NUMERO: 678

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Taberna

MATERIA: Analisi Matematica I
Prof. Fagnani

ANALISI I

G. Taberna

- MAGGIOR. e MINOR.

Dato A, un maggiorante di A è un qualunque $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq a$, $\forall a \in A$

" , un minorante di A è un qualunque $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq a$, $\forall a \in \mathbb{R}$

A^+ : insieme dei magg.

A^- : " " min.

ESERCIZIO Calcolare

$A = \{0,1\} \cup [2,3[$

$A = \mathbb{N}$

$A = \mathbb{Z}$

$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

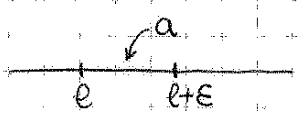
PROP. sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $\ell \in \mathbb{R}$, sono fatti equivalenti:

(1) $\ell = \inf A$

(2) ℓ soddisfa:

a. $\ell \leq a \ \forall a \in A$

b. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a < \ell + \varepsilon$



TEOR. esistenza radici

Sia $b \geq 0$ reale e sia $n \in \mathbb{N}$, allora esiste uno e uno solo $a \geq 0$ reale tale che

$$a^n = b$$

a è detto la radice n-esima positiva di b. $a = \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$

NOTAZIONE $x \in \mathbb{R}$ $x \geq 0$ $m,n \in \mathbb{N}$

$x^{\frac{m}{n}} := (x^m)^{\frac{1}{n}} \overset{?}{=} (x^{\frac{1}{n}})^m$

$x > 0$, $x^{-\frac{m}{n}} := x^{\frac{1}{\frac{m}{n}}}$ ⟵

$x^0 = 1$

$q, q' \in \mathbb{Q}$ $x^{q+q'} = x^q \cdot x^{q'}$

$x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$ $y > 0$ come si definisce x^y?

$y = k_0, k_1 k_2 \ldots$ considero $y_n = k_0, k_1 k_2 \ldots k_n \rightarrow x^{y_n}$

- se $x > 1$, $x^y := \sup \{ x^{y_n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ (x^{y_n} cresce)
- se $x < 1$, $x^y := \inf \{ x^{y_n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ (x^{y_n} diminuisce)

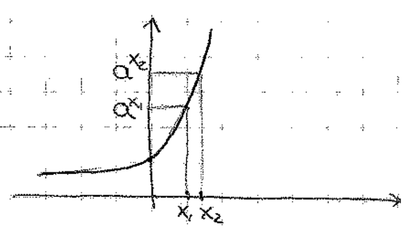
$y < 0$ $x^y := \frac{1}{x^{-y}}$

Proprietà (1) $x^{y_1 + y_2} = x^{y_1} \cdot x^{y_2}$ (3) $(x_1 x_2)^y = x_1^y x_2^y$

(2) $(x^{y_1})^{y_2} = x^{y_1 y_2}$

$a > 0$ $y = a^x$

- $a = 1$ $y = 1, \forall x$
- $a > 1$



$a^x = b$ $b > 0$ $x = \log_a b$
↓
esiste sempre? (dimostrare la continuità

DEF. Sia (a_n) una successione. L'insieme $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ è detto SUPPORTO (o IMMAGINE) della successione.

Consideriamo $(a_n), (b_n), (c_n)$

$\{a_n\} = (-1)^n$

$$b_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \leq 5 \\ +1 & \text{se } n \geq 6 \end{cases}$$

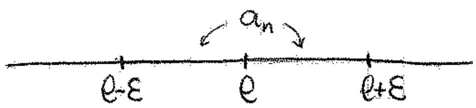
$$c_n = \begin{cases} +1 & \text{se } n \leq 7 \\ -1 & \text{se } n \geq 8 \end{cases}$$

pur essendo successioni diverse, $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{+1, -1\}$

LIMITE

DEF. Si dice che una successione (a_n) converge a un numero reale ℓ quando n tende a $+\infty$ se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - \ell| < \varepsilon \ \forall n \geq \bar{n}$ *

OSS. $|a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ (intorno centrato di ℓ)



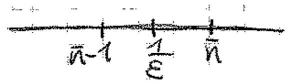
NOTAZ. $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$

ℓ è detto LIMITE della successione

ES. Sia (a_n) data da $a_n = \frac{1}{n}$. Verifichiamo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo $|a_n - \overset{\ell}{0}| < \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$



$(n > \bar{n})$

* questa parte si può anche "codificare" come:

$|a_n - \ell| < \varepsilon$ definitivamente
↳ da un certo punto in poi

ES. Sia $c \in]0,1[$ e consideriamo la successione (a_n) definita da $a_n = c^n$

Verifichiamo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

- Fissiamo $\varepsilon > 0$ $\quad c^n < \varepsilon$ definitivamente? ... (seguiamo un'altra strada)
- Considero $\frac{1}{c} > 1 \Rightarrow \frac{1}{c} = 1 + x$ con $x > 0$ $\left(x = \frac{1}{c} - 1\right)$
- $\frac{1}{c^n} = (1+x)^n \qquad (1+x)^n = 1 + nx + \ldots + x^n \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx$

$\frac{1}{c^n} \geq 1 + nx \qquad c^n \leq \frac{1}{1+nx}$

- dato che è una successione mai negativa, allora $\quad 0 \leq c^n \leq \frac{1}{1+nx}$
- basta far vedere che $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$

$\frac{1}{1+nx} < \varepsilon \qquad 1 + nx > \frac{1}{\varepsilon} \qquad n > \frac{1-\varepsilon}{x\varepsilon}$

- per il teor. del confronto, $\lim_{n \to +\infty} c^n = 0$

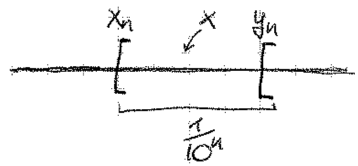
*

ES. Sia $x \in \mathbb{R}$ $\qquad x = k_0, k_1 k_2 \ldots \qquad x_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{k_i}{10^i} \qquad y_n = x_n + \frac{1}{10^n}$

$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = x$?

[* oss. $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} (a_n - \ell) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} |a_n - \ell| = 0$]

$|x_n - x| \leq \frac{1}{10^n} \qquad |y_n - x| \leq \frac{1}{10^n}$



$0 \leq |x_n - x| \leq \frac{1}{10^n}$

$0 \leq |y_n - x| \leq \frac{1}{10^n}$

quindi, per confronto, $\lim_{n \to +\infty} |x_n - x| = 0$

$\lim_{n \to +\infty} |y_n - x| = 0 \qquad$ cioè $\lim_{n \to +\infty} x_n = x = \lim_{n \to +\infty} y_n$

DIM. (1)

Dovrei dimostrare che $|a_n+b_n-(\ell_1+\ell_2)|<\varepsilon$ ...

Usando la disuguaglianza triangolare: $|(a_n-\ell_1)+(b_n-\ell_2)| \leq |a_n-\ell_1|+|b_n-\ell_2| < \varepsilon$?

So che $|a_n-\ell_1|<\frac{\varepsilon}{2}$ definitiv. e $|b_n-\ell_2|<\frac{\varepsilon}{2}$ definitiv., quindi $|a_n-\ell_1|+|b_n-\ell_2|<\varepsilon$ definitiv.

DIM. (2)

disuguaglianza triangolare

$|a_nb_n-\ell_1\ell_2| = |a_nb_n-a_n\ell_2+a_n\ell_2-\ell_1\ell_2| = |a_n(b_n-\ell_2)+(a_n-\ell_1)\ell_2| \leq |a_n||b_n-\ell_2|+|\ell_2||a_n-\ell_1| < \varepsilon$?

Fissiamo $\varepsilon>0$ e consideriamo

(1) $|a_n|\cdot|b_n-\ell_2|<\frac{\varepsilon}{2}$

(2) $|\ell_2|\cdot|a_n-\ell_1|<\frac{\varepsilon}{2}$

Facciamo vedere che entrambe sono definitiv. vere

(2) Se $\ell_2\neq 0 \Rightarrow |a_n-\ell_1|<\frac{\varepsilon}{2|\ell_2|}$ definitiv.

Se $\ell_2=0 \Rightarrow 0<\frac{\varepsilon}{2}$ vera sempre

(1) Poiché $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ essa è limitata, cioè $\exists M>0$ tale che $|a_n|\leq M, \forall n\in\mathbb{N}$

Allora $|a_n|\cdot|b_n-\ell_2| \leq M\cdot|b_n-\ell_2|<\frac{\varepsilon}{2}$?

$M\cdot|b_n-\ell_2|<\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow |b_n-\ell_2|<\frac{\varepsilon}{2M}$ definitiv.

Quindi $|a_nb_n-\ell_1\ell_2| \leq |a_n|\cdot|b_n-\ell_2|+|\ell_2|\cdot|a_n-\ell_1|<\varepsilon$

ES. $(a_n): a_n=\frac{n^2-4n}{n^3+3}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n=$?

$$a_n=\frac{n^2(1-\frac{4}{n})}{n^3(1+\frac{3}{n^3})}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1-\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n^3}}$$

$1-\frac{4}{n} \longrightarrow 1-4\cdot 0=1$

$1+\frac{3}{n^3} \longrightarrow 1+3\cdot \overset{0\cdot 0}{0}=1$

$$\frac{1-\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n^3}} \longrightarrow \frac{1}{1}=1$$

$$a_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{1-\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n^3}} \longrightarrow 0\cdot 1=0$$

$\lim_{n\to+\infty} a_n=0$

PROP. $(a_n),(b_n)$ successione. Allora,

(1) $a_n\to+\infty$, $b_n\to\ell$ (finito, $+\infty$) $\Rightarrow a_n+b_n\to+\infty$

(2) $a_n\to-\infty$, $b_n\to\ell$ (finito, $-\infty$) $\Rightarrow a_n+b_n\to-\infty$

(3) $a_n\to+\infty$, $b_n\to\ell$ (>0, $+\infty$) $\Rightarrow a_n\cdot b_n\to+\infty$

(4) $a_n\to+\infty$, $b_n\to\ell$ (<0, $-\infty$) $\Rightarrow a_n b_n\to-\infty$

(5) $a_n\to\pm\infty \Rightarrow \frac{1}{a_n}\to 0$

DIM.

$|b_n| \leq M, \forall n$ (con $M>0$)

$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |a_n| \qquad M \cdot |a_n| \to 0$

$0 \leq |a_n b_n| \leq M \cdot |a_n|$ quindi per confronto $|a_n b_n| \to 0$

$a_n \to 0 \quad a_n$ infinitesima

DEF.
Una successione (a_n) si dice MONOTONA CRESCENTE (DECRESCENTE) se $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ $(a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N})$
se le diseguaglianze sono strette si parla di STRETTAMENTE CRESC. (DECRESC.)

ES. $a_n = c^n$

$c>1 \quad c^{n+1} > c^n$: STRET. CRESCENTE $\qquad c=0$ CRESC./DECRESC.

$0<c<1 \quad c^{n+1} < c^n$: STRET. DECRESCENTE $\qquad c<0$ NÈ CRESC./NÈ DECRESC. (oscilla)

$c=1$ CRESCENTE/DECRESC.

OSS. Le successioni costanti sono sia crescenti sia decrescenti

TEOR.① Sia (a_n) una successione crescente. Allora esiste sempre il limite di (a_n) per $n \to +\infty$ e coincide con il $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, cioè $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

DIM. caso in cui $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = L$ finito

- Fissiamo $\varepsilon>0$ e facciamo vedere che $|a_n - L| < \varepsilon$ definitiv., cioè che $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$ definitiv.
- $a_n < L+\varepsilon$ sempre vera ($L+\varepsilon$ è maggiorante)
- $a_n > L-\varepsilon$? Per la proprietà caratterizzante del sup, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} > L-\varepsilon$
- Poiché a_n è ipotizzata crescente, si ha che $a_n > L-\varepsilon, \forall n \geq n_0$

TEOR. ② Sia (a_n) una successione decrescente. Allora esiste sempre il limite di (a_n) per $n \to +\infty$ e coincide con il $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

ES. Serie di Fibonacci

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (*) \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases} \qquad a_n > 0$$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} > a_n \qquad$ STR. CRESCENTE $\to$ esiste sempre il limite

$\lim_{n\to+\infty} a_n = ?$

- Se $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ finito >0, allora $a_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, $a_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Utilizzando le proprietà algebriche dei limiti su (*) si otterrebbe $\ell = \ell + \ell$ ASSURDO

- Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 89

20.10.11

$a_n = n$, $b_n = n^2$, $c_n = 2^n$

$\frac{n^2}{n} = n \to +\infty \qquad \frac{2^n}{n} \to +\infty$?

PROP. Sia (a_n) successione : $a_n > 0 \ \forall n$ e tale che $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Allora

(1) se $q > 1$ $(+\infty)$ $\Rightarrow a_n \to +\infty$

(2) se $q < 1 \Rightarrow a_n \to 0$

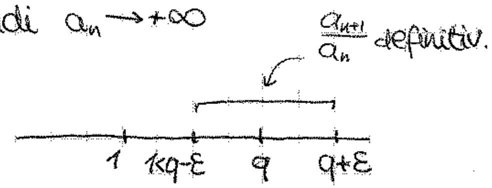
*

ES.

$a_n = \frac{c^n}{n^k} \qquad c > 1, k \in \mathbb{N}$

Applico la PROP.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c^{n+1}}{(n+1)^k} \cdot \frac{n^k}{c^n} = c \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} c\ (>1)$ quindi $a_n \to +\infty$



*DIM. (1) $q > 1$, $q \in \mathbb{R}$

cioè $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon > 1$, $\forall n \geq n_0$

dato che il rapporto tende a $q > 1$, la successione è strettamente crescente da n_0 in poi.

Quindi se è monotona ammette limite $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ $(>0, +\infty)$

Se per assurdo ℓ fosse finito, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ell}{\ell} = 1$ (ASSURDO) $\Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

OSS. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\cancel{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \ \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{n_0+2}}{\cancel{a_{n_0+1}}} \cdot \frac{\cancel{a_{n_0+1}}}{\cancel{a_{n_0}}} \cdot \cancel{a_{n_0}} = a_n$

$a_n \geq (q-\varepsilon)^{n-n_0} \cdot a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

$a_n \geq \underbrace{(q-\varepsilon)^n}_{\text{cost.}} \ \underbrace{\frac{a_{n_0}}{(q-\varepsilon)^{n_0}}}_{\text{succ. geometrica}} \longrightarrow +\infty$

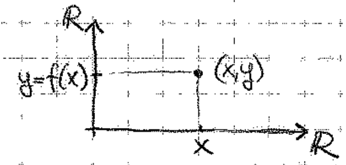
ES. $a_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (non si può utilizzare la PROP.)

