NUMERO: 676

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Russo

MATERIA: Elettrotecnica
Prof. Canavero

ELETTROTECNICA, prof morbido.

- l'elettricità è fucking everywhere.

- ESAME
  - una parte di domande (un po' più legati alla teoria)
  - una parte di esercizi (NO ORALE)

le domande sono a risposta aperta, gli esercizi sono istruiti. (:D), si usa la testolina.

- gli piacciono gli esempi.
- questa è una palla colossale.
- Scaricare il 1° o 2° libro. ← ILLEGALE! !!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 99

CONVENZIONE PER LA TENSIONE:

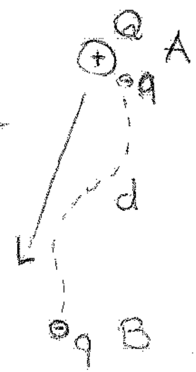
V_{AB}, o V_{BA}, oppure una freccia che punti verso l'arrivo

È sempre una quantità con segno, quindi un segno negativo equivale a scambiare i punti di arrivo e partenza;

$\phi_A - \phi_B = -V_{BA} \rightarrow -V_{AB} = V_{BA}$ TENSIONE

Se viene la tensione negativa, NON CROLLA NESSUNO.

- ESPERIMENTO: Se (come per le due cariche di prima), rovesciamo una secchiata di cariche in A, vanno verso B, come un flusso.
Stabilita la direzione del flusso con una freccia, esso è la quantità di cariche q che passano nel tempo t, e viene chiamata CORRENTE ELETTRICA (I).



$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ → CORRENTE! CORRENTE

Così troveremo la media. Per avere un'idea più precisa, si calcola su un intervallo che tende a 0.

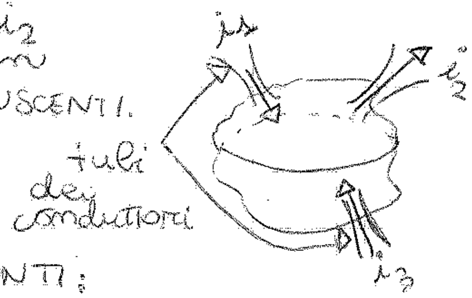
$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \dot{i}$, ovvero la derivata del flusso. È necessario aver stabilito la direzione della corrente, se si trova un valore negativo per la corrente, il flusso andava in direzione opposta che in ipotesi.

-[UNITÀ DI MISURA!! Della tensione V è il VOLT, con simbolo "V", abbreviazione per $\frac{J}{C}$. Per la CORRENTE è l'AMPÈRE, abbreviato "A", in luogo di $\frac{C}{S}$.

freccia della corrente i è opposta alla tensione V_{AB}.

- "CONVENZIONE DI SEGNO DEI GENERATORI": In questo caso le frecce di V e di i sono equiverse; la quantità di E (energia meccanica) che viene trasferita da un sistema al sistema elettrico, si dice che "arricchisce" il sistema elettrico, e viene rappresentata dalla potenza p. Infatti se troverò una potenza negativa in un esercizio, sarà stata usata la convenzione di segno dei generatori, se invece p è positiva, sarà stata usata la convenzione di segno degli utilizzatori.

- CONSERVAZIONE DELLA CARICA: Se una o più cariche entrano nella superficie attraverso un conduttore, allora ci devono essere una o più cariche che escono dagli altri "tubi", tutto nella stessa unità di tempo. Perché tutto ciò avvenga, si deve avere anche il bilanciamento delle correnti: $\underbrace{i_1 + i_3}_{\text{ENTRANTI}} = \underbrace{i_2}_{\text{USCENTI.}}$



- LEGGE DI BILANCIAMENTO DELLE CORRENTI:
(LEGGE DI KIRCHOFF)

$\sum_n i_n = \sum_m i_m$ (sommatoria delle cariche entranti = quella delle cariche uscenti)

- La legge di Kirchoff vale sia per superfici che per punti, attraversati da correnti.

- Possiamo anche scrivere $i_1 + i_3 - i_2 = 0 \rightarrow i_1 + i_3 + (-i_2) = 0 \rightarrow$ giriamo il verso della corrente cambiando $-i_2$ in i_2', e otteniamo:

$i_1 + i_3 + i_2' = 0$

- $KCL_2 \left(= \sum_K i_K\right) = 0 \leftarrow$ correnti entranti o uscenti

Questo è un secondo modo di esprimere la legge di kirchoff

- MISURE DELLE TENSIONI

Dai dati sappiamo $V_1 = 5V$, $V_2 = 7V$

- Sul percorso chiuso possiamo usare KVL_2: $V_1 = V_2 + V_3$, questo perché percorrendo in senso orario ABCA, e in base a questo vediamo quali sono le V discordi o concordi.

$V_3 = V_1 - V_2 = 5 - 7 = -2$ [PRIMO PERCORSO] KV_3

- Sul percorso chiuso ACDA ho due tensioni incognite, quindi non posso usarlo e prendo un altro percorso chiuso, cioè ABCDA, ma non si può fare ancora nulla, quindi consideriamo il dato aggiuntivo ottenuto (V_3); uso il percorso chiuso ADCA:

$V_1 + V_3 + V_4 = 0 \rightarrow V_4 = -7V$

- Ora possiamo calcolare la potenza, avendo tutti i dati dalle KCL o KVL.

a_1: $P_1 = i_1 \cdot V_1 = 15W$

a_2: $P_2 = i_2 \cdot V_2 = 14W$

a_3: $P_3 = i_3 \cdot V_3 = 10W$

a_4: $P_4 = i_4 \cdot V_4 = -35W$

a_5: $P_5 = i_5 \cdot V_5 = -4W$

Per i segni si sta usando la convenzione degli utilizzatori.

$$\boxed{\sum P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 0}$$

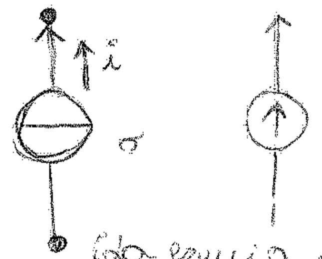
- Legge di TELLEGEN: Tensioni e correnti devono soddisfare KCL e KVL, quindi la somma delle potenze calcolate su ogni lato (o elemento del circuito), deve essere NULLA, per la legge di CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA.

- L'eq. di funzionamento in questi generatori, non influenza la corrente, ma solo la TENSIONE; la corrente può avere qualsiasi andamento.

- La batteria può essere anche rappresentata con 

- GENERATORE INDIPENDENTE DI CORRENTE.

Anche questo è un DIPOLO, il simbolo è un CERCHIETTO anche qui (come ogni generatore).

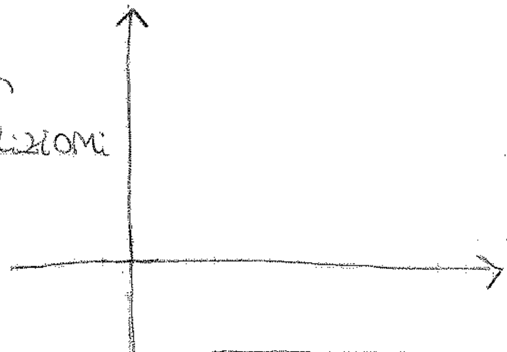


(La freccia indica il verso della corrente)

- La grandezza impressa, qui è a(t) la funzione sarà

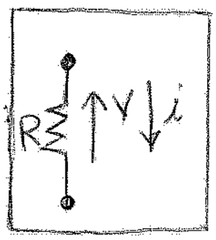
$i = a(t)$, e può avere andamento sinusoidale, irregolare.... Un esempio di generatore è il CARICABATTERIE, che pompa cariche "generate" nelle batterie.

- Come prima per il generatore di tensione, questo produce corrente in maniera indipendente da altre condizioni fisiche, come la tensione.



- RESISTORE

Il simbolo è unico, è sempre un dipolo:



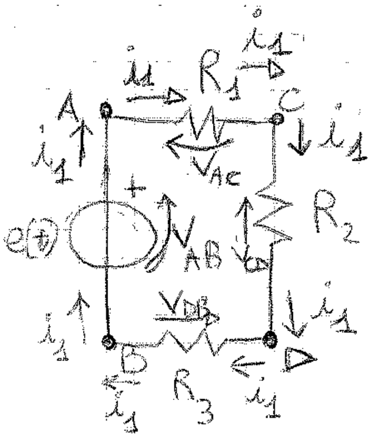
- In questo caso, poiché non è indipendente, è importante la condizione di segno degli utilizzatori, quindi corrente e tensione di verso opposto.

$V = Ri$ Equazione di funzionamento, ed è la LEGGE DI OHM.

Il coefficiente di proporzionalità R ha unità di misura è l'Ohm $\Omega = \frac{V}{A}$, e si chiama RESISTENZA.

- ESEMPIO

- 1° scegliamo le variabili per il circuito.



- Essendo chiuso, applichiamo KVL per le tensioni,

$\sum_{\circlearrowright} V = \sum_{\circlearrowleft} V$, quindi $V_{AB} = V_{AC} + V_{CD} + V_{DB}$. Possiamo usare la equazione funzionale:

$e = V_{AB}$, $e = V_{AC} + V_{CD} + V_{DB}$

- possiamo anche usare la legge di Ohm sul resistore $(V = iR)$

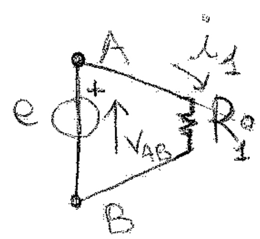
$e = R_1 i_1 + R_2 i_1 + R_3 i_1$

$e = i_1 (R_1 + R_2 + R_3) \rightarrow i_1 = \frac{e}{R_1 + R_2 + R_3}$, così abbiamo trovato la corrente nel circuito.

