NUMERO: 679 DATA: 07/10/2013

# A P P U N T I

STUDENTE: Taberna

MATERIA: Analisi Matematica II
Prof. De Angelis

# ANALISI II

G. Taberna

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 64

Si dimostra che $\exists$ ed è finito $\lim_{d\to 0} \sum_{j,k} f(\xi_j, \eta_k)\Delta x_j \Delta y_k$ ; a questo limite si dà il nome di INTEGRALE DOPPIO.

Integrale doppio esteso a $D$ di $f(x,y)$, prende il significato di volume del cilindroide definito dalla superficie $z=f(x,y)$.

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}$$

04.10.12

PROPRIETÀ

- LINEARITÀ $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ $f,g$ continue in $D$

$$\iint_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\,dx\,dy = \alpha \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

- MONOTONIA

$$f \geq 0 \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$$

$$f \leq g \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

- ADDITIVITÀ

$D = D_1 \cup D_2$ e $D_1 \cap D_2$ non ha punti interni ($D_1$ e $D_2$ hanno in comune solo punti di frontiera)


$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

- Se $f(x,y) = 1$ $\forall (x,y) \in D \Rightarrow \iint_D 1 \cdot dx\,dy = \text{area}(D)$

- Se $f(x,y) = c$ $\forall (x,y) \in D \Rightarrow \iint_D c \cdot dx\,dy = c \cdot \text{area}(D) =$ volume cilindroide di base $D$ e altezza $c$

MEDIA di $f$ in $D$

$$\boxed{m = \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy}$$

TEOR. della MEDIA

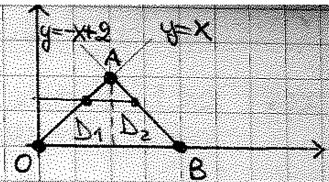
DEF. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice CONNESSO PER ARCHI se due suoi punti qualsiasi possono essere congiunti da una curva continua che giace interamente in $D$.

TEOR. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato e in più sia connesso per archi. $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\exists (x_0, y_0) \in D$ tale che:

$$\boxed{f(x_0,y_0) = \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy}$$

Es. Calcolare $\iint_T (x-y)\,dx\,dy$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

Dove T è il triangolo di vertici O(0,0) A(1,1) B(2,0)




Considero semplice in x: $x=y$, $x=-y+2$

Se voglio considerarlo semplice in y, devo dividere il dominio in due parti $D_1$ e $D_2$, calcolare i due integrali e poi applicare l'additività (perchè se considerassi un unico D, avrei tre funzioni $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ invece che due) !

1) $\iint_T (x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left( \int_y^{-y+2} (x-y)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x^2 - xy \Big|_y^{-y+2} \right) dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}y^2 - 2y + 2 + y^2 - 2y - \frac{1}{2}y^2 + y^2 \right) dy =$

$= \int_0^1 (2y^2 - 4y + 2)\,dy = 2 \cdot \frac{1}{3}y^3 - y^2 + y \Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - \cancel{1} + \cancel{1}\right) = \boxed{\frac{2}{3}}$

2) Considero semplice in y: $y=0$, $y=x$, $y=-x+2$

$D_1$: $y=0 \rightarrow y=x$ $\quad \int_0^1 \left( \int_0^x (x-y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left( xy - \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^x \right) dx = \int_0^1 \left( x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$

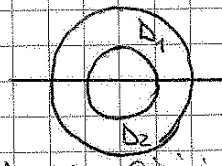
$D_2$: $y=0 \rightarrow y=-x+2$

$\int_1^2 \left( \int_0^{-x+2} (x-y)\,dy \right) dx = \int_1^2 \left( xy - \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^{-x+2} \right) dx = \int_1^2 \left( -x^2 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \right) dx = \int_1^2 \left( -\frac{3}{2}x^2 + 4x - 2 \right) dx = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 2x \Big|_1^2 =$

$= -\cancel{4} + \cancel{8} - \cancel{4} + \frac{1}{2} - \cancel{2} + \cancel{2} = \frac{1}{2}$ $\quad \Longrightarrow \quad \iint_T (x-y)\,dx\,dy = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{2}{3}}$

Conosciamo il metodo di calcolo per:

- D semplici in x
- D semplici in y
- D che sono somme di domini semplici in x e/o in y (es. corona circolare)

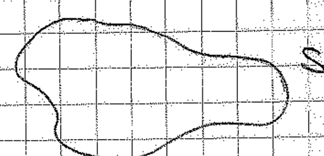



$D_1, D_2$ semplici in y

05.10.12

## BARICENTRI

Densità di massa: massa per unità di superficie
costante \ non costante



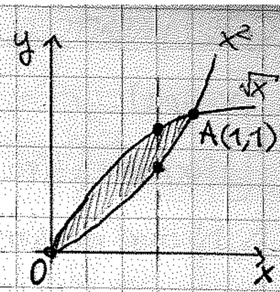

$\sigma = \sigma(x,y)$ $\quad$ S: lamina piana

Massa totale: $m = \iint_S \sigma(x,y)\,dx\,dy$

Baricentro: $G(x_G, y_G)$

$$\boxed{\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{m} \iint_S x\,\sigma(x,y)\,dx\,dy \\ y_G &= \frac{1}{m} \iint_S y \cdot \sigma(x,y)\,dx\,dy \end{aligned}}$$

ES. Trovare il baricentro nel caso $\sigma = xy$




$$m = \iint_D dxdy = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right) dx \quad : \text{caso } \sigma = 1 \quad \dots$$

$$m = \iint_D \sigma(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy \right) dx = \dots = \frac{1}{12}$$

$$x_G = \frac{1}{\frac{1}{12}} \iint_D x\,\sigma(x,y)\,dxdy = 12 \iint_D x^2 y\,dxdy =$$

$$= 12 \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 y\,dy \right) dx = 12 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - x^6)\,dx = 6 \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^1 = 6 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) = \frac{18}{28} = \underline{\frac{9}{14}}$$

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 y\,dy = x^2 \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} = x^2 \left( \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x^4 \right) = \frac{1}{2} (x^3 - x^6)$$

$$y_G = \frac{1}{\frac{1}{12}} \iint_D x y^2\,dxdy = 12 \cdot \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x y^2\,dy \right) dx = 12 \cdot \frac{1}{3} \int_0^1 (x^{5/2} - x^7)\,dx = 4 \cdot \left( \frac{2}{7} x^{7/2} - \frac{1}{8} x^8 \right) \Big|_0^1 = 4 \left( \frac{2}{7} - \frac{1}{8} \right) = \underline{\frac{9}{14}}$$

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x y^2\,dy = x \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} = \frac{1}{3} x (x^{3/2} - x^6) = \frac{1}{3} (x^{5/2} - x^7)$$

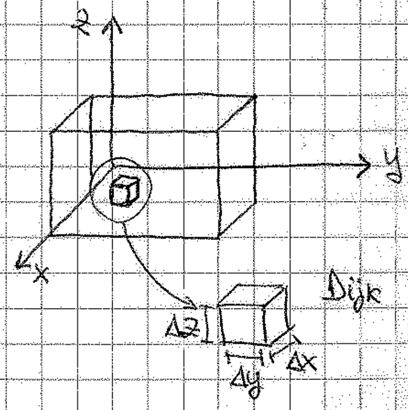
09.10.12

## INTEGRALI TRIPLI

$D \subset \mathbb{R}^3$ compatto

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

Perdiamo la rappresentazione grafica dell'integrale




$D_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{j-1}, z]$

Scelgo $(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \in D_{ijk}$

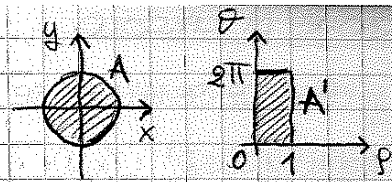
$f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ : contributo di 1 cubetto

$\sum_{ijk} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ : somme di Riemann

Definiamo $\delta = \max_{ijk} \{\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k\}$

Nell'ipotesi di continuità di $f$ in $D$, allora $\exists$ ed è finito $\lim_{\delta \to 0} \sum_{ijk} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$; questo limite prende il nome di INTEGRALE TRIPLO di $f$ in $D$.