$a_n \uparrow 1$ (a_n cresce tendendo verso 1)

DEF $f: A \to B$. Il grafico della funzione è $G_f = \{(a,b) \mid a \in A, b = f(a)\}$.

Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$: $G_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

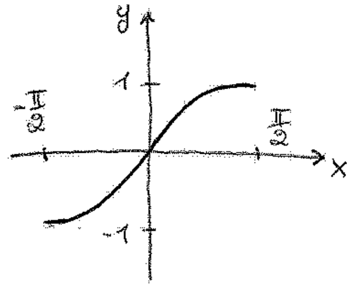


25.10.11

$A \subseteq \mathbb{R}$ unione di intervalli $f: A \to \mathbb{R}$ $\mathrm{Im} f \subseteq \mathbb{R}$

DEF f si dice INFERIORMENTE (SUPERIORMENTE) LIMITATA se $\mathrm{Im} f$ è tale.

ES. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$ $\mathrm{Im} f = [-1,1] \Rightarrow f$ è LIMITATA

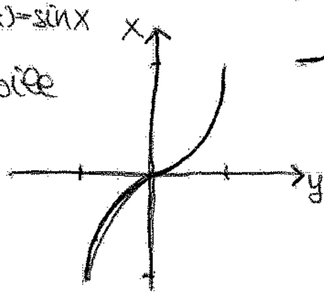


non è iniettiva

ma $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ data da $f(x) = \sin x$

è iniettiva e suriettiva $\Rightarrow$ invertibile

$f^{-1}(y) = \arcsin y$



ES. $f(x) = x^2$ $\mathrm{Im} f = [0, +\infty[\Rightarrow$ inferiormente limitata

$f: [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

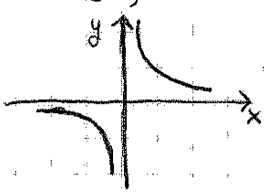
ES. $f(x) = 2x - 7$ $\mathrm{Im} f: \mathbb{R}$ $f^{-1}(y) = \frac{y+7}{2}$

OSS. f limitata $\Rightarrow f \circ g$ è limitata (perchè la limitatezza dipende dall'ultima funzione applicata)

ES. $\boxed{\sin}\left(\frac{2^x x - 18x^3}{(\mathrm{tg}\, x^2)^2 + x^{23}}\right)$ è limitata!

DEF $f: A \to \mathbb{R}$ si dice MONOTONA CRESC. (DECRESC.) se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$

ES. $f: \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$

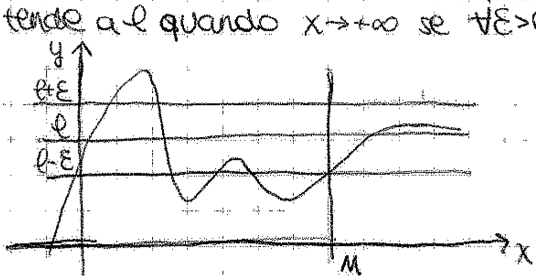


globalmente né crescente né decrescente

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$ $f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$ (se $y \neq 0$)

f decresc. su $]-\infty, 0[$
f decresc. su $]0, +\infty[$

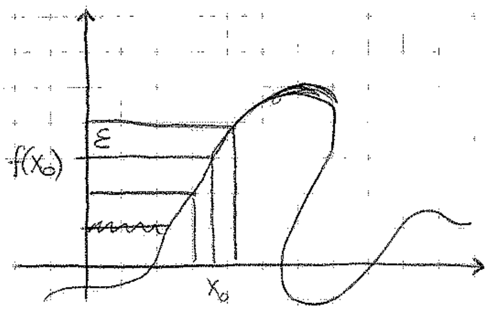
DEF Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che essa contiene semiretta destra $]a, +\infty[$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Si dice che f tende a ℓ quando $x \to +\infty$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ $\forall x > M, x \in A$.



FUNZIONI CONTINUE

PROP (LIMITATEZZA LOCALE) Sia $f: A \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in A$. Allora $\exists \delta > 0, \exists M > 0$ tale che $|f(x)| < M \quad \forall x \in A: |x - x_0| < \delta$

PROP. (PERMANENZA DEL SEGNO) $f: A \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) \neq 0$. Allora $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in A: |x - x_0| < \delta$ $f(x)$ e $f(x_0)$ hanno lo stesso segno



$f(x_0) > 0$ Scegliamo $\varepsilon > 0$ t.c. $f(x_0) - \varepsilon > 0$

Allora $\exists \delta > 0$ t.c. $0 < f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$
$\forall x \in A: |x - x_0| < \delta$

versione forte della PROP.
OSS. Scegliendo ad esempio $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, ottengo $\boxed{f(x) > \frac{f(x_0)}{2}}$ $\forall x \in A: |x - x_0| < \delta$

PROP. $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, f e g continue in x_0. Allora sono anche continue in x_0 le f2.

(1) $f \pm g$ (2) $f \cdot g$ (3) $\frac{f}{g}$ se $g(x) \neq 0 \; \forall x$

*

PROP. $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$
$x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0) \in B$

Hp. f continua in x_0
g continua in y_0

Allora, $g \circ f$ è continua in x_0

* DIM. (3)

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e studiamo $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right| < \varepsilon$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right| = \frac{|f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)|}{|g(x)| \cdot |g(x_0)|} = \frac{|f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)|}{|g(x)| \cdot |g(x_0)|} \leq$$ disuguaglianza triangolare

$$\leq \frac{|f(x) - f(x_0)| \cdot |g(x_0)| + |f(x_0)| \cdot |g(x) - g(x_0)|}{|g(x)| \cdot |g(x_0)|} \quad (*)$$

Si osservi che $g(x_0) \neq 0$ per ipotesi. Per la versione rafforzata del TEOR. della permanenza del segno si ha che

$(g(x_0) > 0)$ $\exists \delta_1 > 0 : g(x) > \frac{g(x_0)}{2}$ $\forall x \in A: |x - x_0| < \delta_1$

$(g(x_0) < 0)$ " $g(x) < \frac{g(x_0)}{2}$

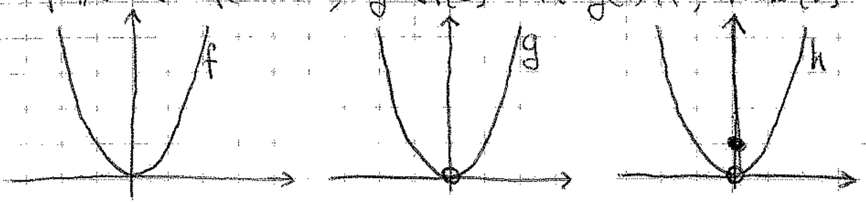
In entrambi i casi $|g(x)| > \frac{|g(x_0)|}{2}$, $|x - x_0| < \delta_1$

$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|g(x_0)|}$ quindi

$(*) \leq \frac{|f(x) - f(x_0)| \cdots}{\frac{|g(x_0)|^2}{2}}$ nell'ipotesi $|x - x_0| < \delta_1$

27.10.11

ES. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x)=x^2$, $g: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ $g(x)=x^2$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$



f è continua in 0, $\exists \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0 = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x)$

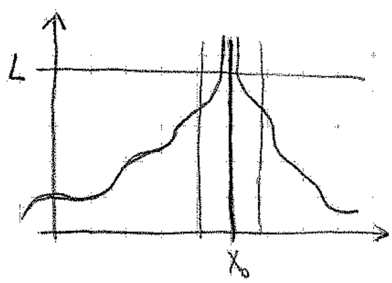
ma g e h non sono continue in 0
- g perchè non è definita in 0
- h perchè $h(0)=1 \neq \lim_{x\to 0} h(x)$

- $\tilde{f}(x)=f(x)$ perchè f è già continua
- $\tilde{g}(x)=g(x) \cup \{x_0\} = f(x)$
  ↳ estensione di g
- $\tilde{h}(x)=f(x)$
  ↳ modifica di h (cambia il valore di $h(0)$ da 1 a $\ell=0$)

*

DEF. Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{A}$. Si dice che f tende a $+\infty(-\infty)$ per $x\to x_0$ se accade che $\forall L \in \mathbb{R}$ $\exists \delta>0$ t.c. $f(x)>L$ $\forall x \in A\setminus\{x_0\}$ $|x-x_0|<\delta$
$(f(x)<L)$

ASINTOTO VERTICALE
$x=x_0$



* OSS. Il limite se esiste è unico.

PROPRIETÀ

TEOR. DEL CONFRONTO $f,g,h: A\to\mathbb{R}$, $x_0\in\bar{A}$ tale che

(1) $f(x)\leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in A$

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$ finito

allora $\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell$

OSS. Il teorema funziona anche per $x_0=\pm\infty$ e f,g,h sono definite su un'opportuna semiretta destra (sinistra).

DIM. Dobbiamo far vedere che $\exists \delta>0$ t.c. $|g(x)-\ell|<\varepsilon$ $\forall x\in A\setminus\{0\}$ $|x-x_0|<\delta$

Per l'ip. (2) $\exists \delta_1, \delta_2 >0$ t.c. $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ $\forall x \in A\setminus\{0\}$ $|x-x_0|<\delta_1$
$|h(x)-\ell|<\varepsilon$ $\forall x \in A\setminus\{0\}$ $|x-x_0|<\delta_2$

Scegliamo $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, quindi se $x\in A\setminus\{0\}$ $|x-x_0|<\delta$

$\ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$ $\quad$ $\ell-\varepsilon<h(x)<\ell+\varepsilon$

Usando l'ip. (1) si ottiene che

$\ell-\varepsilon<f(x)\leq g(x)\leq h(x)<\ell+\varepsilon$ $\forall x\in A\setminus\{x_0\}$ $|x-x_0|<\delta$

Da questo si ottiene la tesi $\ell-\varepsilon<g(x)<\ell+\varepsilon$ $\forall x\in A\setminus\{x_0\}$ t.c. $|x-x_0|<\delta$

03.11.10

PROPRIETÀ ALGEBRICHE DEI LIMITI CHE COINVOLGONO $\pm\infty$

$f,g: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$ $(x_0 = \pm\infty)$

PROP. (1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$ (finito, $+\infty$) $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = +\infty$

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$ (>0, $+\infty$) $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$

(3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ $\quad f(x)\neq 0\ \forall x \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(4) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ $\quad f(x)>0\ \forall x \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

FORME INDETERMINATE

- $+\infty + (-\infty)$? • $\pm\infty \cdot 0$? • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$? • $\frac{0}{0}$?
- 0^0? • 1^∞?

PROP. $f,g: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$

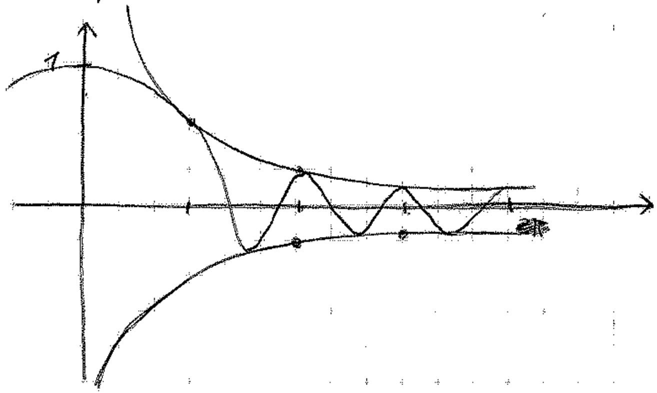
Hp. $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $g(x)$ è una funzione limitata

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$

ES. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$? $\qquad \frac{\sin x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{infinitesima}} \underbrace{(\sin x)}_{\text{limitata}}$

$x>0$ $\quad -\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$

$x\to 0$ forma indet. $\frac{0}{0}$

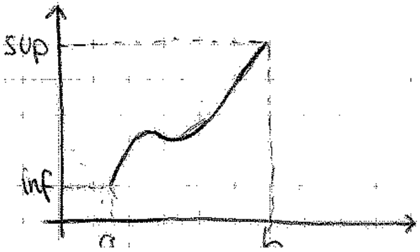


LIMITE DELLE FZ. MONOTONE $\qquad a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

PROP. $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ monotona crescente (decresc.). Allora esiste sempre

$\lim_{x\to b} f(x) = \sup\{f(x) \mid x\in]a,b[\}$ $\quad (= \inf\{f(x) \mid x \in]a,b[\})$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in]a,b[\}$ $\quad (= \sup\{f(x) \mid x \in]a,b[\})$



Consideriamo la successione $x_n = \frac{1}{n} \to 0$

$\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$?

Fisso $\varepsilon>0$ e studiamo $1-\varepsilon < a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$ (deve essere vera definitiv.) (DEF. DI LIMITE)

$1-\varepsilon < a^{\frac{1}{n}}$ sempre vera perchè $a^{\frac{1}{n}}>1$

$a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon \iff a<(1+\varepsilon)^n$ vera definitivamente perchè $(1+\varepsilon)^n \to +\infty$

quindi $a^{\frac{1}{n}} \to 1 \Rightarrow \ell^+ = 1$

A sinistra ragionamento analogo. considero $a_n = -\frac{1}{n}$

$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \Rightarrow \ell_- = 1$

Allora a^x è continua in 0.

2. $a>1$ continuità in $x_0 \in \mathbb{R}$

$a^x = a^{x-x_0+x_0} = a^{x_0} \cdot a^{x-x_0}$

$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \cdot 1$ → costante, quindi tende a sè stessa

↳ f2. continua in x_0 (abbiamo dimostrato prima che $\lim_{x\to 0} a^x = 1$)

Allora a^x è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. $0<a<1$

$f(x) = a^x = \frac{1}{\frac{1}{a^x}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ $\quad \left(\frac{1}{a}\right)>1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x$ è continua su $\mathbb{R}$, per il caso 2.

Quindi per le proprietà algebriche della continuità, $f(x)$ è continua su $\mathbb{R}$.

