NUMERO: 680

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Taberna

MATERIA: Fisica I

Prof. Vadachino

2/7
16/7

ESAMI

FISICA I

G. Taberna

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 90

06.03.12

VETTORI e SCALARI

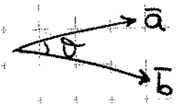
PRODOTTO

- $s \cdot \bar{a} = \bar{b}$ $\quad |\bar{b}| = s \cdot |\bar{a}|$

  direzione $\bar{b}$ = direz. $\bar{a}$ ($\bar{a}$ e $\bar{b}$ paralleli)

  verso $\bar{b}$ < stesso di $\bar{a}$ se $s>0$ / opposto di $\bar{a}$ se $s<0$

- $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\theta$ (prodotto scalare)

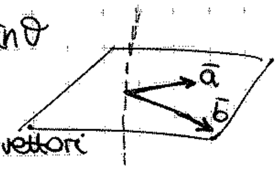


  es. $\bar{a}$ e $\bar{b}$ ortogonali $\rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

  proprietà commutativa $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

  prop. associativa $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) \cdot (\bar{b}_1 + \bar{b}_2) = \bar{a}_1\bar{b}_1 + \bar{a}_1\bar{b}_2 + \bar{a}_2\bar{b}_1 + \bar{a}_2\bar{b}_2$

- $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$ (prodotto vettoriale) $\quad |\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\theta$



  direzione $\perp$ al piano dei vettori

  verso: regola della mano destra

  il prod. vettoriale non è commutativo $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

- prodotti tripli misti ① $\underbrace{\bar{a} \cdot \bar{b}}_{s} \cdot \bar{c}$ NON si può fare

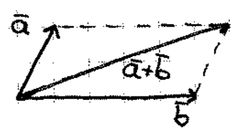
  ② $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$ = scalare

  ③ $\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c} = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b})$ vettore

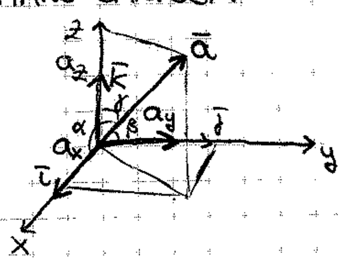
SOMMA $\quad \bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ commutativa

DIFFERENZA $\quad \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-1)\bar{b}$ non commutativa

<u>Regola del parallelogramma</u>



PIANO CARTESIANO



① $\bar{\imath} \cdot \bar{\imath} = \bar{\jmath} \cdot \bar{\jmath} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$ $\quad \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$: VERSORI (modulo = 1)

② $\bar{\imath} \cdot \bar{\jmath} = \bar{\jmath} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{\imath} = 0$ i versori sono $\perp$ tra loro

③ $\begin{cases} \bar{\imath} \times \bar{\jmath} = \bar{k} \\ \bar{\jmath} \times \bar{k} = \bar{\imath} \\ \bar{k} \times \bar{\imath} = \bar{\jmath} \end{cases}$ i tre versori formano una terna "destrorsa"

coseni direttori $\begin{cases} a_x = |\bar{a}| \cos\alpha \\ a_y = |\bar{a}| \cos\beta \\ a_z = |\bar{a}| \cos\gamma \end{cases}$

$\bar{a} = a_x \bar{\imath} + a_y \bar{\jmath} + a_z \bar{k}$

$\bar{a}(x,y,z;t) = a_x(x,y,z;t)\bar{\imath} + a_y(x,y,z;t)\bar{\jmath} + a_z(x,y,z;t)\bar{k}$

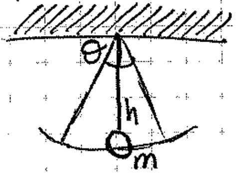
→ con questa espressione definiamo un CAMPO VETTORIALE (spazio nel

08.03.12, MONTEVECCHIO via Massena

ANALISI DIMENSIONALE

$A = B \cdot C \cdot D$ l'unità di misura di A dev'essere uguale a quella di $B \cdot C \cdot D$

ES. Equazione dell'oscillazione del pendolo



$$T = C \cdot m^{\alpha} \cdot h^{\beta} \cdot g^{\gamma} \cdot \theta$$

equaz. dimensionale $t = c \cdot m^{\alpha} \ell^{\beta} \frac{\ell^{\gamma}}{t^{2\gamma}} \theta = c \cdot m^{\alpha} \ell^{\beta+\gamma} t^{-2\gamma} \theta$

Perché l'equaz. sia soddisfatta devo imporre che $\begin{cases} -2\gamma = 1 \\ \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2} \\ \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$

Quindi $T = c \cdot \sqrt{\frac{h}{g}} \cdot f(\theta)$ $(c = 2\pi)$

MISURA

Se faccio n misurazioni, trovo n risultati diversi dovuti a influenze esterne.

$A = (\bar{a} \pm \Delta a) \mathcal{A}$ Δa: INCERTEZZA
il valore di A è compreso tra $(\bar{a} - \Delta a)$ e $(\bar{a} + \Delta a)$

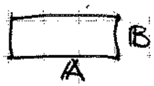
La teoria della misura quantifica la probabilità che il valore di A sia compreso tra $(\bar{a} - \Delta a)$ e $(\bar{a} + \Delta a)$

ES. massa protone $m_p = 1{,}6726231\underbrace{(10)}_{\Delta m} \cdot 10^{-27}$ kg $\Delta m = 0{,}00000010 \cdot 10^{-27}$ kg

INCERTEZZA RELATIVA: $\frac{\Delta a}{a}$ valutazione della qualità della misura

MISURE IN PIÙ PASSAGGI

ES. $S = A \cdot B$



$A = (\bar{a} \pm \Delta a) \mathcal{A}$
$B = (b \pm \Delta b) \mathcal{B}$

$\boxed{\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}}$ prodotto

$P = 2(A + B)$ $\boxed{\Delta P = 2(\Delta a + \Delta b)}$ somma

VALOR MEDIO $\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$

SCARTO $d_i = a_i - \bar{a}$ $\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{a} = n\bar{a} - n\bar{a} = 0 \Rightarrow$ non dà informazioni

DEVIAZIONE STANDARD (SCARTO QUADRATICO MEDIO) $\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (d_i)^2}$ o meglio $\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (d_i)^2}$

Scrivo la misura come: $A = (\bar{a} \pm \sigma_a) \mathcal{A}$. La probabilità che il risultato vero appartenga all'intervallo $(\bar{a} - \sigma_a)$ e $(\bar{a} + \sigma_a)$ è del 68%

$$\left.\begin{array}{l} a=a(t) \\ v=v(t) \\ x=x(t) \end{array}\right\} \text{MOTO VARIO}$$

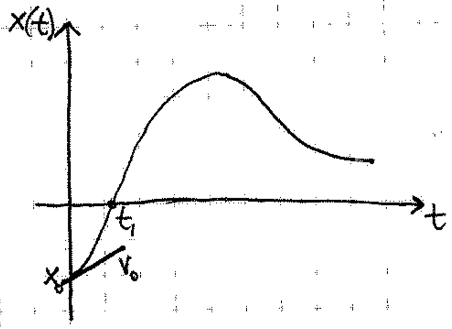
se $a(t)=0$ $\quad$ $v(t)=v_0$: velocità costante

$$\left.x(t)=x_0+\int_0^t v_0\,dt = x_0+v_0 t\right\} \text{MOTO UNIFORME}$$

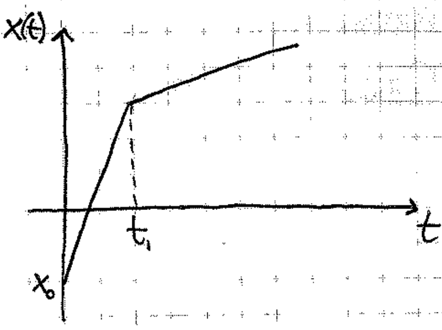
$$\boxed{\begin{array}{l} a(t)=0 \\ v(t)=v_0 \\ x(t)=x_0+v_0 t \end{array}}$$

19.03.12

Moto vario



Moto uniforme



ES. $t=0 \to t_1$ $\quad v=v_0$ $\quad x(t)=x_0+v_0 t$

$t=t_1 \to t_2$ $\quad v=v_1$ $\quad x(t)=x_0'+v_1 t$!!

$x_0'=x_0+v_0 t_1$ ...

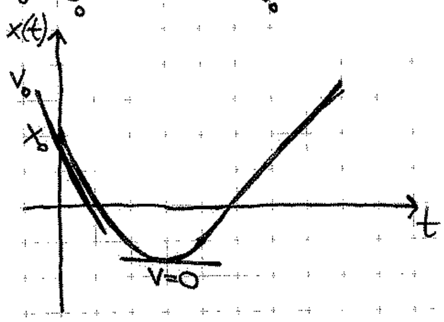
MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$a(t)=a_0$

$$v(t)=v_0+\int_0^t a_0\,dt = v_0+a_0 t$$

$$x(t)=x_0+\int_0^t v(t)dt = x_0+\int_0^t (v_0+a_0 t)\,dt = x_0+v_0 t+\frac{1}{2}a_0 t^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a(t)=a_0 \\ v(t)=v_0+a_0 t \\ x(t)=x_0+v_0 t+\frac{1}{2}a_0 t^2 \end{array}}$$



in questo caso $a_0>0$, quindi v cresce sempre

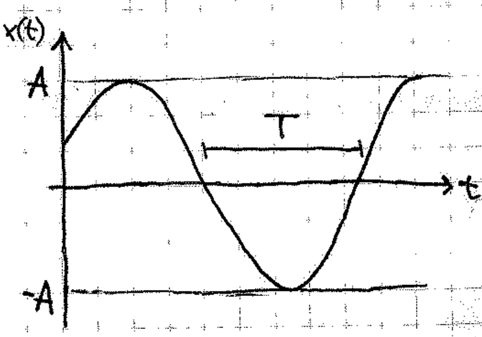
In che istanti il corpo passa per l'origine?

Pongo $x_0+v_0 t+\frac{1}{2}a_0 t^2=0$ ...

MOTO ARMONICO

$x(t)=A\sin(\underline{\omega t+\phi})$ adimensionato

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t)=A\sin(\omega t+\phi) \\ v(t)=\omega A\cos(\omega t+\phi) \\ a(t)=-\omega^2 A\sin(\omega t+\phi) \end{array}}$$



A: ampiezza

ω: velocità angolare

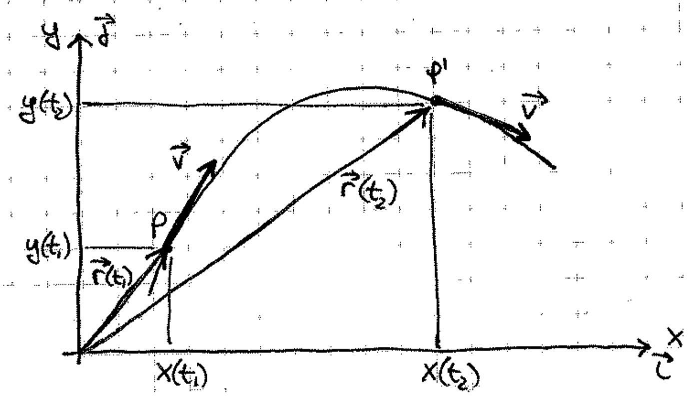
ϕ: fase iniziale

$\varphi(t)=\omega t+\phi$: fase $\qquad$ $\varphi(0)=\phi$

MOTO IN PIÙ DIMENSIONI (le dimensioni sono 4 contando anche il tempo)

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ In un sistema di riferimento fisso, $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ sono costanti

- Prima moto in un'unica direzione (retta), cioè $y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = 0$
- Ora ~~se~~ moto sul piano, supponiamo $z(t)\vec{k} = 0$



$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j}$$

v_x, v_y: componenti del vettore $\vec{v}$

TRAIETTORIA: luogo dei punti tangenti al vettore velocità

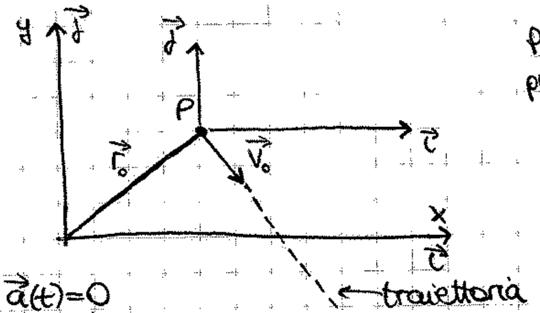
$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j}$ L'accelerazione non è tg alla traiettoria !!

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)\,dt = \vec{r}_0 + \underbrace{\vec{i}\int_0^t v_x(t)\,dt}_{\text{vettore // all'asse } \vec{i}} + \underbrace{\vec{j}\int_0^t v_y(t)\,dt}_{\text{vettore // asse } \vec{j}}$$

$\vec{i}, \vec{j}$ sono costanti quindi possono essere tirati fuori dal segno di integrale

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{i}\int_0^t a_x(t)\,dt + \vec{j}\int_0^t a_y(t)\,dt$$

MOTO UNIFORME RETTILINEO



Posso spostare gli assi in modo che coincidano con il punto iniziale

$$\begin{cases} \vec{a}(t) = 0 \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}_0\,dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ ⇒ il vettore $\vec{r}$ è parallelo al vettore $\vec{v}_0$ e sono // sempre perchè $\vec{v}_0$ è costante

Traiettoria: retta

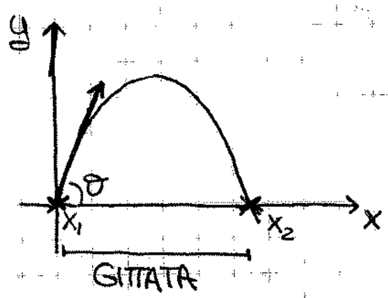
$\vec{v}_0 = v_0 \cos\theta \vec{i} + v_0 \operatorname{sen}\theta \vec{j}$

$\vec{a}_0 = -a_0 \vec{j}$

$\vec{r} = v_0 \cos\theta \vec{i} t + v_0 \operatorname{sen}\theta \vec{j} t - \frac{1}{2} a_0 t^2 \vec{j}$ $\qquad \vec{r} = \underbrace{v_0 t \cos\theta}_{x(t)} \vec{i} + \underbrace{\left(v_0 t \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2} a_0 t^2\right)}_{y(t)} \vec{j}$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\theta \\ y(t) = v_0 t \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2} a_0 t^2 \end{cases}$$ eq. parametriche della traiettoria

$y = f(x) \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \rightarrow y = \underbrace{v_0 \operatorname{sen}\theta \frac{1}{v_0 \cos\theta}}_{cost} x - \underbrace{\frac{1}{2} a_0 \frac{1}{v_0^2 \cos^2\theta}}_{cost} x^2$: parabola



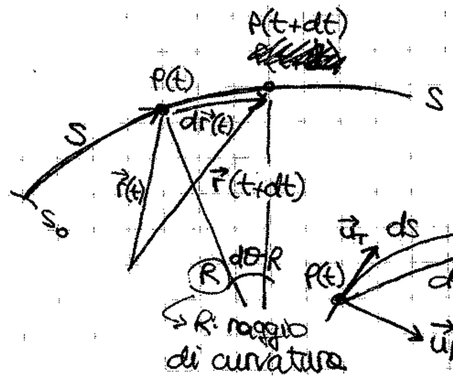
$y = 0 \qquad 0 = \operatorname{tg}\theta x - \frac{a_0}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2$

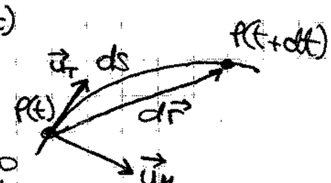
$x_1 = 0 \lor x_2 = \frac{2 v_0^2 \cos^2\theta \operatorname{tg}\theta}{a_0} = \frac{2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta v_0^2}{a_0} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{a_0}$

Gittata max per $\theta = 45°$

MOTO CURVILINEO

In questo caso conviene utilizzare delle coordinate INTRINSECHE





$d\vec{r}(t) = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$: corda

ds: arco $\qquad d\vec{r}(t) = ds \cdot \vec{u}_T$ per $d\vec{r} \rightarrow 0$

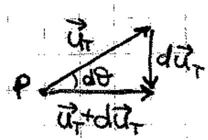
$\vec{u}_T$: versore tg alla curva in P(t)

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\text{velocità tangenziale } \vec{v}_T} \vec{u}_T$ $\qquad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{ds}{dt}\vec{u}_T\right] = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u}_T + \frac{ds}{dt} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{u}_T}{dt}}_{\vec{u}_N \perp \vec{u}_T}$

(perchè facciamo la derivata di un vettore costante)

Ogni punto di una curva ha un raggio di curvatura. L'angolo tra due raggi è dθ.