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$



$\frac{3}{\pi} \iint_{A'} (1-\rho^2)^{3/2} \rho \cdot d\rho d\theta =$

$= \frac{3}{\pi}\left(\int_0^1 (1-\rho^2)^{3/2}\rho d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \frac{3}{\pi}\cdot\frac{1}{5}\cdot 2\pi = \boxed{\frac{4}{15}\pi}$

sostituisco $\rho^2 = u$
$2\rho d\rho = du$

$\int (1-\rho^2)^{3/2}\rho d\rho = \frac{1}{2}\int (1-u)^{3/2} du = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3}{2}}(1-u)^{1+\frac{3}{2}}(-1)+k = -\frac{1}{2}\frac{2}{5}(1-\rho^2)^{5/2}+k$

$\int_0^1 (1-\rho^2)^{3/2}\rho d\rho = -\frac{1}{5}(1-\rho^2)^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}$

12.10.12

4) $D \subset \mathbb{R}^3$ dominio delimitato dai piani $z=a$, $z=b$ e tale che fissata una quota $z$ tra a e b,

$A_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y,z)\in D\}$ (proiezione della sez. orizzontale di quota z di D sul piano xy)

In questo caso:

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x,y,z)\,dxdy\right)dz}$$

INTEGRAZIONE PER STRATI // AL PIANO xy

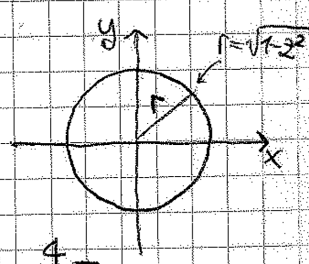
5) INTEGRAZ. PER STRATI // AL PIANO xz

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d \left(\iint_{B_y} f(x,y,z)\,dxdz\right)dy}$$

6) INTEGR. PER STRATI // AL PIANO yz

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_e^f \left(\iint_{C_x} f(x,y,z)\,dydz\right)dx}$$

ES. $\iiint_D z^2\,dxdydz \qquad D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$




$a=-1,\ b=1 \quad (z=[-1,1]) \qquad A_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1-z^2\}$

$I = \int_{-1}^1 \left(\iint_{A_z} z^2\,dxdy\right)dz = \pi\int_{-1}^1 (z^2-z^4)\,dz = \pi\left[\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right]_{-1}^1 = \pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \boxed{\frac{4}{15}\pi}$

$\iint_{A_z} z^2\,dxdy = z^2\iint_{A_z} dxdy = z^2 \underbrace{\pi(1-z^2)}_{\text{area di } A_z}$

OSS. se $f(x,y,z)=1 \quad \forall (x,y,z)\in D$

$\iiint_D 1\,dxdydz = $ volume di D

$$\int_{\alpha(\sqrt{x^2+y^2})}^{\beta(\sqrt{x^2+y^2})} dz = \beta(\sqrt{x^2+y^2})-\alpha(\sqrt{x^2+y^2})$$

l'integrale doppio si fa in coord. polari

$$\Rightarrow \beta(\sqrt{x^2+y^2})-\alpha(\sqrt{x^2+y^2}) = \beta(\rho)-\alpha(\rho)$$

$$\boxed{V = \int_0^{2\pi} \cdot \int_a^b (\beta(\rho)-\alpha(\rho))\,\rho\, d\rho\, d\theta = 2\pi \int_a^b \rho(\beta(\rho)-\alpha(\rho))\,d\rho}$$

Baricentro di A: $y_G = \frac{1}{area(A)} \iint_A y\,dx\,dy$

Considero A semplice rispetto a ~~z~~: $y_G = \frac{1}{area(A)} \int_a^b \left( \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} y\,dz \right) dy$

$$y_G = \frac{1}{area(A)} \underbrace{\int_a^b y(\beta(y)-\alpha(y))\,dy}$$

↳ uguale all'integrale nella formula di V

$$\Rightarrow \boxed{V = 2\pi \cdot area(A) \cdot y_G}$$ TEOR. di GULDINO

16.10.12

RICHIAMI SULLE CURVE

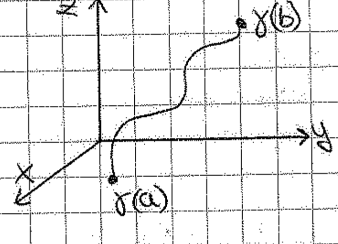
Curve in $\mathbb{R}^n$ $\quad \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$t \in [a,b] \quad \gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$

- di classe $C^1$
- semplice (= iniettiva) $\quad t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

Sostegno di $\gamma$: immagine di $\gamma$ sull'intervallo $[a,b]$ : $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$

ES. in $\mathbb{R}^3$ $\quad \gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$




ES. $\gamma: \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t \\ y = y_0 + \alpha_2 t \\ z = z_0 + \alpha_3 t \end{cases}$ $\quad$ Sostegno: retta passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e // a $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

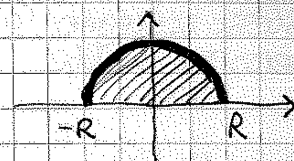
ES. $\gamma: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b \sin t \\ z = ct \end{cases}$ $\quad$ Sostegno: elica

↳ no curva piana

ES. Due masse uguali $m$ distribuite uniformemente ($\sigma$=cost)

1. su un filo disposto lungo una semicirconferenza di raggio $R$
2. su una lamina che occupa un semicerchio di raggio $R$

In quale caso G è più vicino all'origine?




1. $\gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=R^2,\ y\geq 0\}$

2. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq R^2,\ y\geq 0\}$

1. $\gamma: \begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}\quad t\in[0,\pi]\qquad \gamma': \begin{cases} x'=-R\sin t \\ y'=R\cos t \end{cases}\qquad \|\gamma'(t)\|=R$

$$x_G=\frac{1}{\int_\gamma ds}\cdot\int_\gamma x\,ds=\frac{1}{\pi R}\int_0^\pi R\cos t\cdot R\,dt=\frac{R}{\pi}[\sin t]_0^\pi=\boxed{0}$$

(semplifico $\sigma$ perchè è cost)

$$y_G=\frac{1}{\int_\gamma ds}\int_\gamma y\,ds=\frac{1}{\pi R}\int_0^\pi R\sin t\cdot R\,dt=\frac{R}{\pi}[-\cos t]_0^\pi=\frac{R}{\pi}+\frac{R}{\pi}=\boxed{\frac{2R}{\pi}}$$

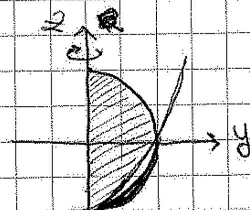
$\Big\}\ G\left(0,\frac{2R}{\pi}\right)$

2. $$x_G=\frac{1}{\iint_D dxdy}\cdot\iint_D x\,dxdy=\frac{2}{\pi R^2}\int_0^\pi\left(\int_0^R \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho\right)d\theta=\frac{2}{\pi R^2}\int_0^\pi\cos\theta\,d\theta\cdot\int_0^R\rho^2\,d\rho=\frac{2}{\pi R^2}\underbrace{[\sin\theta]_0^\pi}_{=0}\cdot\left[\rho^3/3\right]_0^R=0$$

$$y_G=\frac{1}{\iint_D dxdy}\cdot\iint_D y\,dxdy=\frac{2}{\pi R^2}\int_0^\pi\left(\int_0^R\rho\sin\theta\,\rho\,d\rho\right)d\theta=\frac{2}{\pi R^2}\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\cdot\int_0^R\rho^2\,d\rho=$$
$$=\frac{2}{\pi R^2}[-\cos\theta]_0^\pi\cdot\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R=\frac{2}{\pi R^2}(1+1)\cdot\frac{R^3}{3}=\boxed{\frac{4R}{3\pi}}$$

$G\left(0,\frac{4R}{3\pi}\right)$

ES. $\iiint_D z\,dxdydz$ $\quad x^2+y^2+z^2\leq 1,\ z=x^2+y^2-1$




paraboloide con vertice nel polo sud della sfera

$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 1,\ x^2+y^2-1\leq z\leq\sqrt{1-x^2-y^2}\}$

Coord. cilindriche $D'=\{\rho\in[0,1],\ \theta\in[0,2\pi],\ \rho^2-1\leq z\leq\sqrt{1-\rho^2}\}$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\int_{\rho^2-1}^{\sqrt{1-\rho^2}} z\,dz\right)\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{1-\rho^2-\rho^4+2\rho^2-1}{2}\right)\rho\,d\rho\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 d\theta=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{12}\,d\theta=\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$$

ES. Particella $m$ che percorre $x(t)$.