(2) $\operatorname{sen} x$ continua in $x_0 \in \mathbb{R}$

$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\frac{x-x_0}{2} \cos\frac{x+x_0}{2}$ (PROSTAFERESI)

$\sin\frac{x-x_0}{2}$ $\quad x \mapsto \frac{x-x_0}{2} \xrightarrow{\sin} \sin\frac{x-x_0}{2} \Rightarrow$ per il TEOR. di COMPOSIZ. dei LIMITI $\lim_{x\to x_0} \sin\frac{x-x_0}{2} = 0$

↳ continua in x_0 $\qquad$ ↳ tende a 0

Poichè $\cos\frac{x-x_0}{2}$ è limitata e $\lim_{x\to x_0} \sin() = 0$ $\Rightarrow \lim_{x\to x_0}(\sin x - \sin x_0) = 0$

Allora $\sin x$ è continua su $\mathbb{R}$.

(3) $\cos x$ continua su $\mathbb{R}$

$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad x \longmapsto \underset{\text{(continua)}}{x+\frac{\pi}{2}} \longmapsto \underset{\text{(continua)}}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

Allora $\cos x$ è continua perchè composizione di f2. continue

② $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \qquad \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha\right)$

$n \le x < n+1$ (penso alle succ. come fz. costanti a tratti)

(*) TEOR. f continua in x_0, $a_n \to x_0 \Rightarrow f(a_n) \xrightarrow{n\to+\infty} f(x_0)$

$\underline{\alpha=1}$ $\quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\frac{n}{n+1}} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{n+1}{n}}$

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\frac{n}{n+1}} = a^{\log_a\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\frac{n}{n+1}}} = a^{\frac{n}{n+1}\log_a\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}$

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} e$

Per (*), $\log_a\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to \log_a e$

$\Rightarrow \frac{n}{n+1}\log_a\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to \log_a e\cdot 1 = \log_a e$

$\frac{n}{n+1} \to 1$

Applico l'esponenziale $\Rightarrow a^{\frac{n}{n+1}\log_a\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \to a^{\log_a e} = e$

Per confronto $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$

anche $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\frac{n+1}{n}} \to e$

③ $\lim_{x\to+\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \log_a e$ per il teor. della composiz. dei limiti

$\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t} = \log_a e \qquad$ se $a=e$ $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

considero $t=\frac{1}{x}$ $\quad x=\frac{1}{t} \qquad t \longmapsto x=\frac{1}{t} \longmapsto x\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)$

se $t\to 0^+$ $x\to+\infty \Rightarrow \frac{\log_a(1+t)}{t} \to \log_a e$

se $t\to 0^-$ $x\to-\infty$

④ $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log_e a \qquad$ se $a=e$ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

$a^x-1=t \quad a^x=1+t \quad x=\log_a(1+t) \Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a$

per il TEOR. DI COMPOSIZIONE DEI LIMITI
(anche se il teor. prevede che la fz. esterna sia continua)

$x \longmapsto \underset{(=t)}{a^x-1} \longmapsto \frac{t}{\log_a(1+t)}$, composta: $\frac{a^x-1}{x}$

ESTENSIONI POSSIBILI DEL TEOR.

- g continua può essere rimpiazzato da $\exists\lim_{y\to\ell} g(y)=L$ e $f(x)\neq\ell$ $\forall x\neq x_0$
- se $\ell=\pm\infty$, $\exists\lim_{y\to\ell} g(y)=L$

* ES.

OSS. se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$ finito $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\ell \cdot g(x)} = 1 \Rightarrow f \sim \ell g \ (x\to x_0)$

PROPRIETÀ di $\sim$ $(x\to x_0)$

(1) $f \sim f \quad (x\to x_0)$

(2) $f\sim g \Leftrightarrow g \sim f \quad (x\to x_0)$

(3) $f\sim g,\ g\sim h \Rightarrow f\sim h \quad (x\to x_0)$ perchè $\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} \to 1$

(4) PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE degli infinitesimi o infiniti equivalenti

$f_1(x) \sim g_1(x)$ $x\to x_0$
$f_2(x) \sim g_2(x)$

Allora 1. $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ e in caso esistano i due limiti coincidono cioè $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \quad (x\to x_0)$

DIM. (4.1) $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \underbrace{\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \frac{g_2(x)}{f_2(x)}}_{\text{tendono a } 1}$

2. $f_1(x) f_2(x) \sim g_1(x) g_2(x) \quad (x\to x_0)$

ES. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x\sin x}$

Sappiamo che $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \ (x\to 0)$, $\sin x \sim x \ (x\to 0)$

$2x\sin x \sim x^2 \ (x\to 0) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{2x^2} = \underline{\frac{1}{4}}$

DEF. Siano $f, g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{A}$. $f(x), g(x) \neq 0 \ \forall x \in A \setminus \{x_0\}$. Si dice che f è trascurabile rispetto a g (f è un "o piccolo" di g) per $x\to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

NOTAZ. $f = o(g) \quad (x\to x_0)$

ES. • $1-\cos x = o(x) \quad (x\to 0) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

• $x = o(1) \quad (x\to 0)$
• $\sin x = o(x) \quad (x\to +\infty)$
• $\cos x = o(x) \quad (x \to \frac{\pi}{2})$

ES. • $x^2 = o(x) \quad (x\to 0)$ V
• $x^2 = o(75x) \quad (x\to 0)$ V
• $x^2 \sim x \quad (x\to +\infty)$ F
• $x^7 - 6x^4 = o(x^8) \quad (x\to +\infty)$ V
• $x^4 - 4x^3 = o(x^3) \quad (x\to 0)$ F $\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 4x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}(x-4)}{\cancel{x^3}} = -4$
• $x^2 \sim x \quad (x\to 1)$ V
• $75x^2 = o(x) \quad (x\to 0)$ V
• $10^{100} x^2 = o(x) \quad (x\to 0)$ V

10.11.11

corpo in moto

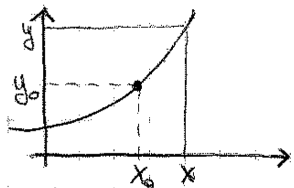
- $v = \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ velocità media

$v(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ velocità istantanea

- $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \qquad x(0)=0$

$v(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{\frac{1}{2}gt^2+v_0t-\frac{1}{2}gt_0^2-v_0t_0}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{1}{2}g\frac{t^2-t_0^2}{t-t_0} + \lim_{t\to t_0} v_0 \frac{t-t_0}{t-t_0} = gt_0+v_0$

$v(t) = gt+v_0$ velocità lineare rispetto al tempo



$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad y_0 = f(x_0)$

retta per $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$: $y - f(x_0) = \overbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}^{\text{rapporto incrementale}} (t - x_0)$ ↳ variabile indipendente

VISIONE GEOMETRICA

① Se esiste finito $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$, allora $y - f(x_0) = \ell(t-x_0)$ è detta la RETTA TANGENTE a f nel punto $(x_0, f(x_0))$

② VISIONE ANALITICA

Astrattamente, abbiamo $f: A\to\mathbb{R}$, $x_0 \in \text{int}(A)$. Si dice che f è DERIVABILE in x_0 se esiste finito

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Tale limite si indica con le seguenti possibili notazioni: $f'(x_0)$, $\overbrace{\frac{df}{dx}(x_0)}^{\text{notazione di Leibnitz}}$, $Df(x_0)$ e si chiama la DERIVATA di f nel punto x_0.

ES. $f(x) = x^n \quad x_0 \in \mathbb{R}$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$x^n - x_0^n = (x-x_0)(x^{n-1}+x_0x^{n-2}+x_0^2x^{n-3}+\ldots+x_0^{n-1}) \qquad \frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} = (x^{n-1}+x_0x^{n-2}+x_0^2x^{n-3}+\ldots+x_0^{n-1})$

$\lim_{x\to x_0}(x^{n-1}+x_0x^{n-2}+x_0^2x^{n-3}+\ldots+x_0^{n-1}) = x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+\ldots+x_0^{n-1} = n\cdot x_0^{n-1}$

$f'(x_0) = nx_0^{n-1}$

① $f(x) = x^n \quad f'(x) = nx^{n-1}$

ES. $f(x) = a^x \quad (a>0) \quad x_0\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x-x_0} = \left[\frac{0}{0}\right]$

OSS. Se $x_0 = 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x} = \frac{a^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \ln a$

In generale si può scrivere $a^{x_0}\frac{a^{x-x_0}-1}{x-x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} a^{x_0}\frac{a^{x-x_0}-1}{x-x_0} = \lim_{t\to 0} a^{x_0}\frac{a^t-1}{t} = a^{x_0}\ln a$

② $f(x) = a^x \ (a>0) \quad f'(x) = a^{x_0}\ln a$ / se $a=e$ $f(x) = e^x \quad f'(x_0) = e^{x_0}$

15.11.11

OSS. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Se $\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ si dice che f è derivabile in a.

Similmente si può lavorare in $x_0 = b$.

CARATTERIZZAZIONE EQUIVALENTE DELLA DERIVABILITÀ. $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$.

Sono fatti equivalenti:

(1) f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = m$

(2) Vale che $f(x) = \underbrace{f(x_0) + m(x-x_0)}_{\text{retta tg.}} + \omega(x)$, dove $\omega(x) = o(x-x_0)$ $x \to x_0$

↳ discrepanza trascurabile rispetto a $x-x_0$

DIM. (1) $\Rightarrow$ (2) Dimostrare (2) significa far vedere che $\omega(x) = f(x) - [f(x_0) + m(x-x_0)] = o(x-x_0)$ $x \to x_0$, cioè che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x-x_0)]}{x-x_0} = 0$ (*)

La fz. sopra si può riscrivere come

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{m(\cancel{x-x_0})}{\cancel{x-x_0}}$ e la tesi segue dall'ipotesi (1).

(2) $\Rightarrow$ (1) (2) significa che $f(x) - [f(x_0) + m(x-x_0)] = o(x-x_0)$ $x \to x_0$, quindi vale (*).
Da (*) si ottiene, mediante lo stesso passaggio algebrico di prima, che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m = 0$, quindi la f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = m$.

OSS. (2) si scrive anche più compattamente come $f(x) = f(x_0) + m(x-x_0) + o(x-x_0)$ $x \to x_0$.

PROP. Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.

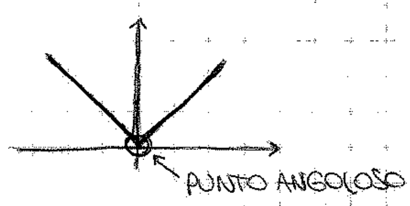
DIM. Se f è derivabile in x_0, vale che $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$ $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)] = \lim_{x \to x_0} [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)] + \lim_{x \to x_0} o(x-x_0) = f(x_0)$$

$\Downarrow$
f continua in x_0

È vero il contrario? continuità $\Rightarrow$ derivabilità? **NO**

ES. $f(x) = |x|$ ~~...~~ derivabile in $x=0$?



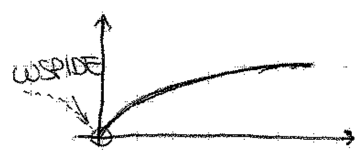
rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -1$

$\neq \Rightarrow |x|$ non derivabile in 0, anche se è continua in 0.

ES. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x}$ derivabile in 0?



$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ ⟶ tg verticale

$\sqrt{x}$ non derivabile in 0 perchè $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ non è finito

DIM. Per la caratterizzazione equivalente di derivata si ha che

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ $x\to x_0$ e $g(y)=g(y_0)+g'(y_0)(y-y_0)+o(y-y_0)$ $y\to y_0$

$y=f(x)$ sostituiamo nella seconda $g(f(x))=g(f(x_0))+g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))+o(f(x)-f(x_0))$ (*)

Riscriviamo la prima relazione come $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ $x\to x_0$ e sostituiamo in (*):

$$g(f(x))=g(f(x_0))+\overbrace{g'(f(x_0))f'(x_0)}^{m}(x-x_0)+\underbrace{g'(f(x_0))\cdot o(x-x_0)+o(f(x)-f(x_0))}_{\omega(x)} \quad x\to x_0$$

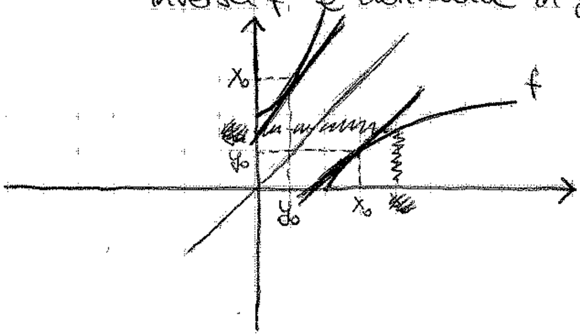
Devo far vedere che $\omega(x)=o(x-x_0)$ $\xrightarrow{x\to x_0}$ $g(f(x))$ è derivabile in x_0 e $g'(f(x))=m=g'(f(x_0))f'(x_0)$

$$\frac{\omega(x)}{x-x_0}=\underbrace{\frac{g'(f(x_0))o(x-x_0)}{x-x_0}}_{\xrightarrow{x\to x_0} 0}+\frac{o(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} \quad \Rightarrow \frac{\omega(x)}{x-x_0}\to 0$$

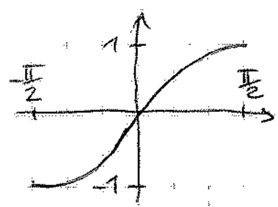
$$\frac{o(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}=\underbrace{\frac{o(f(x)-f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)}$$

DERIVATA DI FZ. INVERSE I e J intervalli. $f: I\to J$ suriettiva, strett. monotona. Sia $x_0\in I$, $y_0=f(x_0)$. Allora, se f è derivabile in x_0 * la funzione inversa f^{-1} è derivabile in y_0 e vale $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

* e $f'(x_0)\neq 0$



rette tg simmetriche alla bisettrice, quindi $m=\frac{1}{m_2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{f_2'(x)}$



ES. $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ $f(x)=\sin x$

$f^{-1}(y)=\arcsin y$

$f'(x)=\cos x$ $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ (restringiamo l'intervallo)

$y_0=\sin x_0\in]-1,1[$ $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{\cos x_0}=\frac{1}{\cos(\arcsin y_0)}$

$\frac{1}{\cos x_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}}=\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$

(5) $f(x)=\arcsin x$ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

SEGNO DELLA DERIVATA

PROP. Sia $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ derivabile su $]a,b[$. Allora:

(1) f crescente su $]a,b[$ $\Rightarrow f'(x)\geq 0$ $\forall x$

(2) f decrescente su $]a,b[\Rightarrow f'(x)\leq$ $\forall x$

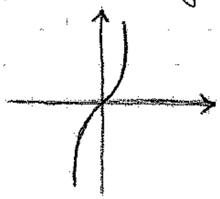
17.11.11

PROP. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile su I. Allora,

(1) $f' \geq 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ crescente su I
(2) $f' \leq 0 \Rightarrow f$ decrescente su I
(3) $f' > 0 \Rightarrow f$ strettamente cresc. su I
(4) $f' < 0 \Rightarrow f$ strett. decrescente su I

OSS. (3) e (4) non si possono invertire, cioè non valgono f strett. cresc. $\Rightarrow f' > 0$
f strett. decresc. $\Rightarrow f' < 0$

ES. $f(x) = x^3$ strett. crescente su $\mathbb{R}$
(f2. iniettiva)



$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ ma $f'(0) = 0$

DEF. $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Se $f'(x_0) = 0$, x_0 si dice PUNTO STAZIONARIO.

