_1 = R_f$

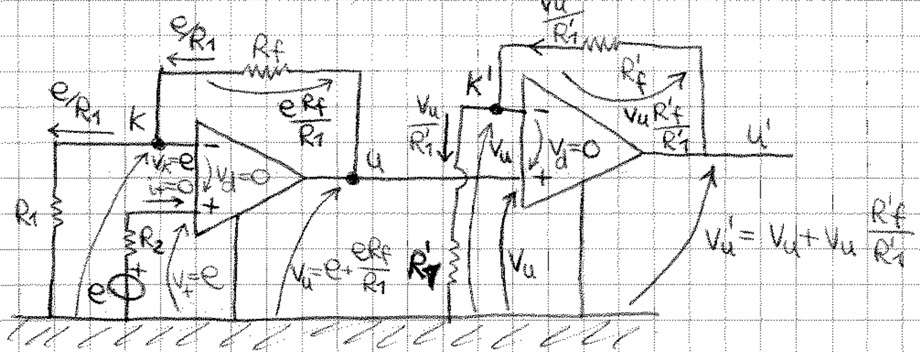
$\frac{R_f}{R_2} = 2 \rightarrow R_2 = R_f/2$

$\frac{R_f}{R_3} = 4 \rightarrow R_3 = \frac{R_f}{4}$

(data R_f, so che valori dare a R_1, R_2, R_3...)

Ho trovato un modo per convertire una sequenza binaria in una decimale:
CONVERTITORE DIGITALE → ANALOGICO (applicazione del circuito sommatore)

ES.



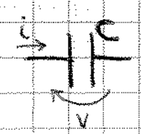
Op Amp IN CASCATA

$$V'_u = V_u\left(1 + \frac{R'_f}{R'_1}\right)$$

in una cascata, la v all'uscita del secondo elemento è uguale alla tensione di uscita del primo moltiplicata per $\left(1 + \frac{R'_f}{R'_1}\right)$

REGOLA In una cascata, la v all'uscita dell'ultimo elemento è uguale alla v di uscita del primo elemento moltiplicata per tutti i coefficienti non invertenti dei vari elementi

CONTINUITÀ della TENSIONE

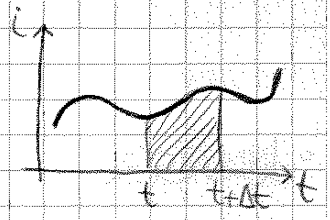


$$v(t) - V_0 = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt$$

(!)

Ricalcolo per $t+\Delta t$: $\quad v(t+\Delta t) - V_0 = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t+\Delta t} i(t)\,dt$

Sottraggo: $\quad v(t) - \cancel{V_0} - v(t+\Delta t) + \cancel{V_0} = \frac{1}{C}\left(\int_{t_0}^{t} i\,dt - \int_{t_0}^{t+\Delta t} i\,dt\right)$



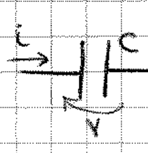
$$v(t+\Delta t) - v(t) = \frac{1}{C}\left(\int_{t_0}^{t+\Delta t} i\,dt - \int_{t_0}^{t} i\,dt\right) = \frac{1}{C}\left(\cancel{\int_{t_0}^{t}} + \int_{t}^{t+\Delta t} - \cancel{\int_{t_0}^{t}}\right)$$

$$v(t+\Delta t) - v(t) = \frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta t} i\,dt$$

se $\Delta t \to 0 \Rightarrow \int_{t}^{t+\Delta t} i\,dt = 0 \Rightarrow$ condizione di continuità della tensione sul cond

Vale solo per la tensione, non per la corrente!

POTENZA ASSORBITA



$$i = C\frac{dv}{dt}$$

$p = v \cdot i$ con condizione utilizzatori

$p = Cv\frac{dv}{dt}$ $\begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$ dipende dall'andamento di v ($\Rightarrow$ segno di $\frac{dv}{dt}$)

$p = \frac{dE}{dt}$ $\quad \underbrace{E - E_0}_{=0} = \int_{t_0}^{t} p\,dt \Rightarrow E = \int_{t_0}^{t} p\,dt$

t_0: istante in cui il condensatore comincia a funzionare

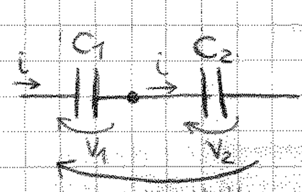
$$E = \int_{t_0}^{t} Cv\frac{dv}{\cancel{dt}}\cancel{dt} = C\int_{v(t_0)}^{v(t)} v\,dv = \frac{C}{2}\left(v^2(t) - \underbrace{v^2(t_0)}_{=0}\right)$$

$\boxed{E = \frac{C}{2}v^2} > 0$ sempre!

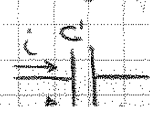
Il condens. può funzionare da generatore, ma solo per la quantità di energia che si è immagazzinato in precedenza.

CONDENS. IN SERIE

$$v_s = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i\,dt + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i\,dt \qquad v_s = \underbrace{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}_{1/C'}\int_{t_0}^{t} i\,dt$$

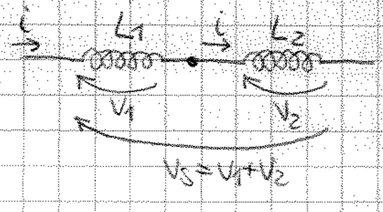


$$\boxed{\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

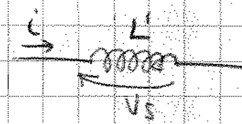


INDUTTORE IN SERIE

$$V_S = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = \underbrace{(L_1+L_2)}_{L'} \frac{di}{dt}$$



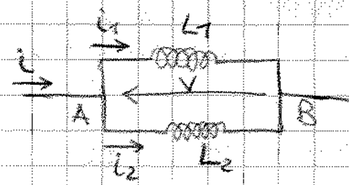
$$\boxed{L' = L_1 + L_2}$$



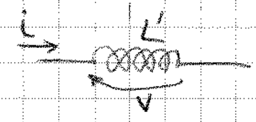
INDUT. IN PARALLELO

KCL in A: $i = i_1 + i_2$

$$i = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v\,dt + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v\,dt = \underbrace{\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)}_{1/L'} \int_{t_0}^{t} v\,dt$$



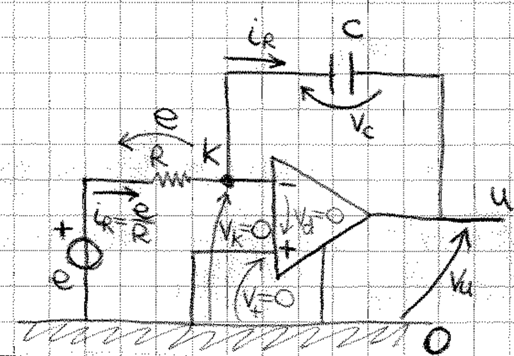
$$\boxed{\frac{1}{L'} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$



Op Amp CON CONDENSATORE

1

- $V_C = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_R\,dt = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} \frac{e}{R}\,dt = \frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} e\,dt$



- Percorso chiuso $0 \rightarrow u \xrightarrow{C} K \rightarrow 0$

KVL: $V_u + V_c = V_K$ $\quad V_u + V_c = 0$

$$\boxed{V_u = -V_C = -\frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} e\,dt}$$

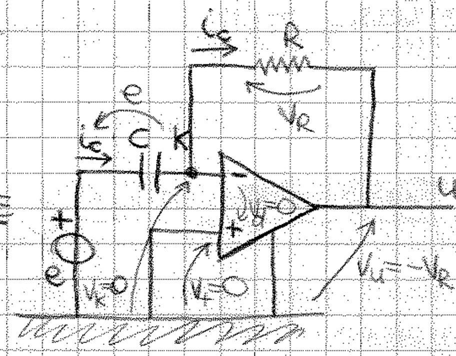
CIRCUITO INTEGRATORE

2

- $i_C = C\frac{de}{dt}$

- $V_u = -V_R = -Ri_C$ $\quad \boxed{V_u = -RC\frac{de}{dt}}$

CIRCUITO DERIVATORE (es. tachimetro)



$x_p(t)$ — $s(t)$ dipende dai generatori del circuito

- se $s(t) = A\cos(\alpha t + \beta) \rightarrow x_p = k_1 \cos(\alpha t + \beta_1)$

...

- se $s(t) = S$ costante $\Rightarrow x_p = k_0$
  → significa che nel circuito ci sono solo generatori costanti

→ Soluzione generale: $x(t) = ke^{-t/\tau} + k_0$

Posso trovare la soluzione solo se conosco la condizione iniziale: per $t=0$ $x(t=0) = x'$

$x' = ke^{0} + k_0 = k + k_0 \rightarrow k = x' - k_0$ sostituisco nella generale

$x(t) = (x' - k_0)e^{-t/\tau} + k_0$ (valida per $t \geq 0$)

per $t \to \infty$: $x(t\to\infty) = (x' - k_0)e^{-\infty} + k_0 = k_0$

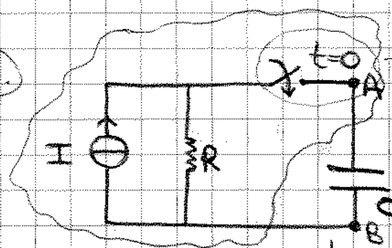
$\Rightarrow x(t) = (x' - \underbrace{x(t\to\infty)}_{x(\infty)})e^{-\frac{t}{\tau}} + x(t\to\infty)$

!! $\boxed{x(t) = (x' - x(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} + x(\infty)}$ per $t \geq 0$

valida per:
- UN SOLO elemento con memoria
- GENERATORI COSTANTI

x': condizione iniziale ($= x(0^+)$)
$x(\infty)$: condizione finale

ES.