$F = ma = m\ddot{x}$

$$\int_\gamma F\cdot\tau\, ds = \int_a^b m\ddot{x}\cdot\dot{x}\, dt = m\int_a^b \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\overbrace{(\dot{x}(t)\cdot\dot{x}(t))}^{(\dot{x}(t))^2}}_{=\ddot{x}\cdot\dot{x}+\dot{x}\cdot\ddot{x}}\, dt = \frac{1}{2}m\int_a^b \frac{d}{dt}(\dot{x}(t))^2\, dt =$$

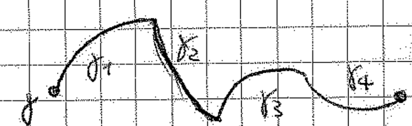
$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}(b))^2 - \frac{1}{2}m(\dot{x}(a))^2 \quad \leftarrow \text{TEOR. DELL'ENERGIA CINETICA (FORZE VIVE)}$$

$$\int_\gamma F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\, dt = \int_a^b (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))\cdot(x'(t), y'(t), z'(t))\, dt =$$

$$= \int_a^b [X(x,y,z)\,x'(t) + Y(x,y,z)\,y'(t) + Z(x,y,z)\,z'(t)]\, dt \overset{def}{=} \boxed{\int_\gamma \underbrace{X dx + Y dy + Z dz}_{\text{"1-forma differenziale"}}}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = x'(t)\,dt \\ dy = y'(t)\,dt \\ dz = z'(t)\,dt \end{cases} \quad !$$

$$\int_\gamma F\cdot\tau\, ds = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} F\cdot\tau\, ds$$




DEF $\gamma$ si dice REGOLARE se $\gamma'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in [a,b]$

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(x_1(t), x_2(t), x_3(t))\cdot\|\gamma'(t)\|\, dt \qquad \int_\gamma F\cdot\tau\, ds = \int_a^b F(x_1(t), x_2(t), x_3(t))\cdot\gamma'(t)\, dt$$

- in entrambi $ds = \|\gamma'(t)\|\cdot dt$
- entrambi non dipendono dalla parametrizzazione della curva, ma solo dal sostegno
- 1ª specie: l'orientamento dovuto alla param. non influenza
  (INVARIANTE PER PARAMETRIZZAZIONE)
  2ª specie: il cambio di orientamento causa un cambio di segno
  (INVARIANTE PER PARAM. A PARITÀ DI ORIENTAMENTO)

- 1ª specie: integrale su curve
  2ª specie: integrale su curve orientate

Che orientamento scegliere? è dato / verso antiorario

Costruzione del potenziale per un campo conservativo $F$:

1) si fissa $P_0 \in A$
2) si considera un generico $P(x,y,z) \in A$ e si sceglie una curva da $P_0$ a $P$
3) si calcola $U(x,y,z) = \int_\gamma F \cdot \tau \, ds$

ES) $F = (1,1,x)$ non conservativo

$U(x,y,z) = x + y + xz + c$ ma $\nabla U \neq F$

Come riconoscere un campo conservativo o non c.?

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2)\vec{i} - (\partial_x F_3 - \partial_z F_1)\vec{j} + (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\vec{k}$$

$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$ $\quad$ rot $F = \nabla \times F$ $\quad$ (Nel caso piano, rot $F \perp$ piano)

DEF $F$ si dice irrotazionale se rot $F = 0$.

Sia $F$ un campo conservativo: $F = \nabla U$, $U$ di classe $C^2$

$\partial_x U = F_1 \quad \partial_y U = F_2 \quad \partial_z U = F_3$

$\partial_y F_1 = \partial_y(\partial_x U) = \partial_x(\partial_y U) = \partial_x F_2$
per il teor di Schwarz

$\partial_z F_1 = \partial_x F_3 \quad , \quad \partial_z F_2 = \partial_y F_3$

$F$ CONSERVATIVO $\Longrightarrow$ $F$ IRROTAZIONALE !

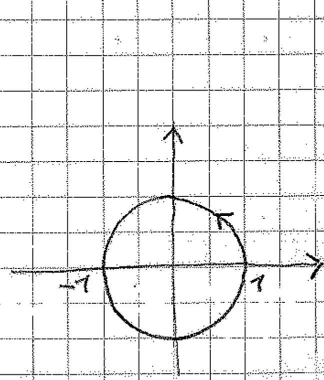
$F$ NON IRROT. $\Rightarrow$ $F$ NON CONSERVATIVO

In generale, un campo irrotazionale può essere non conservativo.

ES) $F = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

È irrotazionale: $\partial_y\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

Non è conservativo:




$\gamma = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\oint_\gamma F \cdot \tau \, ds = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = 2\pi \neq 0$$

in $\mathbb{R}$

$F: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

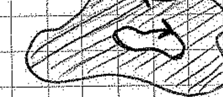
$F(x)$ per essere conservativo deve $\exists U(x)$ t.c. $U'(x) = F(x)$

$U(x) = \int F(x)dx$ → unica condizione è che $F$ sia continuo

## TEOREMA DI GAUSS-GREEN

$\mathbb{R}^2$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}^2$

- $D$ è l'unione di un numero finito di regioni semplici sia in $x$ sia in $y$, con in comune soltanto tratti di frontiera
- La frontiera di $D$ è l'unione di un numero finito di curve chiuse regolari ($\gamma' \neq 0$ sempre) a tratti
- La frontiera di $D$ sia ORIENTATA POSITIVAMENTE ($\partial^+ D$), cioè percorrendo ciascuna curva della frontiera, il dominio $D$ rimane a sinistra



Dato un campo $F$ piano di classe $C^1$ in un aperto contenente $D$:

$$\boxed{\underbrace{\iint_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)}_{\text{componente z del rotore di F}} dxdy = \oint_{\partial^+ D} F \cdot \tau \, ds}$$

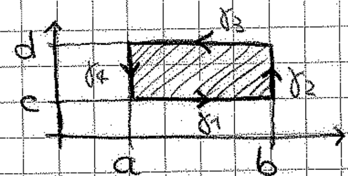
componente z del rotore di $F$ (l'unica $\neq 0$ nel piano)

$$\iint_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dxdy = \oint_{\partial^+ D} F_1 dx + F_2 dy$$

utilizzando le forme

ES. Dimostrare nel caso del rettangolo

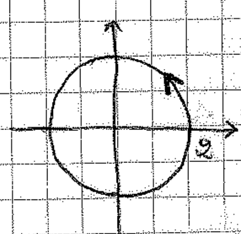
$\gamma_1 \begin{cases} x = t \\ y = c \end{cases} \quad t \in [a,b] \qquad \gamma_3 \begin{cases} x = t \\ y = d \end{cases} \quad t \in [b,a]$




ES.

$$I = \oint_\gamma (\sin x + y)dx + (-3x + e^{y^2})dy \qquad \gamma: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

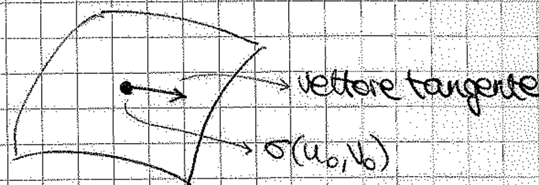



$$I = \iint_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dxdy = \iint_D (-3-1) dxdy = -4 \iint_D dxdy = -4(\pi \cdot (2)^2) = \underline{-16\pi}$$

DEF. $\sigma$ si dice SEMPLICE se è iniettiva

Fissando uno dei due parametri e variando l'altro ($u=u_0$ fisso) si ottiene una parte di superficie data da:

$$\begin{cases} x=x(u_0,v) \\ y=y(u_0,v) \\ z=z(u_0,v) \end{cases} \Rightarrow \underline{\text{CURVA}}$$




oppure fissando $v=v_0$: $\begin{cases} x=x(u,v_0) \\ y=y(u,v_0) \\ z=z(u,v_0) \end{cases}$

Vettore tg a $\gamma_1$: $$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix} = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0)$$

Vettore tg a $\gamma_2$: $$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \end{pmatrix} = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0)$$

DEF. Una superficie si dice REGOLARE (o liscia) se ammette una parametrizzazione $\sigma$ tale che:

1) $\sigma \in C^1(D)$

2) $\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| \neq 0 \quad \forall (u,v) \in D$ : i due vettori tg devono essere linearmente indipendenti, in modo da creare un piano tg univoco