- Se voglio trovare una tensione:

$V_{CD} = \frac{e R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = R_2 \cdot i_1$

- Altro esempio



La tensione nel circuito sarà sempre nello stesso verso, quindi la corrente va posta in maniera conseguente

$V_{AB} = R_1 \cdot i_1$

$\downarrow$

$e = R_1 \cdot i_1$

$i_1 = \frac{e}{R_1}$

- Dall'esercizio 1:

Se si ha la stessa corrente i_1 per TUTTE le resistenze, si dice che sono COLLEGATE IN SERIE.

$\underset{\text{in es 2}}{R_1} = \underbrace{R_1 + R_2 + R_3}_{\text{es 1}}$, possiamo uguagliarle perché c'è lo stesso generatore $e(t)$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 99

- REGOLA DEL COLEGAMENTO IN PARALLELO

Avendo un circuito con resistori per gli stessi due punti (stessa tensione), si parla di collegamento in parallelo.

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_k \frac{1}{R_k}} \quad , \quad \sigma \quad G_{eq} = \sum_k G_k$$

- Caso particolare, 2 resistenze in //. (R_1, R_2)

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

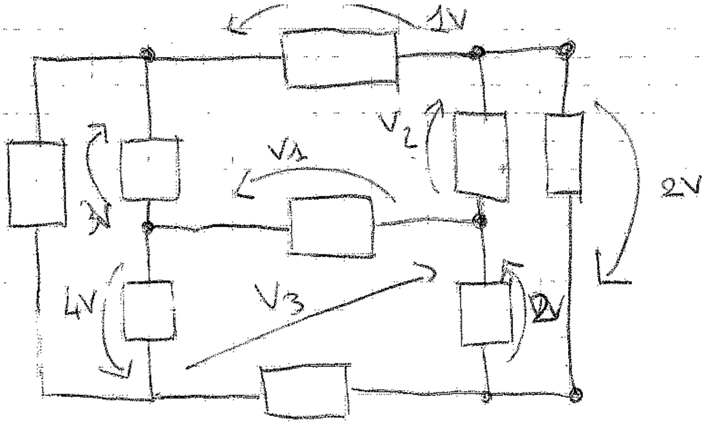
- REGOLE DEL PARTITORE DI CORRENTE

1 generatore di corrente, e resistenze collegate in parallelo

$\Downarrow$

$$i_k = \frac{\frac{a}{R_K}}{\sum_m \frac{1}{R_m}} = \frac{\frac{a}{R_K}}{\frac{1}{R_{eq}}}$$

5°



$V_2 + 2 + 2 = 0$

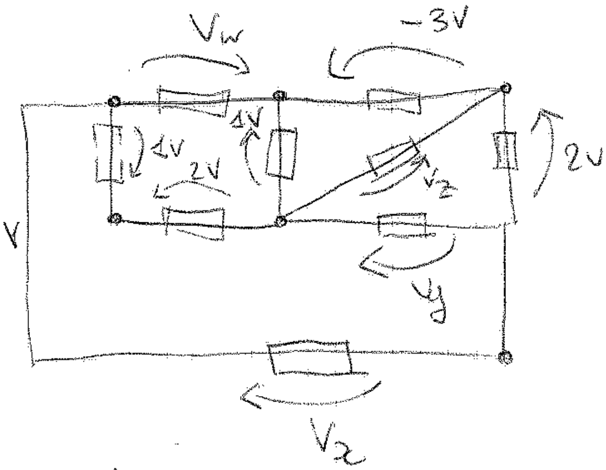
$V_2 = -4V$

$V_1 = 3 - 1 + 4 = 6V$

$V_3 + V_1 + 4 = 0$

$V_3 = 2V$

6°



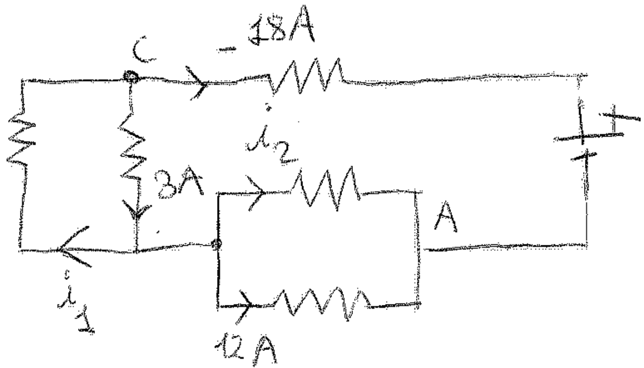
$V_w - 1 + 2 - 1 = 0 \rightarrow V_w = 0V$

$V_2 - 3 - 1 = 0 \rightarrow V_2 = 4V$

$V_y + 4 - 2 = 0 \rightarrow V_y = -2V$

$V_x + V_w + 3 - 2 = 0 \rightarrow V_x = -1V$

7°



$i_2 + 12 - 18 = 0$

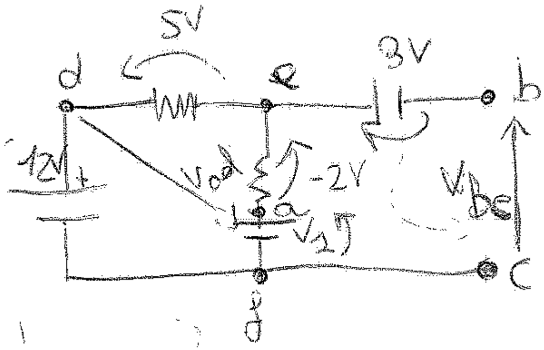
$i_2 = 6A$

$i_1 = 3 - i_2 - 12 = -15A$

8° $i_1 = i_3 + i_2 = 0,5A$

$i_S = 2A$

9°



$-V_1 + 12 - 5 - (-2) = 0$

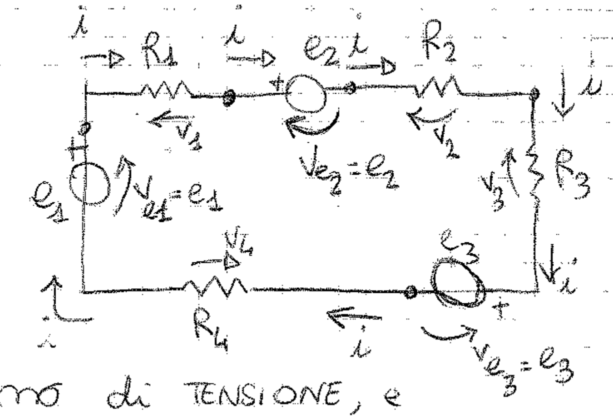
$V_1 = 9V$

$V_{ad} = 2 + 5 = 0 \rightarrow V_{ad} = -3V$

$V_{bc} + 3 + 2 + 1 - 9 = 0 \rightarrow V_{bc} = 4V$

- Circuiti in serie:

ESEMPIO:



Il circuito ha tutte componenti in serie, poiché il filo è unico, la corrente "i" è unica, perché i componenti sono in serie, e i generatori sono di TENSIONE, e non di corrente, infatti si hanno tensioni diverse.

- Possiamo usare KVL, per circuiti chiusi, somma delle tensioni equiverse = 0.

$$+e_1 + (-V_1) + (-e_2) + (-V_2) + (-V_3) + (-e_3) + (-V_4) = 0$$

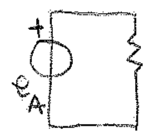
↓ Giochino di algebra semplicissimo

$$\underbrace{e_1 - e_2 - e_3}_{} = \underbrace{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}_{}$$

sostituiamo la somma con "e_A". Essendo sui resistori, usiamo la legge di Ohm, ovvero " $R_1 i + R_2 i + R_3 i + R_4 i = i\underbrace{(R_1+R_2+R_3+R_4)}_{Req}$

↓

Regola: purché i resistori siano IN SERIE, li possiamo raccogliere in UNO UNICO, somma degli altri.

$e_A = R_{eq} \cdot i$ —▷  Req circuito semplificato equivalente.

↓

Da qui potremmo trovare $i = \frac{e_A}{R_{eq}}$, poiché i dati sono noti dall'inizio.

BISOGNA SEMPRE CERCARE DI SEMPLIFICARE IL CIRCUITO!!!

- COROLLARIO: Come per i RESISTORI, anche i generatori in serie di tensione si possono sommare in V_{eq}.

- Altro esempio

Prendiamo lo stesso circuito, ma $R_3 >> R_1, R_2, R_4$. In tal caso, $R_{eq} \simeq R_3$, perché è il più rilevante, e anche $R_{eq} \geq R_3$

È UNA VERIFICA IMPORTANTE PER GLI ESERCIZI!!

- Sul circuito abbiamo posizionato una tensione unica, e tutte le correnti opposte in verso ad essa.

- Possiamo ancora applicare KCL, sul nodo A.

$$i_{a_3}+i_{a_1}=i_1+i_2+i_3+i_{a_2}$$

$$i_{a_3}+i_{a_1}-i_{a_2}=i_1+i_2+i_3$$

$$\underbrace{a_1-a_2+a_3}_{a_E}=i_1+i_2+i_3$$

- Per diversi generatori di corrente, possiamo ottenere un generatore equivalente, somma dei generatori. Ora usiamo Ohm:

$$a_E=\frac{V_{AB}}{R_1}+\frac{V_{AB}}{R_2}+\frac{V_{AB}}{R_3}\to\boxed{a_E=V_{AB}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)}$$

$$a_E=V_{AB}\cdot\frac{1}{R//}$$ Somma delle resistenze in parallelo.