ES. $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x \quad \cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

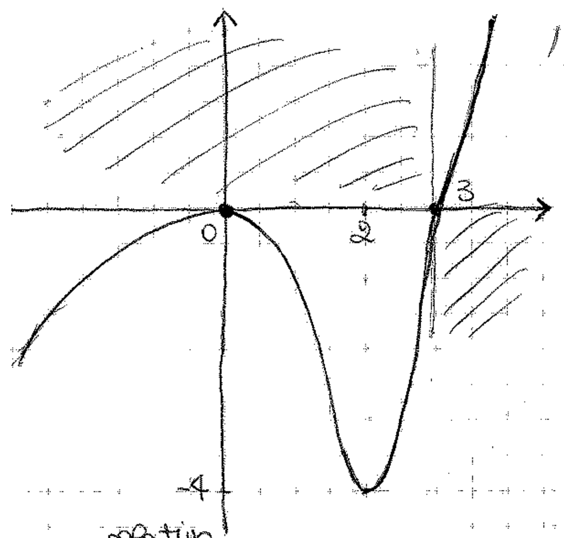
$f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 = \max_{x \in \mathbb{R}} \sin x$

$f\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1 = \min_{x \in \mathbb{R}} \sin x$

ES. $f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

Punti stazionari $f'(0) = 0 \quad f'(2) = 0$



DEF. Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Si dice punto di max (min) locale / relativo per f se accade che $\exists \delta > 0$ tale che $f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $x \in A$.
$(f(x_0) \leq f(x))$

DEF. Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ si dice punto di max (min) globale / assoluto per f se accade che
$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A \Rightarrow f(x_0) = \max f$
$(f(x_0) \leq f(x)) \quad (\Rightarrow f(x_0) = \min f)$

x_0 punto di max (min) globale $\Rightarrow x_0$ punto di max (min) locale

PROP. (Teorema di Fermat) Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \text{int}(A)$ tale che f è derivabile in x_0. Allora, se x_0 è un punto di max o min locale, si ha che x_0 è stazionario.

DIM. Supponiamo x_0 punto di max locale $\Rightarrow \exists \delta > 0$ tale che $f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ≤ 0 se $x_0 < x < x_0 + \delta$
≥ 0 se $x_0 - \delta < x < x_0$

22.11.11

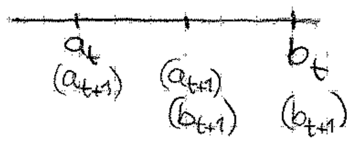
$I_0 = [a,b]$

Scegliamo $I_1 = [a,c]$ oppure $[c,b]$ in modo tale che:

$\sup\{f(x) \mid x \in I_0\} = \sup\{f(x) \mid x \in I_1\}$

Procediamo iterativamente ripetendo i passaggi fatti nel passare da I_0 a I_1, costruendo così una successione di intervalli $I_0, I_1, I_2, I_3 \dots$ tale che $\sup\{f(x) \mid x \in I_t\} = \sup\{f(x) \mid x \in I_{t+1}\}$ (I_{t+1} è la metà come lunghezza di I_t).

Possiamo scrivere $I_t = [a_t, b_t]$.



$I_t \supseteq I_{t+1}$ (I_t contiene I_{t+1})

$a_t \leq a_{t+1}$ $\quad b_t \geq b_{t+1}$

(a_t) monotona crescente $\qquad (b_t)$ monotona decrescente

a_t e b_t sono successioni limitate $\Rightarrow$ $a \leq a_t \leq b_t \leq b$

Succ. monotone e limitate convergono a un valore finito $\Rightarrow$ $a_t \xrightarrow[t\to\infty]{} \bar{x}'$, $b_t \xrightarrow[t\to\infty]{} \bar{x}''$

con $\bar{x}' \leq \bar{x}''$

Rispetto alla lunghezza iniziale del segmento, si ha $b_t - a_t = \frac{1}{2^t}(b-a)$.

$\frac{1}{2^t}(b-a) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ quindi se $b_t - a_t \to 0 \Rightarrow \bar{x}'' - \bar{x}' \to 0 \Rightarrow \bar{x}'' = \bar{x}'$

Chiamiamo $\bar{x}$ punto valore comune ($\bar{x}$ è il punto di max x_2 che stiamo cercando)

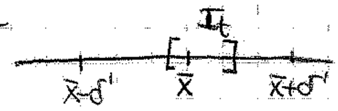
Facciamo vedere che $\bar{x}$ è punto di max globale per f.

Poiché in $\bar{x}$ f è continua, $\exists \delta > 0$ $\exists M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[$. Si osservi che definitivamente $I_t \subseteq]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[$, quindi il $\underbrace{\sup\{f(x) \mid x \in I_t\} \leq M}_{\Rightarrow \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \leq M}$ (la f.z. non può mai essere illimitata), il sup è finito)

Sia $L = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, facciamo vedere che $f(\bar{x}) = L$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario. Per la continuità di f in $\bar{x}$, $\exists \delta'$ tale che

$f(\bar{x}) - \varepsilon < f(x) < f(\bar{x}) + \varepsilon$ $\quad \forall x \in [a,b]$ tale che $\bar{x} - \delta' < x < \bar{x} + \delta'$



$\exists t_0 : I_{t_0} \subseteq]\bar{x}-\delta', \bar{x}+\delta'[$

Quindi se $x \in I_{t_0} \Rightarrow f(\bar{x}) - \varepsilon < f(x) < f(\bar{x}) + \varepsilon$. Poiché $L = \sup\{f(x) \mid x \in I_{t_0}\}$ ne segue che

$\boxed{f(\bar{x}) - \varepsilon \leq L \leq f(\bar{x}) + \varepsilon}$ (*) Questo, data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, dice proprio che $f(\bar{x}) = L$ perché se fossero diversi, $|f(\bar{x}) - L| = \varepsilon_0 > 0$, (*) non sarebbe vera scegliendo $\varepsilon < \varepsilon_0$, ma (*) deve essere vera per ogni ε.

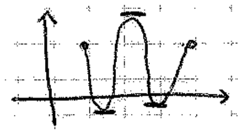
Abbiamo quindi dimostrato che $\bar{x}$ è punto di max globale.

DERIVATE

TEOR. di ROLLE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$ e tale che $f(a)=f(b)$. Allora esiste $\bar{x} \in]a,b[$ tale che $f'(\bar{x})=0$.

DIM. Per WEIERSTRASS sappiamo che $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ $\forall x \in [a,b]$.
Ci sono due casi possibili:

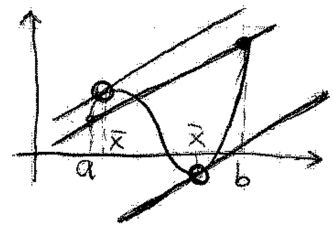
① $x_1, x_2 \in \{a,b\} \Rightarrow f$ è costante e ha derivata nulla su tutto $[a,b]$



② almeno uno tra x_1 e x_2 sta in $]a,b[$

Chiamiamolo $\bar{x}$. Per il TEOR. di FERMAT, tale punto è necessariamente stazionario.

TEOR. di LAGRANGE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$. Allora,
$\exists \bar{x} \in]a,b[$ tale che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\bar{x})$



DIM. Si consideri la funzione ausiliaria seguente

$$g: [a,b] \to \mathbb{R} \quad g(x) = f(x) - \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}_{\hookrightarrow \text{ retta parallela alla secante}}$$

g continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$

$g(a)=f(a)$

$g(b) = \cancel{f(b)} - \cancel{f(b)} + f(a) = f(a)$

Quindi possiamo applicare a g il TEOR. di ROLLE per il quale $\exists \bar{x} \in]a,b[$ tale che $g'(\bar{x})=0$.
D'altra parte $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, quindi $g'(\bar{x})=0$ implica $f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

PROP. $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile

(1) $f'(x) \ge 0$ $\forall x \in I \Rightarrow f$ monotona cresc.
(2) ...
(3) ...
(4) ...

DIM: (1) Si tratta di far vedere che $\forall x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in I)$ $f(x_1) \le f(x_2)$.
Consideriamo f ristretta a $[x_1, x_2]$ e applichiamo LAGRANGE.

$$\exists \bar{x} \in]x_1, x_2[\text{ tale che } \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \underbrace{f'(\bar{x}) \ge 0}_{\hookrightarrow \text{ per ipotesi}}$$

Quindi $f(x_2)-f(x_1) \ge 0$, cioè $f(x_2) \ge f(x_1) \Rightarrow f$ monotona crescente.

COR. $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f'(x)=0$ $\forall x \in I$, allora f è costante.

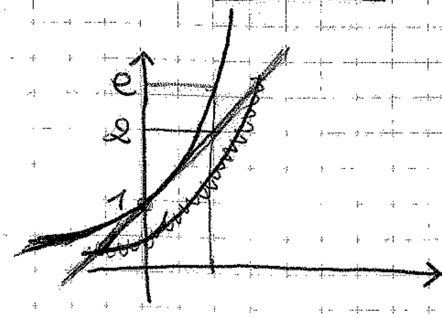
DIM. Si tratta di dimostrare che $\forall x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in I)$ $f(x_1)=f(x_2)$. Applicando LAGRANGE su $[x_1, x_2]$ si ha $\exists \bar{x} \in]x_1, x_2[$ t.c. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\bar{x}) = 0 \Rightarrow f(x_2)=f(x_1)$

24.11.11

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$x_0 = 0 \quad f(x) = e^x \qquad y = 1 + x$

Come trovare un'approssimazione del valore e?



PROP. In generale se $f: A \to \mathbb{R}$ derivabile con $f': A \to \mathbb{R}$, se f' è a sua volta derivabile, la sua derivata si dice DERIVATA SECONDA di f e si indica con il simbolo $f'': A \to \mathbb{R}$. Così via si possono definire le derivate di ordine successivo $f''', f^{IV}, f^{V} \dots f^{(k)}$

NOTAZIONE
- f si dice di classe D^n su A se essa è derivabile n volte in A.
- f si dice di classe C^n su A se è derivabile n volte in A e la $f^{(n)}$ è continua su A.
- f si dice di classe C^∞ su A se ammette derivate di ogni ordine su A.

ES. di f.z. C^∞:
- polinomi
- $\sin x, \cos x$
- e^x
- somme/prodotti di f.z. C^∞

NOTAZ. $D^n(A)$, $C^n(A)$, $C^\infty(A)$
insiemi di tutte le funzioni $f: A \to \mathbb{R}$ di classe D^n, C^n, C^∞ rispettivamente. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $f \in D^n(A)$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \to x_0$

Approssimazione con polinomi di grado più elevato: $P(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$ tale che $f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$

Vogliamo imporre al polinomio P la seguente condizione: $f^{(k)}(x_0) = P^{(k)}(x_0) \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$ (*)

$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k (x - x_0)^{k-1}$

$P''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2}$

$P^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} k(k-1)\dots(k-j+1) a_k (x - x_0)^{k-j} \quad j \le n \qquad P^{(j)}(x) = 0 \ \forall j > n$

$P^{(j)}(x_0) = j(j-1)(j-2)\dots 1 \cdot a_j = j!\, a_j$

Per imporre (*) basta imporre che $k!\, a_k = f^{(k)}(x_0)$, cioè $\boxed{a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}$ $k = 1, 2, \dots, n$

$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}$

per convenzione $f^{(0)}(x) = f(x)$, $0! = 1$

POLINOMIO DI TAYLOR di f nel punto x_0 di grado n.

29.11.11

ES. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$\sin x,\ x_0=0 \qquad P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

$P_{2n}(x) = P_{2n-1}(x)$ perchè $f^{(2n)}(0)=0$

$P_1(x) = x$: retta tangente a $\sin x$ in $x_0=0$

$P_2(x) = \cancel{x} \quad P_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3 \quad P_4(x) = P_3(x)$ ...

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \qquad \sin x - x = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$: $-\frac{1}{6}x^3$ parte principale di $\sin x - x$
$(\sin x - x \sim -\frac{1}{6}x^3 \quad x\to 0)$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = -\frac{1}{6}$

ES. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^4} \quad \nexists \quad \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\sin x - x}{x^4} = \begin{cases} -\infty & x\to 0^+ \\ +\infty & x\to 0^- \end{cases}$

ES. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{120}\cancel{x^5}}{\cancel{x^5}} = \frac{1}{120}$

Continuo lo sviluppo di Taylor fino all'ordine 5 $\quad P_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

TEOR. ② $x_0 \in I$. $\forall x \in I\ \exists c_x \in I$ tale che (c_x sta tra x e x_0) $f(x) = P_{n-1}(x) + f^{(n)}(c_x)/n!\,(x-x_0)^n$ (2)
(FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE)

c_x : punto di Lagrange, dipende da x.

OSS. collegamento tra ① e ②

Si osservi che ② si può riscrivere come: $f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-x_0)^n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{resto}:\ r(x)}$ (3)

TEOR.② ⇒ TEOR.① nell'ipotesi aggiuntiva che f sia di classe C^n su I.
Per vederlo si consideri la (3), che segue dalla (2). Si tratta di far vedere che $r(x) = o((x-x_0)^n)$ $x\to x_0$

$r(x) = \frac{[f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)](x-x_0)^n}{n!} \qquad \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Si noti che $\lim_{x\to x_0} c_x = x_0$ perchè $|c_x - x_0| < |x-x_0|$, quindi se $x-x_0 \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$, per confronto anche $c_x - x_0 \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

Poichè $f^{(n)}$ è continua, si ha quindi che $\lim_{x\to x_0} f^{(n)}(c_x) = f^{(n)}(x_0)$, cioè $\frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$, che implica $r(x) = o((x-x_0)^n)$ $x\to x_0$.

$\frac{f^{(n)}(c_1)}{n!} < \frac{3}{n!} < 10^{-2}$ scelgo l'approssimazione che voglio

Prendo $n=6$, allora $|e-P_5(1)| < 10^{-2}$

$P_5(1) = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}$: le prime due cifre decimali sono esatte

OSS.