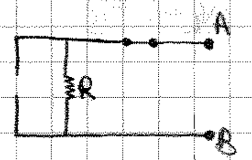
→ chiudo l'interruttore all'istante $t=0$

1 bipolo dinamico (C) + 1 gen. costante (I)

$V_c(t) = [V_c(0) - V_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + V_c(\infty)$ per $t \geq 0$ ($t \geq$ istante come condizione iniziale)

τ: $\tau = C \cdot R_T$

Ridisegno il circuito per ottenere R_T

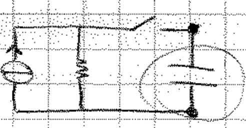


$R_T = R$

$\tau = C \cdot R$

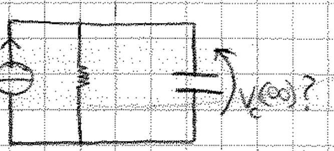
$V_c(0)$: V_c DEVE essere continua, anche al momento $t=0$

$\Rightarrow V_c\left(\text{ultimo istante prima della chiusura}\right) = V_c\left(\text{primo istante dopo la chiusura}\right)$ $\boxed{V_c(0^-) = V_c(0^+)}$!



→ C è un monopolo $\Rightarrow i_c = 0,\ V_c = 0 \Rightarrow V_c(0^-) = 0 \Rightarrow V_c(0^+) = 0$

$V_c(\infty)$



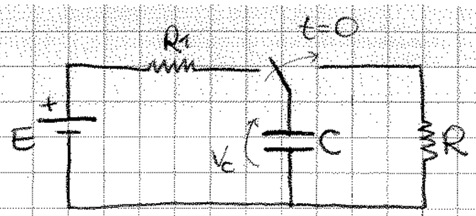
per $t\to\infty$: $[V_c(0) - V_c(\infty)]e^{-t/\tau} \to 0 \Rightarrow V_c(\infty) = \text{cost}$

$i_c = C\frac{dV_c}{dt}$, se $V_c = \text{cost} \rightarrow i_c = 0$ (c.to aperto)

$V_c(\infty) = IR$

14.11.12

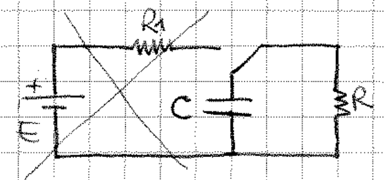
ES.



interruttore: COMMUTATORE

$$V_c(t) = [V_c(0^+) - V_c(\infty)]\, e^{-t/\tau} + V_c(\infty) \quad \text{per } t \geq 0$$

$\boxed{\tau}$ $\tau = C \cdot R_{eq}$ per $t \geq 0$

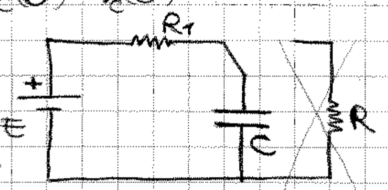


$R_{eq} = R$

$\tau = C \cdot R$

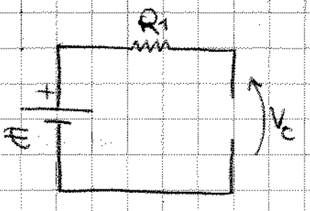
$\boxed{V_c(0^+)}$ $V_c(0^+) \overset{\text{DEVE}}{=} V_c(0^-)$

per $t<0$:



considero il circuito in condizioni stazionarie (tutte grandezze costanti)

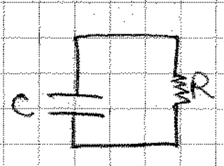
$\Rightarrow$ se la V_c sul condensatore è costante, allora $i_c = 0 \Rightarrow$ circuito aperto



$V_c = E$ (per $\forall t<0$)

$V_c(0^-) = V_c(0^+) = E$

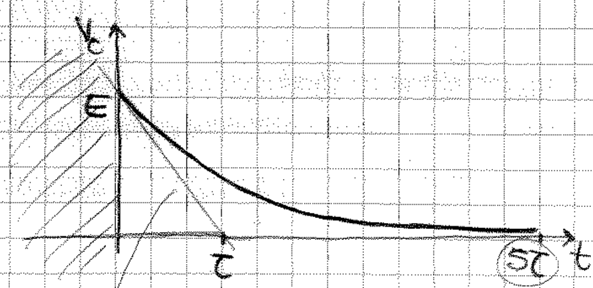
$\boxed{V_c(\infty)}$



circuito inerte, senza generatori $\Rightarrow$ $V_c(\infty) = 0$

$$V_c(t) = [E - 0]\, e^{-\frac{t}{CR}} + 0 \quad \text{per } t \geq 0$$

$$V_c(t) = E e^{-\frac{t}{CR}}$$

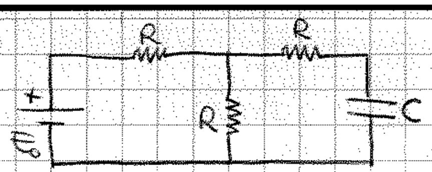


tg. in t=0

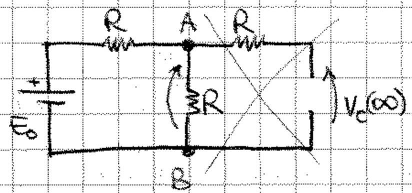
l'esponenziale va a zero

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 80

$\boxed{V_c(\infty)}$



$v_c = cost \Rightarrow i_c = 0 \Rightarrow$ circuito aperto



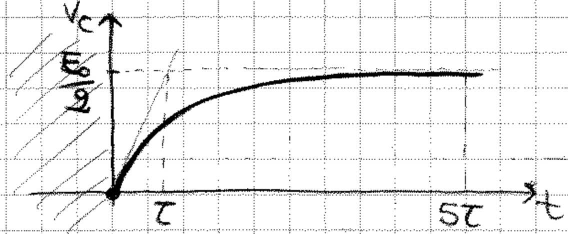
$V_C(\infty) \equiv V_{AB}$

$V_{AB} = E_0 \frac{R}{R+R}$

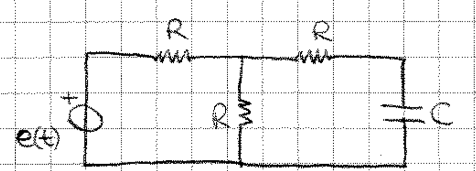
$\underline{V_c(\infty) = \frac{E_0}{2}}$

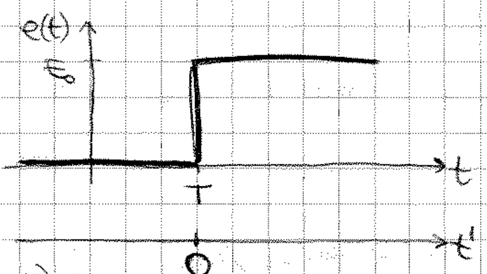
$$v_c(t) = \left[0 - \frac{E_0}{2}\right] e^{-\frac{2t}{3RC}} + \left(\frac{E_0}{2}\right)$$

$$\underbrace{v_c(t) = -\frac{E_0}{2} e^{-\frac{2t}{3RC}} + \frac{E_0}{2} = \frac{E_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{3RC}}\right)}$$



ES.





Definisco una nuova variabile:

$\boxed{t' = t - T}$ (T: "ritardo del gradino")

e lavoro con questa variabile

$$v_c(t') = \left[v_c(0^+) - v_c(\infty)\right] e^{-\frac{t'}{\tau}} + v_c(\infty) \quad \text{per } t' \geq 0$$

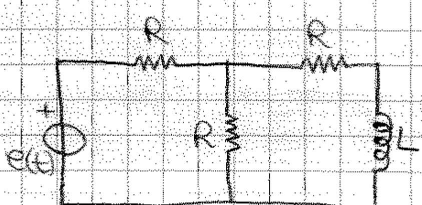
...

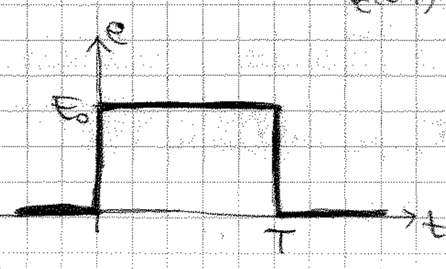
$$v_c(t') = \frac{E_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t'}{3RC}}\right) \quad \text{per } t' \geq 0$$

Poi cambio variabile e trovo la soluzione in t: $\underline{v_c(t) = \frac{E_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{2(t-T)}{3RC}}\right)}$ $t \geq$

$$v_c(t-T) = \frac{E_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{2(t-T)}{3RC}}\right) \quad t \geq T$$

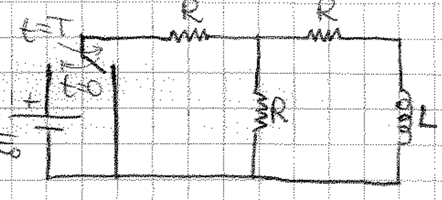
ES.



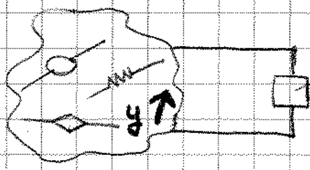


funzione onda quadra

Ridisegno:

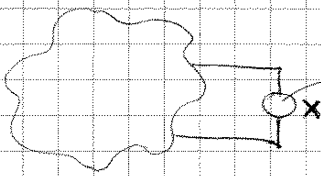


Ip. Generatori costanti



elemento differenziale (x)

y: variabile qualsiasi del circuito



gen. di tensione/corrente, lo suppongo noto

$$y = \underbrace{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \beta_1 i_1 + \beta_2 i_2 + \dots}_{\text{effetti dei gen. interni } (=u)} + \gamma x$$ (sovrapposizione effetti)

$y = u + \gamma x$ $\qquad$ $y = U + \gamma x$

lo scrivo come U maiuscola perché per ip. è sicuramente costante

$$\frac{dy}{dt} = \cancel{\frac{dU}{dt}} + \frac{d}{dt}(\gamma x)$$

γ dipende solo dalle R interne e dai coeff. dei generatori pilotati $\Rightarrow \gamma = \text{cost}$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma \frac{dx}{dt} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{S}{\tau} - \frac{x}{\tau}$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma\left(\frac{S}{\tau} - \frac{x}{\tau}\right) \qquad x = \frac{y-U}{\gamma}$$

dipendono dai gen. indipendenti

$$\frac{dy}{dt} = \gamma\left(\frac{S}{\tau} - \frac{y-U}{\gamma\tau}\right) = \gamma\frac{S}{\tau} - \frac{y}{\tau} + \frac{U}{\tau}$$

$$\gamma S + U = M \longrightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{M}{\tau}}$$

tutte le variabili del circuito sono legate a una legge di questo tipo

$$\boxed{y(t) = [y(0^+) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty)}, \quad t \geq 0$$

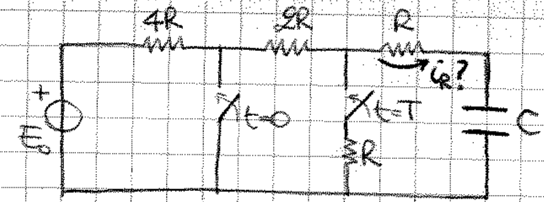
τ è sempre la stessa per ogni variabile del circuito!