- CASO PARTICOLARE: $R_J \ll R_K$ $(J\neq K)$

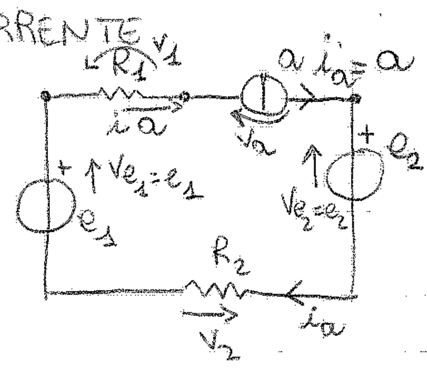
$R//=\frac{1}{\sum_n \frac{1}{R_n}}$ → diventa equivalente a $(\le)$ R_J, che essendo il più piccolo, il suo inverso il più grande, diventa il più rilevante.

$R//\le R_J$

- CASO PARTICOLARE: $R_J=0$

$R//\le R_J$, non potrebbe diventare negativa, quindi $R//$ deve essere $=0$. Perciò se c'è un CORTO CIRCUITO, diventa tutto un CORTO CIRCUITO. (Questo solo per le PARALLELE)

- CIRCUITO IN SERIE CON GENERATORE DI CORRENTE



KVL! $V_{e_1}-V_1-V_a-V_{e_2}-V_2=0$

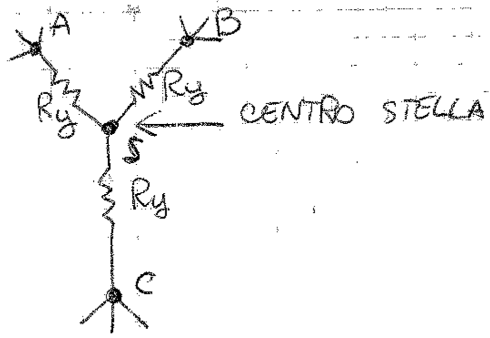
$e_1+(-R_1i_a)+(-V_a)-e_2+(-R_2i_a)=0$

- L'unica incognita restante è V_a.

$e_1-R_1i_a-e_2-R_2i_a=V_a$ → RICAVATO.

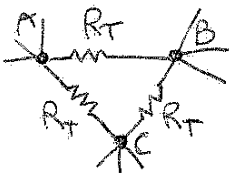
COLLEGAMENTO A STELLA, O A "Y"

- Si rappresenta così:



Non è né in serie, né parallelo.

- COLLEGAMENTO A TRIANGOLO (O a Δ)

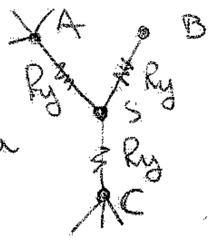


- Queste due sono LE UNICHE DIFFERENZE di circuiti oltre a quelli in serie o parallelo.

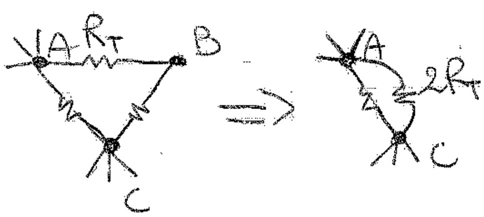
- RELAZIONE PER PASSARE DAL COLLEGAMENTO A "Y" A QUELLO A "Δ".

- Iniziamo da un caso PARTICOLARE, con TUTTE LE RESISTENZE UGUALI, riferimento alle figure sopra.

- Vediamo che in B abbiamo un MONOPOLO, cioè non finisce in nulla e non abbiamo nessuna corrente. Ciò significa che anche sulla resistenza abbiamo corrente e tensione nulla. Perciò su A e C abbiamo ora una SERIE, con $R_{eq} = 2R_y$, perché le resistenze sono uguali.



- Per il triangolo, stessa cosa col monopolo in B, abbiamo di nuovo una serie su AC.

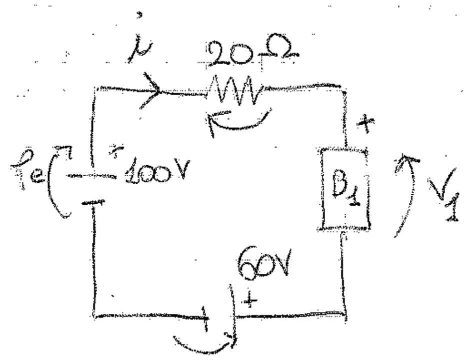


$$R_{eq} = R_T \,//\, 2R_T \rightarrow R_{eq} = \frac{R_T \cdot 2R_T}{R_T + 2R_T} = \frac{2R_T}{3R_T} = \frac{2}{3}$$

$\boxed{R_T = 3R_y}$ o

- EQUIVALENZA TRA I DUE CIRCUITI: $2R_Y = \frac{2}{3}R_T \rightarrow \boxed{R_y = \frac{1}{3}R_T}$

- ESERCITAZIONE



? V
? i
? Pfornita

Il primo generatore eroga 100 W di potenza.

$\boxed{P_a = -P_e}$ → potenza assorbita in relazione a quella erogata

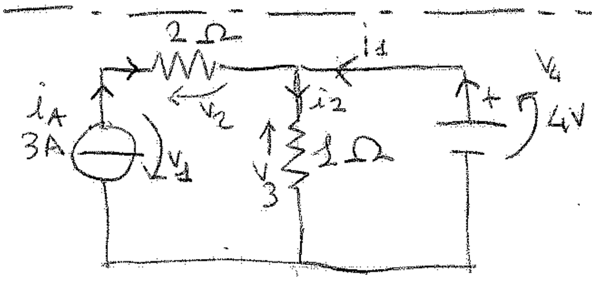
$P_e = i \cdot V \rightarrow 100 = i \cdot 100 \rightarrow i = 1A$

$V = i \cdot R \rightarrow V = 20i \rightarrow V = 20 V_{\Omega}$

$V_1 + 20 - 100 + 60 \rightarrow V_1 = 20V$

$P_f = 20 \cdot 1 = 20W$

Trovare la potenza fornita su ogni elemento.



$V_3 = -4V$

$-4V = i_2 R \rightarrow i_2 = -4A$

$V_2 = i_A \cdot R \rightarrow V_2 = 2 \cdot 3A \rightarrow V_2 = 6V$

$i_A + i_2 + i_1 = 0 \rightarrow i_1 = -1A$

$V_1 + 4V + 6V = 0 \rightarrow V_1 = -10V$

$P_3 = -4A \cdot -4V = 16W$

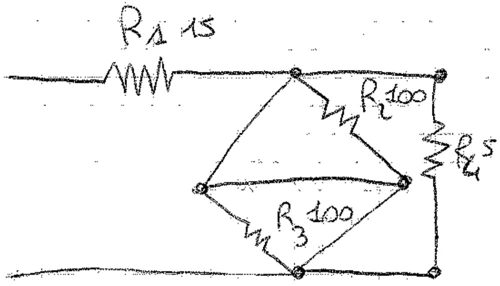
$P_4 = 4V \cdot (-1A) = -4W$

$P_2 = 6V \cdot 3A = 18W$

$P_1 = -10V \cdot 3A = -30W$

$$R_{eq_1} = \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{100}} = 50$$

$$R_{eq_2} = \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{5}} = \frac{50}{11}$$



Nel rombo c'è un corto circuito, quindi anche R_4 muore essendo in parallelo con un corto circuito; resta solo $R_1 = 15$.

- continuazione dell'esempio dell'ultima volta

$$V_{AB} = \frac{\frac{e_1}{R_1} + a_1 - \frac{e_2}{R_4} - a_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}$$

REGOLA: Vediamo che al numeratore, generatori con segno opposto fanno sul circuito correnti o tensioni corrispondenti di segno opposto. La CONDIZIONE DI APPLICABILITÀ è avere un circuito con struttura in //, e rami con dipoli in serie.
(TEOREMA DI MILLMAN)

- Posso trovare la tensione del parallelo, così:

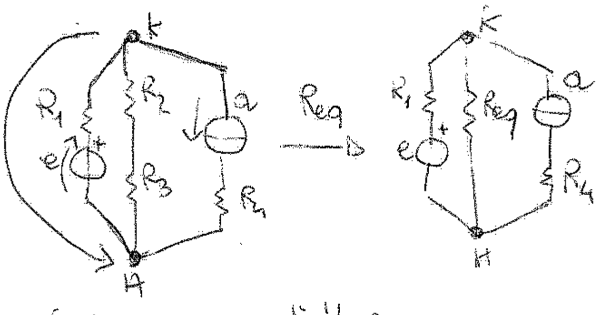
$$V_p = \frac{\sum \pm \frac{e_i}{R_i} + \sum \pm a_j}{\left(\sum \frac{1}{R_m}\right)}$$ ← somma su TUTTI i RAMI tranne gen. di corrente

Il segno + e − davanti si mettono a seconda del fatto che la tensione o corrente relativa sia concorde o discorde in verso rispetto al parallelo da trovare.

ESEMPIO

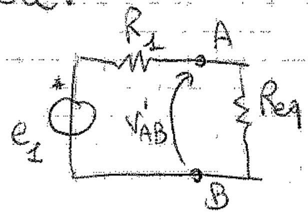
Applichiamo Millmann

$$V_{HK} = \frac{-\frac{e}{R_1} + \frac{a}{R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{eq}}}$$



Notiamo che "e" ha la tensione opposta alla tensione del parallelo da cercare, quindi mettiamo un "−" nella relazione.