$f: I \to \mathbb{R}$ classe C^2, $x_0 \in I$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{retta tg}} + \frac{f''(c_x)}{2}(x-x_0)^2$$

$\hookrightarrow$ il suo segno dice se la $f(x)$ sta sopra o sotto alla tangente)

DEF. Una funzione f derivabile in un punto x_0 si dice CONVESSA (CONCAVA) se $\exists \delta > 0$ tale che $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $\forall x: |x-x_0| < \delta$
$(\leq)$

COROLLARIO Sia $f: I \to \mathbb{R}$ di classe C^2, $x_0 \in I$, tale che $f''(x_0) > 0$ (<0). Allora f è CONVESSA (CONCAVA) in x_0.

DIM. (conseguenza della FORMULA DI LAGRANGE)

caso >0. Per il TEOR. della PERMANENZA DEL SEGNO, $\exists \delta > 0: \forall x: |x-x_0| < \delta \Rightarrow f''(x) > 0$.
Se $|x-x_0| < \delta$, allora anche $|c_x - x_0| < \delta \Rightarrow f''(c_x) > 0$.

Quindi $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(c_x)}{2}(x-x_0)^2 \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

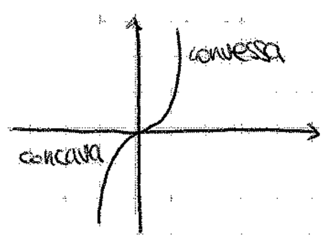
DEF. $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile, $x_0 \in int(I)$. Si dice che x_0 è un punto di FLESSO per f se $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in]x_0-\delta, x_0[$ f è convessa (concava)
$\forall x \in]x_0, x_0+\delta[$ f è concava (convessa)

$\left.\begin{array}{l} f''(x_0)=0 \\ f'' \text{ cambiamento di segno} \\ \text{in un intorno di } x_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_0$ FLESSO

ES. $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = 6x$ $f''(0) = 0$ $\quad \overset{0}{- \,|\, +} \Rightarrow 0$ è un flesso



ES. $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = 12x^2 \geq 0$ $f''(0) = 0$ $\quad \overset{0}{+ \,|\, +} \Rightarrow 0$ non è un flesso

$f'''(x) = 24x$ $f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = 24$ $f^{IV}(0) = 24$ $\quad f(x) = P_3(x) + \frac{f^{IV}(c_x)}{4!}x^4 = \frac{f^{IV}(c_x)}{4!}x^4$ $\quad (f^{IV}(c_x) > 0)$

01.12.11

OSS.

Supponiamo che f sia di classe C^k e $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0$, $f^{(k)}(x_0)\neq 0$.

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(k)}(c_x)}{k!}(x-x_0)^k}$$

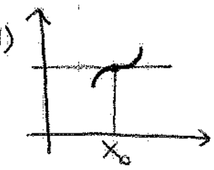
Se x è sufficientemente vicina a x_0, $f^{(k)}(c_x)$ ha lo stesso segno di $f^{(k)}(x_0)$.

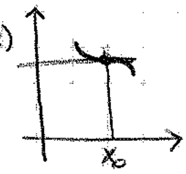
- Se k è pari, ripetendo il ragionamento del caso $k=2$, si ha:

$f^{(k)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ punto di MIN LOCALE
$f^{(k)}(x_0)<0 \Rightarrow$ MAX LOCALE

- Se k è dispari

(1) $f^{(k)}(x_0)>0$
(2) $f^{(k)}(x_0)<0$ $\Rightarrow x_0$ punto di FLESSO

(1) 

(2) 

ES. $f(x)=x^n$

$f'(x)=nx^{n-1}$ $\quad f^{(k)}(x)=n\ldots(n-k+1)x^{n-k}$

$f^{(k)}(0)=0 \quad \forall k=1,2,\ldots,n-1 \qquad f^{(n)}(0)=n!$

ES. $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}} \quad x\neq 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)=0 \qquad \tilde{f}(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ ($\tilde{f}(x)$ è continua)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

Sapendo che $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^k}=+\infty$, cambiando variabile si ha:

$\frac{1}{x^2}=t \quad t\to+\infty \quad x=\frac{1}{\sqrt{t}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{\frac{1}{\sqrt{t}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^t}=0$$

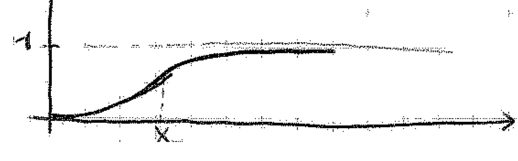
$x\neq 0 \quad f'(x)=2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} \qquad f'(x)=\begin{cases}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}=0$$

$$x\neq 0 \quad f''(x)=\frac{\frac{4e^{-\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x^3}}\cdot\cancel{x^3}-2e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot 3x^2}{x^6}=4\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6}-6\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}$$

Continuando così si vede che $\tilde{f}$ è derivabile infinite volte in 0 e $f^{(k)}(0)=0\ \forall k$.

$x=0$ è un punto di MIN GLOBALE.



PROP. Sia $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f continua in I e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$. Se $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell$,

allora $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$

→ TAPPABUCHI

il teorema in altre parole dice che la derivata prima non può avere discontinuità eliminabili

→ NON INVERTIBILE !!

DIM. segue dal teorema di LAGRANGE

Lavorare con intervalli quando si calcolano le primitive è centrale.

ES. Consideriamo $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x)=0 \ \forall x$. Quali sono le primitive di f?

$h(x)=0$ lo è sicuramente $\Rightarrow h(x)=c$ sono tutte primitive

Consideriamo $h(x)=\begin{cases} c_1 & \text{se } x<0 \\ c_2 & \text{se } x>0 \end{cases} \Rightarrow h'(x)=0 \ \forall x\neq 0 \Rightarrow$ anche questa f2 è una primitiva di $f(x)$

Se invece considero i due intervalli $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ e $\mathbb{R}^-\setminus\{0\}$, allora posso applicare le regole di integrazione.

ES. $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c \quad (x>0)$
$\quad = \ln(-x)+c \quad (x<0)$ infatti $\frac{d}{dx}(\ln(-x)+c) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$

(S) $\boxed{\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+c} \quad x\neq 0$

ma formula ambigua perché la costante additiva c può assumere valori diversi per $x<0$ e $x>0$.

OSS. $f: I \to \mathbb{R}$ $\quad \int f(x)\,dx$ insieme delle primitive

- $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$
- se f è derivabile $\int \frac{df}{dx}dx = f(x)+c$
- LINEARITÀ dell'integrale: f e g definite su I, λ e $\mu \in \mathbb{R}$. Allora

$$\int (\lambda f(x)+\mu g(x))dx = \lambda\int f(x)\,dx + \mu\int g(x)\,dx$$

in effetti $\frac{d}{dx}\left[\lambda\int f(x)\,dx + \mu\int g(x)\,dx\right] = \lambda\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx + \mu\frac{d}{dx}\int g(x)dx = \lambda f(x)+\mu g(x)$

ES. $\int (e^x+4x^5)\,dx = \int e^x dx + 4\int x^5 dx = e^x + 4\frac{x^6}{6}+c$

METODO DI INTEGRAZIONE PER PARTI $\quad f,g: I\to\mathbb{R}$ derivabile su I

$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad f'(x)g(x) = (fg)'(x) - f(x)g'(x)$

$\Rightarrow \int f'(x)g(x)\,dx = \int[(fg)'(x) - f(x)g'(x)]dx$

dato che $\int (fg)'(x) = (fg)(x) = f(x)g(x) \Rightarrow \boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx}$

ES. $\int x e^x dx$

- $f'(x)=x \quad f(x)=\frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{2}e^x - \int\frac{x^2}{2}e^x dx$ non è una buona scelta
  $g(x)=e^x$
- $f'(x)=e^x \quad f(x)=e^x \Rightarrow xe^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - e^x + c$
  $g(x)=x$

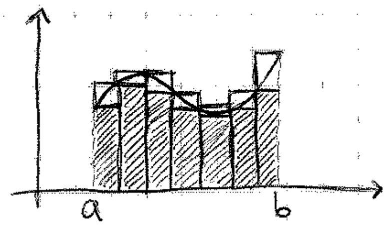
ES. $\int x\sin x = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + c$
$f'(x)=\sin x \quad g(x)=x$

OSS. $\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt = \int f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt$

$x=\phi(t) \quad \phi'(t)=\frac{dx}{dt}$

ES. $\int \frac{1}{3+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3}}{1+t^2}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t + c = \underline{\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + c}$

$\frac{x}{\sqrt{3}}=t \quad x=\sqrt{3}\,t \quad dx=\sqrt{3}\,dt$



$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata

DEF. Una partizione di $[a,b]$ è un insieme di punti

$\delta=\{x_1=a<x_2<x_3<\ldots<x_{n+1}=b\}$. δ spezza $[a,b]$ nei sotto intervalli

$I_1=[x_1,x_2]$, $I_2=[x_2,x_3]$ ... $I_k=[x_k,x_{k+1}]$ $k=1,2,\ldots,n$.

calcolo l'area dei plurirettangoli

$\ell_k=\inf\{f(x)\mid x\in I_k\}$, $L_k=\sup\{f(x)\mid x\in I_k\}$

Somma inferiore di f relativa a δ:

$s_\delta^{(f)}=A_{i_\delta}(f)=\sum_{k=1}^{n}\ell_k\,(x_{k+1}-x_k)$

Somma superiore di f relativa a δ:

$S_\delta^{(f)}=A_{s_\delta}(f)=\sum_{k=1}^{n}L_k\,(x_{k+1}-x_k)$

$A_{i_\delta}(f)\le A_{s_\delta}(f)$

DEF. $\Delta_{[a,b]}$ indica l'insieme di tutte le partizioni di $[a,b]$. Definiamo l'<u>integrale definito inferiore</u> di f su $[a,b]$ come:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup\{A_{i_\delta}(f)\mid \delta\in\Delta_{[a,b]}\}$$

Definiamo l'<u>integrale definito superiore</u> di f su $[a,b]$ come:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf\{A_{s_\delta}(f)\mid \delta\in\Delta_{[a,b]}\}$$

f si dice INTEGRABILE su $[a,b]$ se $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ e si usa la notazione

$\int_a^b f(x)\,dx$ INTEGRALE DEFINITO di f su $[a,b]$

TEOR. $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ vale sempre

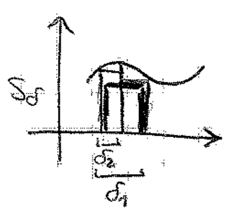
(*)

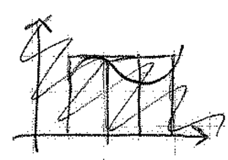
DIM. Sappiamo che $s_\delta(f)\le S_\delta(f)$, ma è vero che $s_{\delta_1}(f)\le S_{\delta_2}(f)$ $\forall \delta_1,\delta_2\in\Delta_{[a,b]}$?

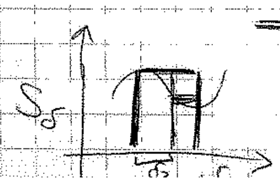
(*) OSS. Date due partizioni $\delta_1,\delta_2\in\Delta_{[a,b]}$ si dice che δ_2 è <u>più fine</u> di δ_1 se $\delta_1\subseteq\delta_2$ e si scrive $\delta_2\ge\delta_1$.

LEMMA $\delta_2\ge\delta_1 \Rightarrow s_{\delta_2}(f)\ge s_{\delta_1}(f)$

$\Rightarrow S_{\delta_2}(f)\le S_{\delta_1}(f)$

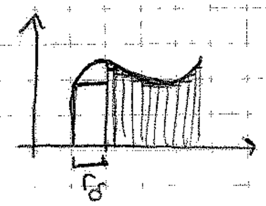






13.12.11

DEF $\delta \in \Delta_{[a,b]}$, $\delta = \{x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}\}$



$r_\delta = \max\{x_{k+1} - x_k \mid k = 0, \ldots, n\}$: PARAMETRO DI FINEZZA
$\hookrightarrow$ più è piccolo, più è fine la partizione

Le partizioni uniformi di $[a,b]$ sono quelle date da:

$\delta = \{x_1 = a < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n+1}\}$ $\quad x_2 = x_1 + \dfrac{b-a}{n}$

$x_3 = x_1 + 2\dfrac{b-a}{n} \quad \ldots \quad x_k = x_1 + (k-1)\dfrac{b-a}{n} \ldots x_{n+1} = b$

Quindi $s_\delta = \sum_{k=1}^{n} \ell_k (x_{k+1} - x_k) = \dfrac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \ell_k$

$S_\delta = \sum_{k=1}^{n} L_k (x_{k+1} - x_k) = \dfrac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} L_k$

TEOR. ① (I CRITERIO DI INTEGRABILITÀ) Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Sono fatti equivalenti:

(1) f è integrabile su $[a,b]$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in \Delta_{[a,b]}$ tale che $S_\delta - s_\delta < \varepsilon$

*

TEOR. ② (II CRITERIO DI INTEGRABILITÀ) Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Sono fatti equivalenti:

(1) f è integrabile su $[a,b]$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0$ tale che $\forall \delta \in \Delta_{[a,b]}$, $r_\delta < r$ si ha $S_\delta - s_\delta < \varepsilon$

OSS.

$$\begin{array}{ccc} (2)\ \text{TEOR.①} & \longleftarrow & (2)\ \text{TEOR.②} \\ \text{TEOR.①} \updownarrow & \swarrow\!\!\nearrow \ \text{TEOR.②} & \\ (1)\ \text{INTEGRABILITÀ} & & \end{array}$$

***DIM.** (1) $\Rightarrow$ (2)

Se c'è l'integrabilità, allora $\sup s_\delta = \inf S_\delta = I$.
Per le proprietà caratterizzanti di sup e inf, fissato $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_1, \delta_2 \in \Delta_{[a,b]}$ tali che

$I - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\delta_1} \leq I$, $\quad I \leq S_{\delta_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}$.