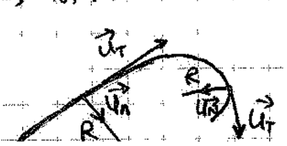
$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N \qquad d\theta = \frac{ds}{R}$



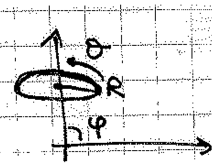
$\vec{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u}_T + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{R} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v_T} \vec{u}_N = a_T \vec{u}_T + \underbrace{\frac{v_T^2}{R}}_{a_N} \vec{u}_N$ $\qquad a_T$: acc. tangenziale; a_N: acc. centripeta

$\vec{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u}_T + \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{u}_N$ $\qquad \vec{u}_T, \vec{u}_N, R$ cambiano continuamente

con $R \rightarrow \infty$ si ha un moto rettilineo



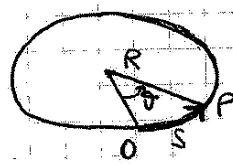
Moto circolare in coord. polari $\begin{cases} r(t)=R_0 \\ \varphi(t)=\frac{\pi}{2} \\ \theta(t)=\theta(t) \end{cases}$



si passa in coord. intrinseche: $s(t)=R\cdot\theta(t)$

5.03.12

MOTO CIRCOLARE



$s(t)=R\cdot\theta(t)$

$\omega=\frac{d\theta}{dt}$ $\quad \alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$: acc. angolare

velocità angolare

$$v_T=\frac{ds}{dt}=R\frac{d\theta}{dt}=R\omega$$

$$a_T=\frac{d^2s}{dt^2}=R\frac{d^2\theta}{dt^2}=R\alpha \qquad a_N=\frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=R\omega^2$$

MOTO CIRC. UNIFORME

$\alpha(t)=0 \rightarrow \omega(t)\overset{\omega_0}{=}(\text{cost})$

$\theta(t)=\theta_0+\omega_0 t$

MOTO CIRC. UNIFORM. ACCELERATO

$\alpha(t)=\alpha_0 \rightarrow \omega(t)=\omega_0+\alpha_0 t$

$\theta(t)=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha_0 t^2$

DINAMICA

RELATIVITÀ di GALILEO (vale per il moto rettilineo uniforme)

PRINCIPIO DI INERZIA (1ª legge di Newton): valido nei sistemi inerziali

corpo: fermo → fermo

rett. unif. → rett. unif.

Quando $a\neq0$, il sistema non è più inerziale.

Quantità di moto: $\boxed{\vec{p}=m\vec{v}}$ $(\vec{p}\parallel\vec{v})$ $[kg\cdot\frac{m}{s}]$

II LEGGE DI NEWTON: $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\underbrace{\cancel{\frac{dm}{dt}\vec{v}}}_{\text{perché } m=\text{cost}}+m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{a}$ $\quad [N=kg\cdot\frac{m}{s^2}]$

$\boxed{\vec{F}=m\vec{a}}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ se l'incognita è $\vec{r}(t)$, la formula diventa un'equaz. differenziale del 2° ordine

↳ legge sperimentale, vale in sistemi solidali con la Terra (ma non per forza in tutti i sistemi di riferimento)

TRASFORMAZIONI DI GALILEO $\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_{0'} + \vec{v}' \\ \vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{a}' \end{cases}$

valide se v non è prossima alla v della luce

$\underbrace{\vec{F} = m\vec{a}}_{\text{sistema } O} = \underbrace{m(\vec{a}_{0'} + \vec{a}')}_{\text{sistema } O'}$: ~~sistema~~ osservatore in O

$\underbrace{\vec{F} - m\vec{a}_{0'}} = m\vec{a}'$: osservatore in O' $\quad -m\vec{a}_{0'}$: verso opposto a $\vec{F}$

Per poter conservare la legge di Newton in un sistema accelerato, bisogna ammettere l'esistenza di forze "apparenti" (ma reali!) (FORZE D'INERZIA)

Tutti i sistemi che si muovono di moto rettilineo uniforme sono equivalenti.

- osservatore in O' : $\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ $\quad \bar{\omega} = \omega_0$ (moto non più traslatorio)

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'}_{\text{velocità per l'osservatore } O'} + \underbrace{x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}} = \vec{v}' + x'\bar{\omega}\times\vec{i}' + y'\bar{\omega}\times\vec{j} + z'\bar{\omega}\times\vec{k}'$$

Per la relazione di Poisson: $\frac{d\vec{i}'}{dt} = \bar{\omega}\times\vec{i}'$ ...

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \bar{v}' + \bar{\omega}\times x'\vec{i}' + \bar{\omega}\times y'\vec{j}' + \bar{\omega}\times z'\vec{k}' = \bar{v}' + \bar{\omega}\times\bar{r}' \qquad \frac{d\vec{r}'}{dt} \neq \bar{v}' \; !!$$

- osservatore in O : $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{O}}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt} = \bar{v}_{0'} + \bar{v}' + \bar{\omega}\times\bar{r}'$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{v}_0 + \bar{v}' + \bar{\omega}\times\bar{r}') = \underbrace{\frac{d\bar{v}_{0'}}{dt}}_{①} + \underbrace{\frac{d\bar{v}'}{dt}}_{②} + \underbrace{\cancel{\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}'}}_{\text{perchè } \omega = \text{cost}} + \underbrace{\bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}'}{dt}}_{③} = \underbrace{\bar{a}_{0'}}_{①} + \underbrace{(\bar{a}' + \bar{\omega}\times\bar{v}')}_{②} + \underbrace{(\bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r}' + \bar{\omega}\times\bar{v}')}_{③}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_{0'} + \bar{a}' + \underbrace{2(\bar{\omega}\times\bar{v}')}_{\text{acc. di CORIOLIS}} + \underbrace{\bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r}'}_{\text{acc. centripeta}}$$

↳ forza ⊥ al piano di rotazione e a $\bar{v}'$

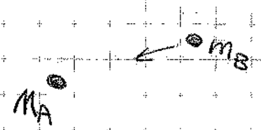
$$F - m\bar{a}_0' - 2m(\bar{\omega}\times\bar{v}') - m\,\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}') = m\bar{a}'$$

Differenza della massa! $\vec{F} = m\vec{a}$ → MASSA INERZIALE

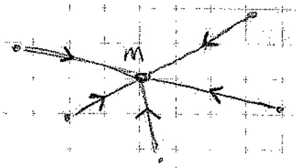
Le due masse coincidono entro 10^{-12} (incertezza) $\vec{F} = -G m_A m_B \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ → MASSA GRAVITAZIONALE

$$\frac{m_{gr}}{m_{in}} = 1 \pm 10^{-12}$$

CAMPO GRAVITAZIONALE



m_B: massa campione, viene attratta da M_A



M_A ha creato un campo gravitazionale (campo radiale), ha alterato lo stato fisico dello spazio circostante

$\vec{f} = -Gm \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$: campo nel punto P

forza sempre attrattiva

una massa M nel punto P risente di una forza $\vec{F} = M\vec{f}$

Campo CENTRALE: campo radiale che dipende dalla distanza come r^{-2}

$\vec{f} \propto r^{-2}$ $\vec{f} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$

CAMPO GRAVITAZIONALE TERRESTRE

$F = G\frac{m M_T}{R_T^2} = m \frac{G M_T}{R_T^2} = P$ (peso) supponendo M_T uniforme e R_T costante

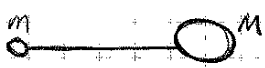
(Non metto il segno di vettore perché so che si tratta di un campo radiale)

$M_T \sim 6 \cdot 10^{24}$ kg $R_T \sim 6 \cdot 10^6$ m

$\frac{GM_T}{R_T^2} = \underbrace{9{,}8\ m/s^2 = g}_{\text{acc. notevole!}}$ $P = mg$

Il corpo umano può sopportare fino a $a_{max} = 4g$

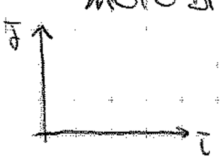
Ragionamento di Galileo: velocità di caduta dipende dalla massa?



se fosse vero, il sistema m+M dovrebbe cadere più veloce della sola M.

ASSURDO: m rallenta + M accelera ⇒ velocità intermedia tra v_m e v_M

MOTO DI UN GRAVE



$\vec{P} = -mg\vec{j}$ moto uniformemente accelerato

$v = v_0 + gt$ $s = \frac{1}{2}gt^2$

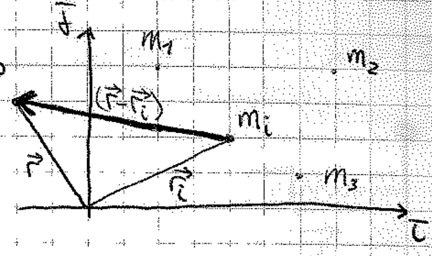
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 90

23.03.12

CAMPO GRAV. IN ~~PRESENZA~~ DI n MASSE

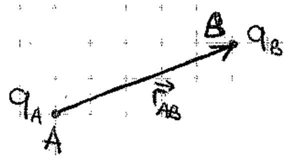
$$\vec{f}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i(\vec{r}-\vec{r}_i) = -G\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$ SOMMA VETTORIALE

(principio di sovrapposizione)



INTERAZIONE ELETTROSTATICA

Analogia del tutto formale con l'interazione gravitazionale



$$\vec{F}_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_A q_B \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|^3}$$ $\vec{F}_{AB}$ forza centrale

- manca il segno $-$ (presente in "$-G$...") perché le cariche possono avere segno negativo, mentre le masse sono sempre positive
- ε_0: costante dielettrica del vuoto $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$
- $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ ordine di grandezza 10^{11} $\Rightarrow$ forza enorme!
- le forze elettrostatiche tengono insieme un atomo
- dal verso di $\vec{r}_{AB}$ si nota che se le due cariche sono concordi si respingono, se sono concordi si attraggono

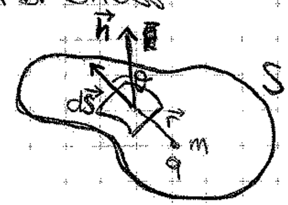
Una carica q altera lo spazio circostante (si dimostra utilizzandone una carica di prova)

CAMPO ELETTRICO: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ vale il principio di sovrapposizione

Struttura comune campo grav./el.: $\vec{h} = k\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

I campi centrali godono di una proprietà comune, il TEOREMA DI GAUSS

Superficie S, in cui è presente una massa/carica
CHIUSA



FLUSSO DEL VETTORE h ATTRAVERSO LA SUPERFICIE S

$$\Phi_h = \underbrace{\int_S}_{\text{integrale esteso a tutta la superficie S}} \vec{h} \cdot d\vec{S}$$

$\vec{S}$ vettore perché per ogni superficie possiamo individuare due facce

$d\vec{S}$: vettore normale alla superficie S

$$\Phi_h = \int_S k\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot d\vec{S} = \int_S k \frac{1}{r^2} \underbrace{dS \cdot \cos\theta}_{\text{angolo solido sotto il quale si vede la superficie S } (=d\Omega)} = \int_S k \cdot d\Omega = k \underbrace{\int_S d\Omega}_{=4\pi} = k \cdot 4\pi = \Phi_h$$ (flusso uscente)

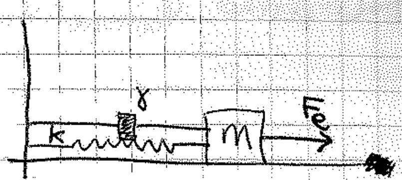
Il flusso totale non dipende dalla posizione della carica/massa all'interno della superficie

26.03.12

OSCILLATORE FORZATO (moto transitorio + moto di regime)

$$-kx-\gamma\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Supponiamo di applicare un'ulteriore forza esterna :



$F_e = F_{0e}\cos(\omega_e t+\phi)$ (forza sinusoidale)

ω_0 : FREQ. PROPRIA DEL SISTEMA
ω_s : FREQ. DEL MOTO SMORZATO
ω_e : FREQ. ESTERNA

$$F_e-kx-\gamma\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+kx=F_{0e}\cos(\omega_e t+\phi)$$ eq. diff. non omogenea

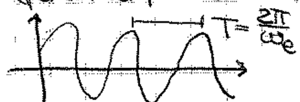
soluzione = $\underbrace{\text{soluz. eq. omogenea associata}}_{1}$ + $\underbrace{\text{una soluz. particolare}}_{2}$

1) vedi soluz. CASO 2 $\quad x(t)=e^{-\frac{\gamma}{2m}t}A\,sen(\omega_s t+\phi)$

oppure CASO 1 $\quad x(t)=\ldots$

Poco interessante, perchè sappiamo che dopo un tempo τ la soluzione va a zero ($x(t)\to 0$) : MOTO TRANSITORIO (per un tempo detto "tempo di rilassamento")

2) MOTO DI REGIME ⟶



$x_e(t)=X_{0e}\cos(\omega_e t+\phi_e)$ Sostituisco in (*) : ... ottengo $K\,f(t)+H\,g(t)=0$ ...