Ne risulta un circuito di questo genere:

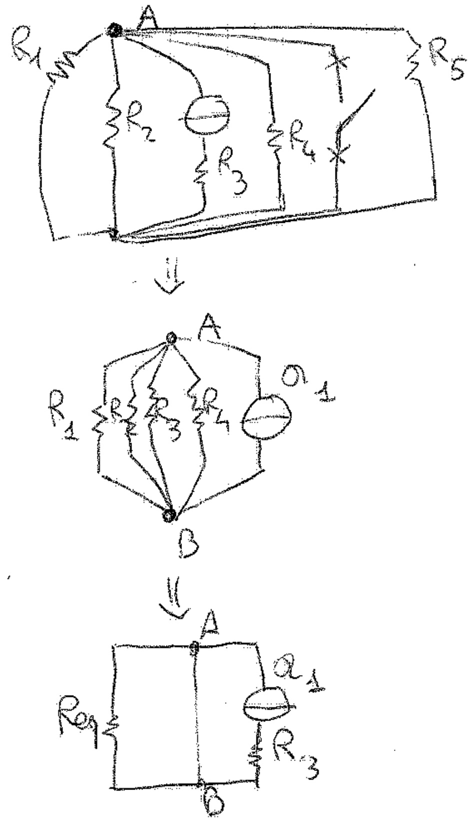


$$V'_{AB} = e_1 \frac{R_{eq}}{R_1 + R_{eq}}$$

Abbiamo usato il PARTITORE DI TENSIONE.

- secondo contributo, a_1 attivo: $e_1 = 0$, $e_2 = 0$, $a_2 = 0$

Ridisegniamo il circuito con le dovute differenze, e togliamo tutte le resistenze in parallelo.

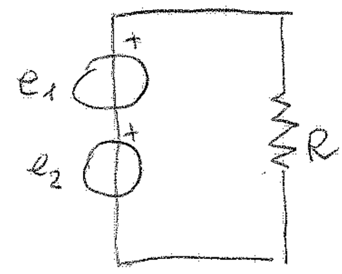


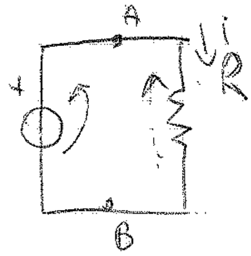
Usiamo infine la legge di Ohm.

$$V_{AB} = R_{eq}\, a_1 \leftarrow \text{(corrente)}$$

R_{eq}

- Supponiamo di voler trovare la potenza prodotta dal resistore. Possiamo sommare due generatori in serie. Così la tensione del generatore è uguale a quella del resistore.





$$V = Ri \rightarrow i = \frac{e_1 + e_2}{R}$$

$(e_1 + e_2)$

$$P = \frac{(e_1 + e_2)^2}{R}$$

Proviamo ora a usare la sovrapposizione degli effetti.

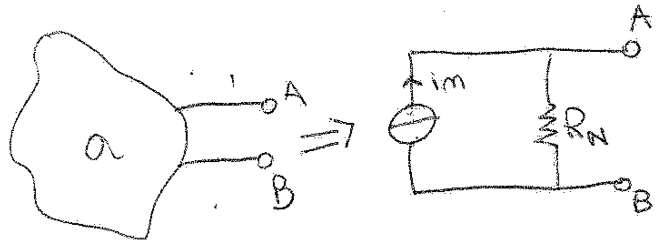
- Seconda parte:

V_0 è la tensione a vuoto, cioè la tensione del sottocircuito con uscita a circuito aperto.

R_E è la resistenza equivalente, vista dall'uscita B.

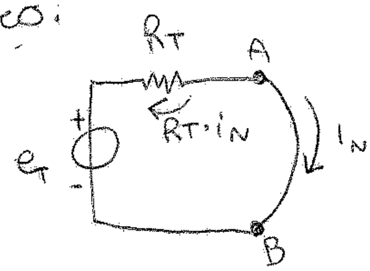
- TEOREMA DI $\boxed{\text{NORTON}}$

Si parte sempre da un sottocircuito, che è un BIPOLO necessariamente



i_m è la CORRENTE DI CORTO CIRCUITO, ovvero si deve cortocircuitare il segmento A-B, e calcolare la corrente i_N passante.

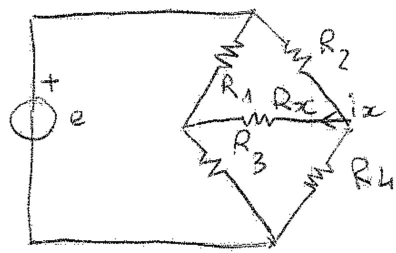
La R_N è uguale alla R_T. I circuiti equivalenti di THEVENIN e NORTON coincidono. Si può infatti partire da un'equivalente e arrivare all'altro:



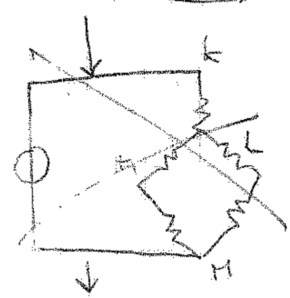
Dal circuito abbiamo che:

$\boxed{e_T = R_T i_N}$, o $\boxed{i_N = \frac{e_T}{R_T} \left(\frac{V_T}{R_T}\right)}$

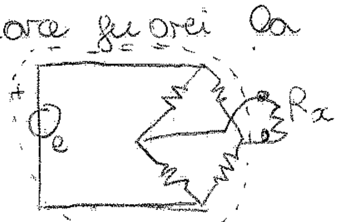
Spegniamo ora il generatore di tensione, ottenendo $R_T = R_N$, che è quindi identica per entrambi i circuiti equivalenti.



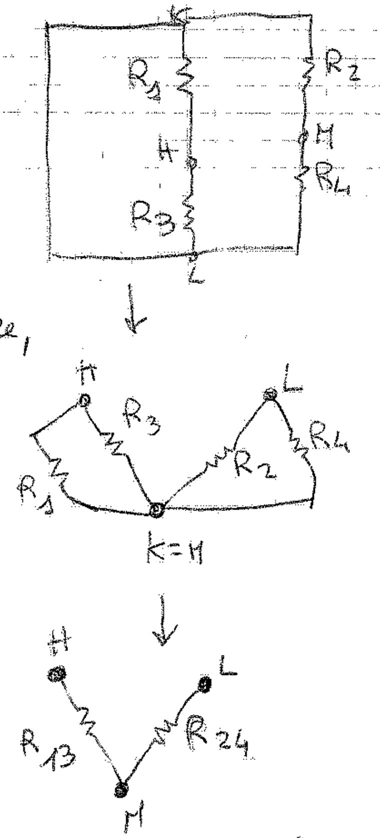
ESEMPIO, potremmo provare una trasformazione stella triangolo, ma vediamo che così perdiamo R_x, questo rende le cose più pelose, quindi lasciamola stare.



Proviamo invece coi Teoremi: pensiamo di tirare fuori la resistenza:



Così abbiamo il sottocircuito che ci serve per Thevenin e Norton.



Abbiamo fatto collassare K e M su se stessi, perché essendo corti circuiti si possono maneggiare come ci pare, poi combiniamo le dovute serie e parallelo.

GENERATORI DIPENDENTI

Si indicano con un rombo, e possono essere di tensione o di corrente, quindi con notazione, o, e generano tensione o corrente in dipendenza al circuito.

FUNZIONE di $\begin{cases} \hat{e} = \alpha V_x \\ \hat{e} = r_m i_x \end{cases}$ V_x i_x $\Big\}$ GENERATORE DI TENSIONE

Quindi dipende da una TENSIONE nel circuito, o da una CORRENTE nel circuito. α è una costante, r_m lo è anche ma ha le dimensione di una resistenza, al contrario dell'α adimensionale.

FUNZIONE di $\begin{cases} \hat{i} = \beta x \\ \hat{i} = g_m V_x \end{cases}$ $\Big\}$ GENERATORE DI CORRENTE

Qui abbiamo lo stesso tipo di dipendenza, con β adimensionale, g_m costante ma con le dimensioni dell'inverso di una resistenza, quindi si misura in Siemens, S

Quindi per KVL, la tensione totale è:

$R_1 i_x + R_2 i_x + \hat{e} = R_3 (i_0 - i_x)$

- A questo punto, trattiamo di nuovo il generatore come dipendente, mettendo l'equazione di funzionamento:

$R_1 i_x + R_2 i_x + R_m i_x + R_3 i_x = R_3 i_0$

Esplicitiamo l'incognita pilota:

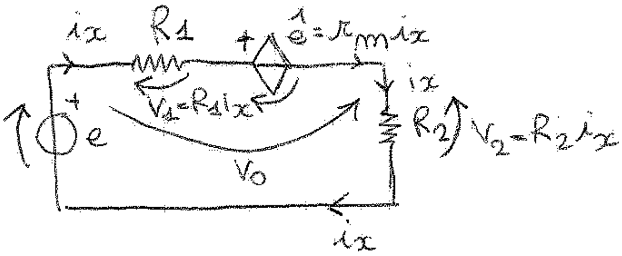
$i_x = \dfrac{R_3 i_0}{R_1 + R_2 + R_3 + R_m} \xrightarrow{\text{è uguale a } \hat{e}} \hat{e} = r_m \dfrac{R_3 i_0}{R_1 + R_2 + R_m + R_3}$

- Usando le tensioni (per ottenere la tensione richiesta dal problema)

$\boxed{V_i = V_{xy} = R_3 i_3 - R_3 \dfrac{R_3 i_0}{R_1 + R_2 + R_3 + R_m}}$ → questo poiché $V_{xy} = R_3 (i_0 - i_x)$; e si è sostituito

ESEMPIO

Qui vogliamo trovare la V_0 su tutto il ramo. Come prima consideriamo $\hat{e}$ come indipendente. Essendo un percorso chiuso, usiamo KVL:



$e = V_1 + \hat{e} + V_2 \rightarrow e = R_1 i_x + r_m i_x + R_2 i_x$

- Abbiamo rimesso il generatore come indipendente, ricaviamo la quantità pilota:

$i_x = \dfrac{e}{R_1 + R_2 + r_m}$ e $\hat{e} = r_m \dfrac{e}{R_1 + R_2 + r_m}$

- Ora possiamo trovare la tensione V_0 incognita:

$\boxed{V_0 = -R_1 i_x - \hat{e}}$ → Abbiamo messo i "−" perché sono tensioni contrarie a quella totale richiesta sul ramo.

$$-i = -\frac{\beta R_2 i_P}{R_1 + R_2 + R_2\beta}$$

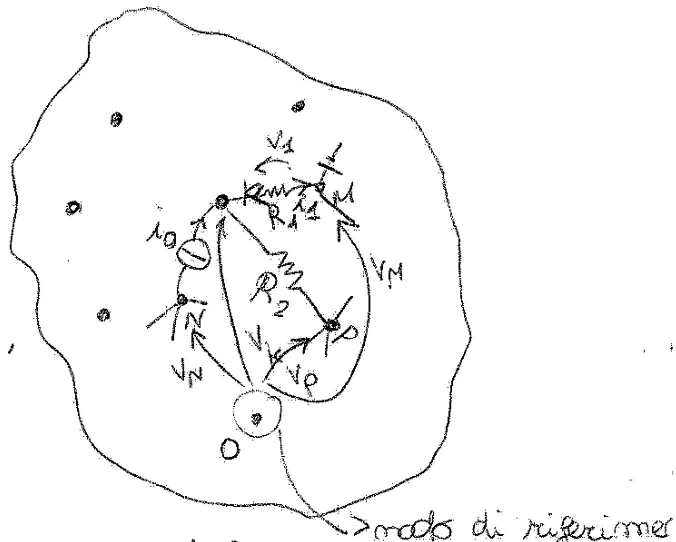
dovevamo trovare V_P, usiamo KVL A-K-B-H-A

$$V_P + R_1 i_x = R_3 i_P$$

$$V_P + R_1\left(-\frac{R_2 i_P}{R_1 + R_2 + \beta R_2}\right) = R_3 i_P$$

$$V_P = \underbrace{i_P\left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + \beta R_2}\right)}_{R_T}, \quad \text{quindi } R_T = R_3 + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2 + \beta R_2)}$$

- METODO DEI NODI



- Se ho un circuito con N nodi, definiamo N-1 tensioni, dette TENSIONI NODALI tra ogni nodo e il riferimento.

- guardo il percorso chiuso O-K-M-O, possiamo applicare il KVL.

$$V_K = V_1 + V_M$$

- Possiamo scrivere quindi V_1 in funzione delle TENSIONI NODALI! $V_1 = V_K - V_M$, $V_1 = R_1 i_1 \rightarrow R_1 i_1 = V_K - V_M$,

$$\boxed{i_1 = \frac{V_K - V_M}{R_1}}$$

- Facciamo lo stesso ragionamento per V_2, prendendo un nuovo percorso chiuso O-K-P-O, possiamo rifare KVL

$$V_K = V_2 + V_P \rightarrow V_2 = V_K - V_P, \quad V_2 = R_2 i_2$$

$$\boxed{i_2 = \frac{V_K - V_P}{R_2}}$$

- Possiamo fare ora KCL sul nodo K: $i_0 = i_1 + i_2$

$$i_0 = \frac{V_K - V_M}{R_1} + \frac{V_K - V_P}{R_2}$$, è in funzione solo delle tensioni nodali, e delle R note.

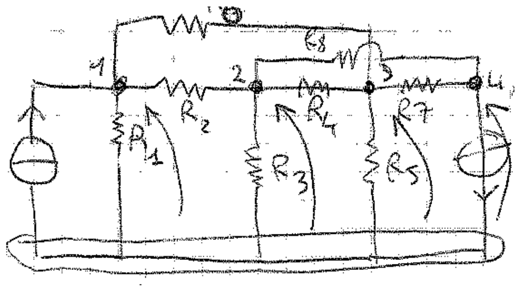
ESEMPIO

N = 5 NODI

4 T. nodali

↓

sistema 4×4

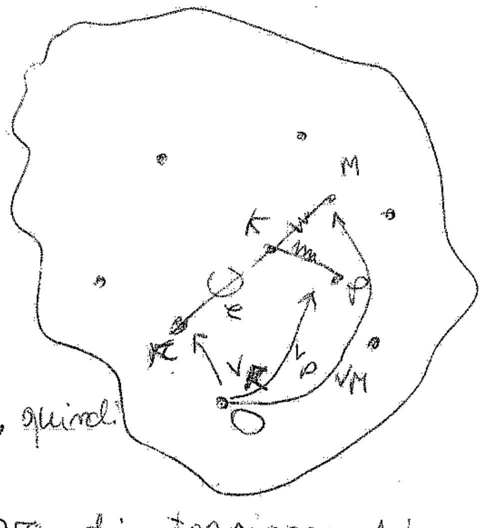


$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_6} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_8} & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_7} \\ -\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_7} \\ 0 & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_7} & \frac{1}{R_7}+\frac{1}{R_8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

- CON LE TENSIONI NEI T. NOTI

- consideriamo il percorso chiuso

O - r - k - O

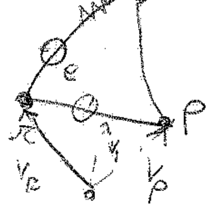


KVL: $V_r + e = V_k \rightarrow e = V_r - V_k$

- qui a causa della quantità nota "e", le N-1 equazioni vanno modificate in modo da diventare N-2, quindi dobbiamo ridurre di un'equazione il sistema. Quindi per OGNI generatore di tensione, si toglie un nodo/equazione.

- come si toglie un nodo? Prendiamo 3 nodi del circuito:

$V' = V_r + e \quad , \quad i_2 = \frac{V_p - V'}{R_1}$



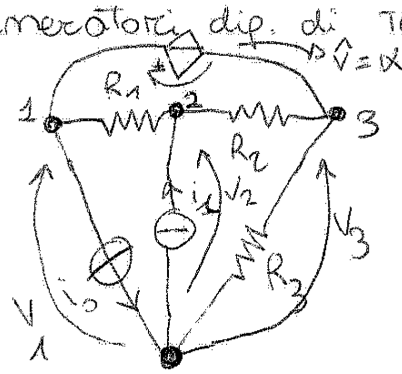
- visto nell'altro senso: $i_2 = \frac{V_p - (V_r + e)}{R_1}$

- Quindi possiamo far scorrere un generatore di tensione sui resistori, e far sparire un nodo.

- Quindi rifacciamo la matrice:

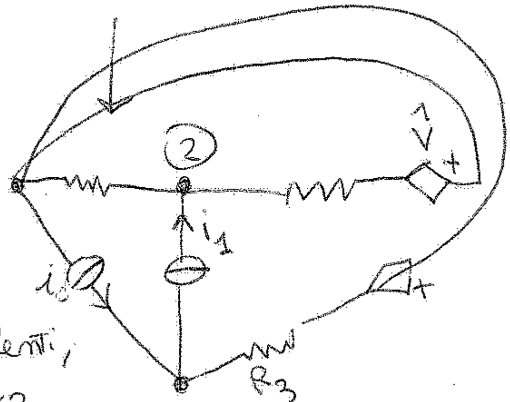
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_L} & -\left(\frac{1}{R_1}+g_m\right) & -\left(\frac{1}{R_L}-g_m\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ora il caso se fossero generatori dip. di TENSIONE $\hat{V} = \alpha V_x$



Dobbiamo far sparire un nodo, come si fa con i generatori di tensione. Abbiamo fatto scorrere il gen. su tutti i rami collegati al nodo che vogliamo eliminare.

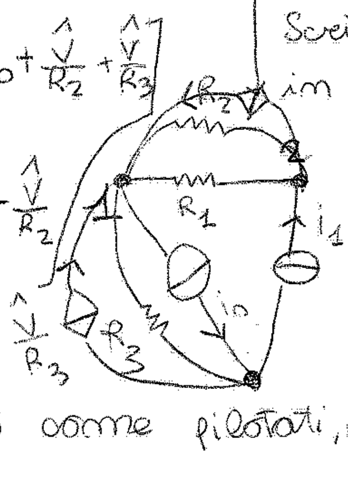
Trasformiamo quindi il circuito con la regola di Norton, cambiando i gen. di tensione con generatori di corrente ed un resistore in parallelo.



Ora abbiamo due nodi indipendenti, quindi avremo una matrice 2x2

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \\ -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_0+\frac{\hat{V}}{R_2}+\frac{\hat{V}}{R_3} \\ i_1-\frac{\hat{V}}{R_2} \end{bmatrix}$$

Scriviamo il circuito in Norton

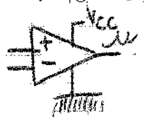


- Ora li ritrasformiamo come pilotati, come prima; quindi scriviamo le equazioni:

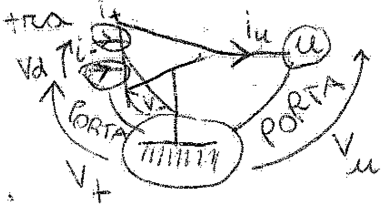
$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)V_1-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)V_2 = -i_0+\frac{\alpha V_1}{R_2}+\frac{\alpha V_1}{R_3}$$

$$-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)V_1+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)V_2 = i_1-\frac{\alpha V_1}{R_2}$$

- AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

È un OTTOPOLO, a differenza dei soliti bipoli e ha tanti piedini. Il simbolo è:  , quindi solo 4 dei poli totali sono fondamentali,

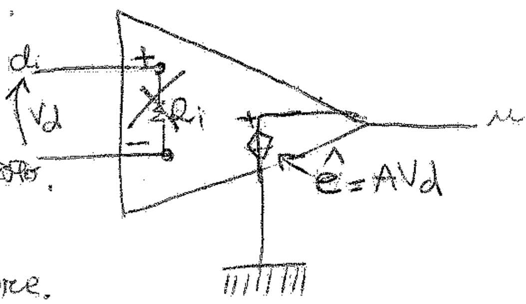
quello superiore è per l'alimentazione. Se prendiamo ad esempio il piede "u" e il polo inferiore di riferimento, definiamo una PORTA. Quindi tra due terminali, che definiscono una porta e quindi un bipolo, possiamo definire una TENSIONE.