Se consideriamo $\delta = \delta_1 \cup \delta_2$, allora $I - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\delta_1} \leq \underbrace{s_\delta \leq I \leq S_\delta}_{\hookrightarrow\ S_\delta - s_\delta < \varepsilon} \leq S_{\delta_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}$

COROLLARIO $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Sono fatti equivalenti:

(1) f è integrabile su $[a,b]$

(2) indicando con δ_n^{un} la partizione uniforme in n sottointervalli, si ha che $\lim_{n\to+\infty} |S_{\delta_n^{un}} - s_{\delta_n^{un}}| = ($

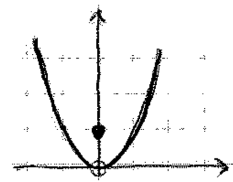
~~$\lim_{n\to+\infty} S_{\delta_n^{un}} \leq \lim_{n\to+\infty} s_{\delta_n^{un}}$~~. Inoltre in tal caso si ha che $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_{\delta_n^{un}} = \lim_{n\to+\infty} s_{\delta_n^{un}}$ (**)

PROP. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, sia $c \in]a,b[$. Se f è integrabile su $[a,c]$ e su $[c,b]$, è anche integrabile su tutto $[a,b]$ e si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(*)

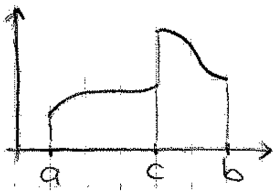
ES. $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$



f è integrabile su $[-1,1]$

PROP. $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che $f(x) = g(x)$ eccettuato un numero finito di punti. Allora f è integrabile se e soltanto se lo è g e $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

In virtù di questa PROP, anche le funzioni che presentano un numero finito di discontinuità eliminabili sono integrabili.
Sono anche integrabili le funzioni con un numero finito di "salti" (funzioni continue a tratti).

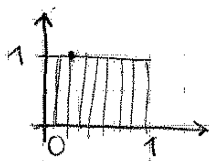


$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tranne che in c dove ha un salto.

Consideriamo f su $[a,c]$ e su $[c,b]$ sui quali è continua con eventualmente una discontinuità eliminabile in c, quindi su tali intervalli è integrabile. Quindi lo è anche su tutto $[a,b]$

ES. di funzione non integrabile (FUNZIONE DI DIRICHLET)

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\quad f(x)$ discontinua in ogni punto



$S_\sigma = 1 \quad s_\sigma = 0 \Rightarrow$ non c'è convergenza

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE $\quad f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili su $[a,b]$. $\lambda \in \mathbb{R}$

PROP. (1) • $f+g$ è integrabile su $[a,b]$ e $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(2) • λf è integrabile su $[a,b]$ e $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

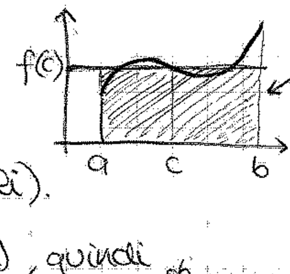
DIM. (1) (idea formule)

Considero $\sigma_n^{un}, \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) \quad z_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Quindi $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(z_k)+g(z_k)] = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} g(z_k)$

$\Rightarrow (1)$ con $n \to +\infty$

TEOR. (MEDIA INTEGRALE) $\quad f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\exists c \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(c)$$



l'area del rettangolo equivale all'area sottesa dalla curva

DIM. consideriamo $\sigma_1^{un} = \{\overset{x_1}{a} < \overset{x_2}{b}\}$ (non divido in intervalli).

$S_{\sigma_1^{un}} = (b-a)\sup f(x) \qquad s_{\sigma_1^{un}} = (b-a)\inf f(x)$, quindi

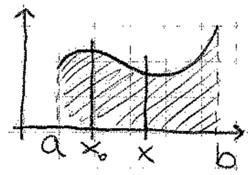
$(b-a)\inf f(x) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\sup f(x) \xrightarrow{\text{divido per } (b-a)} \inf f(x) \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq \sup f(x)$

Per il teor. di Weierstrass + valori intermedi ne segue che $\exists c \in [a,b]$ tale che $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$.

15.12.11

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua

$\int_a^b f(x)\,dx = ?$



$\int_a^b f(t)\,dt$

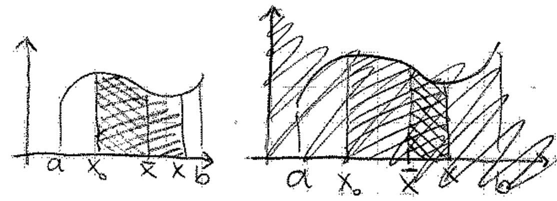
Fissiamo $x_0\in[a,b]$ e consideriamo la funzione $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

↳ FUNZIONE INTEGRALE di $f(x)$

OSS. F può essere definita anche se f non è continua, purchè sia integrabile su $[a,b]$.

TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE Se f è continua su $[a,b]$, F è derivabile su $[a,b]$ e ~~...~~ $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in[a,b]$

DIM. Sia $\bar{x}\in[a,b]$ e consideriamo $\frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}}$.



$$\frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt}{x-\bar{x}} =$$

$$= \frac{\cancel{\int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt} + \int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt - \cancel{\int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt}}{x-\bar{x}} = \frac{1}{x-\bar{x}}\int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt \Rightarrow \text{MEDIA INTEGRALE (perchè } f \text{ è continua)}$$

vale anche se $x<\bar{x}$

$$\frac{1}{x-\bar{x}}\int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{x-\bar{x}}\left(-\int_{x}^{\bar{x}} f(t)\,dt\right) = \frac{1}{\bar{x}-x}\int_{x}^{\bar{x}} f(t)\,dt$$

Per il TEOR. della MEDIA INTEGRALE, $\exists c_x$ tra $\bar{x}$ e x tale che $\frac{1}{x-\bar{x}}\int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt = f(c_x)$,

quindi $\frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} = f(c_x)$.

Facciamo ora il limite per $x\to\bar{x}$. c_x tenderà a $\bar{x}$ per ~~a~~ confronto: se $\bar{x}<x$ $\bar{x}\le c_x\le x$
se $\bar{x}>x$ $x\le c_x\le\bar{x}$

Per confronto $\lim_{x\to\bar{x}} c_x=\bar{x}$.

Per il TEOR. di COMPOSIZ. DEI LIMITI (sfruttando di nuovo che f è continua) segue che $\lim_{x\to\bar{x}} f(c_x)=f$

Quindi $\lim_{x\to\bar{x}}\frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} = f(\bar{x})$.

Il teorema dice che F è una primitiva di $f(x)$. Quindi $\int f(x)\,dx = F(x)+c$.

COR. Se f è continua, essa ammette sempre primitiva.

COR. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e sia $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ una qualunque primitiva di f, allora

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b)-G(a)$$

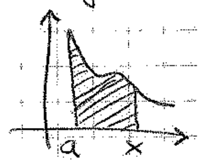
10.01.12

$f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$

DEF. Si dice che f è LOCALMENTE INTEGRABILE se è integrabile su ogni intervallo $[x_1, x_2] \subseteq [a, +\infty[$

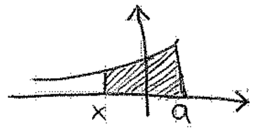
DEF. Sia $f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ localmente integrabile. Si dice che f è integrabile (in senso generalizzato o improprio) su $[a, +\infty[$ se esiste finito

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{ed in tal caso si pone} \quad \int_a^{+\infty} f(t)\,dt := \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$



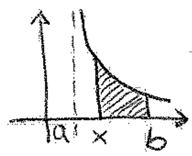
Similmente, se $f:]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ è localm. integrabile, si dice che f è integrabile (...) su $]-\infty, a]$ se esiste finito

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)\,dt \quad \text{e si pone} \quad \int_{-\infty}^a f(t)\,dt.$$



DEF. Sia $f:]a, b] \to \mathbb{R}$ localm. integrabile, si dice che f è integrabile (...) su $]a, b]$ se esiste finito

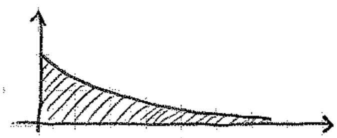
$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt \quad \text{e si pone} \quad \int_a^b f(t)\,dt$$



Similmente, se $f: [a, b[\to \mathbb{R}$ localm. integrabile, f è integrabile (...) su $[a, b[$ se esiste finito

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{e si pone} \quad \int_a^b f(t)\,dt$$

ES. $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R} \qquad f(x) = e^{-\alpha x} \quad \alpha > 0$

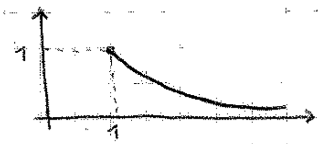


$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}$$

ES. $f(x) = 1 \qquad \int_0^x f(t)\,dt = x \qquad \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \Rightarrow$ f non è integrabile in senso improprio; l'integrale diverge

ES. $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{x^\gamma} \quad \gamma > 0$



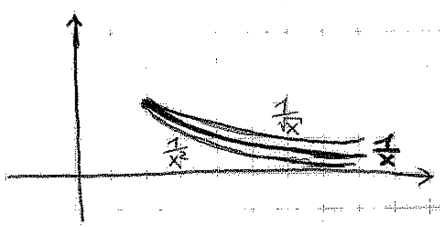
$\gamma \neq 1$: $$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\gamma}\,dt = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{-\gamma+1} t^{-\gamma+1} \Big|_1^x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{-\gamma+1} x^{-\gamma+1} - \frac{1}{-\gamma+1} \right) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma-1} & \gamma > 1 \\ +\infty & 0 < \gamma < 1 \end{cases}$$

$\gamma = 1$: $$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln t \Big|_1^x \right) = \lim_{x \to +\infty} (\ln x - \ln 1) = +\infty$$

Concludendo,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\gamma}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{\gamma-1} & \gamma > 1 \\ +\infty & 0 < \gamma \leq 1 \end{cases}$$



PROP.② (TEOR. del CONFRONTO ASINTOTICO). Siano $f, g: [a,+\infty[\to\mathbb{R}$ localm. integrabili e $f(x)>0$ $g(x)>0$ $\forall x$. Supponiamo che $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0, +\infty$ (1). Allora f è integrabile se e soltanto se lo è g.

ES. $f(x)=\frac{x^3}{x^5+3x}$ $\quad f: [1,+\infty[\to\mathbb{R}$

$$\frac{x^3}{x^5+3x} \sim \frac{1}{x^2} \quad x\to+\infty$$

Dato che $\frac{1}{x^2}$ è integrabile su $[1,+\infty[$, lo è anche f per la PROP.②

$f(x)$ è integrabile anche per la PROP.①, infatti $\frac{x^3}{x^5+3x} \le \frac{1}{x^2}$ $\quad x^5 \le x^5+3x$.
In più la PROP.① ci dice che

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^5+3x}\,dx \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

ES. $f(x)=\frac{x^3}{2x^5-x}$ $\quad f: [2,+\infty[\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)\ge 0$ $\forall x\ge 2$.

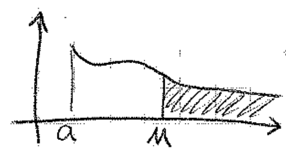
$\frac{x^3}{2x^5-x} \sim \frac{1}{2x^2}$ $\quad x\to+\infty$ $\Rightarrow$ integrabile per la PROP.②

ma $\frac{x^3}{2x^5-x} \overset{?}{\le} \frac{1}{2x^2}$ $\quad \cancel{2x^5} \le \cancel{2x^5}-x$ $\quad x\le 0$ FALSO. (la PROP.① non vale)

DIM. Per simmetria, basta dimostrare che g integrabile $\Rightarrow$ f integrabile.
Segue dalla (1) che $\exists M\ge a$, tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} < \ell+1 \quad \forall x\ge M$$

Poiché $g(x)>0$ segue che $f(x) < \underbrace{(\ell+1)g(x)}_{\text{integrabile su } [M,+\infty[}$ $\quad \forall x\ge M$



Allora per la PROP.① anche f è integrabile su $[M,+\infty[$.
Quindi f è integrabile su $[a,+\infty[$.

OSS. $f: [a,+\infty[\to\mathbb{R}$, se $f(x) = \ell\frac{1}{x^\delta} + o\left(\frac{1}{x^\delta}\right)$ $\quad x\to+\infty$

Calcolo la parte principale di f rispetto a $\frac{1}{x}$.

ES. $f(x)=\frac{x}{x^2+8}$ $\quad f(x)=\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad x\to+\infty$

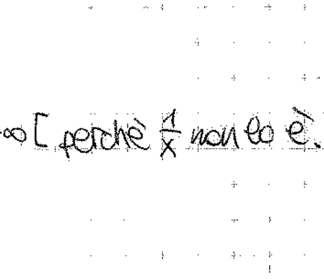
↳ per la PROP.②, f non è integrabile su $[1,+\infty[$ perché $\frac{1}{x}$ non lo è.

ES. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+x^2}$ $\quad x\in\,]0,1]$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{x+x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} = +\infty$$

$$\frac{\sqrt{x}}{x+x^2} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x\to0^+$$

Poiché $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile su $]0,1]$ lo è anche $\frac{\sqrt{x}}{x+x^2}$ per la PROP.②



ES. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $\quad x\in\,]0,1]$

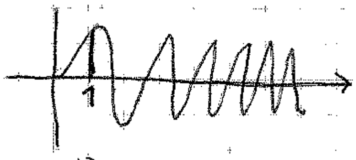
f è integrabile su $[0,1]$ perché è estendibile per continuità a zero.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 89

ES. $f(x)=\sin x \quad [0,+\infty[$

$\int_0^x \sin t\,dt = -\cos t\Big|_0^x = -\cos x+1 \Rightarrow$ f non è integrabile perchè $\nexists \lim_{x\to+\infty}(-\cos x+1)$

ES. $f(x)=\sin x^2$



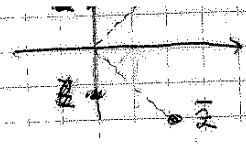
$$\int_1^x \sin t^2\,dt = \int_1^x \frac{1}{2t}\underbrace{2t\sin t^2}_{\hookrightarrow \text{ primitiva di } -\cos t^2}dt =$$

$$= -\frac{1}{2t}\cos t^2\Big|_1^x - \int_1^x \frac{1}{2t^2}\cos t^2\,dt = -\frac{1}{2x}\cos x^2+\frac{1}{2}\cos 1-\frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos t^2}{t^2}\,dt$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \sin t^2\,dt = \lim_{x\to+\infty}\Big(\underbrace{-\frac{1}{2x}\cos x^2}_{\downarrow\ 0}+\underbrace{\frac{1}{2}\cos 1}_{\downarrow\ \frac{1}{2}\cos 1}-\frac{1}{2}\underbrace{\int_1^x \frac{\cos t^2}{t^2}\,dt}_{\downarrow}\Big)$$: converge

assolutamente integrabile (come $\frac{\sin t^2}{t^2}$), quindi converge

Se $z = a+ib \in \mathbb{C}$, allora $\bar{z} := a-ib \in \mathbb{C}$ è detto CONIUGATO di z.
$\bar{z}$ è lo speculare di z rispetto all'asse x.