<u>Problema</u>: non vale più che $y(0^+) = y(0^-)$!!

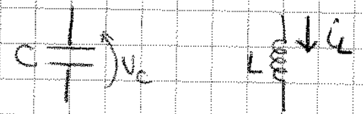
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 80

21.11.12

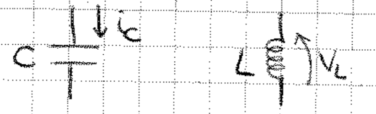
TRANSITORI DEL PRIMO ORDINE



VARIABILI DI STATO

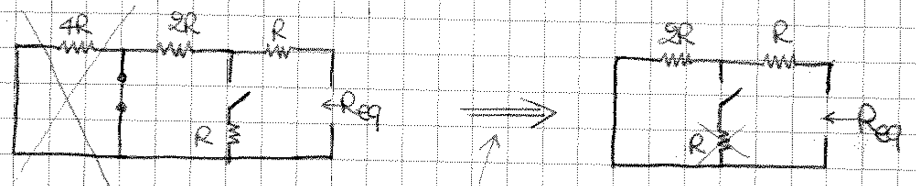


VARIABILI COMPLEMENTARI



① $V_R(t) = [V_R(0^+) - V_R(\infty)]\, e^{-\frac{t}{\tau}} + V_R(\infty)$ per $0<t<T$

$\boxed{\tau}$

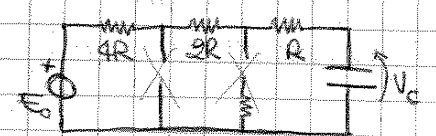


4R è in // con un corto circuito, quindi l'equivalente è un c.c.

$\tau = 3CR$

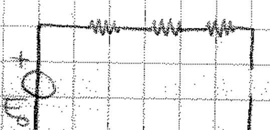
$\boxed{V_R(0^+)}$ $V_R(0^+) \neq V_R(0^-)$

per $t<0$



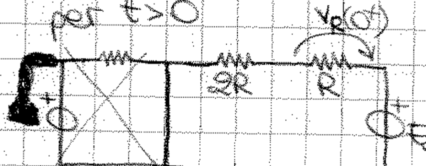
Condizioni stazionarie

$V_C = cost \Rightarrow i_C = 0 \Rightarrow C$ è un c.a.



$V_C(0^-) = E_0$

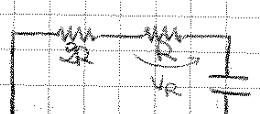
per $t>0$



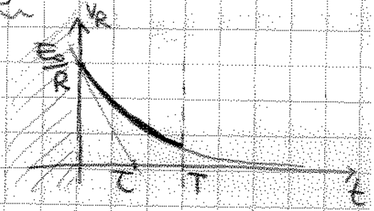
Continuità di V_C : $V(0^+) = V(0^-) = E_0$

$V_R(0^+) = E_0 \frac{R}{2R+R}$ $V_R(0^+) = \frac{E_0}{3}$

$\boxed{V_R(\infty)}$



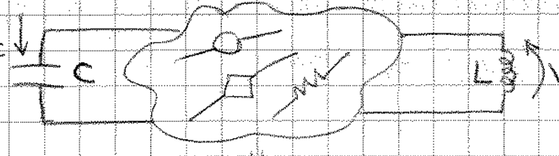
Circuito inerte : $V_R(\infty) = 0$



Soluzione : $V_R(t) = \left[\frac{E_0}{3} - 0\right] e^{-\frac{t}{3CR}} + 0$ per $0<t<T$

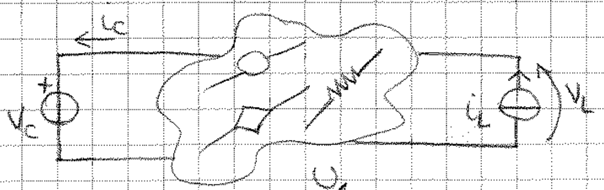
$T = 2\tau = 6CR$

CIRCUITI CON DUE ELEMENTI DIFFERENZIALI



i_C, v_L: VARIABILI COMPLEMENTARI

(si suppone di conoscere la soluzione del circuito per le variabili di stato)



v_C, i_L note $\rightarrow$ 2 generatori

- $i_C = \overbrace{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \beta_1 \hat{i}_1 + \beta_2 \hat{i}_2 + \ldots}^{U_1} + \underline{M_{11} v_C + M_{12} i_L}$
- $v_L = \overbrace{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \beta_1 \hat{i}_1 + \beta_2 \hat{i}_2 + \ldots}^{U_2} + \underline{M_{21} v_C + M_{22} i_L}$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = U_1 + m_{11} v_C + m_{12} i_L$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} = U_2 + m_{21} v_C + m_{22} i_L$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{m_{11}}{C} v_C + \dfrac{m_{12}}{C} i_L + \dfrac{U_1}{C} \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{m_{21}}{L} v_C + \dfrac{m_{22}}{L} i_L + \dfrac{U_2}{L} \end{cases}$$

sistema di 2 eq. differenziali a coeff. costanti non omogenee

$$\frac{d}{dt} \underline{x} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} + \underline{s}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underset{(a_{11})}{\dfrac{m_{11}}{C}} & \underset{(a_{12})}{\dfrac{m_{12}}{C}} \\ \underset{(a_{21})}{\dfrac{m_{21}}{L}} & \underset{(a_{22})}{\dfrac{m_{22}}{L}} \end{bmatrix}, \quad \underbrace{\underline{s} = \begin{bmatrix} \dfrac{U_1}{C} \\ \dfrac{U_2}{L} \end{bmatrix}}_{\underline{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}}$$

U_1 e U_2 dipendono dai generatori interni, qui costanti per ipotesi

$$\underline{x}(t) = \underline{x_o}(t) + \underline{x_p}$$

$\underline{x_o}(t)$: soluz. sistema omogeneo (generatori spenti)

$\underline{x_p}$: soluzione particolare dello stesso tipo dei generatori (qui vettore costante): $\underline{x_p} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$

SOLUZ. OMOGENEA

[1 variabile: $x = ke^{at}$]

$$! \begin{cases} v_C = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} \\ i_L = k_1 \eta_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

- λ_1, λ_2: autovalori della matrice $\underline{\underline{A}}$

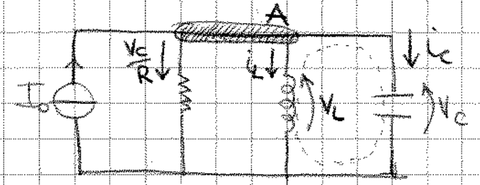
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21} a_{12} = 0$$

$$a_{11} a_{22} - \lambda a_{11} - \lambda a_{22} + \lambda^2 - a_{21} a_{12} = 0 \quad \ldots \text{trovo } \lambda_1, \lambda_2$$

② Per ogni elemento differenziale guardo la variabile complementare

- se è una CORRENTE → KCL al nodo dell'elemento differenziale



KCL in A: $I_0 = \frac{v_C}{R} + i_L + i_C = \frac{v_C}{R} + i_L + C\frac{dv_C}{dt}$

I eq. differenziale del sistema: $\boxed{\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{RC} - \frac{1}{C}i_L + \frac{I_0}{C}}$

- se è una TENSIONE → KVL su una superficie chiusa che include l'elemento differenziale

KVL su ◌ : $v_L = L\frac{di_L}{dt} = v_C$

II eq. differenziale del sistema: $\boxed{\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}v_C}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_0/C \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calcolo autovalori

$$\det\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC}-\lambda & -1/C \\ \frac{1}{L} & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-\lambda\left(-\frac{1}{RC}-\lambda\right) - \frac{1}{L}\left(-\frac{1}{C}\right) = 0 \qquad \lambda^2 + \frac{\lambda}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \qquad \boxed{\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC}}}{2}}$$

Calcolo autovettore

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ 1/L & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} 1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{1}{RC} - \frac{\eta_1}{C} = \lambda_1$$

(la seconda eq. non è indipendente, inutile scriverla)

$$\boxed{\eta_1 = \left(-\frac{1}{RC} - \lambda_1\right)C}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \lambda_2\begin{bmatrix} 1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{1}{RC} - \frac{\eta_2}{C} = \lambda_2 \qquad \boxed{\eta_2 = \left(-\frac{1}{RC} - \lambda_2\right)C}$$

Calcolo condizioni iniziali $\left.\begin{matrix} v_C(0) \\ i_L(0) \end{matrix}\right\}$ funzioni continue $\Rightarrow \left\{\begin{matrix} v_C(0^-) \\ i_L(0^-) \end{matrix}\right.$

per $t<0$ il circuito è in CONDIZIONI STAZIONARIE (tutto costante)

→ ~~∿∿∿~~ diventa un corto circuito

→ ⊣⊢ diventa un circuito aperto

Autovalori

$$\det\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1/C \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L}-\lambda \end{bmatrix}=0 \qquad -\lambda\left(-\frac{R}{L}-\lambda\right)-\frac{1}{C}\left(-\frac{1}{L}\right)=0$$

$$\lambda^2+\underbrace{\frac{R}{L}}_{2\alpha}\lambda+\underbrace{\frac{1}{CL}}_{\omega_0^2}=0 \qquad \lambda_{1,2}=\frac{-R/L\pm\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-\frac{4}{CL}}}{2}$$

→ α reale, positivo

$$\boxed{\lambda_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}}$$

- se $\alpha^2>\omega_0^2$ → $\lambda_1=-\alpha_1$ $(\alpha_1>0,\ \alpha_1<\alpha)$
  → $\lambda_2=-\alpha_2$ $(\alpha_2>0,\ \alpha_2>\alpha)$ } autovalori reali e negativi
- se $\alpha^2<\omega_0^2$ → $\lambda_1=-\alpha+j\beta$ $(\beta=\sqrt{|\alpha^2-\omega_0^2|})$
  → $\lambda_2=-\alpha-j\beta$ } j: unità immaginaria (autovalori complessi)
- se $\alpha^2=\omega_0^2$ → $\lambda_1=\lambda_2=-\alpha$ (autovalori coincidenti)