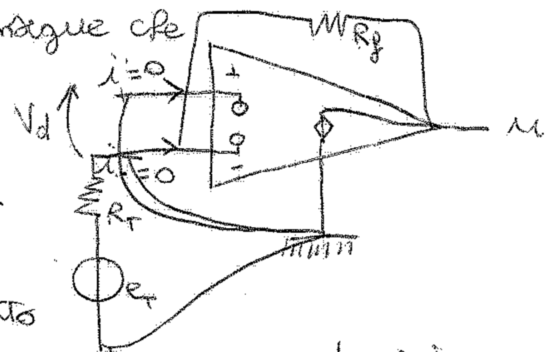
$V_d = V_+ - V_-$, possiamo usare KVL come su una superficie.

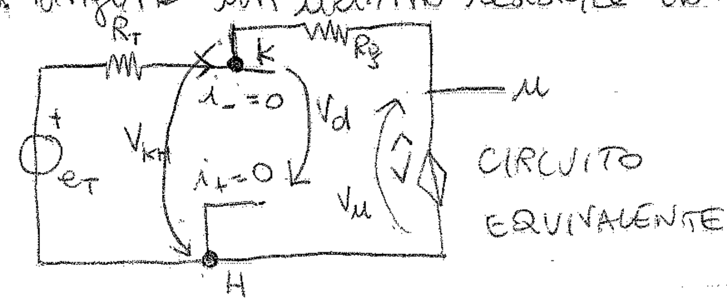
- sappiamo anche che ogni polo avrà una corrente che lo attraversa. Per convenzione, nei poli + e - entrano due correnti, mentre in u è uscente.

Ora dentro immaginiamo di collegare un resistore tra + e -, e un generatore pilotato. Questo è il funzionamento semplificato dell'amplificatore.



Il coefficiente "A" e la resistenza hanno valori ENORMI, quindi possiamo idealizzare il ramo con R_i come CIRCUITO APERTO, per la resistenza $\sim \infty$, ne consegue che le correnti i_+ e i_- sono nulle. Colleghiamo ora il terminale + con il riferimento, e il - con un circuito THEVENIN, e attaccato al riferimento dall'altro lato. Infine un ultimo resistore dal polo - al polo di uscita. Nel circuito equivalente, tra K e H abbiamo dei paralleli, e quindi possiamo usare Millman:



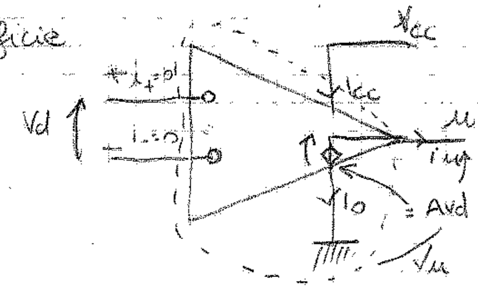


$$V_{KH} = -V_d = \frac{\frac{e_T}{R_T} + \frac{\hat{V}}{R_f}}{\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_F}} = \frac{\frac{e_T}{R_T} + \frac{AV_d}{R_F}}{\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_F}}$$

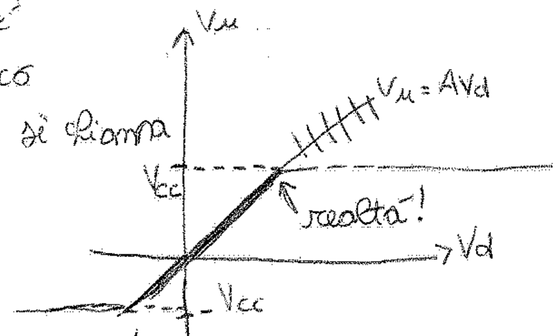
- usiamo KCL sulla superficie chiusa.

(σ)

$\underbrace{i_+ + i_- + i_{cc}}_{\text{entranti}} = \underbrace{i_0 + i_u}_{\text{uscenti}}$



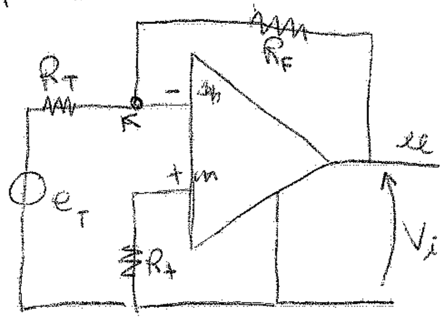
- la tensione $V_u = Avd$, quindi c'è una dipendenza lineare; il grafico è specifico per ogni op amp, e si chiama CARATTERISTICO. Nella realtà, viene erogata tensione solo fino al valore della tensione uguale a quella della batteria che alimenta l'op amp, Vcc; questo anche perché una tensione non può essere ∞, quindi rappresentata da una retta completa, perché non avrebbe alcun significato fisico.



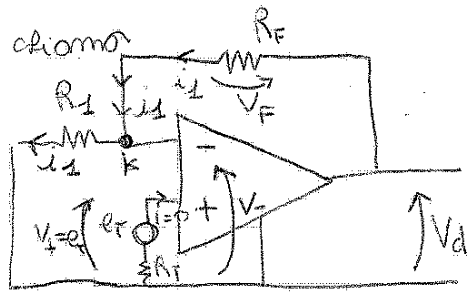
(1) ESEMPIO, partiamo dall'op amp dell'altra volta

$V_i = -e\frac{R_F}{R_T}$

- se aggiungessimo una resistenza sul ramo del polo +, non cambierebbe nulla perché non è attraversata da corrente, c'è un (-) al risultato, si chiama CONFIGURAZIONE INVERTENTE



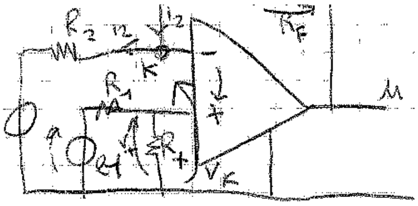
(2) Questo circuito ha il generatore di thevenin collegato al polo +, e di nuovo la resistenza è = 0 perché non c'è corrente, quindi la tensione sul ramo, V_+, sarà la sola tensione del generatore e_T. Anche la tensione sul ramo V- sarà = a e_T. Questa tensione agisce anche sul resistore R_1, che vincola anche il verso della corrente $\left(i_1 = \frac{V_-}{R_1} = \frac{e_T}{R_1}\right)$. Anche R_F è attraversato da i_1, poiché essa è univocamente determinata.



- Nel percorso chiuso $u \xrightarrow{R_F} K \rightarrow 0 \rightarrow u$, posso usare KVL: $V_u = V_F + e_T$

$\underbrace{V_u = R_F\frac{e_T}{R_1} + e_T \rightarrow V_u = e_T\left(\frac{R_F}{R_1} + 1\right)}$ è sicuramente una quantità positiva! Quindi questa si

(3)



usiamo il partitore per la tensione $V_+ = \frac{e_1 R_+}{R_1 + R_+} \rightarrow V_K = V_+$

- a sinistra, $e_2 + V_{R_2} = V_k$, $i_2 = \frac{V_K - e_2}{R_2} = \frac{e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+} - e_2}{R_2}$

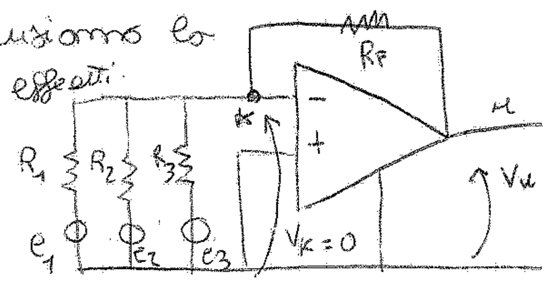
c'è quindi i_2 su R_F, e genera una tens.

- a destra, $V_u = V_k + V_+ = \underbrace{e_2 + R_2 \left(\frac{e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+} - e_2}{R_2} \right)}_{V_K} + R_F \left(\frac{e_1 \cdot \frac{R_+}{R_1+R_+} - e_2}{R_2} \right) =$

$\downarrow$ VARI CALCOLI

$$V_u = e_1 \frac{R_F}{R_2} - e_2 \frac{R_F}{R_2} = \underbrace{\frac{R_F}{R_2} (e_1 - e_2)}_{\text{AMPLIFICAZIONE DIFFERENZIALE}}$$

- Per questo circuito usiamo la sovrapposizione degli effetti



e_1: $V_k = R_1 i_1 + e_1$

$$i_1 = -\frac{e_1}{R_1}$$

$$V_u' = -\frac{e_1}{R_1} R_f$$

Analogamente il contributo $V_{u_{II}}$ sarà $= -\frac{e_2}{R_2} R_f$, $V_{u_{III}} = -\frac{e_3}{R_3} R_f$, e complessivamente $V_u = V_{u_I} + V_{u_{II}} + V_{u_{III}} = -R_f \left(\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3} \right)$. Questo risultato ci dice che possiamo sovrapporre due o più segnali, come somma lineare dei contributi.

(valore decimale)

- Supponiamo di avere $e_1 = e_2 = e_3 = 0, 0, 0 \rightarrow V_u = 0$ (1)
~~adesso~~ accesi a turno $\rightarrow$
Stiamo usando i numeri BINARI.