MODULO: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$ $\qquad$ $z \cdot \bar{z} = \underbrace{|z|^2}_{\text{numero reale}}$

Se $z \neq 0$, segue che $\dfrac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = 1 \longrightarrow \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ è il reciproco di z (z^{-1})

in coordinate cartesiane: $z = a+ib \neq 0$ $\quad$ $\bar{z} = a-ib$ $\quad$ $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$

ES. $i^{-1} = ?$ $\quad$ $i = (0,1)$ $\quad$ $\bar{i} = (0,-1) = -i$ $\quad$ $|i| = 1$

$i^{-1} = \bar{i} = -i$ $\quad$ infatti $i \cdot (-i) = -i^2 = 1$

ES. $z = 1+i$ $\quad$ $\bar{z} = 1-i$ $\quad$ $|z|^2 = 1+1 = 2$ $\quad$ $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$

$z = a+ib$ $\quad$ a: parte reale di z $\quad$ $a, b \in \mathbb{R}$
b: parte immaginaria di z

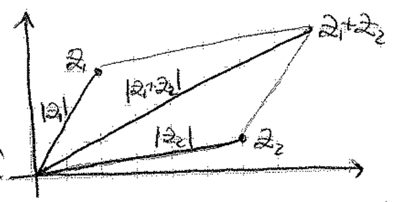
$a = \mathrm{Re}\, z$ $\quad$ $b = \mathrm{Im}\, z$

PROPRIETÀ $\quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

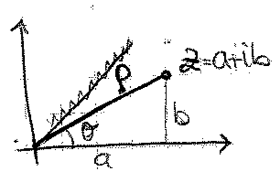
(1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ $\quad$ (2) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ $\quad$ (3) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ $(\mathrm{Im}\, z = 0)$

(4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ $\quad$ (5) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ $\quad$ (6) $|\bar{z}| = |z|$ $\quad$ (7) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
DISEG. TRIANGOLARE

DIM. geometrica (4)
Come nei triangoli, l'ipotenusa è < della somma dei cateti



COORDINATE POLARI



θ: fase di z

$\rho = |z|$ $\quad$ $\begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{cases}$

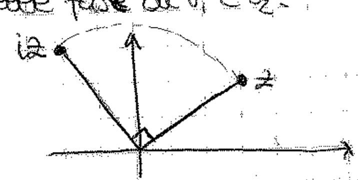
$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ $\quad$ $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ $\quad$ $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2))$
$= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

$|z_1 z_2| = \rho_1\rho_2$

La fase di $z_1 z_2$ è uguale a $\theta_1 + \theta_2$, cioè alla somma delle fasi di θ_1 e θ_2.

$\boxed{i}$ modulo 1, fase $\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$



$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad$ $iz = \rho\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

17.01.12

TEOR. FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA Dato un polinomio di grado n: $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots+a_nz^n$ ($a_i\in\mathbb{C}$, $a_n\neq 0$) esso ha esattamente n zeri su $\mathbb{C}$ contati con la loro molteplicità.

In altri termini $P(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$ $z_1,z_2,\dots,z_n$ zeri di $P(z)$

ES. $P(z)=z^2+1=(z+i)(z-i)$ $P(z)$ irriducibile su $\mathbb{R}$, riducibile su $\mathbb{C}$.

OSS. Se $P(z)$ è a coefficienti reali ($a_i\in\mathbb{R}$) si noti il seguente fatto: supponiamo che $z_0\in\mathbb{C}$ sia uno zero

$P(z_0)=0$ cioè $a_0+a_1z_0+a_2z_0^2+\dots+a_nz_0^n=0$

se coniughiamo diventa $\bar{a}_0+\bar{a}_1\bar{z}_0+\bar{a}_2\bar{z}_0^2+\dots+\bar{a}_n\bar{z}_0^n=0$

ma il coniugato di un reale coincide con il numero stesso, quindi $a_0+a_1\bar{z}_0+a_2\bar{z}_0^2+\dots+a_n\bar{z}_0^n=0$

$P(\bar{z}_0)=0$, quindi $\bar{z}_0$ è anche zero di $P(z)$.

$(z-z_0)$ e $(z-\bar{z}_0)$ sono entrambi divisori di $P(z)$.

Si osservi che $(z-z_0)(z-\bar{z}_0)=z^2-z(z_0+\bar{z}_0)+z_0\bar{z}_0$. Se $z_0=a+ib$, $\bar{z}_0=a-ib\Rightarrow z_0+\bar{z}_0=2a$

$\boxed{\mathrm{Re}\,z_0=\frac{z_0+\bar{z}_0}{2}}$ $\boxed{\mathrm{Im}\,z_0=\frac{z_0-\bar{z}_0}{2i}}$

quindi $(z-z_0)(z-\bar{z}_0)=z^2-2\mathrm{Re}\,z_0\cdot z+|z_0|^2$ ← polinomio a coeff. reali

!! Un polinomio reale si può sempre decomporre in oggetti di 1° e 2° grado !!

ES. x^8+1 su $\mathbb{R}$ si spezza in 4 polinomi di grado 2.

Regola generale per trovare gli zeri

- Polinomio di grado 2: $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2$ $a_0,a_1,a_2\in\mathbb{C}$ zeri?

$$z=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_2}\qquad \Delta=a_1^2-4a_0a_2\in\mathbb{C}\qquad \sqrt{\Delta}=?$$

Se $\Delta\in\mathbb{R}$, $\Delta<0$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-|\Delta|}=\sqrt{|\Delta|}\cdot\sqrt{-1}=i\sqrt{|\Delta|}$

- Zeri di $P(z)=z^n-\omega$ $\omega\in\mathbb{C}$ dato

$P(z)=0\Leftrightarrow z^n=\omega$

$\omega=r\cdot e^{i\tau}$ $r\geq 0$ $\tau\in[0,2\pi[$ ($e^{i\tau}=\cos\tau+i\sin\tau$)

$z=\rho\cdot e^{i\vartheta}$ $z^n=\rho^n\cdot e^{in\vartheta}$

$z^n=\omega$ $\rho^n e^{in\vartheta}=r\cdot e^{i\tau}\Leftrightarrow \rho^n=r$ $n\vartheta=\tau+2k\pi$ $\rightarrow\begin{cases}\rho=r^{\frac{1}{n}}\\ \vartheta=\frac{\tau+2k\pi}{n}\end{cases}$ $\vartheta_0=\frac{\tau}{n}$, $\vartheta_1=\frac{\tau+2\pi}{n}$,

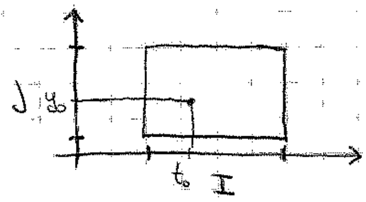
$z_j=\rho e^{i\vartheta_j}$ sono gli zeri $\vartheta_{n-1}=\frac{\tau+2(n-1)\pi}{n}$, $\vartheta_n=\frac{\tau+2n\pi}{n}=$

Si osservi che se cerchiamo la soluzione di (2) che soddisfi la condizione iniziale $y(t_0)=y_0$ otteniamo

$$y(t)=ce^{at} \qquad y(t_0)=ce^{at_0}=y_0 \Rightarrow c=y_0 e^{-at_0}$$

quindi otteniamo $y(t)=y_0\, e^{a(t-t_0)}$. Si dice anche che questa risolve il problema di CAUCHY:

$$\begin{cases} y'=ay \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$



$$(3)\quad \begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases} \qquad t\in I,\ y\in J \qquad t_0\in I,\ y_0\in J$$

(TEOR. di ESISTENZA e UNICITÀ)

C'è un teorema generale che dice che sotto opportune ipotesi su f il polinomio (3) ha una e una sola soluzione locale, cioè una sola $\phi:]a,b[\to J$ derivabile tale che $t_0\in]a,b[$ e

$$\begin{cases} \phi'(t)=f(t,\phi(t)) \\ \phi(t_0)=y_0 \end{cases} \qquad t\in]a,b[$$

In generale $]a,b[\subset I$ e $]a,b[\neq I$. Se $]a,b[=I$ la soluzione si dice GLOBALE.
Per il TEOR. sappiamo che le soluzioni non si intersecano mai.

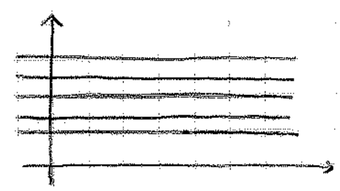
- CASI PARTICOLARI

$$(4)\quad \begin{cases} y'=f(y) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases} \qquad y\in J \qquad \text{(OMOGENEA } f(t)=0)$$

In questo caso il TEOR. di ESIST. e UNIC. richiede come ipotesi su f che f sia di classe C^1 su J.

Come si trovano le soluzioni di (4)? Mettiamo da parte per il momento la condizione iniziale e consideriamo $y'=f(y)$. (5)

(I) si cercano gli zeri di f $\quad y_1,\dots,y_k\in\mathbb{R}$ $\quad f(y_i)=0$
Allora $y(t)=y_i$ è soluzione di (5)



$$\begin{cases} y'(t)=0 \\ f(y(t))=f(y_i)=0 \end{cases} \qquad y_i: \text{PUNTO DI EQUILIBRIO}$$

(II) Per trovare le altre soluz. di (5) si osservi che se $y(t)$ non costante è una soluzione, $f(y(t))\neq 0\ \forall t$ perché, in virtù del TEOR. $y(t)$ non può mai essere uguale a nessuno degli equilibri ($y(t)=y_i$)

$$y'(t)=f(y(t))$$

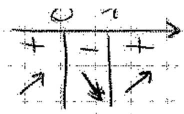
$$\frac{y'(t)}{f(y(t))}=1 \qquad \int\frac{y'(t)}{f(y(t))}\,dt=\underbrace{\int 1\,dt}_{=t+c} \qquad y(t)=y \qquad \frac{dy}{dy}=y'(t)$$

$$\int\frac{y'(t)\,dt}{f(y(t))}=\int\frac{dy}{f(y)}$$

Sia $G(y)$ una primitiva di $\frac{1}{f(y)}$. $\quad G(y)=t+c \quad G(y(t))=t+c \quad \boxed{y(t)=G^{-1}(t+c)}$

OSS. $\quad y'=f(y) \qquad \frac{dy}{dt}=f(y) \qquad \int\frac{dy}{f(y)}=\int dt$

OSS. Se studio $y' = y^2 - y > 0$ $\quad y<0 \vee y>1$
mi aspetto che le soluz. siano crescenti
per $y<0 \vee y>1$



Se studio $y'' = (2y-1)y' = (2y-1)(y^2-y)$, capisco che $y = \frac{1}{2}$ è una retta di flessi

CASA Risolvere $\begin{cases} y' = y^2 - y \\ y(2) = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y' = y^2 - y \\ y(2) = -1 \end{cases}$

Risolvere $y' = e^y$ $\quad y' = \frac{1}{y}$

EQUAZ. A VARIABILI SEPARABILI $\quad y' = g(t) f(y)$ (6)

g continua su I $\quad$ (es $y' = ty$)
f C^1 su J
$\Downarrow$
vale il TEOR. di ESIST. e UNICITÀ

come si trovano le soluzioni?

(I) Equilibri $\quad f(y_i) = 0 \quad y(t) = y_i \ \forall t$ sono soluzioni globali di (6)

(II) $\frac{dy}{dt} = g(t) f(y) \quad \int \frac{dy}{f(y)} = \int g(t)\, dt$

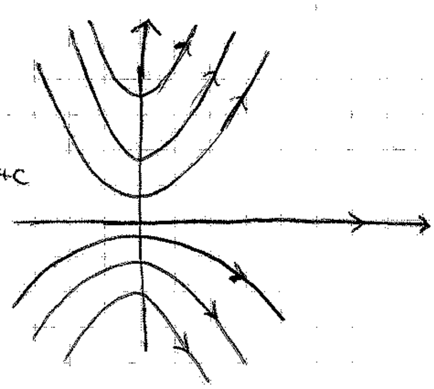
ES. $y' = ty$

(I) $y(t) = 0$ equilibrio

(II) $\frac{dy}{dt} = ty \quad \int \frac{dy}{y} = \int t\, dt \quad \log|y| = \frac{1}{2}t^2 + c \quad |y(t)| = e^{\frac{1}{2}t^2 + c}$

$y(t) = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{2}t^2} \quad y(t) = k e^{\frac{1}{2}t^2} \quad t \in \mathbb{R}$

in $t=0$ $\quad y(t) = k e^{\frac{1}{2}t^2}$ ha derivata nulla $\forall t$



CASA $\quad y' = -ty^2 \quad y' = \frac{t}{y}$

ES. $y' = ty - 1$ $\quad a(t) = t \quad b(t) = -1$

$\int a(t)dt = \int t\,dt = \underbrace{\frac{1}{2}t^2}_{A(t)} + c$

$\int e^{-A(t)} b(t)dt = \int e^{-\frac{1}{2}t^2}(-1)\,dt = -\int e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$?

Posso solo scrivere che $\underline{y(t) = -e^{\frac{1}{2}t^2}\int e^{-\frac{1}{2}t^2}dt}$

ES. $y' = ty - t$

$\int e^{-A(t)} b(t)dt = \int e^{-\frac{1}{2}t^2}(-t)\,dt = e^{-\frac{1}{2}t^2} + c$

$y(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}(e^{-\frac{1}{2}t^2} + c) = \underline{1 + c e^{\frac{1}{2}t^2}}$

EQUAZ. DIFFERENZIALI del 2° ordine lineari a coeff. costanti

Oscillatore armonico: $my'' = -ky$ $\quad$ m: massa del corpo, k: cost. elastica, h: cost. di attrito $(k, h > 0)$

in realtà sarebbe $\underbrace{my''}_{F(=m\cdot a)} = \underbrace{-ky}_{F_{el}} \underbrace{-hy'}_{F_{attr.}} + \underbrace{f(t)}_{F_{esterna}}$

$y'' + \frac{h}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{f(t)}{m}$ $\rightarrow$ eq. diff. generica $\quad y'' + ay' + by = f(t) \quad (a, b \in \mathbb{R} / a, b \geq 0)$

I problemi di Cauchy per eq. del 2° ordine sono del tipo (4) $\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$ $\quad t_0 \in I$

Il TEOR. di esistenza e unicità si estende a questo contesto e garantisce che (4) ammette una e una sola soluzione definita su I.