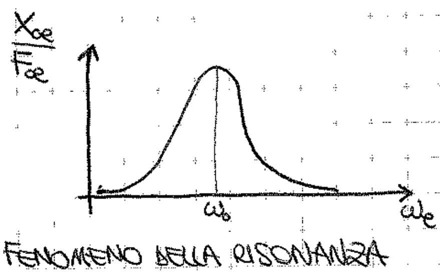
oppure $x_e(t)=X_{e_0}\,sen(\omega_e t+\phi_e)$] ?

$\Updownarrow$
$\begin{cases}K=0\\H=0\end{cases}$

ampiezza spostamento

$$\frac{X_{0e}}{F_{0e}}=\xi$$

ampiezza forza applicata

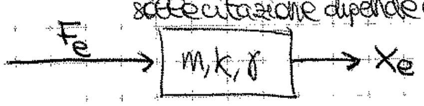


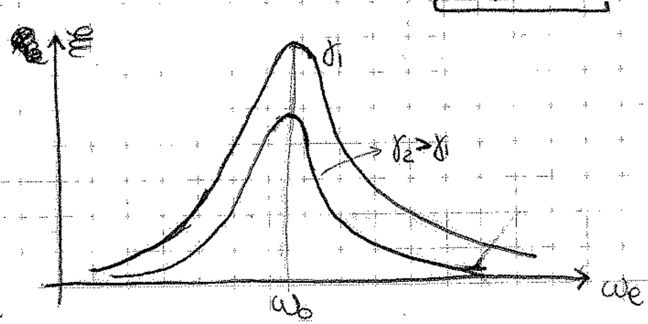
Quando $\omega_e=\omega_0$, il sistema comincia a vibrare con oscillazioni molto ampie

FENOMENO DELLA RISONANZA

29.03.12

reazione del sistema alla sollecitazione dipende da:





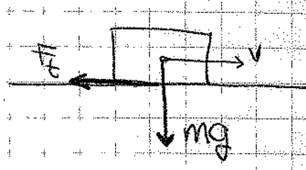
$$\xi=\frac{1}{\sqrt{\gamma^2\omega_e^2+m^2(\omega_0^2-\omega_e^2)^2}}$$

Se la frequenza della forza forzante è molto più piccola di ω_0, il sistema non reagisce.
Quando $\omega_e\cong\omega_0$, il sistema è molto reattivo (RISONANZA)

Per $\gamma=0$ oppure $\omega_e=\omega_0$, $\xi\to+\infty$ e si ha risonanza.

μ_s: coeff. di attrito statico
μ_d: coeff. di attrito dinamico
} solitamente $\mu_s > \mu_d$

$F > F_t = \mu_s N = \mu_s mg$



$F_t = \mu N = \mu mg$ Per spostare una massa m bisogna applicare una $F > F_t = \mu_s mg$

Nella maggior parte dei casi, μ NON dipende dalla velocità (quindi neanche F_t)

$\underbrace{F - F_t}_{cost} = m\underbrace{a}_{\substack{cost \\ \neq 0}}$ ⇒ moto uniformemente accelerato, non smorzato!
(manca il termine $\gamma \frac{dx}{dt}$ che dipende da v)

μ dipende invece dalla TEMPERATURA perchè tra due superfici scaldate manca il sottile strato d'aria che funge da lubrificante, quindi i due corpi sono a contatto più diretto.

LEGGI DI CONSERVAZIONE

*

• TEOR. DELLA CONSERV. DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ se $\vec{F} = 0$ $\vec{p}(t) = p_0$ costante ⇒ moto rettilineo
$\vec{p} = m\vec{v}$

• TEOR. DELLA CONSERV. DEL MOMENTO ANGOLARE

$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ se $\vec{M} = 0$, $\vec{L}$ si conserva (è cost. nel tempo)

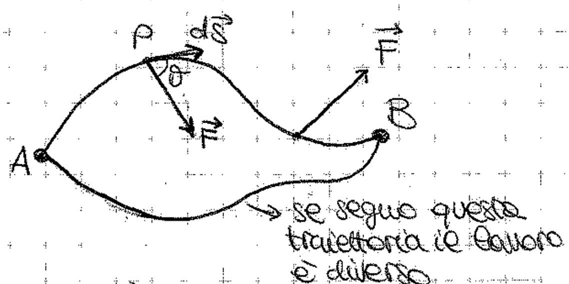
$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$\vec{r}$ e $\vec{v}$ possono dipendere dal tempo, ma il loro prodotto si conserva

Dicendo che $\vec{p}/\vec{L}$ sono costanti, risparmiamo di fare un'integrazione.

LAVORO

Consideriamo la traiettoria di un punto in un campo di forza (in ogni punto si definisce il vettore forza)



$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$ (scalare; può essere positivo o negativo)
→ integrale di linea

$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B |\vec{F}| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos\theta = \int_A^B F_T \, ds$

→ componente della forza // allo spostamento
$F_T = F \cos\theta$

30.03.12

$W = G m_0 m_a \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} m_a \cdot G m_0 \frac{1}{r_B} \\ m_a \cdot G m_0 \frac{1}{r_A} \end{array}\right\}$$ ENERGIA POTENZIALE della massa m_a nel punto $\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}$

↳ energia attribuibile a masse ferme, presenti in un campo gravitazionale (energia che può svolgere lavoro)

se $r_B > r_A \rightarrow W < 0 \rightarrow$ la forza tende a portare la massa da B ad A; l'E_p diminuisce

$r_B < r_A \rightarrow W > 0$

Misura della modifica di tutto lo spazio fisico circostante dovuta alla presenza di una massa $\longrightarrow f(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{m_a} = -G m_0 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ (campo gravitazionale)

Il campo grav. permette di calcolare la forza $\vec{F} = m_a \vec{f}$

Analogamente:

nel punto B esiste una modifica dello spazio fisico che si vede dal fatto che è definito un POTENZIALE GRAVITAZIONALE

$m_a G m_0 \frac{1}{r}$ ↳ $\boxed{U(r) = -G m \frac{1}{r}}$

La differenza di potenziale tra due punti permette di calcolare il lavoro compiuto per spostarsi tra quei due punti.

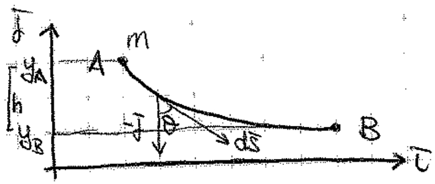
$W = m_a [U(r_A) - U(r_B)]$ $\quad E_p = G m_0 m_a \frac{1}{r} \Rightarrow W = E_{P_A} - E_{P_B}$

↳ $E_p \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$

CORPO SOGGETTO ALLA FORZA PESO

$\vec{P} = -mg\vec{j}$ (caso semplice: $\vec{P} /\!/ \vec{j}$ e non cambia direzione)

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -mg\vec{j} \cdot d\vec{s} = -mg \int_A^B \underbrace{|\vec{j}|}_{=1} \underbrace{|d\vec{s}| \cos\theta}_{\text{proiezione lungo la verticale}} = -mg(y_B - y_A)$$



$W = -mg(y_B - y_A) = -mgh$

CAMPO CONSERVATIVO: il lavoro non dipende dalla traiettoria, ma solo dal dislivello.

se $A \equiv B \rightarrow W = 0$

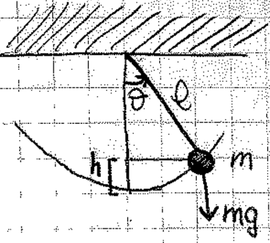
TEOR. DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

$$\left.\begin{array}{l} W = E_{K_B} - E_{K_A} \\ W = E_{P_A} - E_{P_B} \end{array}\right\} \Rightarrow E_{K_B} - E_{K_A} = E_{P_A} - E_{P_B} \Rightarrow \boxed{E_K + E_P = cost}$$ in ogni punto

(se non si compie lavoro sul sistema!)

02.04.12

ENERGIA TOTALE DI UN PENDOLO IN MOTO



Secondo una convenzione, sono positivi gli angoli in senso antiorario.

$\theta(t) = \theta_0 \sin\omega_0 t$

$E_K = \frac{1}{2} m v^2$

Dato che si tratta di un moto circolare: $v = \ell \frac{d\theta}{dt} = \ell \cdot \theta_0 \omega_0 \cos\omega_0 t$

- agli estremi $v=0$
- in equilibrio $v = v_{max}$

$E_K = \frac{1}{2} m \ell^2 \theta_0^2 \omega_0^2 \cos^2\omega_0 t$

$E_P = mgh = mg\ell(1-\cos\theta)$

Dato che stiamo lavorando con $\theta \ll 1$, allora $\cos\theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$

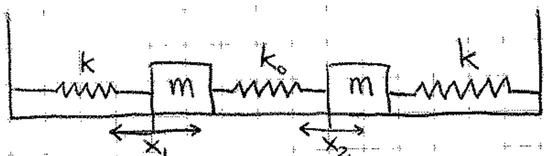
$\Rightarrow E_P \cong mg\ell\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{\theta^2}{2}\right) \cong mg\ell\frac{\theta^2}{2}$ <
- $E_P = 0$ quando $\theta = 0$
- E_P funzione pari

$E_K + E_P = \text{cost}$?

$\frac{1}{2} m \ell^2 \theta_0^2 \underbrace{\frac{g}{\ell}}_{=\omega_0^2} \cos^2\omega_0 t + \frac{1}{2} mg\ell \underbrace{\theta_0^2 \sin^2\omega_0 t}_{=\theta^2} = \frac{1}{2} m\ell g\theta_0^2 \Rightarrow E_{tot}$ <u>non</u> dipende dal tempo

L'energia totale di un fenomeno di moto armonico dipende dal <u>quadrato dell'ampiezza</u>!

SISTEMI A DUE GRADI DI LIBERTÀ !!



$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x = x_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \end{array}\right.$: lo stato del sistema è definito da una sola variabile (SISTEMA A UN GRADO DI LIBERTÀ)]

Lo stato del sistema è definito da x_1 e x_2 (un'equazione per ogni massa)

$$\begin{cases} m\frac{d^2x_1}{dt^2} = \underbrace{-kx_1}_{\text{forza della molla a sinistra}} + k_0(x_2 - x_1) \\ m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 + k_0(x_1 - x_2) \end{cases}$$

$(x_2 - x_1) \longrightarrow$ se le due masse si spostano di una stessa x, la molla k_0 rimane inalterata, quindi non applica nessuna forza

Le due equazioni si possono facilmente "disaccoppiare" introducendo due variabili:

$\begin{cases} x_2 - x_1 = p \longrightarrow p: \text{distanza tra le masse} \\ x_2 + x_1 = q \longrightarrow \frac{q}{2}: \text{punto medio tra le due masse} \end{cases}$

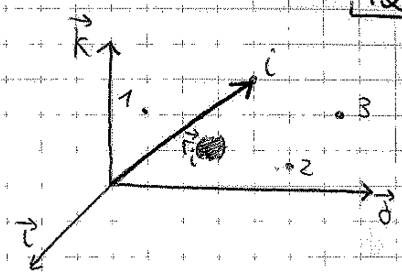
Sommando si ha: $m\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2} = -kx_1 + k_0(x_2-x_1) - kx_2 + k_0(x_1-x_2) = -k(x_1+x_2) + k_0(x_2-x_1+x_1-x_2) = -k(x_1+x_2)$

Sottraendo: $m\frac{d^2(x_2-x_1)}{dt^2} = -kx_2 + k_0(x_1-x_2) + kx_1 - k_0(x_2-x_1) = -k(x_2-x_1) - k_0(-x_1+x_2+x_2-x_1) = -k(x_2-x_1) - 2k_0(x_2-x_1)$

12.04.12

SISTEMA DI PIÙ PARTICELLE

Sistema di N particelle $(i=1,\dots,N)$



m_i
$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$
$\vec{F}_i = \vec{F}_i(t)$

$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$ dovrei scrivere questa equazione per ogni particella

ma già solo con 3 particelle il sistema è irrisolubile, perchè il SISTEMA è CAOTICO!

Pur di rinunciare al "dettaglio" (traiettoria di ogni particella) possiamo studiare grandezze "collettive" che ci permettono di descrivere il moto generale del sistema.

$M_{tot} = \sum_{i=1}^{n} m_i$

la forza della particella i-esima dipende dalla posizione di tutte le altre particelle e della particella stessa, da tutte le masse e dal tempo

$\vec{F}_i = \vec{F}_i(\{\vec{r}_j\}, \{m_e\}, t) \rightarrow$ sistema di eq. differenz. non lineari accoppiate (come per i sistemi a due gradi di libertà)

$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \qquad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$

$E_{k,i}$, $E_{p,i}$

GRANDEZZE "COLLETTIVE".

$\vec{F}_i = \underbrace{\vec{F}_i^{(i)}}_{\text{componente interna al sistema}} + \vec{F}_i^{(e)}$ → componente esterna (es. forza peso, cioè interazione con la Terra)

componente interna al sistema (es. interazione gravitaz. dovuta alle altre masse)

* $\vec{F}_i^{(i)}$ sono sempre a due a due e opposte, quindi $\sum \vec{F}_i^{(i)} = 0$

$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} (\underbrace{\vec{F}_i^{(i)}}_{=0\,*} + \vec{F}_i^{(e)}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(e)} = \vec{R}^{(e)}$: forza risultante del sistema

Quantità di moto totale: $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$

Momento angolare totale: $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

En. cinetica totale: $E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$

CENTRO DI MASSA $\boxed{\vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}}$ (centro di gravità)

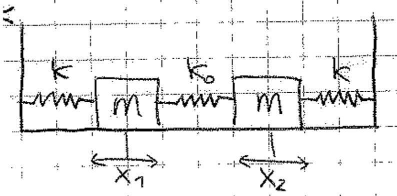
in generale non coincide con nessuno dei punti in cui si trova una massa

$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{P}}{M}$ $\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_G}$ 1ª EQUAZ. CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI DI PARTICELLE

$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{M} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \frac{\vec{R}^{(e)}}{M}$ $\boxed{\vec{R}^{(e)} = M\vec{a}_G}$ 2ª EQUAZ. CARDINALE

se $R^{(e)} = 0 \rightarrow a_G = 0 \Rightarrow$ il centro di massa si muove di moto uniforme

13.04.12



ENERGIA TOTALE di un sistema a due gradi di libertà

$E_k = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$ v_1, v_2 non costanti perchè x segue una legge sinusoidale

$E_p = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k_0 (x_2 - x_1)^2$

$= \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k_0 (x_1^2 + x_2^2 - 2 x_1 x_2) = \frac{1}{2}(k+k_0) x_1^2 + \frac{1}{2}(k+k_0) x_2^2 - k_0 x_1 x_2$

$k_0 x_1 x_2$: trasferimento di energia tra le due masse ($=0$ se $x_1 \vee x_2 = 0$)

SISTEMA DI N PARTICELLE: modello di gas perfetto

II TEOR. di KÖNIG:

$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$ $\vec{v}_i = \vec{v}_{ig} + \vec{v}_G$

$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_{ig} + \vec{v}_G)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_{ig} \cdot \vec{v}_{ig} + \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + 2 \vec{v}_{ig} \cdot \vec{v}_G) =$

$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{ig}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_G^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{ig}}_{\vec{P}_G = 0} \cdot \vec{v}_G$

[redacted]

$\boxed{E_k = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{ig}^2}_{} + \overbrace{\frac{1}{2} M v_G^2}^{}}$ $\boxed{E_k = E_{k,g} + E_{k,G}}$

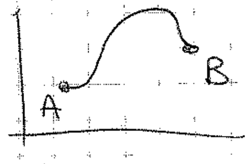
en. cinetica che si ottiene se si concentrano tutte le masse in G (energia "spendibile")

→ en. cinetica non utilizzabile ~~spendibile~~ (non trasferibile a un altro sistema)!