(oppure la matrice J formata dalle due colonne dei vettori tg (matrice 3x2) deve avere rango massimo)

DEF. VETTORE NORMALE alla superficie indotto dalla parametrizzazione:

$$N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}$$

ES. $\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=f(u,v) \end{cases}$ $\quad f \in C^1 \quad \frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1,0,\partial_u f) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0,1,\partial_v f)$

$$N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \partial_u f \\ 0 & 1 & \partial_v f \end{vmatrix} = (-\partial_u f, -\partial_v f, 1)$$

$$\|N(u,v)\| = \sqrt{(\partial_u f)^2 + (\partial_v f)^2 + 1} = \boxed{\sqrt{1+(\nabla f)^2}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 64

## BARICENTRO

Se $\delta = \delta(x,y,z)$ è una densità superficiale di massa distribuita su una lamina dislocata lungo $\Sigma$, le coord. del baricentro sono:

$$x_G = \frac{1}{\underbrace{\iint_\Sigma \delta(x,y,z)\,d\sigma}_{\text{massa totale}}} \iint_\Sigma x\,\delta(x,y,z)\,d\sigma$$

$$y_G = \frac{1}{\iint_\Sigma \delta(x,y,z)\,d\sigma} \iint_\Sigma y\,\delta(x,y,z)\,d\sigma \qquad z_G = \frac{1}{\iint_\Sigma \delta(x,y,z)\,d\sigma} \iint_\Sigma z\,\delta(x,y,z)\,d\sigma$$

ES. Due masse uguali m distribuite uniformemente:
1. su una lamina disposta lungo una superficie semisferica di raggio R
2. su un solido che copre una semisfera di raggio R

Quale configurazione ha il baricentro più basso?

Per questioni di simmetria: $x_G = y_G = 0$

1. $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{R^2-u^2-v^2} \end{cases} \qquad (u,v) \in D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq R^2\}$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right) \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right)$$

$$N(u,v) = \frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\frac{u}{\sqrt{\ }} \\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{\ }} \end{vmatrix} = \left(\frac{u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}, 1\right)$$

$$\|N(u,v)\| = \sqrt{\frac{u^2}{R^2-u^2-v^2} + \frac{v^2}{R^2-u^2-v^2} + 1} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2-u^2-v^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}$$

$$z_G = \frac{1}{\iint_\Sigma d\sigma} \iint_\Sigma z\,d\sigma = \frac{1}{\underbrace{4\pi R^2 \cdot \frac{1}{2}}_{\text{V semisfera}}} \iint_D \cancel{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \cdot \frac{R}{\cancel{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}}\,du\,dv = \frac{1}{2\pi R^2} R \iint_D du\,dv = \frac{1}{2\pi R^2} R \underbrace{\pi R^2}_{\text{area } D} = \frac{1}{2}R$$

# TEOR. di STOKES (o TEOR. del ROTORE)

Sia $D$ dominio di integrazione piano che soddisfa le ipotesi del teorema di Gauss-Green

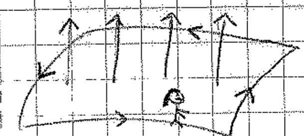
Superficie parametrizzata da $\sigma: D \to \mathbb{R}^3$ di classe $C^1$

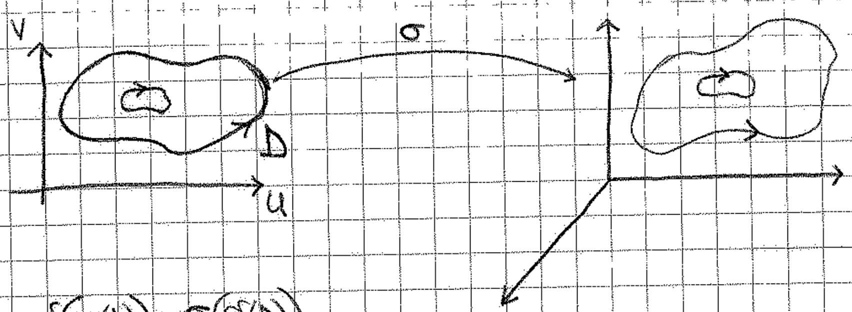
$F = F(x,y,z)$ campo vettoriale di classe $C^1$ su un aperto contenente il sostegno di $\sigma$

allora:

$$\boxed{\int_{\partial^+\Sigma} F \cdot \tau \, ds = \iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\, F \cdot n \, d\sigma}$$

dove il verso di percorrenza del bordo di $\Sigma$ e la normale $n$ sono scelti in modo che un osservatore che percorre $\partial\Sigma$ disposto lungo $n$, vede $\Sigma$ alla propria sinistra






$\partial\Sigma = \partial(\sigma(D)) = \sigma(\partial(D))$

Caso piano in $\mathbb{R}^2$: $\int_{\partial^+ D} F \cdot \tau \, ds = \iint_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\, dx\, dy \Rightarrow$ TEOR. di GAUSS-GREEN

Risultati che riprendono la forma del Teor. fondamentale del calcolo integrale:

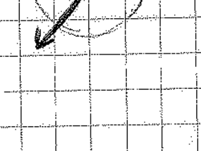
$$\underbrace{f(b) - f(a)}_{\substack{\text{integrale della} \\ \text{fz agli estremi}}} = \underbrace{\int_a^b f'(t)\, dt}_{\substack{\text{integrale su tutto il dominio} \\ \text{di una fz derivata della principale}}}$$

09.11.12

ES) $F(x,y,z) = (2x - y, -yz^2, -y^2 z)$

Flusso del rot F attraverso l'emisfero superiore di $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, con $\uparrow n$

$\partial^+\Sigma$: circonferenza $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$



$$\int_{\partial^+\Sigma} F \cdot \tau \, ds = \int_0^{2\pi} (2\cos t - \sin t, 0, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2\cos t \sin t + \sin^2 t)\, dt = 0 + \pi = \underline{\pi}$$

$\sin^2 + \cos^2 = 1 \qquad \int_0^{2\pi} (\sin^2 + \cos^2) = 2\pi$

$$\boxed{\iiint_E \underbrace{\nabla g}_{"g'"} \cdot \underbrace{F}_{"f"} \,dxdydz = \iint_{\partial E} \underbrace{g}_{g}\underbrace{F}_{f}\cdot N_e \,d\sigma - \iiint_E \underbrace{g}_{g}\, \underbrace{\operatorname{div} F}_{f'} \,dxdydz}$$

DIM.

$$\iint_{\partial E} (gF)\cdot N_e \,d\sigma = \iiint_E \operatorname{div}(gF)\,dxdydz$$ per il Teor. della divergenza

$\operatorname{div}(gF) = \nabla g \cdot F + g \operatorname{div} F$

$$\rightarrow \iint_{\partial E} (gF)\cdot N_e \,d\sigma = \iiint_E (\nabla g \cdot F + g\operatorname{div}F)\,dxdydz$$

$$\rightarrow \iiint_E \nabla g \cdot F \,dxdydz = \iint_{\partial \Sigma} gF\cdot N_e\,d\sigma - \iiint_E g \operatorname{div} F\,dxdydz$$

(*) se $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ ($\vec{F}$ solenoidale) $\Rightarrow \iiint_D \operatorname{div} F\,dxdydz = 0 \Rightarrow \int_{\partial^+ D} F\cdot n\,d\sigma = 0$

$\underset{\vec{n}\uparrow}{\text{flusso}_{est}} + \underset{\downarrow\vec{n}}{\text{flusso}_{int}} = 0 \qquad \underset{\uparrow\vec{n}}{\text{flusso}_{est}} = -\underset{\downarrow\vec{n}}{\text{flusso}_{int}}$

se cambio orientamento a una superficie: $\underset{\uparrow\vec{n}}{\text{flusso}_{est}} = \underset{\uparrow\vec{n}}{\text{flusso}_{int}} \Rightarrow$ FLUSSO NON DIPENDE DALLA SUPERFICIE!

la superficie deve racchiudere il polo

# SERIE NUMERICHE

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

## Successione delle RIDOTTE o SOMME PARZIALI

$S_0 = a_0$
$S_1 = a_0 + a_1$
$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$
$\vdots$
$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Se

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} S \in \mathbb{R} : \text{ SERIE CONVERGENTE che ha somma } S \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S\right) \\ +\infty\,(-\infty) : \text{ SERIE POSITIVAMENTE (NEGATIVAMENTE) DIVERGENTE} \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} = \pm\infty\right) \\ \nexists : \text{ SERIE INDETERMINATA} \end{cases}$$