(I) $\underline{f(t) = 0}$ (caso omogeneo)

Si osservi che in tal caso se $y_1(t)$, $y_2(t)$ sono due soluzioni di $y'' + ay' + by = 0$ (5), anche ogni combinazione lineare $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ è soluzione della (5).

Soluzioni? cerchiamo soluzioni della (5) del tipo $y(t) = e^{\lambda t}$

$y'(t) = \lambda e^{\lambda t} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Sostituisco: $\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0 \quad e^{\lambda t}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (polinomio caratteristico dell'eq. diff.)

$\Delta = a^2 - 4b \quad \Delta > 0 \quad \lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}$

$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t} \Rightarrow \boxed{y(t) = \alpha e^{\frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}t} + \beta e^{\frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}t}}$ integrale generale

Notiamo infatti che se cerchiamo di risolvere il problema di Cauchy (4) con $t_0 = 0$ otteniamo

$\begin{cases} \alpha + \beta = y_0 \\ \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = v_0 \end{cases}$ $\rightarrow$ ammette una e una sola soluz. se $D \neq 0$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0$

$(1\cdot\lambda_2) - (1\cdot\lambda_1) \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 \neq \lambda_1$

ES. $\Delta=0$ $\lambda^2+2\lambda+1=0$ $a=2, b=1$

$\lambda^2+2\lambda+1=0$ $(\lambda+1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=-1$

$y(t)=\alpha e^{-t}+\beta t e^{-t}$ $[y(t)=\alpha e^{\lambda_1 t}+\beta t e^{\lambda_1 t}]$

ES. $y''+y'-2y=0$ $\lambda^2+\lambda-2=0$

$\Delta=1+8=9>0$ $\lambda=\frac{-1\pm3}{2} < \begin{matrix}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-2\end{matrix}$

$* \; y(t)=\alpha e^{t}+\beta e^{-2t}$ $y'(t)=\alpha e^{t}-2\beta e^{-2t}$

Risolvo il problema di Cauchy $\begin{cases} y''+y'-2y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dots \\ \alpha+\beta=0 \\ \alpha-2\beta=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dots \\ \alpha=\frac{1}{3} \\ \beta=-\frac{1}{3} \end{cases}$

$y(t)=\frac{1}{3}e^{t}-\frac{1}{3}e^{-2t}$

CASO NON OMOGENEO $y''+ay'+by=f(t)$ (2)

Prima risolvo l'omogenea $y''+ay'+by=0$ (1) e trovo l'integrale generale.

OSS. Sia $\bar{y}(t)$ soluzione di (2), allora tutte le soluzioni di (2) si ottengono dalla formula $\underbrace{\bar{y}(t)+y(t)}_{z(t)=}$, dove $y(t)$ è una qualunque soluzione di (1).

DIM. (esercizio) derivo due volte $z(t)$ e sostituisco in (2) ...

Come si trova $\bar{y}(t)$? metodo analogico: cerchiamo $\bar{y}(t)$ "simile" a $f(t)$.

$f(t)$ polinomio $\Rightarrow \bar{y}(t)$ polinomio
esponenziale $\Rightarrow$
trigonometrica $\Rightarrow$

ES. $y''+y'+y=1+t$ $\rightarrow$ cerco una soluzione che sia un polinomio di grado 1

$\bar{y}(t)=a+bt$ $\bar{y}'(t)=b$ $\bar{y}''(t)=0$

sostituisco in $y''+y'+y=1+t \rightarrow 0+b+a+bt=1+t$ $\begin{cases} b=1 \\ b+a=1 \end{cases}$ $\begin{cases} b=1 \\ a=0 \end{cases} \rightarrow \bar{y}(t)=t$

ES. $y''+y'=1$ il metodo non funziona, infatti se pongo
$\rightarrow$ cerco una soluz. costante
$\bar{y}(t)=a$ $\bar{y}'(t)=0$ $\bar{y}''(t)=0$ $\rightarrow y''+y'=1$ $\cancel{0+0=1}$

TRUCCO: cercare sempre polinomi di un grado superiore.

ES. $y''+y'-2y=e^{\lambda t}$

$\bar{y}(t)=ce^{\lambda t}$ $\bar{y}'(t)=\lambda c e^{\lambda t}$ $\bar{y}''(t)=\lambda^2 c e^{\lambda t}$

sostituisco: $\lambda^2 c e^{\lambda t}+\lambda c e^{\lambda t}-2ce^{\lambda t}=e^{\lambda t}$ $c(\lambda^2+\lambda-2)=1$ se $\lambda^2+\lambda-2\neq0 \Rightarrow c=\frac{1}{\lambda^2+\lambda-2}$

Soluz. particolare: $\bar{y}(t)=\frac{1}{\lambda^2+\lambda-2}e^{\lambda t}$ Integr. generale $y(t)=\frac{1}{\lambda^2+\lambda-2}e^{\lambda t}+\underbrace{\alpha e^{t}+\beta e^{-2t}}_{\text{integr. gen. dell'omogenea } (*)}$

24.01.12

RIPASSO

- NUMERI REALI

① sup/max

ES. $f(x) = \frac{x+1}{2x-15}$

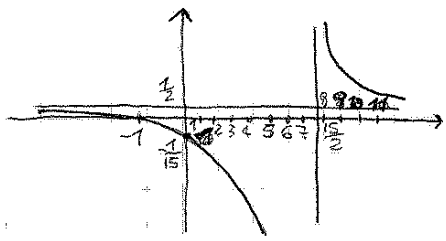
$A = \left\{ \frac{x+1}{2x-15} \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{15}{2} \right\}$ $A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ $\sup A = +\infty$, $\inf A = -\infty$

$B = \left\{ \frac{x+1}{2x-15} \mid x \in \mathbb{R}, x > \frac{15}{2} \right\}$ $B = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ $\sup B = +\infty$, $\inf B = \frac{1}{2}$

$C = \left\{ \frac{n+1}{2n-15} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (a_n) decresce per $n = 1, 2, 3, \dots, 7$ e decresce per $n \geq 8$

Disegno l'iperbole

$\min C = a_7 = -8$ $\max C = a_8 = 9$



- SUCCESSIONI/FUNZIONI

① Concetto di limite

- strumenti $\begin{cases} \text{proprietà algebriche} \\ \text{confronto} \\ \text{monotonia} \end{cases}$
- teor. della permanenza del segno

ES. $\lim_{n \to +\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{n^7} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\sin \frac{1}{n!}} = \lim_{n \to +\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{n^7}{n!}} \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{n! \sin \frac{1}{n!}} = 0$ (n! prevale sugli esponenziali) !!

$\lim_{n \to +\infty} n! \sin \frac{1}{n!} = 1$

oppure $\sin x \sim x$ $x \to 0$ $\to$ $\sin \frac{1}{n!} \sim \frac{1}{n!}$ $n \to +\infty$ $\lim_{n \to +\infty} n^7 \sin \frac{1}{n!} = \lim_{n \to +\infty} n^7 \frac{1}{n!} = 0$

ES. $\lim_{n \to +\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{n^2} (\sin(n) + 5) = +\infty$

$4 \leq \sin(n) + 5 \leq 6$ confronto: $\sin(n) + 5 \geq 4$ $\underset{+\infty}{n^2 (\sin(n) + 5)} \geq \underset{+\infty}{4n^2}$

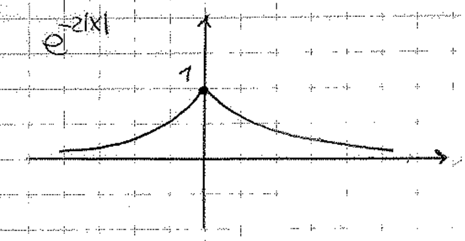
- FUNZIONI

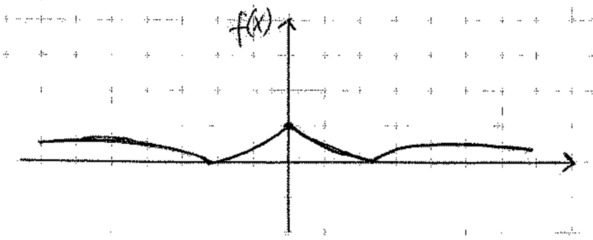
- continuità, derivabilità
- teoremi: Weierstrass, valori intermedi, Rolle, Lagrange e corollari
- studi di funzione, calcolo dei limiti (simboli di Landau, sviluppi di Taylor)

ES. $f(x) = e^{ax} - x - \cos(bx) - x^2$ sviluppo al 4° ordine in $x = 0$, p.p.

$f(x) = \cancel{1} + ax + \frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^3 x^3}{6} + \frac{a^4 x^4}{24} + o(x^4) - x - \left(\cancel{1} - \frac{b^2 x^2}{2} + \frac{b^4 x^4}{24} + o(x^5) \right) - x^2 = (a-1)x + \left(\frac{a^2 + b^2}{2} - 1 \right) x^2 + \frac{a^3}{6} x^3 + \frac{a^4 - b^4}{24} x^4 + o(x^4)$

ES. $f(x) = \left|e^{-2|x|} - \frac{1}{2}\right|$

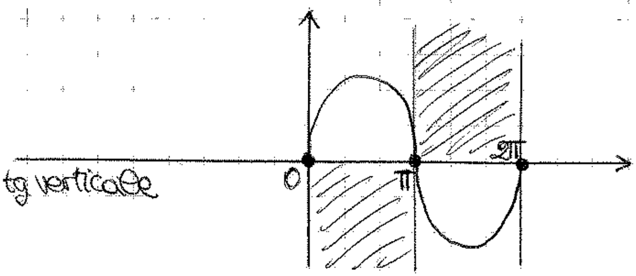




ES. $f(x)=\sqrt[3]{\sin x}$

$f'(x)=\frac{1}{3}(\sin x)^{-\frac{2}{3}}\cos x$

$x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$ pt. a tg verticale



• EQUAZIONI DIFFERENZIALI

ES. $y'=\frac{t}{y+1}$ $\quad f(y)=\frac{1}{y+1}$ $\quad y\neq -1 \to f(y)$ è C^1

$g(t)=t$

No punti di equilibrio

$\int (y+1)\,dy = \int t\,dt$ $\quad \frac{1}{2}y^2+y=\frac{1}{2}t^2+c$ $\quad y^2+2y-(t^2+2c)=0$

$\Delta = 4+4t^2+8c$ $\quad y=\frac{-2\pm\sqrt{4(1+t^2+2c)}}{2} = -1\pm\sqrt{t^2+2c+1}$

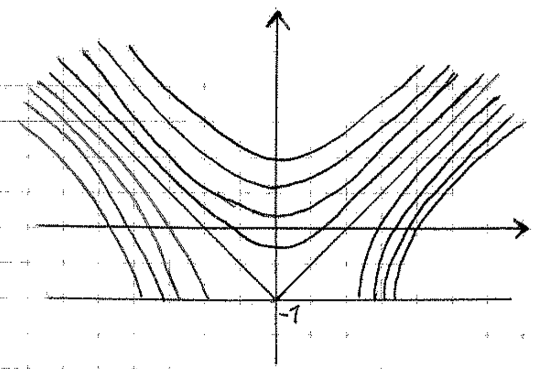
se $y>1$ $\quad y(t)=-1+\sqrt{t^2+2c+1}$ $\quad t^2+2c+1\geq 0$ $\quad t^2\geq -2c-1$

se $2c+1>0$ $\quad c>-\frac{1}{2}$ la soluz. è definita $\forall t$

se $c<-\frac{1}{2}$ ci sono 2 soluzioni: una per $t>\sqrt{-2c-1}$, l'altra per $t<-\sqrt{-2c-1}$

se $c=-\frac{1}{2} \to y=-1+\sqrt{t^2}=-1+|t|$

dato che $|t|$ non è derivabile in $t=0$, ci sono quindi due soluzioni: $\begin{cases}-1+t & t>0\\ -1-t & t<0\end{cases}$



- $y'' - 2y' = e^{\alpha x}$

$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2 \qquad y(t) = C_1 + C_2 e^{2x}$

se $\alpha = 0$, $\alpha = 2$ c'è risonanza

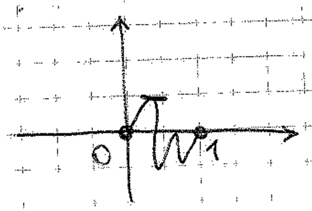
$\frac{1}{2} e^{\alpha x}$ è soluzione? $\quad y' = \frac{\alpha}{2} e^{\alpha x} \quad y'' = \frac{\alpha^2}{2} e^{\alpha x}$

$\frac{\alpha^2}{2} e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$ NO

Se non c'è risonanza, la soluz. dev'essere del tipo $ke^{\alpha x}$ e non $kxe^{\alpha x}$

se $\alpha = 2 \rightarrow \frac{2^2}{2} e^{\alpha x} - 2e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$ ✓

(14) $f(0)=f(1)=0$ $\quad g(x)=f^4(x)$



$g'(x)=4f^3(x)f'(x)$

2 zeri $\quad$ almeno 1 zero (Rolle)

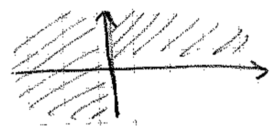
g(x) si annulla almeno tre volte $\boxed{a}$ ✓

(15) $x\to 0^+$ $\quad f(x)=3x+\sqrt{4x^2+2x^3}$ $\quad$ p.p. $=5x$ $\boxed{a}$ ✓

(17) Se f è <u>continua</u> in $[a,b]$, $\exists c\in[a,b]$ tale che $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ $\boxed{c}$ ✓

(18) $F(x)=\int_0^x t^2\cosh(t^2)\,dx$ $\quad F'(x)\geq 0\ \forall x$ $\quad$ F crescente su $\mathbb{R}$ $\boxed{b}$ ✓

(19) f continua su $[0,+\infty)$ $\quad f(x)\leq 0\ \forall x\geq 0$. $\quad \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$



converge o diverge a $-\infty$

(20) $y''-y=0$ $\quad \lambda^2-1=0$ $\quad \lambda_1=+1$ $\quad \lambda_2=-1$

$y(t)=\alpha e^{t}+\beta e^{-t}$ $\quad$ ha almeno una soluzione non limitata su $(0,+\infty)$

• $\alpha\in\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\operatorname{arctg}((\operatorname{arctg}x)^3+x^5)$ $\quad$ incontra $y=a$ in <u>al più</u> un punto