Autovettori $\underline{A}\eta_i=\lambda_i\eta_i$ $i=1,2$

Stabilisco $\eta_i=\begin{bmatrix}1\\ \eta_i\end{bmatrix}$

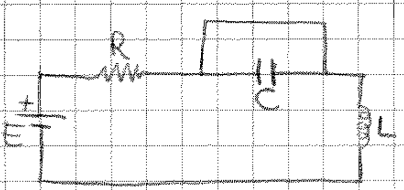
$$\begin{bmatrix}0 & 1/C\\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \eta_i\end{bmatrix}=\lambda_i\begin{bmatrix}1\\ \eta_i\end{bmatrix} \qquad \frac{1}{C}\eta_i=\lambda_i$$

$\boxed{\eta_1=C\lambda_1}$

$\boxed{\eta_2=C\lambda_2}$

Condiz. iniziali $v_C(0^-)$, $i_L(0^-)$

per $t<0$



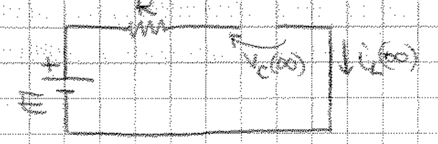
$\boxed{v_C(0^-)}$ Dato che l'interruttore è chiuso, il condensatore è un corto circuito

$\boxed{v_C(0^-)=0}$

$\boxed{i_L(0^-)}$ Condizioni stazionarie → $i_L=$ cost, $v_L=0$ → corto circuito

$\boxed{i_L(0^-)=E/R}$

Condiz. finali Condizioni stazionarie $\begin{cases} C \ \text{–||–} \to \text{— —} \\ L \ \text{–}\!\text{ooo}\!\text{–} \to \text{——} \end{cases}$



$\boxed{i_L(\infty)=0}$

$\boxed{v_C(\infty)=E}$

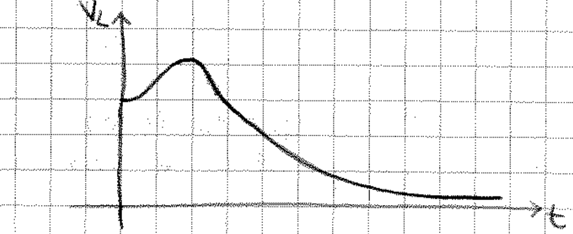
Soluz. sistema

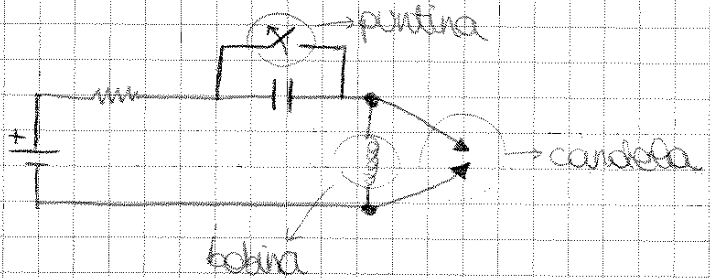
$$\begin{cases} v_C(t)=k_1e^{\lambda_1t}+k_2e^{\lambda_2t}+v_C(\infty) \\ i_L(t)=k_1\eta_1e^{\lambda_1t}+k_2\eta_2e^{\lambda_2t}+i_L(\infty) \end{cases} \quad \text{per } t\geq 0$$

Se il problema chiede una variabile che non sia v_c o i_L, prima risolvo il sistema e trovo $v_c(t)$ e $i_L(t)$, poi calcolo la variabile richiesta.

$v_L = ?$

Ho trovato già i_L: $v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = \underline{L\left[+k_1C\alpha_1^2e^{-\alpha_1 t}+k_2C\alpha_2^2e^{-\alpha_2 t}\right]}$





circuito del motore di un'auto a benzina (circuito d'iniezione)

28.11.12

- se $\alpha^2<\omega_0^2$: autovalori complessi coniugati ($\lambda_1=-\alpha+j\beta$, $\lambda_2=-\alpha-j\beta$)

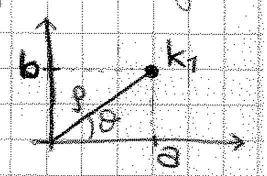
$$k_1=\frac{\frac{E}{R}+EC\lambda_2}{C(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{(\frac{E}{R}-EC\alpha)-jEC\beta}{2jC\beta} \qquad k_2=-\frac{\frac{E}{R}+EC\lambda_1}{C(\lambda_1-\lambda_2)}=-\frac{(\frac{E}{R}-EC\alpha)+jEC\beta}{2jC\beta}$$

Senza considerare il - di k_2, risulta che k_1 e k_2 sono numeri complessi coniugati:

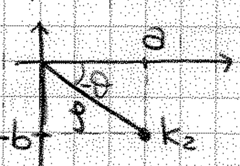
$k_1=a+jb$, $k_2=a-jb$ (rappresentazione cartesiana)

$k_1=\rho e^{j\theta}$, $k_2=\rho e^{-j\theta}$ (rappresentazione polare)

modulo fase



piano di Gauss



$$v_C(t)=k_1e^{\lambda_1t}+k_2e^{\lambda_2t}+E \longrightarrow v_C(t)=\rho e^{j\theta}\cdot e^{(-\alpha+j\beta)t}+\rho e^{-j\theta}\cdot e^{(-\alpha-j\beta)t}+E$$

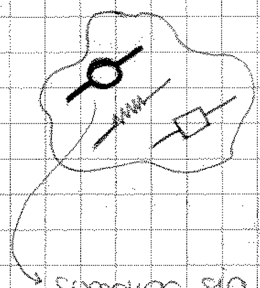
$$v_C(t)=\rho\left[e^{j\theta}\cdot e^{-\alpha t}\cdot e^{j\beta t}+e^{-j\theta}\cdot e^{-\alpha t}\cdot e^{-j\beta t}\right]+E=$$

$$=\rho e^{-\alpha t}\left[e^{j(\theta+\beta t)}+e^{-j(\theta+\beta t)}\right]+E=2\rho e^{-\alpha t}\frac{e^{j(\theta+\beta t)}+e^{-j(\theta+\beta t)}}{2}+E$$

(Formula di Eulero: $\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}=\cos x$)

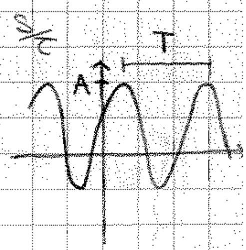
$$\begin{cases} v_C(t)=2\rho e^{-\alpha t}\cos(\theta+\beta t)+E \text{ per } t\geq0 \\ i_L(t)= \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 80



Circuito del primo ordine (per semplicità) regolato da:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = \frac{s}{\tau} \qquad x = \underbrace{x_{om}}_{e^{-t/\tau}} + \underbrace{x_p}_{\text{in accordo con } s/\tau}$$



Suppongo sia un generatore non costante, del tipo $s(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$ con $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

$$\Rightarrow x_p = K_p\cos(\omega t+\varphi)$$

Nei sistemi elettrici, τ è sempre molto piccola (ms, μs), quindi l'esponenziale va subito a zero ($x_{om} \to 0$) e resta solo la soluzione particolare.

x_p deve soddisfare l'eq differenziale:

$$-K_p\omega\sin(\omega t+\varphi) + \frac{K_p}{\tau}\cos(\omega t+\varphi) = \frac{A}{\tau}\cos(\omega t+\varphi)$$

Utilizzo la formula di Eulero:

$$s = \frac{A\left(e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}\right)}{2} \qquad x_p = K_p\,\frac{e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}$$

Sostituisco nell'eq. differenziale:

$$\frac{K_p}{2}j\omega e^{j(\omega t+\varphi)} + \frac{K_p}{2}(-j\omega)e^{-j(\omega t+\varphi)} + \frac{K_p}{2\tau}e^{j(\omega t+\varphi)} + \frac{K_p}{2\tau}e^{-j(\omega t+\varphi)} = \frac{A}{2\tau}e^{j(\omega t+\varphi)} + \frac{A}{2\tau}e^{-j(\omega t+\varphi)}$$

$$\frac{K_p}{2}j\omega e^{j\varphi}e^{j\omega t} - \frac{K_p}{2}j\omega e^{-j\varphi}e^{-j\omega t} + \frac{K_p}{2\tau}e^{j\varphi}e^{j\omega t} + \frac{K_p}{2\tau}e^{-j\varphi}e^{-j\omega t} = \frac{A}{2\tau}e^{j\varphi}e^{j\omega t} + \frac{A}{2\tau}e^{-j\varphi}e^{-j\omega t}$$

$$\left[j\omega\frac{K_p}{2}e^{j\varphi} + \frac{K_p}{2\tau}e^{j\varphi} - \frac{A}{2\tau}e^{j\varphi}\right]e^{j\omega t} = \left[\frac{A}{2\tau}e^{-j\varphi} - \frac{K_p}{2\tau}e^{-j\varphi} + j\omega\frac{K_p}{2}e^{-j\varphi}\right]e^{-j\omega t}$$

L'uguaglianza vale solo per $0=0$ $\Rightarrow$ le due parti tra [ ] devono essere $=0$

Riesco così a trovare K_p:

$$e^{j\varphi}K_p\left(\frac{j\omega}{2} + \frac{1}{2\tau}\right) = \frac{A}{2\tau}e^{j\varphi} \quad\Rightarrow\quad K_p = \frac{A}{2\tau\left(j\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2\tau}\right)}$$

non dipende da t

è una costante complessa $K_p \in \mathbb{C}$

$$s = \frac{A}{2}\left(e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}\right) = \underbrace{\frac{A}{2}e^{j\varphi}}\,e^{j\omega t} + \underbrace{\frac{A}{2}e^{-j\varphi}}\,e^{-j\omega t}$$

complessi coniugati

Chiamo $\hat{S} = \frac{A}{2}e^{j\varphi}$: indica la variabile complessa legata a un'espressione sinusoidale (maiuscola, stessa lettera, simbolo ^)

$$s(t) = A\cos(\omega t+\varphi) = \frac{\hat{S}e^{j\omega t} + \hat{S}^*e^{-j\omega t}}{2}$$