ES. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad S_0 = 1$
$S_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$\lim S_n = \lim \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\dots} = \frac{1}{\dots} = 2$

ES. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}}$ = SERIE DI MENGOLI

$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}}_{1-\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 3}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} + \underbrace{\frac{1}{3\cdot 4}}_{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{4\cdot 5}}_{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}} + \dots$$

$$S_n = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ converge

## SERIE SOMMA

$\left.\begin{array}{l}\sum_n a_n \\ \sum_n b_n\end{array}\right\}$ convergenti $\quad S = \sum_n a_n \quad T = \sum_n b_n$

$\Rightarrow \sum_n (a_n + b_n)$ è convergente e $\sum_n (a_n+b_n) = S+T$

DIM. $(a_0+b_0)+(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\dots+(a_n+b_n) = (a_0+a_1+a_2+\dots+a_n)+(b_0+b_1+b_2+\dots+b_n) = S_n + T_n$

$S_n + T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S+T$

## PRODOTTO per $\lambda \in \mathbb{R}$

$\sum_n a_n$ convergente e $S = \sum_n a_n$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum_n \lambda a_n$ è convergente e $\sum_n \lambda a_n = \lambda S$

## SERIE A TERMINI POSITIVI

$\sum_n a_n \quad a_n \geq 0, \ \forall n$

PROP. Una serie a termini positivi o converge o diverge positivamente

DIM. $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$

$\Rightarrow \{S_n\}$ crescente, quindi ha $\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} +\infty \\ S \in \mathbb{R} \end{cases}$

ES. $\underbrace{\sum_n \frac{n^3+2n}{3n^5+1}}_{a_n} \overset{\text{confronto}}{\longleftrightarrow} \underbrace{\sum_n \frac{1}{3n^2}}_{b_n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+2n}{3n^5+1}\cdot 3n^2\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^5+6n^3}{3n^5+1} = 1$ → posso applicare il confronto asint.

$\sum_n b_n = \sum_n \frac{1}{3n^2}$ converge $\Rightarrow$ (C.C.A.) $\sum_n a_n = \sum_n \frac{n^3+2n}{3n^5+1}$ converge

Richiami

- $a_n \sim b_n \iff \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$
- $\begin{cases} a_n \sim b_n \\ c_n \sim d_n \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a_n c_n \sim b_n d_n \\ \frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n} \end{array}$
- $\begin{cases} a_n \sim b_n \\ b_n \to \ell \end{cases} \Rightarrow a_n \to \ell$

ES. $\underbrace{\sum_n \frac{n^2+2n+e^{-\sqrt{n}}}{\log n + n^3 + 5}}_{(*)} \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow$ (*) diverge

Richiami

- $f(x) \sim g(x)$ per $x \to c$
  se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
- $f(x) = o(g(x))$ per $x \to c$
  se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f(x) \sim g(x)$ per $x \to c$ è esattamente equivalente a $f(x) = g(x) + o(g(x))$

ES. $\sum_n \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

$\sin x \sim x$ per $x \to 0$ , $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ per $n\to\infty$

$\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{converge}} \rightarrow$ (C.C.A.) $\sum_n \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge

$\ldots_{\bar{N}+1+n} < \underbrace{(\ell+\varepsilon)^{n+1}}\, a_{\bar{N}}$

$\hookrightarrow$ serie geometrica di ragione $(\ell+\varepsilon)<1 \Rightarrow$ converge

$\Rightarrow a_{\bar{N}+1+n}$ converge

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$

scelgo $\varepsilon$ t.c. [redacted] $\ell-\varepsilon>1$:

$\ell-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell+\varepsilon$ [redacted] $\forall n>\bar{N}$

$\Rightarrow a_{n+1} > (\ell-\varepsilon)a_n > a_n \quad \forall n>\bar{N}$ successione crescente $\Rightarrow$ diverge

23.11.12

## Criterio della radice

$\sum_n a_n \quad a_n \geq 0,\ \forall n$

$\exists$ (finito o infinito) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

1) se $\ell<1$, la serie converge

2) se $\ell>1$, la serie diverge

Es) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$

$\sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = \left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-2}<1 \Rightarrow$ la serie converge

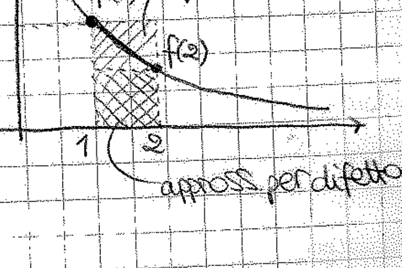
## Criterio integrale

$f(x)$ positiva, decrescente, continua in $[1,+\infty)$

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \longleftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere

DIM. [redacted] $f(n) < \int f(x)dx < f(n+1)$

Riprende le somme di Riemann



## CRITERIO DI LEIBNITZ

$\sum_n (-1)^n b_n \quad b_n > 0 \ \forall n$ (serie a termini alterni)

se $\begin{cases} b_{n+1} \le b_n & \forall n \\ b_n \to 0 & \text{per } n \to \infty \end{cases}$ (serie infinitesima e non crescente)

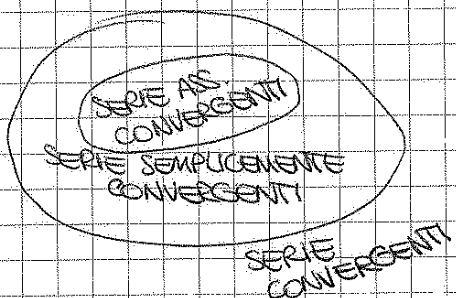
$\Rightarrow \sum_n (-1)^n b_n$ CONVERGE

ES. $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$

Non converge assolutamente

Criterio di Leibniz: $b_n = \frac{1}{n}$
- $b_n = \frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$
- $b_{n+1} \le b_n \quad \left(\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \ \forall n\right)$

$\Rightarrow \sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge




27.11.12

## SUCCESSIONI DI FUNZIONI

$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad n \in \mathbb{N}$

tutte definite in uno stesso insieme $A \subseteq \mathbb{R}$

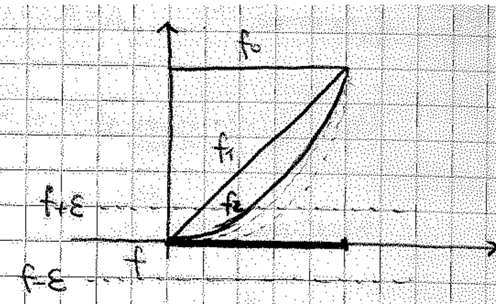
ES. $f_n(x) = e^{-nx}$ : $1, e^{-x}, e^{-2x}, \dots$

DEF. Data una successione di funzioni $f_n(x)$ definitivamente in A e una funzione f definita in A, si dice che $f_n(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE a f in A se

$\forall x \in A, \ \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

cioè $\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
(N può dipendere sia da $\varepsilon$ sia da x)

ES $f_n(x)=x^n \quad A=[0,1)$

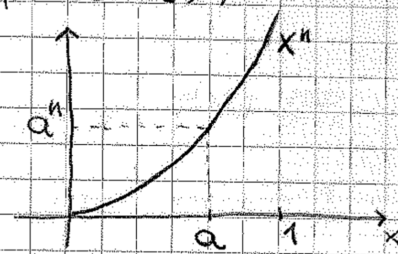



Convergenza puntuale $\lim_{n\to\infty} x^n = \boxed{0}$

Convergenza uniforme

$$\sup_{x\in[0,1)} |x^n-0| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1 \quad \forall n$$

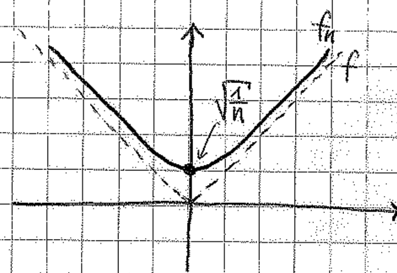
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1)} |x^n-0| = \lim_{n\to\infty} 1 = \boxed{1} \neq 0 \rightarrow \text{conv. non uniforme in } [0,1)$$




Cosa succede in $[0,a]$ con $a<1$?