→ en. contenuta nel sistema di particelle, non dipende dal sistema fisso (ENERGIA INTERNA)

LAVORO DI UN SISTEMA DI PARTICELLE

$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$



Considero la particella j-esima:

$W_j = \int_{A_j}^{B_j} \vec{F}_j \cdot d\vec{s}_j = \int_{A_j}^{B_j} [\vec{F}_j^{(i)} + \vec{F}_j^{(e)}] \cdot d\vec{s}_j = \int_{A_j}^{B_j} \vec{F}_j^{(i)} \cdot d\vec{s}_j + \int_{A_j}^{B_j} \vec{F}_j^{(e)} \cdot d\vec{s}_j = W_j^{(i)} + W_j^{(e)}$

Teorema di conservazione dell'E_k: $W_j = \Delta E_{k,j}$

Lavoro totale sul sistema: $W = \sum_{j=1}^{N} W_j = W^{(i)} + W^{(e)}$

$W^{(i)} \neq 0$ anche se $\sum^{N} \vec{F}_i = 0$ perchè le particelle si spostano in modo diverso (hanno $d\vec{s}$ diversi)

$$* \quad W = W^{(i)} + W^{(e)} = \Delta E_k$$

$$E_k = E_{k,g} + E_{k,G}$$

$$\Delta E_{k,G} = 0 \Rightarrow W = \Delta E_k = \Delta E_{k,g}$$

En. potenziale dovuta alle forze conservative

$$E_p^{(i)} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} E_{p;i,j} = \underbrace{E_{p;1,2}}_{} + E_{p;1,3} + \ldots + E_{p;1,N} + \underbrace{E_{p;2,1}}_{} + E_{p;2,3}$$

termini ripetuti

n° tot. termini sommatoria $= \frac{1}{2} N(N-1)$

$E_{p;i,j} = E_{p;i,j}(r_{ij}) \qquad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$

↳ non dipende dal sistema fisso

$$W = \Delta E = \underset{\downarrow \; -\Delta E_p^{(i)}}{W^{(i)}} + W^{(e)} = -\Delta E_p^{(i)} + W^{(e)} \qquad W^{(e)} = \underset{\downarrow \; = \Delta E_{k,g}}{W} + \Delta E_p^{(i)}$$

$$W^{(e)} = \Delta E_{k,g} + \Delta E_p^{(i)} = \Delta U^{(i)} \qquad \boxed{U^{(i)} = E_{k,g} + E_p^{(i)}} \quad \text{ENERGIA INTERNA}$$

$\gtrless 0$; $E_{k,g}$: sempre > 0 ; $E_p^{(i)}$: $\gtrless 0$

<u>19.04.12</u>

I sistemi <u>stabili</u> hanno $U^{(i)} < 0$ (es. atomo) !

Il segno di $U^{(i)}$ è un indicatore della stabilità del sistema.

"PROBLEMA DEGLI N CORPI" per lo studio della stabilità del sistema solare

$i = 1, \ldots, N \quad \vec{r}_i, m_i, \vec{F}_i \qquad$ supponiamo $\vec{R}^{(e)} = 0$ (sistema isolato)

Voglio scrivere l'eq. di Newton degli N corpi (considero la forza gravitazionale):

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1(\vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots, \vec{r}_j, \ldots, \vec{r}_N)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2(\vec{r}_1, \vec{r}_3, \ldots, \vec{r}_j, \ldots, \vec{r}_N)$$

$$\ldots$$

$$m_N \frac{d^2 \vec{r}_N}{dt^2} = \vec{F}_N(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_j, \ldots, \vec{r}_{N-1})$$

Mi servono le condizioni iniziali: $\underbrace{\vec{r}_1(0), \vec{r}_2(0), \ldots, \vec{r}_N(0)}_{N}, \underbrace{\vec{v}_1(0), \ldots, \vec{v}_N(0)}_{N}$

in tot. $2N$ condizioni, cioè $3 \cdot 2N$ numeri
(ogni vettore 3 numeri)

STUDIO DEL SISTEMA SOLARE

$\gamma = \frac{M_P}{M_\odot} \ll 1$ es. Saturno $\gamma \simeq 10^{-3}$ (pianeta più grande)

Mercurio $\gamma \simeq 10^{-7}$ (" " piccolo)

Terra $\gamma \simeq 10^{-6}$

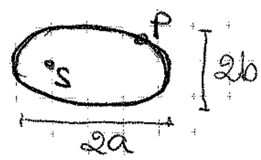
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad m_2 \gg m_1$$

$$\mu = \frac{\frac{m_1 m_2}{m_2}}{\frac{\cancel{m_1}}{\cancel{m_2}} + \frac{m_2}{m_2}} \cong m_1$$ → la massa ridotta è ≃ alla massa più piccola

$$\vec{r}_G = \frac{\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_2}\vec{r}_2}{\frac{\cancel{m_1}}{\cancel{m_2}} + \frac{m_2}{m_2}} \cong \cancel{\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1} + \vec{r}_2 \cong \vec{r}_2$$ → G sta nella massa maggiore

LEGGI DI KEPLERO

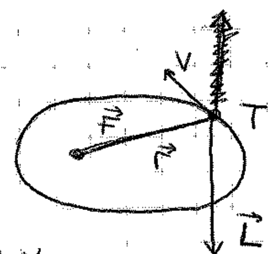
1 - orbite ellittiche (≃circonferenze); Sole in uno dei fuochi
2 - velocità areale costante
3 - $\frac{T^2}{a^3} = cost$



① LEGGE

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ (perchè $\vec{r} \parallel \vec{F}$)

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0 \longrightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = cost$

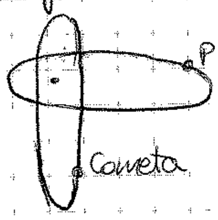


$\vec{L} \perp$ al piano individuato da $\vec{r}$ e $\vec{v}$; dato che $\vec{L} = cost$, allora $\vec{r}$ e $\vec{v}$ stanno sempre sullo stesso piano → <u>orbita piana</u>

$\gamma = \frac{b}{a}$ quando $\gamma = 1$ → circonferenza es. Plutone $\gamma = 0{,}968$

Venere $\gamma = 0{,}99988$

Terra $\gamma = 0{,}9986$

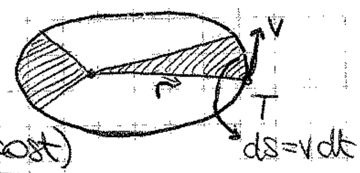


← Cometa di Halley $\gamma = 0{,}257$

② LEGGE

A = area

$\frac{dA}{dt} = cost$



$dA = \frac{1}{2} R\,ds = \frac{1}{2} R v\,dt \qquad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} R v = \frac{1}{2} R \frac{L}{M_T R} = \frac{1}{2} \frac{L}{M_T}$ (cost)

$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad L = M_T R v \qquad v = \frac{L}{M_T R}$

URTO TOTALMENTE ELASTICO

Dati: m_1, v_{1i} Incognite: v_{1f}
m_2, v_{2i} v_{2f}

CONSERVAZ. ENERGIA
CONSERV. Q. di MOTO

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \\ m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \end{cases}$$

$$v_{1f} = \frac{2m_2v_{2i} + (m_1 - m_2)v_{1i}}{m_1+m_2} \qquad v_{2f} = \frac{2m_1v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{m_1+m_2}$$

Verifica: $m_1 = m$ $v_{1i} = v$ $v_{1f} = ?$
$m_2 = \infty$ (muro) $v_{2i} = 0$ $v_{2f} = 0$

$$v_{1f} = \frac{\cancel{2m_2v_{2i}} + (m_1 - m_2)v_{1i}}{m_1+m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}v = \frac{\cancel{\frac{m_1}{m_2}} - \frac{m_2}{m_2}}{\cancel{\frac{m_1}{m_2}} + \frac{m_2}{m_2}}v = -v \qquad v_{f} = -v$$

URTO PARZIALMENTE ELASTICO

Non si conserva l'E_k: $\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 + K$

↳ energia dissipata nell'urto

Problema risolubile solo se si conosce K.

URTO TOTALMENTE ANELASTICO

Tutta l'E_k viene dissipata. $m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = (m_1+m_2)v_f$

$$v_f = \frac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i}}{m_1+m_2}$$

le due particelle fanno un corpo unico

Verifica: urto contro un muro $v_f = 0$

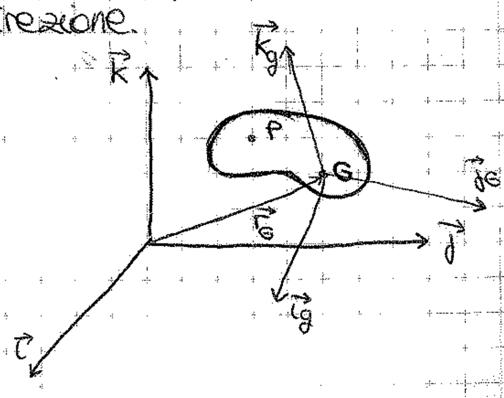
20.04.12

MECCANICA DEL CORPO RIGIDO

$\vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t) = \vec{r}_{ij}$ (costante rispetto a un sistema solidale al corpo)

Esprime una proprietà fisica dei metalli: gli atomi sono disposti entro un reticolo

Su $\vec{r}_{ij}$ resta il segno di vettore, perchè i cristalli sono ANISOTROPI, cioè le loro caratteristiche fisiche posso variare a seconda della direzione.



Come determino la posizione del corpo?

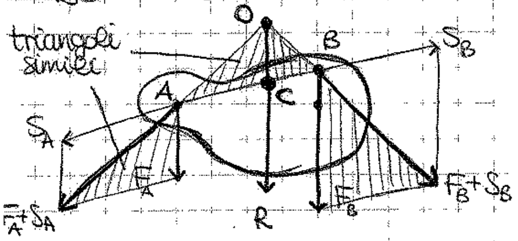
$\vec{r}_G \rightarrow$ 3 numeri

ma il corpo può ruotare intorno a G ...

Fisso in G un sistema di riferimento solidale con il corpo. Definisco la posizione di P rispetto a G, così la posizione del corpo è definita.
$\vec{r}_G \rightarrow$ 3 numeri in totale: 6 numeri

23.04.12

CASO DELLE FORZE PARALLELE



$|\vec{R}| = |\vec{F}_A| + |\vec{F}_B|$

Per la prima condizione di equilibrio $(\vec{R} = 0)$, devo applicare una forza $-\vec{R}$ (stessa direzione e modulo di $\vec{R}$, verso opposto).
Dove devo applicare $-\vec{R}$ perchè il corpo non ruoti? (in modo da rispettare anche $\vec{M} = 0$)

Cerco il CENTRO DELLE FORZE PARALLELE (C)

$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \underbrace{\cancel{\vec{S}_A} + \cancel{\vec{S}_B}}_{\text{perchè } \vec{S}_A = -\vec{S}_B} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

Se applichiamo il vettore $-\vec{R}$ nel punto C, entrambe le eq. dell'equilibrio sono rispettate

Triangoli simili hanno lati proporzionali $\rightarrow \dfrac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \dfrac{|\vec{F}_A|}{|\vec{S}_A|} \qquad \dfrac{\overline{OC}}{\overline{CB}} = \dfrac{|\vec{F}_B|}{|\vec{S}_B|}$

Faccio il rapporto membro a membro $\dfrac{\frac{\cancel{\overline{OC}}}{\overline{AC}}}{\frac{\cancel{\overline{OC}}}{\overline{CB}}} = \dfrac{\frac{|\vec{F}_A|}{\cancel{|\vec{S}_A|}}}{\frac{|\vec{F}_B|}{\cancel{|\vec{S}_B|}}}$ $\boxed{\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{|\vec{F}_B|}{|\vec{F}_A|}}$ così ho la posizione univoca del punto C

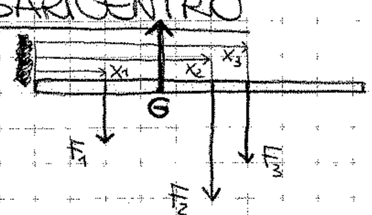
Se applico $-\vec{R}$ in C, ottengo $\vec{F}_A + \vec{F}_B - \vec{R} = 0$

Per calcolare il momento risultante, mi conviene scegliere come polo il punto A o B.
Scelgo il polo A.

$$\underbrace{-|\vec{R}| \cdot \overline{AC}}_{\vec{M}_R} + \underbrace{|\vec{F}_B| (\overline{AC} + \overline{CB})}_{\vec{M}_{F_B}} = 0 \quad \leftarrow \text{imponiamo} = 0$$

Facendo i conti si ritrova $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{|\vec{F}_B|}{|\vec{F}_A|} \Rightarrow$ se applichiamo $-\vec{R}$ in C, anche la 2ª eq. dell'equilibrio è rispettata

BARICENTRO



$$\vec{X}_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} F_i}$$

caso $F_i = m_i g$ (sistema con masse discrete, non corpo rigido unico)

$$X_G = \frac{\sum m_i g x_i}{\sum m_i g} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$ $\rightarrow$ BARICENTRO: punto nel quale è applicata la risultante della forza di gravità

Passando agli integrali:

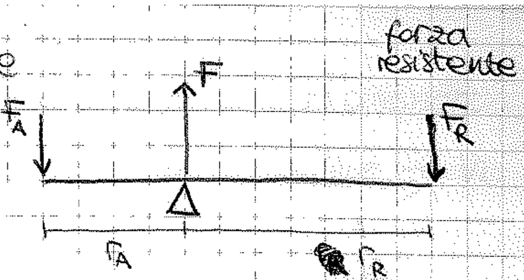
$$\vec{r}_G = \frac{\int dm \vec{r}}{\int dm}$$

03.05.12

LE LEVE

$F_A + F_R - F = 0$

(1° genere)



Per l'equazione dei momenti, scegliamo come polo il fulcro:

$\overline{M}_A = \overline{r}_A \times \overline{F}_A$, $\overline{M}_R = \overline{r}_R \times \overline{F}_R$ (rispetto al fulcro i due momenti sono opposti)

$\overline{M}_A + \overline{M}_R = 0$ $\quad |\overline{r}_A| \cdot |\overline{F}_A| = |\overline{r}_R| \cdot |\overline{F}_R|$

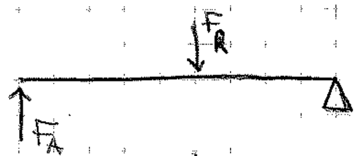
$|\overline{F}_A| = \dfrac{|\overline{r}_R|}{|\overline{r}_A|} |\overline{F}_R|$

se $|\overline{r}_A| > |\overline{r}_R| \Rightarrow |\overline{F}_A| < |\overline{F}_R|$ la leva è un "moltiplicatore di forza"

Con un opportuno proporzionamento tra i bracci, si riesce a ottenere una grande forza applicandone una piccola.