($\hat{S}^*$: complesso coniugato)

05.12.12

$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$\omega = 2\pi\nu \qquad \nu = \frac{1}{T}$

ν per usi industriali:

- EU $\underbrace{\nu = 50Hz}$ → $\underbrace{T = 20ms}$, $\underbrace{\omega = 2\pi\nu = 314\ rad/s}$!
- USA, Giappone $\nu = 60Hz$

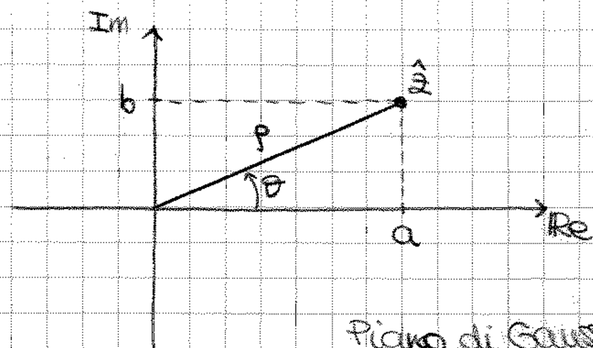
φ : FASE/SFASAMENTO (= di quanto è spostato il max rispetto allo zero)

RICHIAMI SUI NUMERI COMPLESSI

$\hat{z} = a + jb \qquad j = \sqrt{-1}$

→ RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

$\hat{z} = \rho e^{j\theta}$ → RAPPR. POLARE



Piano di Gauss

Da cartesiana a polare:

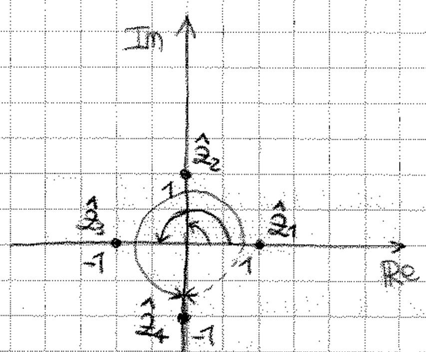
$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$tg\theta = \frac{b}{a}$, $\theta = arctg\frac{b}{a}$

Da polare a cartesiana:

$a = \rho\cos\theta$

$b = \rho\sin\theta$



$\hat{z}_1 = 1(+j0)$
$= 1e^{j0}$

$\hat{z}_2 = j(+0) = 1e^{j\frac{\pi}{2}}$

$\hat{z}_3 = -1(+j0) = 1e^{j\pi}$

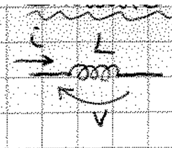
$\hat{z}_4 = -j(+0) = 1e^{j\frac{3}{2}\pi} =$
$= 1e^{j(-\frac{\pi}{2})}$

> Somma $\quad \hat{z}_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1 e^{j\theta_1} \qquad \hat{z}_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$

- $\hat{z}_s = \hat{z}_1 + \hat{z}_2 = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = \underbrace{(a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)}$ ✓
- $\hat{z}_s = \rho_1 e^{j\theta_1} + \rho_2 e^{j\theta_2}$ ← non utile

> Differenza

- $\hat{z}_d = \underbrace{(a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)}$ ✓
- $\hat{z}_d = \rho_1 e^{j\theta_1} - \rho_2 e^{j\theta_2}$



$v = L\dfrac{di}{dt}$

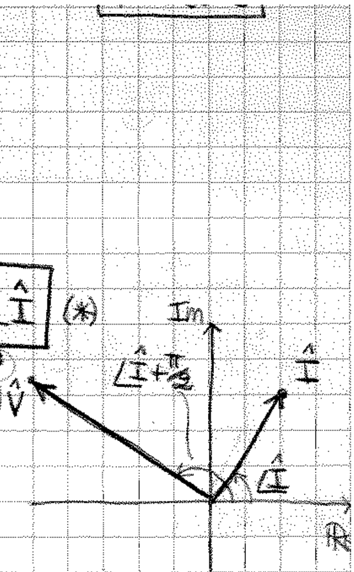
$\mathrm{Re}\left\{\hat{V}e^{j\omega t}\right\} = L\dfrac{d}{dt}\mathrm{Re}\left\{\hat{I}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{L\dfrac{d}{dt}\hat{I}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{L\hat{I}j\omega e^{j\omega t}\right\}$

$\mathrm{Re}\left\{\hat{V}e^{j\omega t} - L\hat{I}j\omega e^{j\omega t}\right\} = 0 \qquad (\hat{V} - j\omega L\hat{I})e^{j\omega t} = 0 \qquad \boxed{\hat{V} = j\omega L\hat{I}}$ (*)

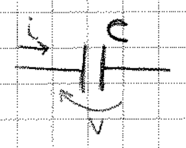
$\hat{V} = |\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}}$

$\hat{I} = |\hat{I}|e^{j\angle\hat{I}}$

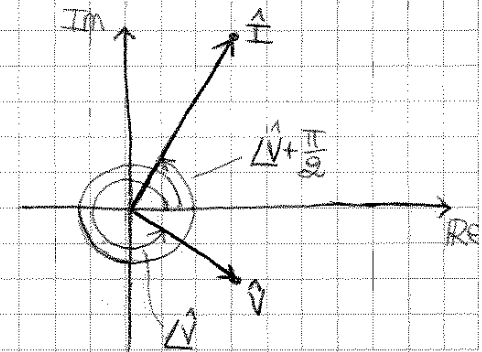
"fase di"



- Condensatore



$i = C\dfrac{dv}{dt} \qquad \boxed{\hat{I} = j\omega C\hat{V}}$ (**)



(*) $|\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}} = e^{j\frac{\pi}{2}}\omega L|\hat{I}|e^{j\angle\hat{I}} \qquad |\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}} = \omega L|\hat{I}|e^{j(\angle\hat{I}+\frac{\pi}{2})}$

$\Rightarrow \quad |\hat{V}| = \omega L\hat{I}$
$\angle\hat{V} = \angle\hat{I} + \frac{\pi}{2}$

$\hat{I}$ e $\hat{V}$ in QUADRATURA, $\hat{V}$ in anticipo rispetto a $\hat{I}$

(**) $|\hat{I}|e^{j\angle\hat{I}} = e^{j\frac{\pi}{2}}\omega C|\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}} = \omega C|\hat{V}|e^{j(\angle\hat{V}+\frac{\pi}{2})}$

$\Rightarrow \quad |\hat{I}| = \omega C|\hat{V}|$
$\angle\hat{I} = \angle\hat{V} + \frac{\pi}{2}$

- $\hat{V} = R\hat{I}$
- $\hat{V} = j\omega L\hat{I}$
- $\hat{V} = \dfrac{1}{j\omega C}\hat{I}$

IMPEDENZA: $\boxed{\hat{V} = Z\hat{I}}$ — $Z = R$; $Z = j\omega L$; $Z = \dfrac{1}{j\omega C}$

- $\hat{I} = \dfrac{1}{R}\hat{V}$
- $\hat{I} = \dfrac{1}{j\omega L}\hat{V}$
- $\hat{I} = j\omega C\hat{V}$

AMMETTENZA: $\boxed{\hat{I} = Y\hat{V}}$ — $Y = \dfrac{1}{R}$; $Y = \dfrac{1}{j\omega L}$; $Y = j\omega C$

$Z = |Z|e^{j\angle Z} = R + jX$
(polare) (cartesiana)

R: resistenza
X: REATTANZA

$Y = |Y|e^{j\angle Y} = G + jB$

G: conduttanza
B: SUSCETTANZA

Z e Y non sono funzioni complesse che dipendono da t, ma sono solo dei coefficienti complessi ⇒ no simbolo ^

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 80

POTENZA

Potenza assorbita dal bipolo: $p = vi$

$$p = \frac{\hat{V}e^{j\omega t} + \hat{V}^* e^{-j\omega t}}{2} \cdot \frac{\hat{I}e^{j\omega t} + \hat{I}^* e^{-j\omega t}}{2}$$

$\hat{V} = |\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}}$ $\qquad \hat{V}^* = |\hat{V}|e^{-j\angle\hat{V}}$

$\hat{I} = |\hat{I}|e^{j\angle\hat{I}}$ $\qquad \hat{I}^* = |\hat{I}|e^{-j\angle\hat{I}}$

$$p = \frac{\left[|\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}}e^{j\omega t} + |\hat{V}|e^{-j\angle\hat{V}}e^{-j\omega t}\right]\left[|\hat{I}|e^{j\angle\hat{I}}e^{j\omega t} + |\hat{I}|e^{-j\angle\hat{I}}e^{-j\omega t}\right]}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{|\hat{V}||\hat{I}|e^{j(\angle\hat{V}+\angle\hat{I})}e^{2j\omega t} + |\hat{V}||\hat{I}|e^{j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})} + |\hat{V}||\hat{I}|e^{j(\angle\hat{I}-\angle\hat{V})} + |\hat{V}||\hat{I}|e^{-j(\angle\hat{V}+\angle\hat{I})}e^{-2j\omega t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}\,2}\left\{|\hat{V}||\hat{I}|\underbrace{\left(\frac{e^{j(2\omega t+\angle\hat{V}+\angle\hat{I})} + e^{-j(2\omega t+\angle\hat{V}+\angle\hat{I})}}{2}\right)}_{\text{Eulero}} + |\hat{V}||\hat{I}|\underbrace{\left(\frac{e^{j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})} + e^{-j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}}{2}\right)}_{\text{Eulero}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\underbrace{|\hat{V}||\hat{I}|\cos(2\omega t+\angle\hat{V}+\angle\hat{I})}_{\text{varia in modo sinusoidale nel tempo con frequenza doppia rispetto a } \hat{V} \text{ e } \hat{I}} + \underbrace{|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}_{\text{costante}}\right\}$$