$$\sup_{x\in[0,a]} |x^n-0| = \sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,a]} |x^n-0| = \lim_{n\to\infty} a^n = \boxed{0} \rightarrow \text{CONV. UNIFORME in } [0,a],\ 0<a<1$$



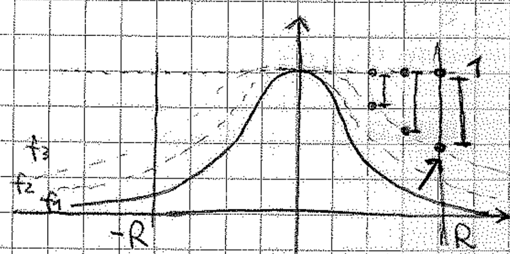

ES $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \quad n\geq 1 \quad A\equiv\mathbb{R}$

Conv. puntuale $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|$

Conv. uniforme

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)| = \sqrt{\tfrac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\tfrac{1}{n}} = \boxed{0} \rightarrow \text{conv. unif in } \mathbb{R}$$




ES $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n^2}} \quad n\geq 1,\ \mathbb{R}$

Conv. puntuale: $\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{x^2}{n^2}} = 1$

Conv. uniforme: $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |e^{-\frac{x^2}{n^2}}-1| = 1 \quad \forall n$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |e^{-\frac{x^2}{n^2}}-1| = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ no convergenza uniforme, ma su $[-R,R]$?

$$\sup_{x\in[-R,R]} \left(1-e^{-\frac{x^2}{n^2}}\right) = 1-e^{-\frac{R^2}{n^2}}$$

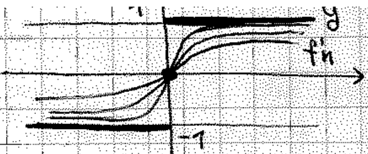
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-R,R]} \left(1-e^{-\frac{x^2}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-e^{-\frac{R^2}{n^2}}\right) = 1-1 = \boxed{0} \Rightarrow \text{conv. uniforme in } [-R,R]$$

ESAME

- 7 domande a risp. chiusa (giusta 3, non data 0, sbagliata -1)
- 1 es. completo (9 punti)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 64

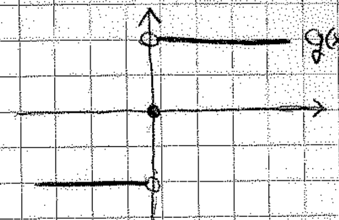
ES. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ $\mathbb{R}$




$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$ e converge unif. su $\mathbb{R}$

$f$ non è di classe $C^1$ perché non è derivabile $\Rightarrow$ ~~la~~ $f'$ non è uniform. converg.

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[\text{conv. punt.}]{n\to\infty} \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{x}{|x|} & x\neq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases} \text{(funzione segno)}$$




$f_n'$ non può convergere unif. perché ~~la~~ sua funzione ($g(x)$) limite non è continua
$\Rightarrow$ $f$ non è derivabile

oppure $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n'(x) - g(x)| = 1$

Studio il sup in un intorno di 0, es. $f_n'\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

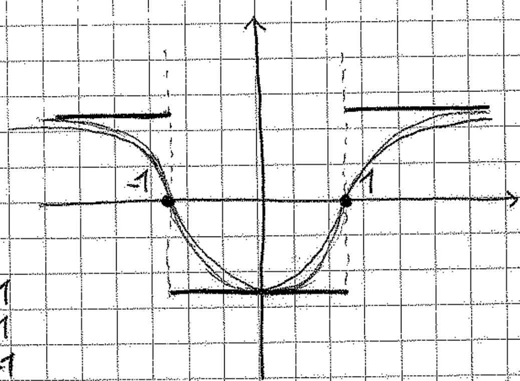
$\left|f_n'\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right| = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)| \Rightarrow$ sup non può essere 0 $\Rightarrow$ no conv. unif.

04.12.12

PROP. $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente in $A$
$x_n \to x$ in $A$

$\Rightarrow f_n(x_n) \to f(x)$

ES. $f_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \frac{(x^2)^n - 1}{(x^2)^n+1}$




Conv. puntuale

$$\left.\begin{array}{ll} x=0, & f_n(x) \to -1 \\ |x|<1, & f_n(x) \to -1 \\ |x|=1, & f_n(x) \to 0 \\ |x|>1, & f_n(x) \to 1 \end{array}\right\} n\to\infty \quad f(x) = \begin{cases} -1 & |x|<1 \\ 0 & |x|=1 \\ 1 & |x|>1 \end{cases}$$

Non ci può essere conv. uniforme in $\mathbb{R}$ perché la $f$ limite $f(x)$ non è continua

Studio la conv. unif. in intervalli tipo $[0,R]$ con $0<R<1$

$$f_n(x) - f(x) = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} + 1 = \frac{x^{2n} \cancel{-1} + x^{2n} \cancel{+1}}{x^{2n}+1} = \frac{2x^{2n}}{x^{2n}+1} \leq 2R^{2n} \quad \forall x\in[0,R]$$

$$\sup_{x\in[0,R]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,R]} \frac{2x^{2n}}{x^{2n}+1} = 2R^{2n}$$

$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,R]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} 2R^{2n} = 0 \Rightarrow$ conv. unif. in $[0,R]$ e per simmetria in tutti gli intervalli $[-R,R]$ con $0<R<1$

# SERIE DI FUNZIONI

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad f_n : A \to \mathbb{R}$

$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots$

Somme ridotte (o parziali):
$$S_0(x) = f_0(x)$$
$$S_1(x) = f_0(x) + f_1(x)$$
$$S_2(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x)$$
$$\dots$$
$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

DEF. Si dice che la serie di f.z. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

- CONVERGE PUNTUALMENTE su A se la successione delle somme parziali $S_n(x)$ converge puntualmente su A
- CONVERGE ASSOLUTAMENTE su A se $\forall x \in A$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ converge puntualmente su A
- CONVERGE UNIFORMEMENTE su A se la successione delle somme parziali $S_n(x)$ converge uniformemente su A

PROPRIETÀ TRASFERIBILI DALLE SUCCESSIONI ALLE SERIE (PROP. ①, PROP. ②)

ES. $f_n(x)$ continua in $[a,b]$

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ conv. unif. in $[a,b]$

$\Rightarrow S(x)$ funzione somma continua in $[a,b]$

ES. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n$ : serie geometrica di ragione $e^{-x}$

$|e^{-x}| = \frac{1}{e^x} < 1 \quad \forall x > 0 \quad \rightarrow$ serie geom. converge puntualmente per $\forall x > 0$

Somma $S(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$

Per $x > 0$ anche convergenza assoluta

CRITERIO di WEIERSTRASS per la conv. uniforme di una serie di funzioni

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ su A

$\exists\, M_n \geq 0$ tale che $(*) \begin{cases} |f_n(x)| \leq M_n, & \forall x \in A \\ \sum_{n=0}^{\infty} M_n \text{ converge} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE, ASS. e UNIF. su A

DIM. criterio di Weierstrass

- CONV. ASSOLUTA

$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$

per ipotesi $|f_n(x)| \leq M_n$, $\sum_n M_n$ converge

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ converge per il criterio del confronto

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente

- CONV. UNIFORME

$\sum_n f_n(x)$

Funzione somma $S(x)$ ben definita per ogni $x \in A$ perché $\sum_n f_n(x)$ converge punt.

$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x)$

$S(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$

$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \quad \forall x \in A$

↳ "coda" di una serie numerica convergente

$\sup_{x \in A} |S_n(x) - S(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} M_k}_{= M} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} M_k}_{\downarrow n\to\infty \; M} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k}_{\downarrow n\to\infty \; 0}$$

$\Rightarrow$ per $n \to \infty$ $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \to 0$, quindi $\sup_{x \in A} |S_n(x) - S(x)| \to 0 \rightarrow$ conv. uniforme

P.227

# SERIE DI POTENZE

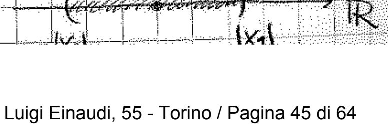
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad a_n \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$

$= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots$ (serie centrata in $x_0$)

Se $x_0 = 0$ : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

converge in $x=0$ : $a_0$

PROP. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge in un punto $x_1 \neq 0$, allora converge assolutamente in ogni punto $x \in (-|x_1|, |x_1|)$



13.12.12

...M.