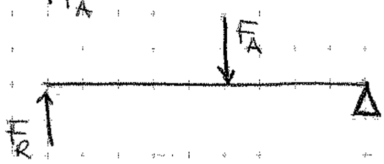
- $|\overline{r}_A| = |\overline{r}_R| \rightarrow$ leva neutra
- $|\overline{r}_A| > |\overline{r}_R| \rightarrow$ leva vantaggiosa
- $|\overline{r}_A| < |\overline{r}_R| \rightarrow$ leva svantaggiosa

(2° genere)

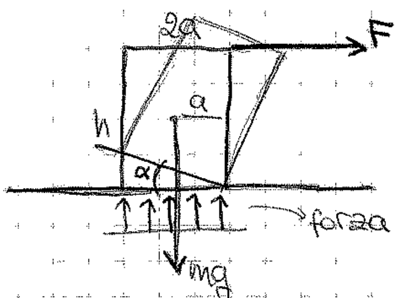


Sempre vantaggiosa!

(3° genere)



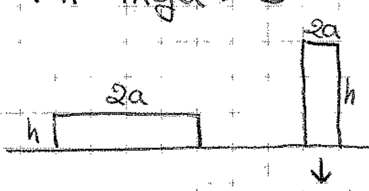
Sempre svantaggiosa!



Se applichiamo una F esterna // al piano, il corpo tende a ~~ruotare~~ sollevarsi

→ forza distributiva: la risultante è mg ↑

$\underbrace{Fh}_{\text{momento di } F} - \underbrace{mga}_{\text{momento di } P} > 0 \qquad F > mg\dfrac{a}{h} \rightarrow$ il corpo si solleva



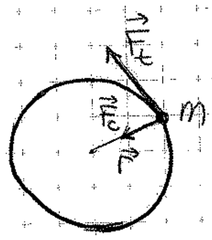
più facile da rovesciare

Quando la massa ruota, non vale più l'equazione dei momenti scritta sopra, perché cambiano i bracci e il baricentro

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Per la dinamica di traslazione, considero tutta la massa in G
la dinamica di rotazione dipende dalla forma del corpo

MOMENTO D'INERZIA (tensore)



$\vec{F}_t = m\vec{a}_t$

$\vec{F}_c = m \cdot \vec{a}_c = m\omega^2 \vec{r}$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_t + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_c}_{=0 \text{ perché } r /\!/ F_c} = \vec{r} \times m\vec{a}_t$

$|\vec{M}| = m\,|\vec{a}_t| \cdot |\vec{r}| = mr^2\alpha = I\alpha$ → caratteristica definita per ogni corpo: MOMENTO D'INERZIA (I) caratteristica della geometria del moto

$|\vec{a}_t| = r\alpha$ → acc. angolare

$\boxed{M = I\alpha}$ → formula utilizzabile per un corpo puntiforme

$I = [kg \cdot m^2]$

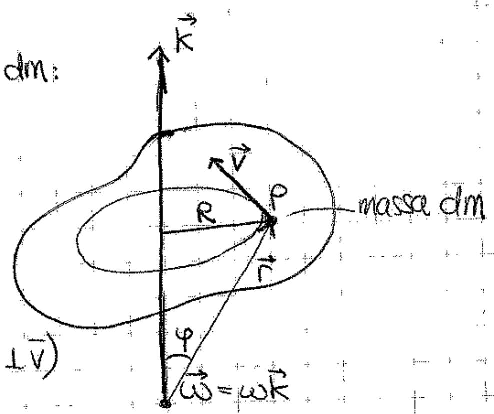
$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$ $\quad \boxed{E_k = \frac{1}{2}I\omega^2}$

Rettilineo	$F = ma$	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$
Circolare	$M = I\alpha$	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$

I gioca nel moto circolare lo stesso ruolo che gioca la massa nel moto di traslazione.

MOTO ROTATORIO

Non considero un punto, ma una massa dm: $dI = dm \cdot R^2$



$\vec{F} = M\vec{a}_G$ (moto traslatorio)

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $\quad \vec{\omega}$ è la stessa per tutte le particelle!

$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \text{sen}\,\varphi = |\vec{\omega}| \cdot R$

Momento della quantità di moto: $d\vec{L} = \vec{r} \times dm \cdot \vec{v}$ $\quad (\vec{L} \perp \vec{r}, \vec{L} \perp \vec{v})$

Componente lungo l'asse k: $dL_z = |d\vec{L}|\,\text{sen}\,\varphi$

$|d\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot dm \rightarrow dL_z = |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot dm \cdot \text{sen}\,\varphi = \underbrace{R}_{r\,\text{sen}\varphi} \cdot \underbrace{\omega R}_{v} \cdot dm = \omega\, dm\, R^2 = \underbrace{dm \cdot R^2}_{\text{momento d'inerzia}} \omega$

$L_z = \int dL_z = \int dm R^2 \omega = \omega \underbrace{\int dm \cdot R^2}_{I_z}$

I_z: momento d'inerzia del corpo P rispetto all'asse z

$M_z^{(e)} = \frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$ $\quad \boxed{\alpha = \frac{M_z^{(e)}}{I_z}}$

Dato che ω e r_G sono costanti,

- $\int \frac{dm}{\omega^2}(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_G) = I_G = M\cdot R_G^2$: momento d'inerzia che si ricava concentrando tutta la massa nel baricentro

- $2\int \frac{dm}{\omega^2}(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_g) = \frac{2}{\omega^2}(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)\cdot(\vec{\omega}\times\int\vec{r}_g\cdot dm)$

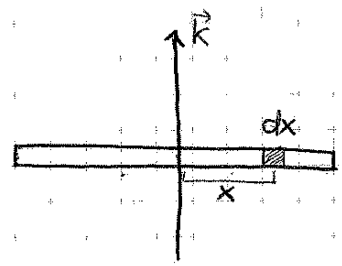
Utilizzando l'espressione $\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r}\,dm}{\int dm}$, si ricava:

$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r}\,dm}{\int dm} = \frac{\int(\vec{r}_G+\vec{r}_g)\,dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r}_G\,dm}{\int dm} + \frac{\int \vec{r}_g\,dm}{\int dm} = \frac{\vec{r}_G\cancel{\int dm}}{\cancel{\int dm}} + \frac{\int \vec{r}_g\,dm}{\int dm} \Rightarrow \frac{\int \vec{r}_g\,dm}{\int dm} = 0$$

Quindi $\frac{2}{\omega^2}(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)\cdot(\vec{\omega}\times\underbrace{\int\vec{r}_g\cdot dm}_{=0}) = 0$

- 3° termine: momento d'inerzia del corpo rispetto a un sistema che passa per il baricentro

$$\int\frac{dm}{\omega^2}(\vec{\omega}\times\vec{r}_g)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_g) = I_g$$



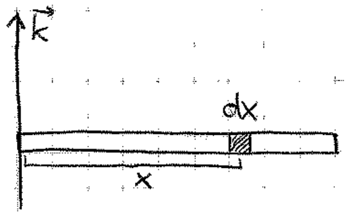
ES. Sbarra: massa M, lunghezza L. $I=?$

$I = \int dm\cdot r^2$

Massa di dx: $dm = \frac{M}{L}dx$

densità lineare di massa (massa per lunghezza)

$$I = \int dm\cdot x^2 = \int_{-L/2}^{L/2}\frac{M}{L}dx\cdot x^2 = \dots = \frac{1}{12}ML^2$$



ES.

$$I = \int_0^L \frac{M}{L}dx\cdot x^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

ES. Verificare il teorema di nei casi precedenti.

$$\int\frac{dm}{\omega^2}[\vec{\omega}\times(\vec{r}-\vec{r}_G)]\cdot[\vec{\omega}\times(\vec{r}-\vec{r}_G)] = \frac{1}{\omega^2}\int dm[\vec{\omega}\times\vec{r}-\vec{\omega}\times\vec{r}_G]\cdot[\vec{\omega}\times\vec{r}-\vec{\omega}\times\vec{r}_G] =$$

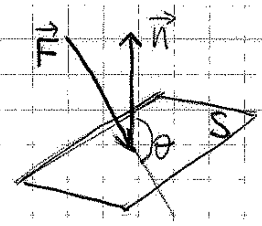
$$= \frac{1}{\omega^2}\int dm[(\vec{\omega}\times\vec{r}\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_G) + (\vec{\omega}\times\vec{r}_G)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)] =$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\int dm(\omega^2R^2) - \frac{2}{\omega^2}\int(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)dm + I_G = MR^2 - 2MR\cdot R_G + MR_G^2 = M(R-R_G)^2 = I_g$$

$(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_G) = (\omega\cdot r\cdot \operatorname{sen}\varphi)(\omega r_G \operatorname{sen}\varphi) = \omega R\cdot\omega R_G$ $\quad \frac{2}{\omega^2}\int dm(\omega^2 R R_G)$

$\int(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)\cdot(\vec{\omega}\times\int dm\,\vec{r}) = \int(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_G\int dm) = I_G$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 90

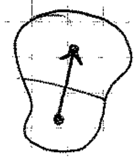


$p = \frac{1}{S}\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{|\vec{F}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\theta}{S}$ $\quad p = [N \cdot m^{-2}] = [Pa]$

$1\,bar = 10^5\,Pa$

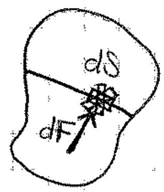
pressione atmosferica $= 1{,}01\,bar$

Siccome in un fluido non sono permesse forze tangenziali, le forze che si scambiano due parti di un fluido sono sempre normali ($\perp$).



La pressione può essere diversa punto a punto:

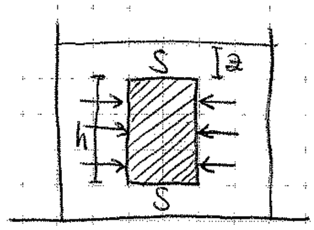
$p(\vec{r}) = \frac{dF}{dS}$



La pressione è definita in un punto, non dipende dalla direzione di dS.

STATICA

Forze < di superficie (applicate sulla superficie del cilindro) ① / di volume (applicate nel baricentro) ②



① La risultante delle forze applicate sulle due pareti ($\perp$ alle pareti) è nulla.

Forze sulle basi: $p(z)\cdot S$
$p(z+h)\cdot S$

② Forza peso: $\rho V g = \rho S h g$

$p(z)\cancel{S} + \rho \cancel{S} h g - p(z+h)\cancel{S} = 0 \qquad p(z+h) = p(z) + \rho g h$

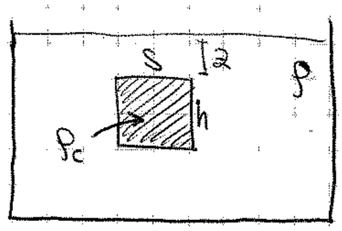
Supponiamo $z=0$: resta sempre la pressione atmosferica p_0!

$\boxed{p(h) = p_0 + \rho h g} \rightarrow$ EQUAZIONE DI STEVINO

PRINCIPIO DI PASCAL: se aumento di Δp la pressione di superficie, aumento di Δp anche la pressione sul fondo.

$p(h) = p_0 + \rho h g \quad \rightarrow \quad (p_0 + \underline{\Delta p}) + \rho h g = p(h) + \underline{\Delta p}$

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE



Condizioni di equilibrio di un corpo in un liquido:

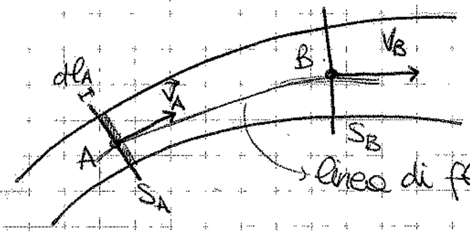
$p(z)\cdot S = p_0 S + \rho z g S \qquad p(z+h)S = p_0 S + \rho(z+h) g S$

$p_0 S + z\rho g S - p_0 S - (z+h)\rho g S = -h\rho g S = -\rho g V$

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto uguale al peso del volume di fluido spostato.

DINAMICA DEI FLUIDI

$\rho = \rho_0$ $\quad \mu = 0$ (viscosità nulla: no forze tangenziali)

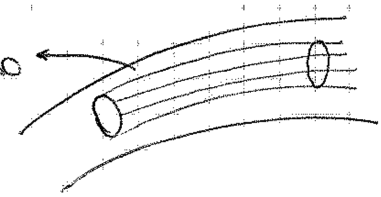


linea di flusso: luogo dei punti tangente alla velocità (conseguenza del moto laminare)

Supponiamo che v sia costante, ma v dipende dal punto ($\vec{v}_B \neq \vec{v}_A$)

~~Stazionario~~ Linee di flusso: linee tutte parallele

tubo di flusso



Le particelle non posso uscire dal tubo.

PORTATA $\quad Q = \frac{dV}{dt} \quad \left[\frac{m^3}{s}\right]$

Nell'intervallo dt attraverso la sezione S_A passa la massa dm_A, attraverso S_B esce la massa dm_B.

Siccome ρ=cost, dev'essere $dm_A = dm_B$.