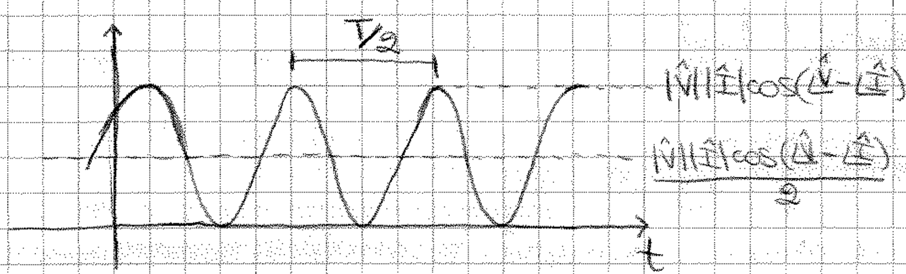
$$\cos(2\omega t + \angle\hat{V} + \angle\hat{I} + \angle\hat{I} - \angle\hat{I}) = \cos(\underbrace{2\omega t + 2\angle\hat{I}}_{\alpha} + \underbrace{\angle\hat{V} - \angle\hat{I}}_{\beta}) = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta =$$

$$= \cos(2\omega t + 2\angle\hat{I})\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I}) - \sin(2\omega t + 2\angle\hat{I})\sin(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})$$

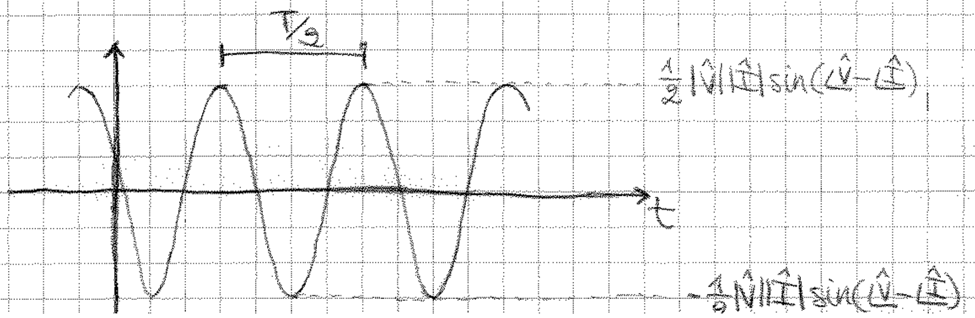
$$p = \frac{1}{2}\left\{|\hat{V}||\hat{I}|\cos(2\omega t+2\angle\hat{I})\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I}) - |\hat{V}||\hat{I}|\sin(2\omega t+2\angle\hat{I})\sin(\angle\hat{V}-\angle\hat{I}) + |\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})\left(1+\cos(\underline{2\omega t}+2\angle\hat{I})\right) - \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\sin(\underline{2\omega t}+2\angle\hat{I})\sin(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})$$

ora entrambi i termini dipendono da t e oscillano a frequenza doppia



POTENZA ATTIVA (potenza sempre assorbita dal bipolo)



POTENZA REATTIVA (potenza assorbita/generata)

$\angle \dot{Z} = \angle \hat{V} - \angle \hat{I}$

se $-\frac{\pi}{2} \leq \angle \dot{Z} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\angle \hat{V} - \angle \hat{I}) \geq 0$

CONDIZIONE DI PASSIVITÀ: $\boxed{-\frac{\pi}{2} \leq \angle \dot{Z} \leq \frac{\pi}{2}}$!

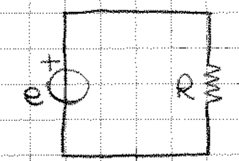
altrimenti la fisica non è soddisfatta

17.12 **NO**
19.12 Lez.
07.01 Lez.
09.01 **NO**
14.01 Lez.
16.01 **NO**

12.12.12

ES.

a)



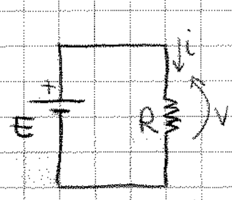
$e = E_0 \cos(\omega t + \theta)$

$\Rightarrow$ $\hat{E} = E_0 e^{j\theta}$ (ω)

$P = \bar{p} = \frac{1}{2} |\hat{V}||\hat{I}| \cos(\underbrace{\angle \hat{V} - \angle \hat{I}}_{\angle \dot{Z}})$

qui $\dot{Z} = R \rightarrow \angle \dot{Z} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_R = \frac{1}{2} |\hat{E}| \cdot \left|\frac{\hat{E}}{R}\right| \underbrace{\cos(\angle \dot{Z})}_{=1} = \frac{1}{2} |\hat{E}|^2 \cdot \frac{1}{R} = \boxed{\frac{1}{2} \frac{E_0^2}{R}}$

b)



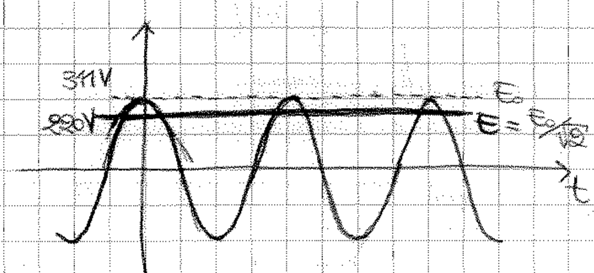
$P_B = v \cdot i = E \frac{E}{R} = \boxed{\frac{E^2}{R}}$

luce calore

per avere lo stesso effetto su R : $P_R = P_B$

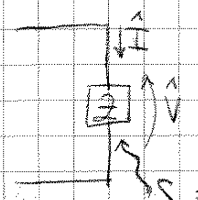
$\frac{1}{2} \frac{E_0^2}{R} = \frac{E^2}{R} \quad \rightarrow \quad E_0 = \sqrt{2} E$, $\boxed{E = \frac{E_0}{\sqrt{2}}}$ $(E \simeq 70\% E_0)$

$\hookrightarrow$ VALORE EFFICACE (es. 220V)



Definizione alternativa di fasore: $e = E_0 \cos(\omega t + \theta) \rightarrow \hat{E}' = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{j\theta}$ — da non usare!

$R = |Z|\cos\varphi = \dfrac{V_{eff}\cos\varphi}{P}$, $X = |Z|\sin\varphi = \dfrac{V_{eff}\cos\varphi\sin\varphi}{P}$



S : potenza complessa assorbita

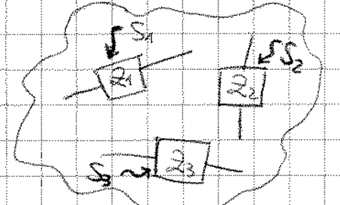
Se utilizzo fasore con valore efficace:

$\hat{V} = |\hat{V}| e^{j\angle\hat{V}} = \sqrt{2}\, V_{eff}\, e^{j\angle\hat{V}}$

$\hat{I} = |\hat{I}| e^{j\angle\hat{I}} = \sqrt{2}\, I_{eff}\, e^{j\angle\hat{I}}$

$S = \frac{1}{\cancel{2}} \sqrt{2}\, V_{eff}\, e^{j\angle\hat{V}} \cdot \sqrt{2}\, I_{eff}\, e^{-j\angle\hat{I}} = V_{eff} I_{eff}\, e^{j(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})}$

CONSERVAZIONE DELLA POTENZA



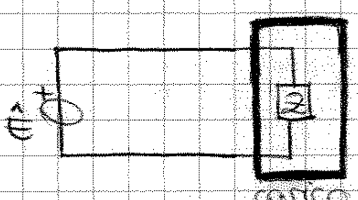
Conservazione fisica dell'energia: $\sum_k S_k = 0$

Corollari:

① $\sum_k (P_k + jQ_k) = 0 \rightarrow \sum_k P_k + j\sum_k Q_k = 0$

$\boxed{\sum_k P_k = 0 \ , \ \sum_k Q_k = 0}$ Teorema di Boucherot: si conservano la potenza attiva e reattiva

② $\sum_k |S_k| e^{j\varphi_k} = 0$ $\not\Rightarrow$ $\sum_k |S_k| = 0$ (NO) : non si conserva la potenza apparente



carico

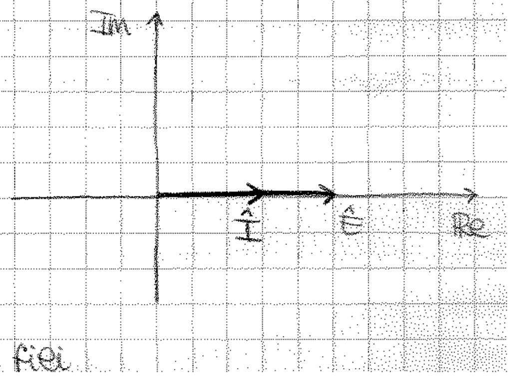
Dati targa: $V_{eff}, P, \cos\varphi$

1) $Z = R$ (es. lampadina a incandescenza)

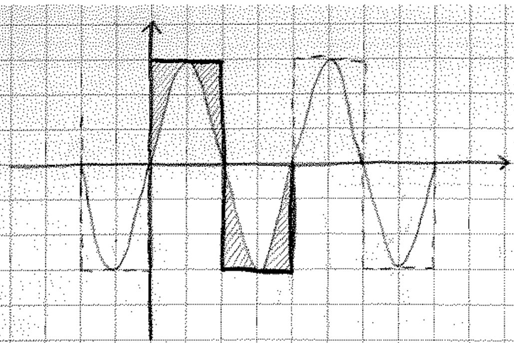
$\varphi = 0 \rightarrow \cos\varphi = 1$

$|\hat{I}| = \dfrac{2P}{\sqrt{2}\, V_{eff}\cos\varphi} \rightarrow |\hat{I}| = \dfrac{\sqrt{2}\, P}{V_{eff}}$

scelgo $\hat{E}$ con fase 0: $\hat{E} = \sqrt{2}\, V_{eff}\, e^{j0}$



Esiste una $P_{sprecata} = r|\hat{I}|^2$ (qui trascurata), dovuta alla r dei fili



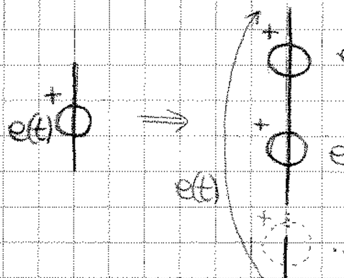
$k=1$: armonica fondamentale

$k>1$: armoniche superiori

Sommando altre f.z. sinusoidali, alla fine ottengo la funzione originaria

Suppongo $e(t)$ funzione periodica a media nulla ($\Rightarrow a_0=0$):

$$e(t) \approx \sum_{k=1}^{N} E_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}t+\varphi_k\right) = E_1\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_1\right)+E_2\cos\left(2\frac{2\pi}{T}t+\varphi_2\right)+\dots$$



$e_1 = E_1\cos\left(\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega}t+\varphi_1\right)$