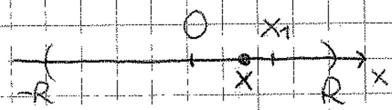
...) $R=0$


...on converge perché per il lemma dovrebbe convergere tra $-|x|$ e $|x|$

non converge per def di raggio di convergenza

...) $0<R<+\infty$

$x\in(-R,R)$: $\exists x_1$: $0<x_1<R$
$|x|<x_1$
serie converge in $x_1$




$\Rightarrow$ (dal lemma) la serie converge assolutamente in $(-|x_1|,|x_1|)$
$\Rightarrow$ la serie converge ass. in $x$

$|a_n x^n| = |a_n|\cdot|x^n| \leq |a_n| k^n \quad \forall x\in[-k,k]$

$0<k<R$


$\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| k^n$ serie convergente perchè abbiamo dimostrato che in $(-R,R)$ c'è la conv. assoluta

$\Rightarrow$ (criterio di weierstrass) la serie converge uniformemente $\forall x\in[-k,k]$

Non converge per $|x|>R$

...) $R=+\infty$ dim. uguale al caso 2.

OSS. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad R>0$

la somma delle serie $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- è ben definita in $(-R,R)$
- è continua in $[-k,k]$, con $0<k<R$

$\Rightarrow$ $S(x)$ è continua in $(-R,R)$

ES. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x|<1$

$R=1$
- c. ass. $(-1,1)$
- c. unif. $[-k,k]$, $0<k<1$
- $\frac{1}{1-x}$ continua in $(-1,1)$
- in $(-1,1)$ NO CONV. UNIF.

## TEOR. di ABEL

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $R>0$, $0<R<+\infty$

Allora:

- se la serie converge in $x=R$, allora conv. unif. in $[-k,R]$ con $0<k<R$
- se la serie converge in $x=-R$, allora conv. unif. in $[-R,k]$ con $0<k<R$
- se la serie converge in $x=R$ e $x=-R$, allora conv. unif. in tutto $[-R,R]$

14.12.12

## SOMMA DI SERIE DI POTENZE

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ } relazione tra i vari R?

Somma: $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) x^n$

TEOR. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di conv. $R_1$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ha raggio $R_2$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) x^n$ ha raggio di conv. $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

Se $R_1 \neq R_2$, allora $R = \min\{R_1, R_2\}$.

ES. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2^n}\right) x^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n$ , $R_1 = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ , $R_2 = 2$

$\Rightarrow R_1 \neq R_2 \Rightarrow \boxed{R=1}$

ES. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , $\sum_{n=0}^{\infty} -x^n$

$R_1 = 1$ , $R_2 = 1$

ma Somma: $\sum_{n=0}^{\infty} (1-1) x^n = 0 \rightarrow \boxed{R=\infty}$

## PRODOTTO ALLA CAUCHY

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$

Prodotto: $(a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) x^3 + \dots$

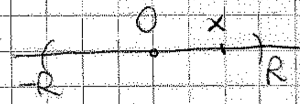
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ , con } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}$$

## INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $R>0$

$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è una funzione continua in $(-R,R)$

$\Rightarrow \forall x\in(-R,R)$, $S(x)$ è integrabile



$$\int_0^x S(t)\,dt$$

Poichè abbiamo la convergenza uniforme, allora:

$$\int_0^x S(t)\,dt=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}}_{\text{raggio di convergenza } R \text{ (= alla serie assegnata)}} \qquad \forall x\in(-R,R)$$

(ES.) $\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n$ converge per $|t|<1$

$S(t)=\frac{1}{1+t}$

Prendo $x\in(-1,1)$:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt=\log(1+x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-t)^n\,dt= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

$\Rightarrow \log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \quad \forall x\in(-1,1)$ (vale anche per $x=1$, non per $x=-1$)

(ES.) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$

insieme di convergenza: $[-1,1)$

Converge uniformemente in $[-1,1)$?

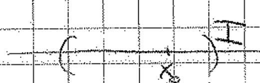
$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$

$$xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\,dt=\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\Big)dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}\,dt=-\log(1-x)$$

$\Rightarrow S(x)=-\frac{\log(1-x)}{x}$ No conv. uniforme perchè in $x\to1$, la f.z di partenza è limitata, invece il limite non lo è.

## SERIE DI TAYLOR

$f(x)\in C^{\infty}$ su $I$

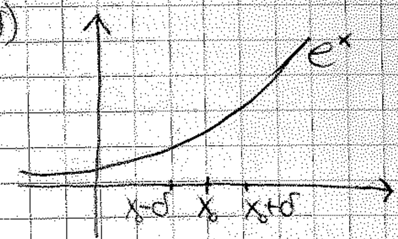


$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \leftarrow \text{serie di potenze centrata in } x_0$$

↳ SERIE DI TAYLOR della funzione

ES. $f(x)=e^x \quad f^{(n)}(x)=e^x \quad |f^{(n)}(x)|=e^x \le e^{x_0+\delta} \quad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$

A




considero $B=1 \Rightarrow B^n=1$

$\Rightarrow e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n \quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ e $\forall\delta$

$\Rightarrow e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Per $x_0=0$: $\quad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \quad \forall x\in\mathbb{R}$

ES. $f(x)=\sin x \quad x_0\in\mathbb{R}$

$|f^{(n)}(x)|\le 1 \to A, \quad B=1$

$\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, ma $\delta$ è arbitrario $\Rightarrow f(x)=\sin x$ è analitica $\forall x\in\mathbb{R}$

per $x_0=0$: $\boxed{\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

ES. $f(x)=\cos x \quad \boxed{\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

ES. $f(x)=\log(1+x)$

$\boxed{\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n} \quad \forall x\in(-1,1]$

ES. $\boxed{\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}}$

ES. $\boxed{\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}}$

ES. $\frac{x+2}{x^2-8x+12}$

- $x_0=0$ (Taylor)?
- $R$?
- $f^{(n)}(0)$, $\forall n$?

$\frac{x+2}{x^2-8x+12}=\frac{A}{x-6}+\frac{B}{x-2}=\frac{(A+B)x-2A-6B}{(x-6)(x-2)}$ $\quad \begin{cases}A+B=1\\-2A-6B=2\end{cases} \quad \begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$

$\frac{x+2}{x^2-8x+12}=\frac{2}{x-6}-\frac{1}{x-2}$

$\frac{2}{x-6}=2\frac{\frac{1}{6}}{\frac{x}{6}-1}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{6}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{6}\right)^n \quad \left|\frac{x}{6}\right|<1 \quad |x|<6$

$-\frac{1}{x-2}=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad |x|<2$

ES) • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6 \cos(nx)}{n!}$ $\quad a_n = \frac{n^6}{n!}$

Studio direttamente la conv. assoluta, perchè sono serie a termini alterni:

$$\left|\frac{n^6\cos(nx)}{n!}\right| \leq \frac{n^6}{n!} = \underbrace{\frac{n^5}{(n-1)!}}_{\text{serie numerica convergente}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Per il criterio di Weierstrass, la serie converge ass. e unif. in tutto $\mathbb{R}$

ES) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$

$$\left|\frac{\cos(nx)}{n^{3/2}}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{n^{3/2}}}_{\text{converge}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ per il crit. di W. la serie converge ass. e unif. in $\mathbb{R}$

TEOR. Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|+|b_n| < +\infty$ (la serie converge), allora la serie $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ converge assolutamente e uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ (conseguenza del crit. di Weierstrass)

SERIE DI FOURIER: [redacted]

$$\boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)} \qquad a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

Supponiamo $f(x)$ funzione periodica di periodo $2\pi$

$$f(x+2\pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Supponiamo $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$

Che relazione c'è tra $f, a_0, a_n, b_n$?