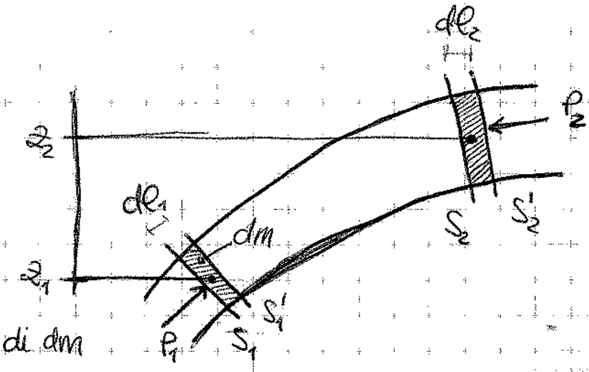
$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \rho dV_A = \rho dV_B \Rightarrow Q_A = Q_B$ In un condotto, la portata resta costante (TEOR. di CONSERVAZIONE DELLA PORTATA)

Portata attraverso S_A: $Q_A = \frac{dV_A}{dt} = \frac{S_A d\ell_A}{dt} = S_A v_A$

" " S_B: $Q_B = S_B v_B$

$Q_A = Q_B \Rightarrow \boxed{S \cdot v = cost}$

EQUAZIONE DI BERNOULLI



$S_1 v_1 = S_2 v_2$

$S_1 \frac{d\ell_1}{dt} = S_2 \frac{d\ell_2}{dt} \Rightarrow \boxed{S_1 d\ell_1 = S_2 d\ell_2}$

Applicazione della conservazione dell'energia di dm

Lavoro della forza di gravità:

$\omega_g = -\Delta E_p = dmg(z_1 - z_2)$

Lavoro delle forze date dalla pressione: $\omega_p = p_1 S_1 d\ell_1 - p_2 S_2 d\ell_2$ (lavoro delle forze meccaniche esterne)

$dm = \rho S_1 d\ell_1 = \rho S_2 d\ell_2$

$\omega_p = p_1 S_1 d\ell_1 - p_2 S_2 d\ell_2 = p_1 \frac{dm}{\rho} - p_2 \frac{dm}{\rho} = \frac{dm}{\rho}(p_1 - p_2)$

MOTO DI UN CORPO IN UN FLUIDO

Il corpo è sottoposto a una FORZA VISCOSA:

$F = -bv^n$ < $n=1$ per basse velocità; $n=2$ per alte velocità

b: dipende dalla forma del corpo

basse velocità: (MOTO LAMINARE)

linee di flusso

alte velocità: (MOTO TURBOLENTO)

i vortici aumentano la resistenza al moto

NUMERO DI REYNOLDS

$$R_e = \frac{\rho L v}{\mu}$$

μ: viscosità
L: dimensione del corpo

$R_e \leq 2000$: fluido laminare , $R_e \geq 4000$: fluido turbolento   2000-4000: transizione di fase

ARIA: $\mu \ll 1 \Rightarrow$ anche per v piccole il moto è turbolento

EQUAZIONE DEL MOTO

n=1 eq. già risolta

n=2 $m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v^2 \quad \dots \quad v = \frac{mv_0}{bv_0 t + m}$$

Verifica: $t=0 \rightarrow v=v_0$
$t=\infty \rightarrow v=0$

$$x = x_0 + \frac{m}{b}\ln\left(\frac{b}{m}v_0 t + 1\right)$$

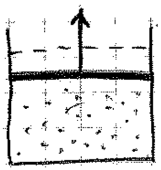
LAVORO DELLE FORZE VISCOSE

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2\left[e^{-2bt} - 1\right]$$

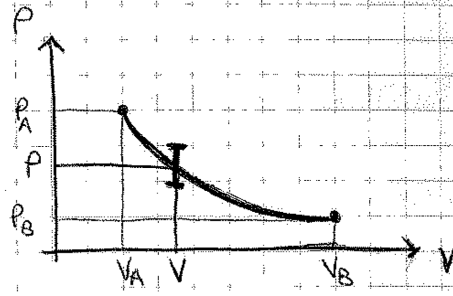
SCALE TERMOMETRICHE

- Celsius (gradi centigradi) $0°C$: acqua solida-liquida
  $100°C$: acqua liquida-vapore

TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE



P, V



Le particelle hanno bisogno di un tempo t per adattarsi al nuovo volume, quindi ci sarà un intervallo di tempo nel quale P non è ben definita.
Devo alzare il pistone lentamente perché la trasformazione deve avvenire per stati di equilibrio successivi.
Solo una transizione di questo tipo è REVERSIBILE!

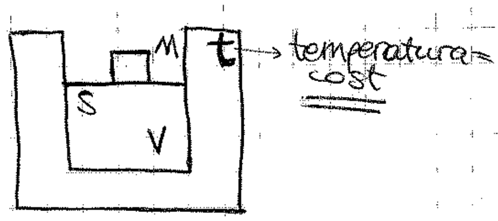
14.05.12

GAS PERFETTO

- particelle sferiche molto distanti (no interazioni)
- urti elastici particella-particella e particella-contenitore

~~EQUAZIONE DI STATO~~

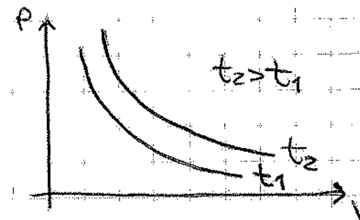
ESPERIMENTO DI BOYLE



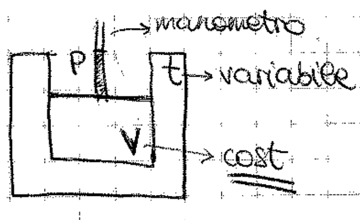
Termostato.

$p = \frac{Mg}{S}$ pressione facilmente variabile cambiando M.

Risultato di Boyle: $PV = H(t)$ PV costante, dipende da t



ESPERIMENTO DI GAY-LUSSAC

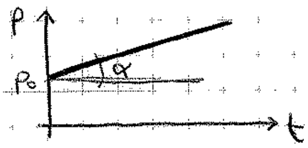


① $p = p_0(1 + \alpha t)$ relazione p-t lineare

pendenza

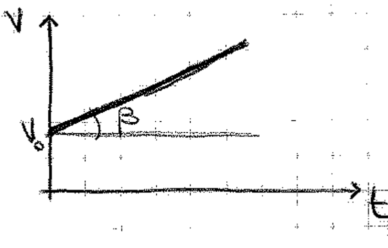
$\{ t \to °C$

$\alpha = \frac{1}{273{,}15}\ °C^{-1}$



② (Figura di Boyle) $M = \text{cost} \Rightarrow p = \text{cost}$ t variabile

$V = V_0(1 + \beta t)$ $\beta = \frac{1}{273{,}15}\ °C^{-1} \cong \alpha$



Tanto più il gas è rarefatto (p bassa), tanto più $\alpha \equiv \beta$.

Limite assoluto delle temperature negative: se $t = -273{,}15 \Rightarrow V = 0$ (V_{min})

17.05.12

$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$ $\quad (\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle)$

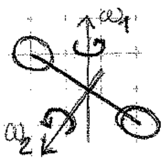
$m_1 = m_2$ dopo l'urto: $v_{1f} = v_{2i}$

[illegible]

EQUIPARTIZIONE DELL'ENERGIA

$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ → indica i gradi di libertà (nel caso di una particella: 3 gdl)

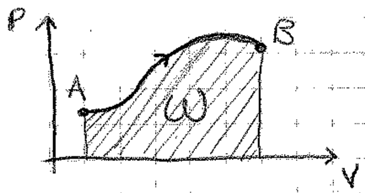
MOLECOLA BIATOMICA



5 gradi di libertà: 3 di traslazione + 2 di rotazione

$\langle E_k \rangle = \frac{5}{2} k_B T$ $\quad \frac{1}{2} k_B T$: energia cinetica per grado di libertà

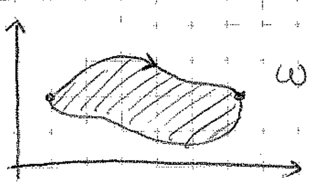
LAVORO



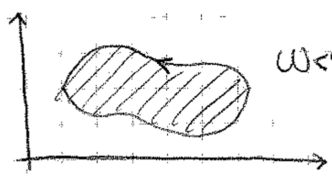
$dW = \int_A^B P\,dV$ $\quad$ P non è costante, è costante solo per dW

$W > 0$: il sistema ha compiuto lavoro

Trasformazione ciclica



$\omega > 0$



$\omega < 0$

Il lavoro fatto non è una ~~variabile~~ funzione di stato! Dipende da come si passa tra due stati.

- TR. ISOTERMA

porto fuori T perché è costante

$$\omega = \int_A^B P\,dV = \int_A^B \frac{nRT}{V}\,dV = nRT \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B} \rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{V_B}{V_A} \Longrightarrow \omega = nRT \ln \frac{P_A}{P_B}$$

ENERGIA INTERNA

$U = N \langle E_k \rangle \qquad U = U(T)$ $\quad$ l'energia interna di un sistema dipende solo dal movimento delle particelle (vale solo per un gas ideale)

U è FUNZIONE DI STATO!

$U_B - U_A = \cancel{\omega^{(e)}} = -\omega$ ← due dimostrazioni di Joule

$C_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_{p=cost}$ $\quad C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_{V=cost}$

1) isocora: $\frac{T}{P} = cost$ $\quad$ 4) adiabatica $TV^{\frac{R}{c_V}} = cost$ / $PV^{\frac{c_p}{c_V}} = cost$

2) isobara: $\frac{T}{V} = cost$

3) isoterma: $PV = cost$

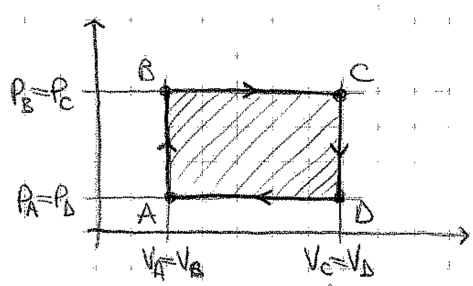
$\omega = 0$ $\quad dU + \cancel{\delta\omega} = \delta Q$ $\quad c_V = \frac{1}{n}\left(\frac{dU}{dT}\right)_{V=cost}$

Per una trasf. adiabatica (no scambio di calore): $dU + \delta\omega = dU + PdV = 0$

$dU = nc_V dT$ $\longrightarrow \frac{nc_V dT + PdV}{nc_V T} = 0$ $\quad \frac{dT}{T} + \frac{\frac{nRT}{V}dV}{nc_V T} = 0$ $\quad \frac{dT}{T} + \frac{R}{c_V}\frac{dV}{V} = 0$

$\int_A^B \frac{dT}{T} = -\int_A^B \frac{R}{c_V}\frac{dV}{V}$ $\quad \ln\frac{T_B}{T_A} = \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{R/c_V}$

RELAZIONE DI MAYER



Trasformazione ciclica: $dU = 0$

$\Delta U + \omega = Q \Rightarrow \omega = Q$

ω area del rettangolo: $\omega = (P_B - P_A)(V_D - V_A)$

$\omega = P_B V_D - P_B V_A - P_A V_D + P_A V_A$

$P_C V_C = nRT_C = P_B V_C$

$P_B V_B = nRT_B = P_B V_A$

$P_D V_D = nRT_D = P_A V_D$

$P_A V_A = nRT_A$

$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} = nc_V(T_B - T_A) + nc_p(T_C - T_B) + nc_V(T_D - T_C) + nc_p(T_A - T_D)$

... $\boxed{C_p = C_V + R}$

$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ $\Longrightarrow$ trasf. adiabatica: $\begin{cases} TV^{\gamma-1} = cost \\ PV^{\gamma} = cost \end{cases}$

$\gamma = 1,7$ gas monoatomico
$\gamma = 1,4$ biatomico
$\gamma = \frac{4}{3}$ poliatomico

TRASMISSIONE DEL CALORE
- conduzione } hanno bisogno di un mezzo materiale – fermo
- convezione } – trasporto di massa
- irraggiamento (nel vuoto)

- Irraggiamento: tutti i corpi che non sono allo zero assoluto emettono onde e.m., che viaggiano anche nel vuoto

$\underbrace{\text{Energia}}_{\text{emessa}} \propto T^4$ energia dovuta all'accelerazione/decelerazione di cariche elettriche

SECONDO PRINCIPIO

ES. TRASMISSIONE DEL CALORE

Stato A: 

$T_1 > T_2$

In natura: $A \to B$

Stato B: 

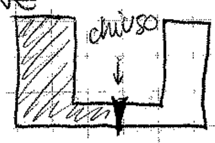
collegamento termico

$T_2 < T_0 < T_1$

~~$A \leftarrow B$~~

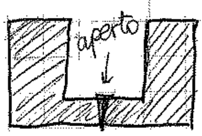
non si verifica mai in natura, ma non sarebbe proibito dal 1° principio, perchè anche in questo caso c'è conservazione di energia.
NON È IMPOSSIBILE, MA ALTAMENTE IMPROBABILE

ES. DIFFUSIONE

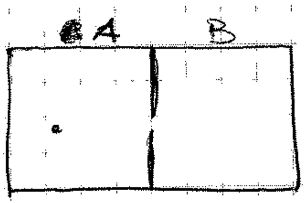
Stato A: 

In natura: $A \to B$

~~$A \leftarrow B$~~

Stato B: 

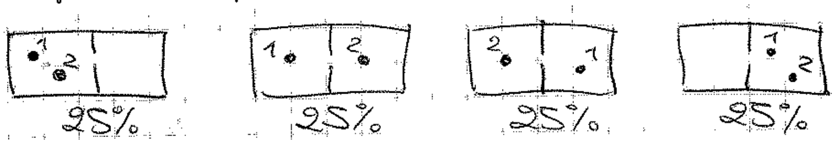
Da A a B si passa da un sistema ordinato a uno disordinato.
Esiste per i fenomeni naturali una direzione spontanea in cui si evolvono (freccia del tempo)



Particella di velocità $\vec{v}$. Se non ci fosse il foro → solo urti elastici.
Con il foro: urti in A → passa per il foro → urti in B ⇄ passa per il foro ...