$e_2 = E_2\cos\left(\underbrace{2\frac{2\pi}{T}}_{2\omega}t+\varphi_2\right)$

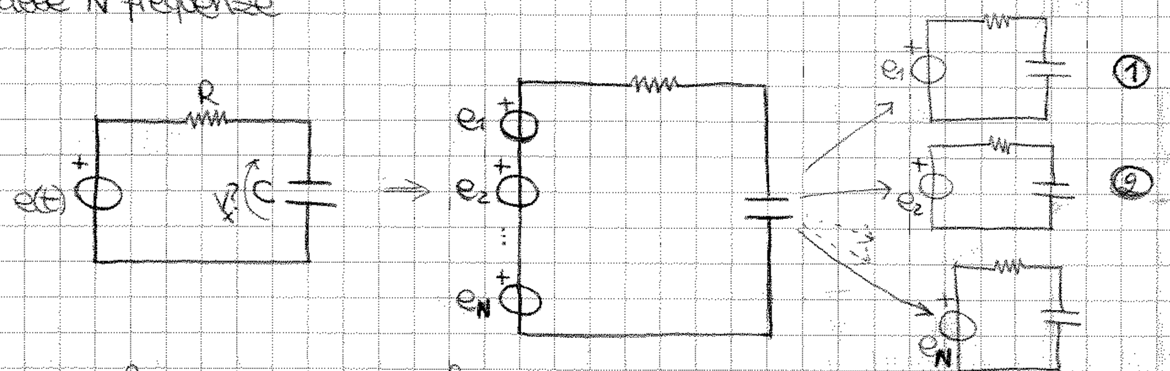
....

Generatori differiscono per:

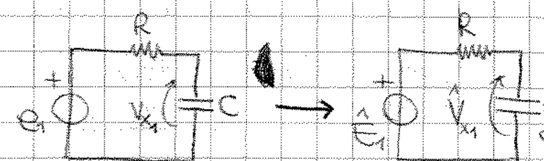
- ampiezza
- fase
- frequenza/pulsazione

$\Rightarrow$ devo risolvere il circuito N volte con sovrapposizione degli effetti e fasori alle N frequenze !

ES.

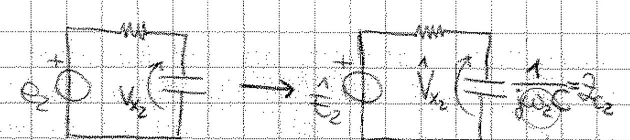


①



$\hat{E}_1 = E_1 e^{j\varphi_1}$ $\left(\omega_1=\frac{2\pi}{T}\right)$

②



$\hat{E}_2 = E_2 e^{j\varphi_2}$ $\left(\omega_2=\frac{4\pi}{T}\right)$

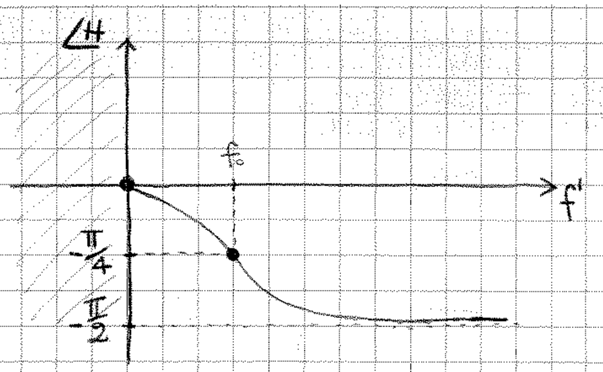
cambiano anche le impedenze !

...

$$\hat{V}_{x_1} = \hat{E}_1\frac{Z_{C_1}}{R+Z_{C_1}} = \hat{E}_1\frac{\frac{1}{j\omega_1 C}}{R+\frac{1}{j\omega_1 C}} = \hat{E}_1\frac{1}{j\omega_1 CR+1} = \hat{E}_1\frac{1}{j2\pi fCR+1} = \hat{E}_1\frac{1}{2\pi CR\left(\underbrace{\frac{1}{2\pi CR}}_{f_0}+jf\right)}$$

$$\hat{V}_{x_1} = \hat{E}_1\frac{f_0}{f_0+jf} = \hat{E}_1\frac{1}{1+j\frac{f}{f_0}}$$

b)



$\angle H(f') = -\arctg\left(\frac{f'}{f_0}\right)$

a) DEF $A \rightarrow dB$ (modulo rappresentato in logaritmi)

$\boxed{A_{dB} = 20 \log_{10} A}$ decibel

se $A = 1 \rightarrow A_{dB} = 0$ dB

$A = 10 \rightarrow A_{dB} = 20$ dB

$A = 100 \rightarrow A_{dB} = 40$ dB

$A = \sqrt{2} \rightarrow A_{dB} = 3$ dB

$A < 1 \rightarrow A_{dB} < 0$

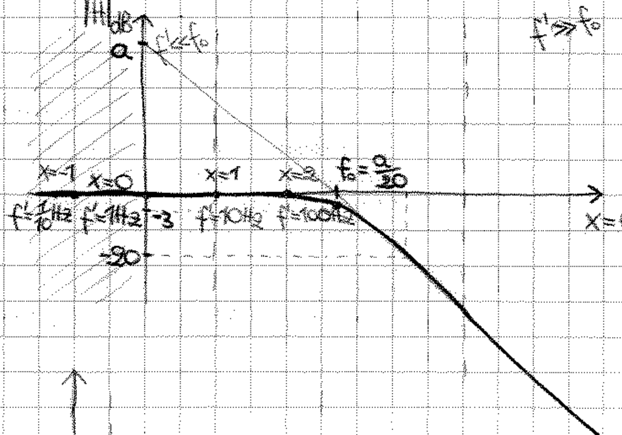
$|H(f')| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(f'/f_0\right)^2}} \xrightarrow{dB} |H|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+\left(f'/f_0\right)^2}} = \cancel{20 \log 1} - 20 \log\left(\sqrt{1+\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2}\right) =$

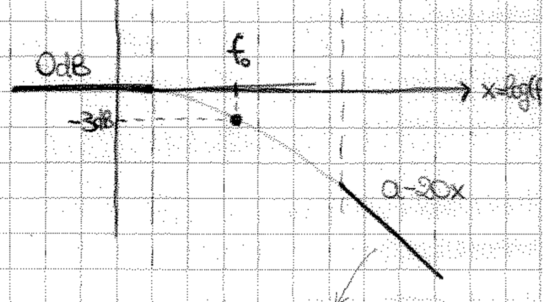
$= -20 \cdot \frac{1}{2} \log\left(1+\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2\right)$

se $f' \rightarrow 0$: $|H|_{dB} = 0$ se $f' = f_0$: $|H|_{dB} = -\frac{1}{2} \cdot 6\,dB = -3\,dB$

se $f' \ll f_0$: $|H|_{dB} \cong 0$ se $f' \gg f_0$: $|H|_{dB} \cong -20 \cdot \frac{1}{2} \log\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2 = -20 \log\left(\frac{f'}{f_0}\right) = -20 \underbrace{\log(f')}_{x} + \underbrace{20 \log(f_0)}_{a \in \mathbb{R}}$

$\cong a - 20x$: retta





pendenza di -20 per decade

$\left(\frac{-20\,dB}{dec}\right)$

DIAGRAMMA di BODE

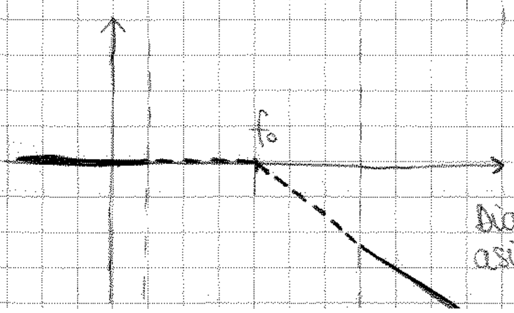
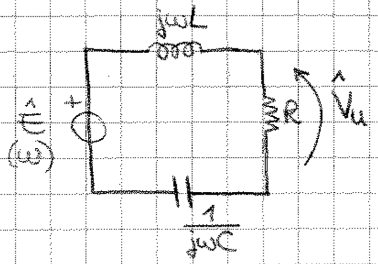


Diagramma asintotico di Bode

07.01.13

MER 9/1 esercitaz. h.10-11.30

FILTRI CON DUE ELEMENTI DI MEMORIA



$H = \frac{\hat{V}_u}{\hat{E}}$ funzione di trasferimento (FdT)

$$Z_{tot} = j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

esisterà una ω_0 per cui $Im\{Z\}=0$: $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ PULSAZIONE di RISONANZA

$$\hat{V}_u = \hat{E}\frac{R}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}} \rightarrow \text{FdT} : H = \frac{R}{R+j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

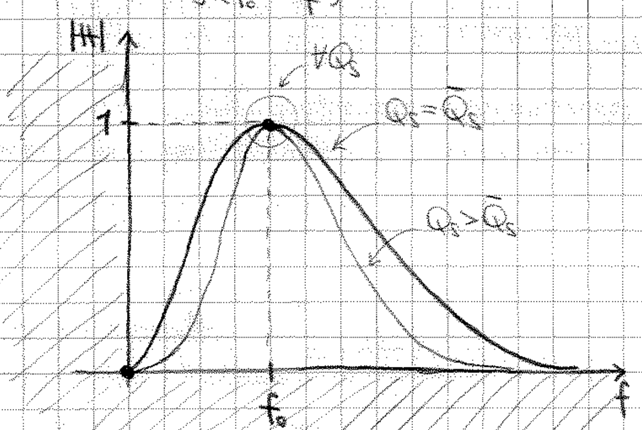
$$H = \frac{\cancel{R}}{\cancel{R}\left[1+j\left(\frac{\omega L C}{RC} - \frac{1 L}{\omega C R L}\right)\right]} = \frac{1}{1+j\left(\frac{\omega}{\omega_0^2 RC} - \frac{\omega_0^2 L}{\omega R}\right)} = \frac{1}{1+j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\underbrace{\frac{1}{\omega_0 RC}} - \frac{\omega_0}{\omega}\underbrace{\frac{\omega_0 L}{R}}\right)}$$

Q_s : FATTORE di QUALITÀ

$$\frac{1}{\omega_0 RC}\frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 RC} = \frac{\omega_0 L \cancel{C}}{R\cancel{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} \rightarrow$$ i due termini sono uguali!