I) Integriamo tra $-\pi$ e $\pi$ e supponiamo di poter scambiare l'$\int$ con la $\Sigma$:

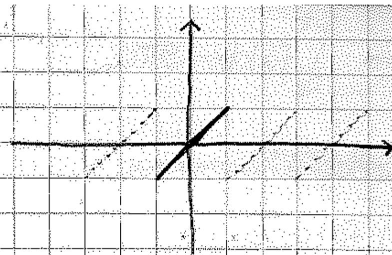
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx\right)$$

- $a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi a_0$
- $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,dx = 0$

infatti $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx = \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx = \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

**ES.** $f(x) = x$ in $(-\pi, \pi]$

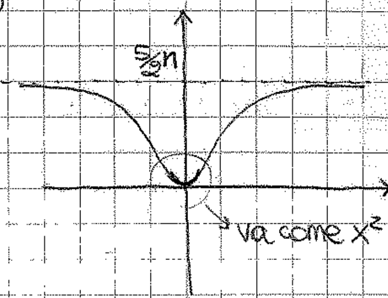


f dispari $\rightarrow a_0 = 0, a_n = 0$

Calcolo $b_n$ ...

$$\Rightarrow \underbrace{2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)}$$

**ES. 108** $f_n(x) = \dfrac{5nx^2}{2x^2+6n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \forall x$ conv. puntuale ✓ (f.ne limite $f=0$)




- Conv. unif.? NO in tutto $\mathbb{R}$

perchè $f=0$, ma $f_n$ non va a zero

oppure se scelgo $x_n = n$:

$f_n(x_n) = f_n(n) = \dfrac{5n^3}{8n^2} = \dfrac{5}{8}n$ non converge

- Conv. unif. in $[-R, R]$?

$$\sup_{x\in[-R,R]} \frac{5nx^2}{2x^2+6n^2} = \frac{5nR^2}{2R^2+6n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad ✓$$

(posso giustificare il fatto che la f.ne è crescente su $[0,+\infty)$ calcolando la derivata)

**ES.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{3nx}}{3^{2n}+1}$

$2^{3nx} = (2^{3x})^n$ pongo $t = 2^{3x} \rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{3^{2n}+1}$ serie di potenze

Tramite il crit. della radice, trovo $R=9 \Rightarrow$ converge per $|t|<9$

Torno alla x: $2^{3x} < 9$, $3x < \log_2(9)$ $x < \frac{1}{3}\log_2(9)$

$\Rightarrow$ la serie converge in $\underbrace{\left(-\infty, \frac{1}{3}\log_2(9)\right)}$

in $x = \frac{1}{3}\log_2(9)$?

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{9^n}{9^n+1} \rightarrow$ NO perchè non è infinitesimo

non è un intervallo simmetrico perchè in t è una serie di potenze, ma in x no!

II) analogo ragionamento per f pari e $P_n$, spazio di polinomi "pari" di grado $\leq n$ (in questo caso bisogna tener conto sia di $a_0$ sia di $b_0$)

III) f qualsiasi: $f = f_{pari} + f_{dispari}$ $\quad f_p = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ $\quad f_d = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

$$\|f-q\|_2^2 = \|f_p + f_d - p - d\|_2^2 = \qquad \forall q \in T_n \quad q = \underset{P_n}{p} + \underset{D_n}{d}$$

$$= \|f_p - p + f_d - d\|_2^2 = \|f_p - p\|_2^2 + \|f_d - d\|_2^2 + \underbrace{\cancel{2\int_{-\pi}^{\pi}(f_p-p)(f_d-d)\,dx}}_{=0 \text{ perché la } f_d \text{ è dispari}}$$

Per minimizzare devo prendere il polinomio di F di $f_p$ e il polinomio di F di $f_d$. Sommando i due polinomi, trovo il polinomio di Fourier di f.

<u>OSS.</u> $\|f - S_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx$ SCARTO QUADRATICO MEDIO

$$\|f-S_n\|_2^2 = \left\|f - \left[a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right]\right\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right]^2 dx +$$
$$-2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right]dx =$$

$$= \|f\|_2^2 + a_0^2\cdot 2\pi + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) - 4\pi a_0^2 - 2\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) =$$

$$= \|f\|_2^2 - 2\pi a_0^2 - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

Quindi:

$$\|f-S_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi a_0^2 - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

$$2\pi a_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) = \|f\|_2^2 - \|f-S_n\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \quad \forall n$$

maggioro

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$ è una serie che converge

$\Rightarrow a_k^2 + b_k^2 \to 0$ per $k \to \infty$, quindi $a_k \to 0$ e $b_k \to 0$

<u>LEMMA DI RIEMANN - LEBESGUE</u> Se f è periodica di periodo $2\pi$ e integrabile in $[-\pi, \pi]$, allora $a_k$ e $b_k$ tendono a zero per $k \to \infty$

## FORMULA DI PARSEVAL

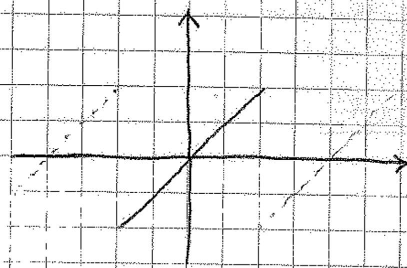
$f$ periodica di periodo $2\pi$ e integrabile su $[-\pi,\pi]$, allora

$$\boxed{\|f\|_2^2 = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)}$$

**DIM.** Abbiamo già dimostrato che

$$\|f\|_2^2 = \underbrace{\|f - S_n\|_2^2}_{\downarrow n\to\infty \quad 0} + 2\pi a_0^2 + \underbrace{\pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)}_{\downarrow n\to\infty \quad \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2+b_k^2)}$$

**ES.** $f(x) = x \qquad x \in (-\pi, \pi] \qquad$ Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$



$f$ dispari $\Rightarrow a_0 = a_k = 0 \quad \forall k \geq 1$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx)\,dx = \ldots = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^3$$

$$\|f\|_2^2 = \pi \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \qquad \frac{2}{3}\pi^{\cancel{3}\,2} = \cancel{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

**DEF.** $f$ periodica di periodo $2\pi$. Si dice che $f$ è regolare a tratti se $\exists$ un numero finito di punti $-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = \pi$ tali che

1) $f \in C^1(x_{i-1}, x_i) \quad \forall i = 1, \ldots, N$

2) $\exists$ finiti i limiti $f(x_i^+) = \lim_{x\to x_i^+} f(x)$ , $f(x_i^-) = \lim_{x \to x_i^-} f(x)$ $\quad \forall i = 1, \ldots, N$

$\lim_{x\to x_i^+} f'(x)$ , $\lim_{x\to x_i^-} f'(x)$

(possono esserci "salti" ma non punti di discontinuità a tg. verticale)

**TEOR. di CONVERGENZA PUNTUALE** $f$ periodica di periodo $2\pi$ e regolare a tratti $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di $f$ converge a

$$\boxed{\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right]}$$ (semisomma del "salto")

Quindi in particolare se $f$ è:
- periodica
- regolare a tratti
- continua in $x_0$

$\Rightarrow$ la sua serie di Fourier converge a $f(x_0)$

**PROP.** $\begin{cases} f \text{ periodica di periodo } 2\pi \\ f \text{ continua in } [-\pi,\pi] \\ f \text{ regolare a tratti su } [-\pi,\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow \quad k a_k = -b'_k \quad k b_k = a'_k \quad \forall k \geq 1$

dove $a'_k, b'_k$ sono i coefficienti di Fourier della f.z. derivata $f'$ di $f$ e $a_k, b_k$ sono i coeff. di F. di $f$.

**DIM.** $$k a_k = \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{k}{\pi}\frac{1}{k}\underbrace{\left[\sin(kx)f(x)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(kx)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(kx)\,dx = -b'_k$$

**TEOR. di INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE DELLA SERIE DI F.**

$f$ periodica di periodo $2\pi$
$f$ regolare a tratti in $[-\pi,\pi]$

Fissato $x_0 \in [-\pi,\pi]$, allora

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = a_0(x-x_0) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}\left[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right]dx \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

**DIM.** $$F(x) = \int_{-\pi}^{x}(f(t)-a_0)\,dt \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

- $f$ continua in $[-\pi,\pi]$
- $F(-\pi) = 0 = F(\pi)$

$\Big\} \Rightarrow F$ continua in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ la serie di F. di $F$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$

$A_0, A_k, B_k$

dalla prop. precedente: $k A_k = -b_k \,,\; k B_k = a_k \quad \forall k \geq 1$

Fissati $x_0, x \in [-\pi,\pi]$:

$$\int_{x_0}^{x}(f(t)-a_0)\,dt = F(x) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\cos(kx)-\cos(kx_0)) + B_k(\sin(kx)-\sin(kx_0)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} -b_k\,\frac{\cos(kx)-\cos(kx_0)}{k} + a_k\,\frac{\sin(kx)-\sin(kx_0)}{k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} +b_k\int_{x_0}^{x}\sin(kt)\,dt + a_k\int_{x_0}^{x}\cos(kt)\,dt$$