Probabilità che la particella si trovi: in A: 50%, in B: 50%

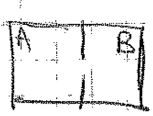
Aggiungendo una particella la situazione si complica: i possibili stati aumentano



24.05.12

DIFFUSIONE: è un fenomeno IRREVERSIBILE e casuale, governato cioè da leggi probabilistiche anche se alla base c'è la meccanica

N=2 particelle



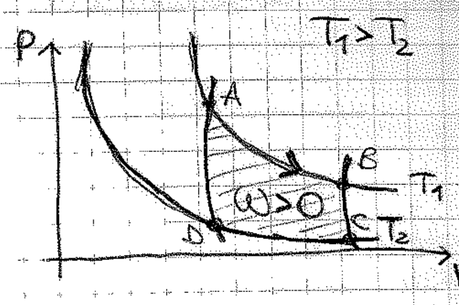
$2^N = 4$ configurazioni

1	2	
A	A	} 0,25
A	B	} 0,5
B	A	
B	B	} 0,25

analogia

perchè le particelle sono indistinguibili ⇓ probabilità doppia

CICLO DI CARNOT !



ciclo in senso orario

Espansione isoterma (AB) +
adiabatica (BC) +
compressione isoterma (CD) +
adiabatica (DA)

$\boxed{\eta = \frac{W}{Q_1}}$

- Il calore è scambiato solo durante le isoterme.
- $dU = 0$ perché la trasf. è ciclica

$A \to B$ $\quad W_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0 \qquad Q_{AB} = W_{AB} \Rightarrow Q_{AB} > 0$: assorbe calore

$B \to C$ $\quad Q_{BC} = 0 \qquad \Delta U_{BC} = nc_v(T_2 - T_1) < 0 \qquad W_{BC} = -\Delta U_{BC} > 0$

$C \to D$ $\quad \Delta U_{CD} = 0 \qquad W_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0 \qquad Q_{CD} = W_{CD} \Rightarrow Q_{CD} < 0$: cede calore

$D \to A$ $\quad Q_{DA} = 0 \qquad \Delta U_{DA} = nc_v(T_1 - T_2) > 0 \qquad W_{DA} = -\Delta U_{DA} < 0$

$Q = Q_{AB} + Q_{CD}$

Dato che la trasform. è ciclica, $W = Q$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CD}|}{Q_{AB}}$$

$Q_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_C}{V_D}$ (scambio V_C e V_D invece di mettere il segno - davanti)

$Q_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$

$$\eta = 1 - \frac{nRT_2 \ln \frac{V_C}{V_D}}{nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{\ln \frac{V_C}{V_D}}{\ln \frac{V_B}{V_A}}$$

Lungo una trasform. adiabatica, $T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1}$ e $T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1}$

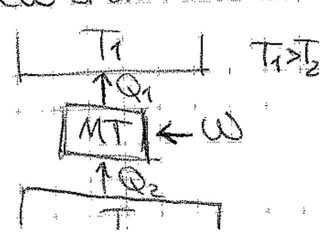
Quindi $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$ (dividendo membro a membro), perciò

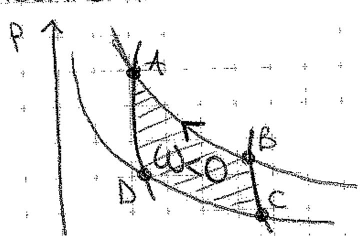
$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{\cancel{\ln \frac{V_C}{V_D}}}{\cancel{\ln \frac{V_B}{V_A}}}$ $\qquad \boxed{\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$ il rendimento non dipende dal fluido, ma solo dalle temperature delle sorgenti

→ massimo rendimento ottenibile da una macchina termica

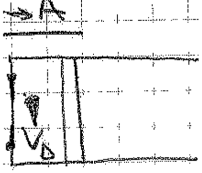
η aumenta all'aumentare di T_1 (a parità di T_2)

CICLO DI UNA MACCHINA FRIGORIFERA / POMPA DI CALORE:





→A



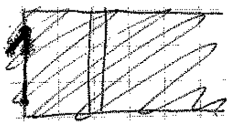
La candela fa scoccare una scintilla e incendia la miscela
⇒ grande aumento di pressione $P_D \to P_A$

fase di accensione e combustione

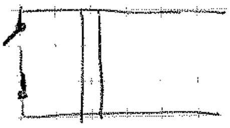
Viene ceduta al sistema per reazione chimica $Q_{DA} = nc_V(T_A - T_D) > 0$

→B fase di espansione: il motore fa lavoro $\omega > 0$

→C Nel cilindro è contenuto un gas ad alta pressione, caldo



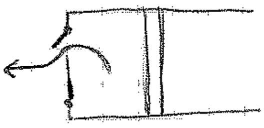
$Q_{BC} = nc_V(T_C - T_B) < 0$
calore ceduto all'ambiente



I gas combusti vengono espulsi.

→O

fase di espulsione



$$\eta = \frac{\omega}{Q_{DA}} = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{DA}} = 1 + \frac{nc_V(T_C - T_B)}{nc_V(T_A - T_D)} \qquad \boxed{\eta = 1 - \frac{T_B - T_C}{T_A - T_D}}$$

perché siccome $dU = 0 \Rightarrow \omega = Q_{DA} + Q_{BC}$

Dato che si tratta di trasf. adiabatiche:

$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$ $\quad T_D V_D^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$

$V_D = V_A$, $V_B = V_C$ ...

$$\boxed{\eta = 1 - \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}}$$

dipende dalla natura del sistema! ($\gamma = 1{,}4$ perché la miscela aria-benzina è composta da molecole biatomiche)

$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_{max}}{V_{min}} = r$: rapporto di compressione

Maggiore è r, maggiore è η. Ma un r troppo grande crea detonazione: il sistema si incendia senza bisogno della scintilla. Si aggiungono additivi per limitare la detonazione, es. piombo.

In condizioni ottime: $\eta = 0{,}6$
" " realistiche: $\eta = 0{,}2 \div 0{,}3$ (il 70% del calore crea riscaldamento dell'atmosfera)

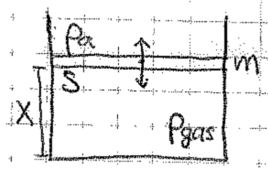
ENTROPIA

Vogliamo trovare una grandezza fisica, che sia FUNZIONE DI STATO, che indichi la "freccia del tempo" di una trasformazione (l'evoluzione naturale)

Clausius inventò la grandezza ENTROPIA.

ESAME: no problemi di urti tra masse, solo tra particelle!

ES. Nel recipiente di figura sono contenute n moli di un gas che può essere considerato perfetto. Il recipiente è a temperatura T, il pistone è mobile, ha massa m e superficie S. Quanto vale x se sopra il pistone c'è la pressione atmosferica p_a?



Devo imporre l'equilibrio del pistone.

$\downarrow mg + p_a S \qquad \uparrow p_{gas} S$

$$mg + p_a S - p_{gas} S = 0 \qquad p_{gas} = p_a + \frac{mg}{S}$$

$$p_{gas} \cdot \underbrace{x \cdot S}_{V} = nRT \qquad x = \frac{nRT}{p_{gas} S} = \boxed{\frac{nRT}{p_a S + mg}}$$

ES. In un recipiente cubico con lato L con pareti di metallo rigide è contenuta aria a p_a, temperatura ambiente T_A. Se la temperatura del recipiente viene portata a $T > T_A$, quanto vale la forza applicata ad una parete?

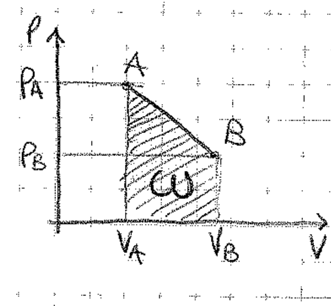
Trasformazione isocora $\Rightarrow \frac{p_a}{T_a} = \frac{p}{T} \qquad p = \frac{p_a}{T_a} T \qquad \boxed{F = \frac{p_a}{T_a} T L^2}$

ES. In una trasformazione termodinamica la pressione varia come αV^2 dove α è una costante. Quando il volume passa da V_0 a V_1, il lavoro fatto è ω_0. Quanto vale α?

$$\omega_0 = \int_{V_0}^{V_1} p\,dV = \int_{V_0}^{V_1} \alpha V^2 dV = \alpha \frac{V^3}{3}\Big|_{V_0}^{V_1} = \frac{\alpha}{3}(V_1^3 - V_0^3)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{3\omega_0}{V_1^3 - V_0^3}}$$

ES. Un gas che si può considerare perfetto passa dallo stato A a T_A allo stato B secondo la trasf. reversibile e lineare mostrata nel disegno. Se $p_A = 2p_B$ e $V_B = 2V_A$, calcolare la quantità di calore assorbita Q.



$$\omega = p_B(V_B - V_A) + \frac{1}{2}(p_A - p_B)(V_B - V_A) = \frac{3}{2} p_B V_A$$

$$\delta Q = dU + \delta\omega$$

$$p_A V_A = nRT_A, \quad p_B V_B = nRT_B = \frac{p_A}{\cancel{2}} \cancel{2} V_A \Rightarrow T_A = T_B \Rightarrow dU = 0 \Rightarrow \boxed{Q = \omega = \frac{3}{2} p_B V_A}$$

↳ ma NON è un'ISOTERMA perchè la curva dovrebbe essere un'iperbole

$$S = \int \frac{dU + \delta W}{T} + cost$$

Quanto vale l'entropia di un corpo solido di n moli?

$Q = n C_m \Delta T$ (C_m: capacità termica)

$\delta W = 0$ perchè quando si scalda un corpo, T aumenta e il corpo si dilata, ma l'aumento di volume è molto piccolo (supponiamo nullo)

$\downarrow$

$\delta Q = dU$

$$S = \int_0^T \frac{n C_m dT}{T} + cost = n C_m \ln T + cost$$

ES. Una sfera di plastica galleggia in acqua con il 50% del suo volume immerso. Questa stessa sfera galleggia in olio con il 40% del suo volume immerso. Quanto vale la densità dell'olio?

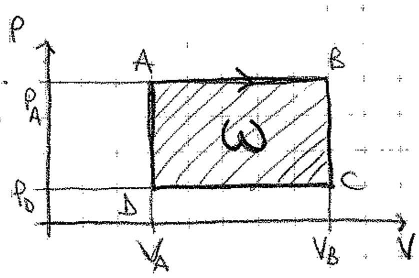
Forza che spinge la sfera verso il basso: $\rho_s \frac{4}{3}\pi R^3 g$

" " " " " " l'alto in acqua: $\rho_a \frac{4}{6}\pi R^3 g$ (spinta di Archimede)

Equilibrio: $\rho_s \frac{4}{3}\pi R^3 g - \rho_a \frac{4}{6}\pi R^3 g = 0$ $\quad \rho_s - \frac{1}{2}\rho_a = 0$ $\quad \rho_s = 0{,}5\,\rho_a$

In olio: $\rho_s \frac{4}{3}\pi R^3 g - 0{,}4\,\rho_o \frac{4}{3}\pi R^3 g = 0$ $\quad \rho_s - 0{,}4\,\rho_o = 0$ $\quad \rho_o = \frac{0{,}5}{0{,}4}\rho_a$

ES. Nel piano di Clapeyron, ciclo con 2 isobare + 2 isocore. Dati i volumi e le pressioni, calcolare il rendimento.



$P_A = 2P_D$ $\quad V_B = 2V_A$

$\eta = \frac{W}{Q_{ass}}$ $\quad W = (V_B - V_A)(P_A - P_D) = V_A P_D$

$Q_{AB} = nC_p(T_B - T_A)$ $\quad Q_{BC} = nC_v(T_C - T_B)$

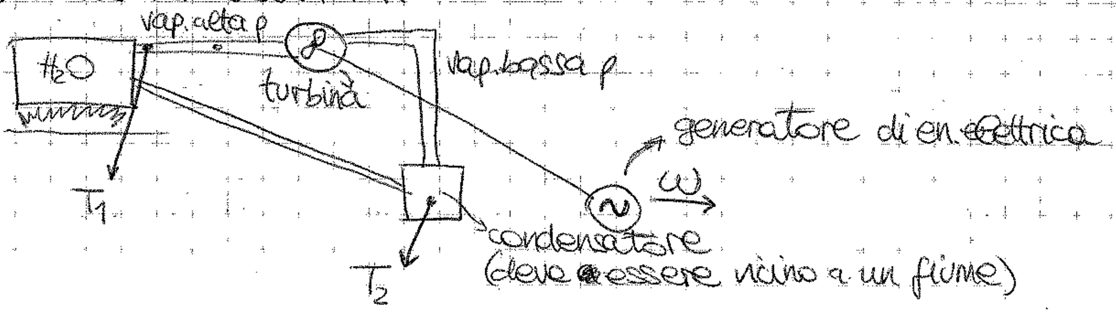
$P_B V_B = nRT_B$ $\quad T_B = \frac{P_B V_B}{nR}$ ...

Calcolo della temperatura

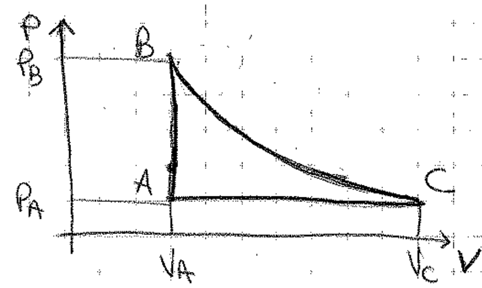
Nel ciclo di Carnot: $\frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{T_2}{T_1}$

La temperatura così misurata è detta "temperatura termodinamica di Kelvin", definita in modo assoluto.

CENTRALE TERMOELETTRICA



ES. Due moli di un gas monoatomico che si può considerare perfetto sono alla temperatura di 300K. Questo gas è riscaldato in modo isocoro fino a che raggiunge la temperatura di 600K. Viene quindi espanso in modo isotermo fino alla pressione* . Rappresentare in grafico il ciclo, calcolare ω effettuato, Q assorbito e η del ciclo.
*e al volume iniziale tramite un'isobara



$P_A V_A = 2RT_A = 600R$

$P_B V_A = 2RT_B = 1200R$

$$\omega = \int_B^C P\,dV = \int_B^C \frac{nRT_B}{V} dV = nRT_B \ln \frac{V_C}{V_B} = nRT_B \ln \frac{P_B}{P_C}$$

$$\omega_1 = nRT_B \ln \frac{\frac{1200R}{V_A}}{\frac{600R}{V_A}} = nRT_B \ln 2 = 600nR\ln 2$$

$$\omega_2 = (V_C - V_A)P_A = P_A V_C - P_A V_A = nR(T_C - T_A) = nR\,300$$

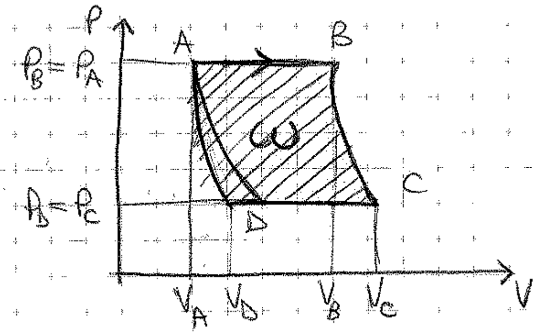
$$\omega = \omega_1 - \omega_2 = 300nR(2\ln 2 - 1) = 600R(2\ln 2 - 1)$$

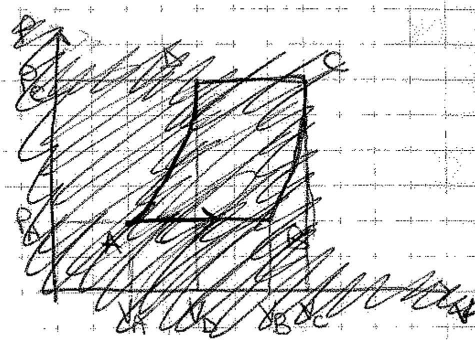
AB $\Delta U = nc_v \Delta T = nc_v 300 = 600 c_v = \Delta Q$

BC $\Delta U = 0 \quad \omega = nRT_B \ln 2 = 1200R\ln 2 = \Delta Q$

CA $\Delta U = nc_p \Delta T = nc_p(-300) = -600 c_p$

ES. Una mole di un gas monoatomico è alla pressione P_A ed è contenuta in un volume V_A. Si effettua una sua espansione isobara fino al volume V_B e quindi una espansione adiabatica fino al volume V_C. Con una successiva compressione isobara il volume viene portato a V_D e quindi con una compressione adiabatica il volume torna a V_A. Essendo noti P_A, V_A, P_C, V_C, calcolare il lavoro compiuto dal ciclo.





$$\omega = P_A(V_B - V_A) - P_C(V_B - V_A) + \underbrace{\omega_{BC}}_{f(T_B,T_C)} - \underbrace{\omega_{DA}}_{f(T_D,T_A)}$$

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR}$$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \qquad T_B P_B^{\gamma} = T_A P_A^{\gamma}$$

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \qquad T_A P_A^{\gamma} = T_D P_D^{\gamma}$$

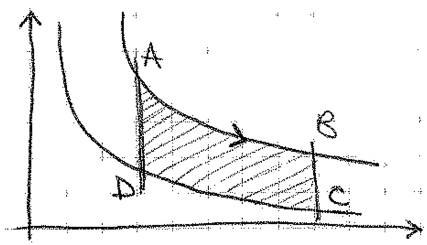
$$\omega = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} + nRT_C \ln\frac{V_A}{V_C} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} + nRT_C \ln\frac{V_A}{V_B} = nR(T_A - T_C)\ln\frac{V_B}{V_A}$$

11.06.12

ES. Si consideri una trasf. ciclica composta da due isoterme e due isocore

Dati: T_A, T_C, V_A, V_B $\quad T_A = T_B \quad V_A = V_D$ $\quad T_C = T_D \quad V_B = V_C$

Lavoro prodotto?