(2) $1, 0, 0 \rightarrow |V_u| = \frac{R_f}{R_u}$

(3) $1, 1, 0 \rightarrow |V_u| = \frac{R_f}{R_1} + \frac{R_f}{R_2}$

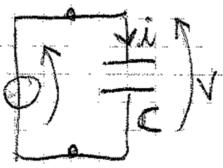
- Scelgo $R_f/R_1 = 1$, $R_f/R_2 = 2$, $R_f/R_3 = 4$

(4) $(0, 0, 1) \rightarrow = \frac{R_f}{R_3}$

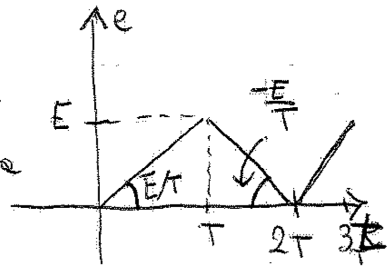
Questo è un CONVERTITORE DIGITALE/ANALOGICO (ad esempio accade nei cellulari, un op. amp trasmuta i bit in audio, in voce).

(5) $(1, 0, 1) \rightarrow = \frac{R_f}{R_1} + \frac{R_f}{R_3}$

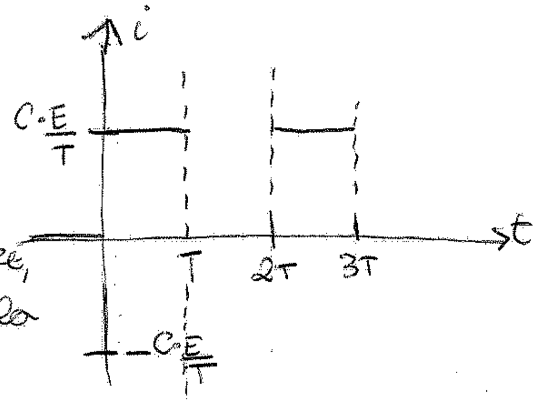
- ESEMPIO



Il generatore e ha una tensione che varia nel tempo, secondo il grafico; l'andamento si chiama ONDA TRIANGOLARE.

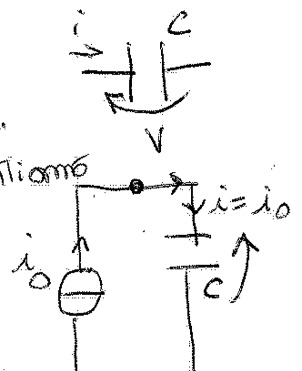


Abbiamo e = tensione nel nostro circuito (V); applicando l'equazione di funzionamento del condensatore, risulta un nuovo grafico: il valore della corrente $i = C \cdot \frac{E}{T}$ si ottiene come derivata della retta della tensione, che risulta essere il solo COEFFICIENTE ANGOLARE, $\frac{E}{T}$, ovviamente moltiplicato per la costante di proporzionalità C.

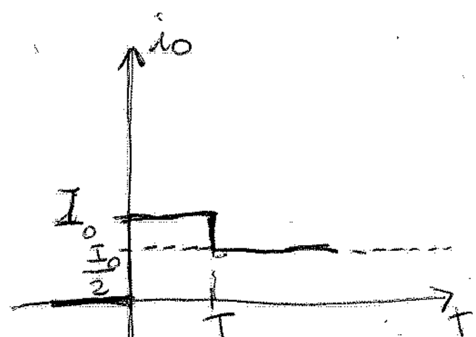


Vediamo che quindi la corrente ha forma squadrata, e la tensione una forma TRIANGOLARE, tutto per l'effetto della derivata richiesta dal condensatore!

- ESEMPIO



Qui abbiamo un gen. di corrente, rappresentiamo il grafico di corrente e tensione. Per passare da corrente nota, a tensione, stavolta dobbiamo integrare! Infatti:



$$i = C \cdot \frac{dV}{dt}, \quad \int_{V_0}^{V} = \frac{\int_{t_0}^{t} i\,dt}{C}, \quad \boxed{V - V_0 = \frac{1}{C} \cdot \int_{T_0}^{T} i\,dt}$$

SECONDA ESPRESSIONE DEL FUNZIONAMENTO DI UN CONDENSATORE

- Si suddividono più casi:

$t < 0$,

$V = V_0 = 0$, circuito spento

$0 < t < T$, CANAVERO PICIO

$$V = \frac{1}{C} \int_0^t I_0\,dt' = \frac{1}{C} \cdot I_0 \cdot T$$

- Quindi il cond. funziona da banca che immagazzina ENERGIA, proporzionale alla tensione $(\mathcal{E} = \frac{C}{2}V^2)$.

- CONDENSATORI IN SERIE

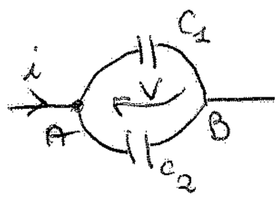
- Possiamo ottenere una tensione totale $V_S = V_1 + V_2$. Quindi con la forma integrale:

$$\frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(t')dt' + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(t')dt' = \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)\int_{t_0}^{t} i(t')dt' = \boxed{C_{eq}\int_{t_0}^{t} i(t')dt'}$$

- Quindi l'integrale è lo stesso e unico, modificato da una costante di proporzionalità data dagli INVERSI DELLE CAPACITÀ.

- CONDENSATORI IN PARALLELO

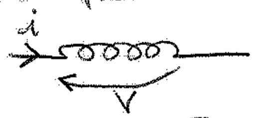
Stavolta stessa tensione, e non corrente, come ovvio! Facciamo KCL in A:



$$i = i_1 + i_2 \rightarrow i = C_1\frac{dV}{dt} + C_2\frac{dV}{dt} \rightarrow i = \boxed{\underbrace{(C_1+C_2)}_{C_{eq}}\frac{dV}{dt}}$$

INDUTTORE

Ha pure lui le derivate, e si rappresenta con un solenoide



, si usa la conv. degli utilizzatori.

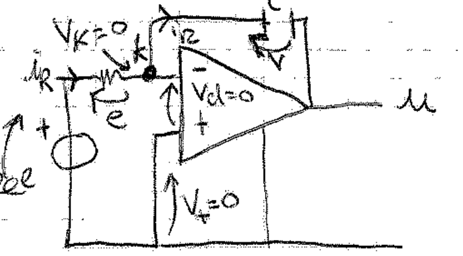
- $V = \frac{di}{dt} \cdot L$ → coefficiente di proporzionalità sempre positiva, come per il condensatore.

Il ruolo differenziale è opposto rispetto al condensatore!
La "L" si chiama INDUTTANZA, e ha unità di misura $\frac{V}{A/s}$, e si chiama Henry (H).

- Se vogliamo la corrente invece che la tensione, integriamo la tensione analogamente al ~~[illegible]~~ condensatore.

$\boxed{i = i_0 + \frac{1}{L}\int V(t')dt'}$ → MANTIENE MEMORIA, MA DELLA TENSIONE!

- ESEMPIO APPLICATIVO, OP AMP con CONDENSATORI



Poiché le tensioni sono nulle, quella del generatore e deve essere controbilanciata da una "e" opposta. Ma questo obbliga anche una corrente sul resistore, $i_R = \frac{e}{R}$, che entra anche nel condensatore; quindi possiamo scriverne il funzionamento:

$$V_c = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} \underbrace{i_R}_{i_R = \frac{e}{R}}\, dt' = \frac{1}{CR}\int_{t_0}^{t} e\, dt'$$

- Facciamo ora KVL: O → u → K → O

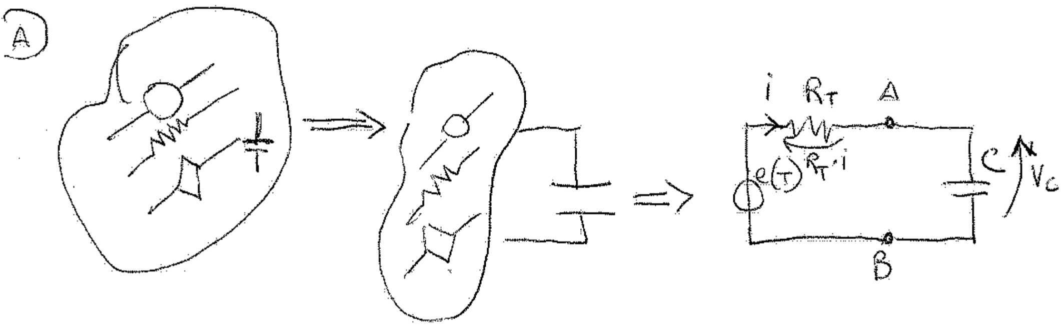
$$V_u + V_c = \cancel{V_K}^{=0}$$

$$\boxed{V_u = -V_c = -\frac{1}{CR}\int_{t_0}^{t} e\, dt'}$$

→ Può essere utile ad esempio in una vasca, perché il segnale in entrata esce dall'op amp integrato, quindi con la "storia" dei passaggi che sono avvenuti.

CIRCUITI CON UN SOLO ELEMENTO DINAMICO:

(A)



- Tiriamo fuori il condensatore per isolarlo, e poi usiamo Thevenin. La KVL risultante: $e_T = R_T \cdot i + V_c \rightarrow e_T = R_T \cdot C \frac{dV_c}{dt} + V_c$

$$\frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{R_T C} V_c = \frac{e_T}{R_T C} \rightarrow V_c \text{ INCOGNITA!}$$

- Otteniamo un'equazione differenziale del primo ordine a coefficienti costanti. $e_T = R_T C \frac{dV_c}{dt} + V_c$ → NON OMOGENEA

Per l'integrale particolare, come detto conviene usare stesso tipo del termine noto:

Se $s(t) = A\cos(\alpha t + \beta)$ → TERMINE NOTO, ESEMPIO

↓

$x_p(t) = K_1 \cdot \cos(\alpha t + \beta_1)$

[Se $s(t) = S$ (costante), $x_p(t) = K_0$ (quindi un'altra costante)]

- Quindi noi studiamo il secondo caso, ovvero generatori costanti che costituiscono la soluzione particolare.