$$H = \frac{1}{1+jQ_s\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{1}{1+jQ_s\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1+Q_s^2\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2}} \qquad \angle H = 0 - \operatorname{arctg}\frac{Q_s\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)}{1}$$



per $f=0$: $|H|=0$
$f\to\infty$: $|H|\to 0$
$f=f_0$: $|H|=1$ $\forall Q_s$

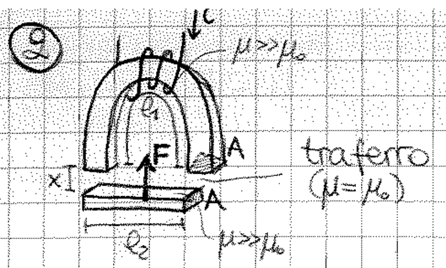
$f=f_0$ manda a zero la parentesi sotto radice quindi Q_s non ha influenza.

ma per un $f \neq f_0$, se Q_s è più grande la fz. $\to 0$ più velocemente

In $f=f_0$ tutta la $\hat{E}$ va a finire su R, ma scostandomi di poco a dx o sx $\hat{V}_u < \hat{E}$

FILTRO PASSA-BANDA : fa passare solo le

2



$\oint \vec{h} \cdot d\vec{l} = \int_\Sigma j \, d\Sigma$

Spezzo in $\int_n + \int_{t\,dx} + \int_b + \int_{t\,sx}$

h cambia a seconda del materiale, b si conserva ovunque

- $\int_n h \ldots + \int_{t\,dx} h' + \int_b h \ldots + \int_{t\,sx} h' \ldots$ $\qquad h = \frac{b}{\mu} \quad h' = \frac{b}{\mu_0}$

$$h l_1 + h' x + h l_2 + h' x = \frac{b}{\mu} l_1 + \frac{b}{\mu_0} x + \frac{b}{\mu} l_2 + \frac{b}{\mu_0} x = b\left(\frac{l_1+l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}\right)$$

- $\int_\Sigma j \, d\Sigma = Ni$

$$\Rightarrow \quad b\left(\frac{l_1+l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}\right) = Ni$$

$$\Phi = bA = \frac{Ni}{\frac{l_1+l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}} A$$

$$V = N v_{spira} = N \frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{\frac{N^2 A}{\frac{l_1+l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}}}_{L} \frac{di}{dt} \qquad \text{Legge dell'induttore}$$

Caso 1 : traferro $x \neq 0 \rightarrow L_1 = \dfrac{N^2 A}{\frac{l_1+l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}}$

Caso 2 : no traferro $x = 0 \rightarrow L_2 = \dfrac{N^2 A}{\frac{l_1+l_2}{\mu}}$

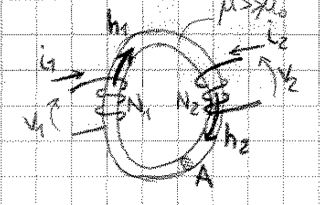
Calcolo l'energia dell'induttore nei due casi : $\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} L i^2}$

$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} L_1 i^2 \neq \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} L_2 i^2$ come giustifico il cambiamento di energia se il sistema è sempre lo stesso?

$\Delta\mathcal{E}$ è dovuto al lavoro per spostare la barra di x : $\underline{\Delta\mathcal{E} = Fx}$

→ ho fatto un' **ELETTROCALAMITA** (non è un magnete permanente)

3



Nell'anello $\vec{h} = \vec{h}_1 + \vec{h}_2$

Applico $\oint_\gamma \vec{h} \cdot d\vec{l} = \int_\Sigma j \, d\Sigma$

- $hl = (h_1 + h_2) l$
- $N_1 i_1 + N_2 i_2$

$\rightarrow (h_1 + h_2) l = N_1 i_1 + N_2 i_2 \qquad \left(\frac{b_1}{\mu} + \frac{b_2}{\mu}\right) l = N_1 i_1 + N_2 i_2$

$b = b_1 + b_2 = \frac{\mu}{l} (N_1 i_1 + N_2 i_2)$

14.01.13

POTENZA NEL TRASFORMATORE

Porta ① → potenza assorbita (entrante) $\quad p_1 = v_1 i_1$

Porta ② → pot. assorbita $\quad p_2 = v_2 i_2$

$$p_2 = (n v_1)\left(-\frac{1}{n} i_1\right) = -v_1 i_1$$

$\Rightarrow \quad |p_1| = |p_2| \quad$ ma $\quad p_2' = v_1 i_1$ potenza erogata (uscente)

$p_2' = -p_2$

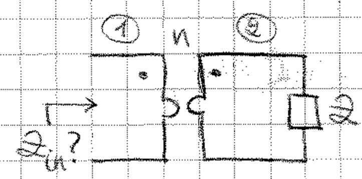
Il trasformatore assorbe potenza dalla porta ① e la eroga tutta dalla porta ② (comportamento ideale)

Un trasformatore reale ha comunque un rendimento alto ($\gtrsim 90\%$)

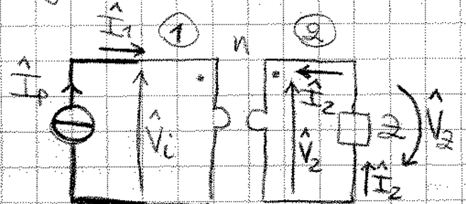
CASO DI REGIME SINUSOIDALE → fasori

$$\boxed{\begin{cases} \hat{V}_2 = n \hat{V}_1 \\ \hat{I}_2 = -\frac{1}{n} \hat{I}_1 \end{cases}}$$

ES.



Per ricavare l'impedenza equivalente devo utilizzare la definizione e inserire un generatore di corrente di prova:



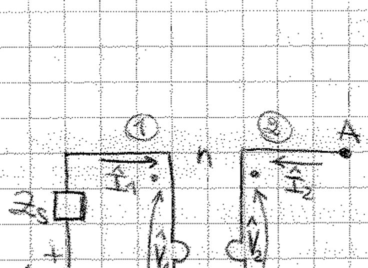
$$Z_{in} = \frac{\hat{V}_i}{\hat{I}_p}$$

$\hat{I}_p = \hat{I}_1 \quad , \quad \hat{I}_2 = -\frac{1}{n}\hat{I}_1 \quad , \quad \hat{V}_Z = Z \hat{I}_Z$

$\hat{V}_2 = -\hat{V}_Z = -Z\left(-\frac{1}{n}\hat{I}_1\right) \qquad \hat{V}_i = \frac{1}{n}\hat{V}_2 = \frac{1}{n}\left(\frac{Z}{n}\hat{I}_1\right) = \frac{Z}{n^2}\hat{I}_1 = \frac{Z}{n^2}\hat{I}_p$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{Z_{in} = \frac{\hat{V}_i}{\hat{I}_p} = \frac{Z}{n^2}}\quad !$$

ES. Trovare l'equivalente di Thevenin in AB



$\hat{E}_{TH}$: Dato che devo trovare la tensione a vuoto, $\hat{I}_2 = 0 \Rightarrow \hat{I}_1 = 0$

Se $\hat{I}_1 = 0$, non scorre corrente in $Z_s \Rightarrow \hat{V}_1 = \hat{E}$

$\hat{V}_2 = n\hat{V}_1 = n\hat{E} \qquad \hat{V}_2 = \underbrace{\hat{E}_{TH} = n\hat{E}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 80

KVL a sinistra: $\hat{E} = R\hat{I}_1 + \frac{\hat{V}_2}{n}$

KCL in A: $\hat{I}_2 = \hat{I}_2 + \frac{\hat{V}_2}{R}$

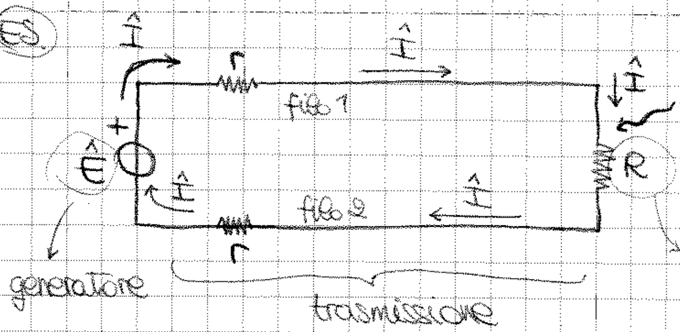
KVL sul percorso esterno: $\hat{E} = 2\left(\hat{I}_2 + \frac{\hat{V}_2}{R}\right) + \hat{V}_2$ $\quad \hat{I}_2 = -\frac{1}{n}\hat{I}_1$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{E} - \frac{\hat{V}_2}{n}}{R}$$

$$\hat{E} = -\frac{2}{n}\,\frac{\hat{E} - \hat{V}_2/n}{R} + 2\frac{\hat{V}_2}{R} + \hat{V}_2 \qquad \hat{V}_2\left[1 + \frac{2}{R} + \frac{2}{n^2R}\right] = \hat{E}\left(1 + \frac{2}{nR}\right)$$

$$\hat{V}_u = \hat{V}_2 = \frac{\hat{E}\left(1 + \frac{2}{nR}\right)}{1 + \frac{2}{R} + \frac{2}{n^2R}}$$

Es.



R: carico
r: resistenza dei fili

L'utilizzatore per funzionare ha bisogno di una potenza (trasforma energia)

$P = \frac{1}{2}|\hat{V}_R||\hat{I}|\cos\varphi = \frac{1}{2}R|\hat{I}|^2$ $\quad$ P è un dato del problema!

$$|\hat{I}| = \sqrt{\frac{2P}{R}}$$

Potenza dissipata nei fili della trasmissione: $P_d = P_{d_1} + P_{d_2}$

$P_{d_1} = \frac{1}{2} r|\hat{I}|^2 \qquad P_{d_2} = \frac{1}{2} r|\hat{I}|^2 \rightarrow P_d = r|\hat{I}|^2 = r\frac{2P}{R} \qquad P_d = \frac{2r}{R}P$

Faccio in modo che r sia piccolo ($\cong 1\Omega$); R negli utilizzatori comuni è $\sim 10\Omega$

$\Rightarrow$ per mandare la potenza necessaria P all'utilizzatore R, spreco circa il 10% nella trasmissione !

Conviene utilizzare i trasformatori