$T_A = T_B$, $T_C = T_D$ $\qquad V_A = V_D$, $V_B = V_C$

$\underline{A \to B}$ $\quad \omega_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} > 0 \quad \omega_{AB} = Q_{AB}$

$\underline{B \to C}$ $\quad \omega_{BC} = 0$ perchè isocora $\quad Q_{BC} = nc_V(T_C - T_A)$

$\underline{C \to D}$ $\quad \omega_{CD} = nRT_C \ln\frac{V_D}{V_C} < 0$ (perchè $V_D < V_C$) $\quad \omega_{CD} = Q_{CD}$

$\underline{D \to A}$ $\quad \omega_{DA} = 0 \qquad Q_{DA} = nc_V(T_A - T_D)$

$$\omega = \omega_{AB} + \omega_{CD} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} + nRT_C \ln\frac{V_D}{V_C} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} + nRT_C \ln\frac{V_A}{V_B} = \underline{nR(T_A - T_C)\ln\frac{V_B}{V_A}}$$

29.03.12

Es. Verificare se $(a\oplus b)(c+c\bar d)=a\bar b c+\bar a b c$

$$(a\oplus b)c(\underbrace{1+\bar d}_{=1})=(a\oplus b)\underbrace{c\cdot 1}_{=c}=(a\oplus b)c=(\bar a b+a\bar b)c=a\bar b c+\bar a b c$$

Es. Dato $f=\bar a\bar b\bar c+b\bar c+(a(b+\overline{b\bar c}))$ e $g=a+\bar c$. Dire se sono equivalenti.

LEGGI DI DE MORGAN
- $\overline{xy}=\bar x+\bar y$
- $\overline{x+y}=\bar x\cdot\bar y$

De Morgan

$$f=\bar a\bar b\bar c+b\bar c+a(\underbrace{b+\bar b+\bar c}_{1})=\bar a\bar b\bar c+b\bar c+a=$$

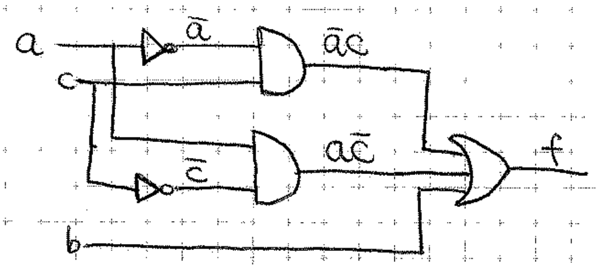
$$=\bar c(\bar a\bar b+b)+a=a+\bar c(\underbrace{\bar a\bar b+b}_{=(b+\bar a)(\underbrace{b+\bar b}_{=1})})=a+\bar c(b+\bar a)=a+\bar c b+\bar c\bar a=$$

$$=a+\bar a\bar c+\bar c b=\underbrace{(a+\bar a)}_{=1}(a+\bar c)+\bar c b=a+\bar c+\bar c b=a+\bar c(\underbrace{1+b}_{=1})=a+\bar c$$

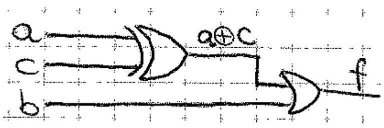
Es. Scrivere la tabella di verità di $f(a,b,c)=\overline{\overline{a+b}+\bar c}$

a	b	c	$\overline{a+b}$	$\bar c$	$\overline{a+b}+\bar c$	f
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1

Es. $f=\bar a c+a\bar c+b$. Disegnare il circuito corrispondente.



oppure $f=(a\oplus c)+b$



ES. $(123)_4 \to (\ )_5$

passo in base 10: $1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 3 = (27)_{10}$

27	5
5	2 ⊖
1	0 ↑
0	1 ⊕

$\underline{(27)_{10} = (102)_5}$

!! ES. $(159)_{10} \to (\ )_7$

Ⓐ

159	7
22	5
3	1
0	3

$(159)_{10} = (315)_7$ ✓

Ⓑ

159	7
22	6
3	1
0	3

$(159)_{10} = (31\underline{6})_7$
↳ errore di calcolo (1pt. in meno)

Ⓒ

159	7
22	7
3	1
0	3

$(159)_{10} = (31\underline{7})_7$
↳ la base 7 **NON** contiene il numero 7!! (0 pt.)

<u>02.04.12</u>

ES. Chiedere N. Prendere i valori <u>pari</u> prima di N e sommarli.

```
#include <stdio.h>

int main (void)
{
   int N, i, sum;
   printf ("Digita un numero\n");
   scanf ("%d", &N);

   sum=0;
   for (i=0; i<N; i=i+2)
   {
     sum=sum+i;
   }
   printf ("somma: %d\n", sum);
   return 0;
}
```

→ effettuo la metà dei calcoli perchè scelgo già solo i numeri pari

16.04.12

ES.1 (slide 343)

```
...
int i,min,max;
int v[10];

  for (i=0; i<10; i++)
    { printf("Inserisci valore: ");
      scanf("%d", &v[i]); }

  min= v[0];
  max= v[0];

  for (i=1; i<10; i++)
    { if (v[i]<min)
        min=v[i];
      if (v[i]>max)
        max=v[i]; }
...
```

ES.2 (slide 345)

```
...
int v[10]={0};
int i=9;
unsigned x;

printf("Scrivi un numero <1000: ");
scanf("%d", &x);

while (x!=0)
  { v[i]= (x%2);
    x=x/2;
    i--; }

for (i=0; i<=9; i++)
  printf("%d", v[i]);
...
```

NON dichiarare la dimensione del vettore con una variabile: la dimensione è COSTANTE!!

```
#include <stdio.h>

int main()
{
  int v[200]={0};
  int N,i,j;

  do { ... }
  while (N>200 || N<=0);
  for (i=0; i<N; i++)
    { ... }

  for (i=0; i<N; i++)
  { printf("Elemento %d: %d", i+1, v[i]);
    for (j=0; j<v[i]; j++)
       printf("*");
    printf("\n"); }
```

07.05.12

Es. Funzione che calcola l'MCD tra due valori, utilizzando l'algoritmo di Euclide.

```
int MCD (int a, int b)

{  int q, r, mcd;

  if (b>a)
  { q=b/a;
    r=b%a;
    if (r==0)
      mcd=a;
    else
         { a=b;
           r=a;
         }
  }
  else
   { q=a/b;
     r=a%b
     if (r==0)
      mcd=b;
     else
      { b=a;
        r=b;
      }
   }
  return mcd;
}
```

```
int main ()
{
  int matr[10][3], i, j;

  for (i=0; i<10; i++)
   { for (j=0; j<2; j++)
        scanf("%d", &matr[i][j]);
   }

  for (i=0; i<10; i++)
   { for (j=0; j<2; j++)
        printf("%d", matr[i][j]);
     matr[i][2] = MCD(matr[i][0], matr[i][1]);
     printf("%d", matr[i][2]);
   }
  ...
```

```
int MCD (int x, int y)

{ int r;
  r=y%x;

  while (r!=0)
  { y=x;
    x=r;
    r=y%x;
  }
  return x;
}
```

ES. Leggere una frase introdotta da tastiera. Frase terminata dall'invio, al più 100 caratteri.
- visualizzare la frase
- costruire e salvare una nuova frase in cui '.' è sostituito da '\n'
- visualizzare la nuova frase

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>
int main
{
  char frase[101]; frase2[101];
  int lung_stringa, i;
  gets (frase);
  puts(frase);

  lung_stringa= strlen(frase);

  for (i=0; i<lung_stringa; i++)
  { if (frase[i]=='.')
        frase2[i]='\n';
    else frase2[i]= frase[i];
  }
  frase2[lung_stringa]='\0';

  printf("la frase modificata è");
  puts(frase2);

  return 0;
}
```

ES. Modifica la frase rendendo maiuscole le prime lettere di una parola e minuscole tutte le altre lettere.

```
#include <ctype.h>
...   frase2[0]= toupper(frase[0]);
for(i=1; i<lung_stringa; i++)
  { if (isspace(frase[i]))
      frase2[i+1]= toupper(frase[i+1]);
  else frase2[i]= tolower(frase[i]);
  }
frase2[lung_stringa]='\0';
...
```

```
main (int argc, char*argv[])
{ float b,h;
  ~~...~~;
  if (argc==4)
  { if (argv[1][1]!='q' && argv[1][1]!='r' && argv[1][1]!='t')
        printf("Errore: figura non valida");
    else
    { b=atof(argv[2]);
      h=atof(argv[3]);
      switch (argv[1][1])
      { case 'q':
          { if (b!=h)
                printf("Errore: b diverso da h");
            else printf("Area: ", b*b);
          }
          break;
        case 'r':
          printf("Area: ", b*h);
          break;
        case 't':
          printf("Area:", (b*h)/2);
      } ~~...~~
    }
  }
  else
  { printf("Errore: Esegui: <%s> figurageometrica <base> <altezza>\n", argv[0]);
    return 1;
  }
  return 0;
}
```

oppure aggiungo float area=-1;

```
switch (argv[1][1])
{ case 'r':
  case 'q':
    area=b*h;
    break;
  case 't':
    area=(b*h)/2;
    break;
  default:
    printf("Figura geometrica non supportata\n");
}

if (area>0)
  printf("Area=%.2f\n", area);
...
```

31.05.12

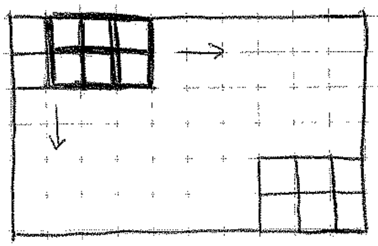
ES. Programma che scrive un file "pitagora.txt" con le tabelline scritte in riga:

```
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
. . . . . . . . . . .
10 . . . . . . . . 100
```

ES. Programma che legge da linea di comando due interi (tra 1 e 10) (riga, colonna) e deve leggere e stampare il valore corrispondente dal file "pitagora.txt".

Es. Programma che cerca una figura geometrica all'interno di un file "drawing.txt". Il pattern da ricercare è contenuto in "pattern.txt". Il programma deve scrivere se e quante volte il pattern è contenuto nel disegno.

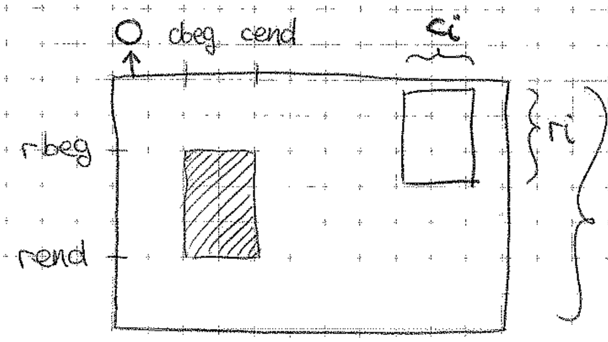
- righe e colonne dei due file sono note a priori
- righe e colonne del pattern sono sempre < di quelle del disegno



```
#include <stdio.h>

#define N 20
#define M 15
#define n 4
#define m 3

main () {

 FILE *dp, *pp;



 dp= fopen("drawing.txt", "r");
 pp= fopen("pattern.txt", "r");

 if (dp==NULL || pp==NULL)
 { printf("Errore nell'apertura di un file.");
   return 1; }
else
{
```

```
#include <stdio.h>

#define R1 7
#define C1 15
#define R2 2
#define C2 3

int readdrawing (char name[], char matrix[][C1], int r, int c);
int readpattern (char name[], char matrix[][C2], int r, int c);
void printdrawing (char M[][C1], int r, int c);
void printpattern (char M[][C2], int r, int c);
int find (char backg[][C1], int rs, int cs, char Imm[][C2], int ri, int ci);
int compare (char M1[][C1], int rbeg, int rend, int cbeg, int cend, char M2[][C2]);

int main (void)
{ char backg[R1][C1], Imm[R2][C2];
  int out1, out2;
  int num;

  out1 = readdrawing("drawing.txt", backg, R1, C1);
  out2 = readpattern("pattern.txt", Imm, R2, C2);
  if (out1==0 && out2==0)
   { printf("Drawing:\n\n");
     printdrawing(backg, R1, C1);
     printf("\nPattern:\n\n");
     printpattern(Imm, R2, C2);
```

```
int compare(char M1[][C1], int rbeg, int rend, int cbeg, int cend, char M2[][C2])
{ int i,j,k,h, equal;

  equal=1;
  for (h=0; i=rbeg; i<rend && equal==1; i++, h++)
  { for (k=0, j=cbeg; j<cend && equal==1; j++, k++)
     { if (M1[i][j] != M2[h][k])
          equal=0;
     }
  }
  return equal;
}
```



ES. Un'azienda di trasporti possiede al max 100 camion. I codici identificativi dei camion sono indicati in ordine alfabetico in un file di testo.
- codice (3 caratteri)
- capacità in tonnellate

File

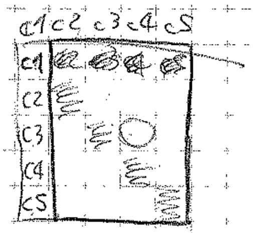
ABC	100
BLR	230

Programma con nome del file da linea di comando. Inserire da tastiera il peso della prossima spedizione, il programma seleziona i camion da utilizzare.

- Si può usare un solo camion? (quello con la capacità minima ma sufficiente)
- Utilizzare 2 camion. (coppia che dà la capacità minima)
- In caso di parità, il programma sceglie a caso una delle possibilità
- Dopo aver stampato i camion da utilizzare, ricominciare il ciclo (non considerare più i camion usati)
- Il programma finisce quando non ci sono soluzioni per la spedizione da effettuare

```
#include <stdio.h>

main (int argc, char *argv[])
{ FILE *fp;
  dato camion[100];
```

```
struct dato {
   char codice[3];
   int tonn;
   int disp=0; }
```




```
  if (argc != 2)
     printf("Errore su linea di comando");
  else
  { fp=fopen(argv[1], "r");
    if (fp==NULL)
      printf("Errore nell'apertura del file");
    else
    {
```