$\boxed{x(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + K_0}$ → SOLUZIONE COMPLESSIVA

Mancano ancora le costanti k! come le troviamo?

É necessaria la CONDIZIONE INIZIALE, ovvero è il valore della soluzione ad un certo tempo t; ad esempio $x(t=0) = x_0$, in cui dovremo solitamente ricavarci x_0. Poniamo $x_0 = k + K_0$, come viene dall'integrale generale a $t=0$, ora sostituiamo nella soluzione generale $k = (x_0 - K_0)$, trovando $\boxed{x(t) = (x_0 - K_0)e^{-\frac{t}{\tau}} + K_0}$.

- Manca ancora il K_0! Per trovarlo, facciamo $x(t=\infty) = K_0$, e abbiamo isolato il termine.

CONCLUSIONE:

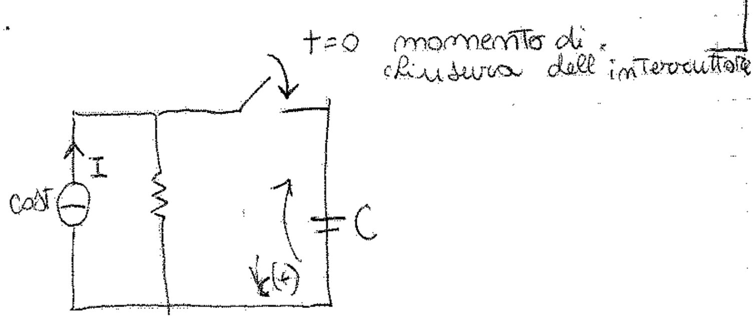
$$\boxed{x(t) = \Big(x_0 - \underbrace{x(t\to\infty)}_{x(\infty)}\Big) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + x(t\to\infty)}$$ SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

Osserviamo che si ha $\left|(\text{c. iniziale} - \text{c. finale}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \text{c. finale}\right|$.

[É valida SOLO per un solo elemento con memoria (dinamico), e SOLO con generatori COSTANTI.]

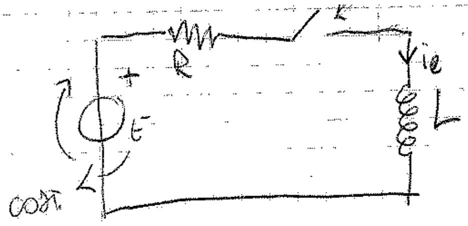
ESEMPIO

Abbiamo un circuito spento, quindi con un interruttore aperto, che viene chiuso al tempo $t=0$.



$V_c(t) = [V_c(0) - V_c(\infty)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - V_c(\infty)$ → la nostra equazioncina per $t \geq 0$

ESEMPIO



stessa storia di prima,
si chiude a $t=0$.

$$i_\ell(t) = \left[i_\ell(0) - i_\ell(\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + i_\ell(\infty)$$

- Partiamo col calcolo di τ:

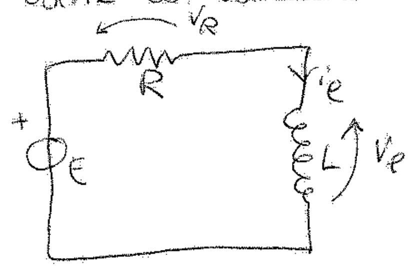
$\tau = \frac{L}{R_{th}} \nearrow$ è ovviamente R

- CONDIZIONE INIZIALE:

$i_{\ell(0^+)} = i_{\ell(0^-)}$, come prima, però usiamo l'istante ~~[illegible]~~ precedente alla chiusura, che avrà corrente uguale all'istante succ., per continuità della corrente. Avremo perciò $i_\ell = 0$, poiché è circuito aperto.

- CONDIZIONE FINALE:

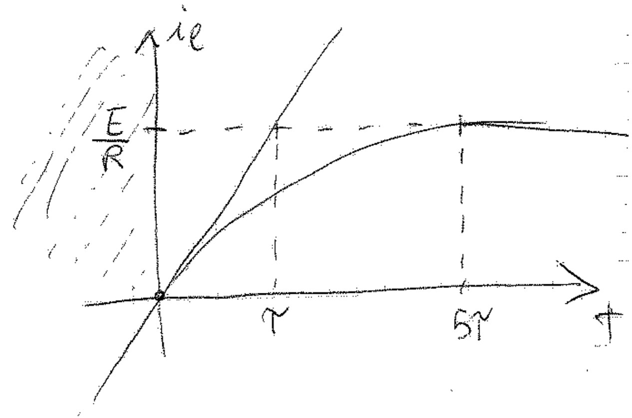
Avremo di nuovo circuito bello chiuso come col condensatore:
ci sono solo cose costanti nel circuito,
compresa i_ℓ. Perciò $V_\ell = 0$, e
l'induttore diventa corto circuito.



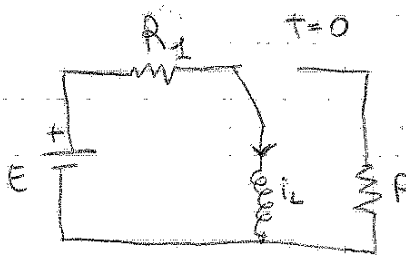
$$i_\ell(t) = \left[0 - \frac{E}{R}^{\nearrow (V_R)}\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

$$i_\ell(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

il grafico sarà analogo:

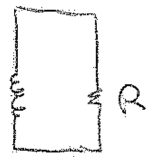


— STESSO ESERCIZIO CON INDUTTORE

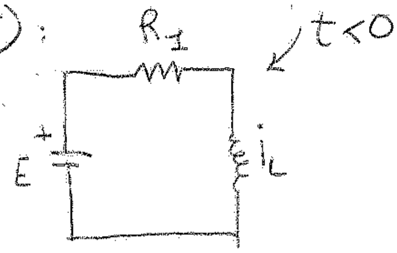


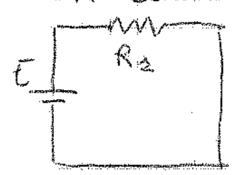
Formula solita:

$$i_L(t) = [i_L(0^+) - i_L(\infty)]\, e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(\infty)$$

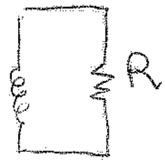
- calcolo di τ: , dobbiamo togliere l'induttore, quindi $R_{eq} = R$, e $\tau = \frac{R}{L}$

- calcolo condizione iniziale, $i_L(0^+)$:
(Poiché i_L continuo, $i_L(0^+) = i_L(0^-)$).
la corrente si trova di nuovo in CONDIZIONI STAZIONARIE, quindi tutto costante, e la tensione è NULLA sull'induttore, e questo implica $V_L = 0$ perché derivata, perciò lo sostituiamo con un corto circuito.
Ovviamente a questo punto $i_L = \frac{E}{R_1}$

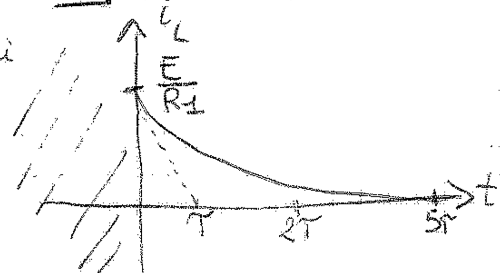




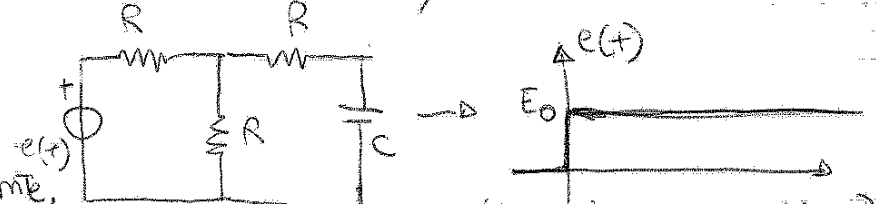
- condizione finale: come al solito resta così la storia; tutti gli esponenziali sono esauriti, e il circuito è INERTE perché non vi sono generatori ($i_L = 0$), quindi è tutto morto: $\boxed{i_L(t) = \left[\frac{E}{R_1} - 0\right] e^{-\frac{tR}{L}} + 0}$, con grafico.



Come al solito per grandi valori di τ, l'esponenziale è esaurito, e il valore massimo corrisponde a $i(0)$, poi esso decresce fino a esaurirsi.



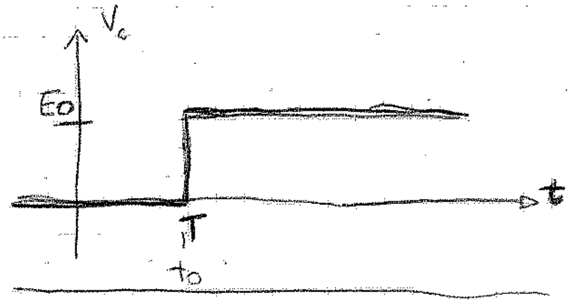
- CASO PARTICOLARE:



(funzione gradino)

Qui vediamo che il generatore non è costante, ma possiamo interpretarlo come un generatore costante a seconda del tempo, grazie ad un interruttore:

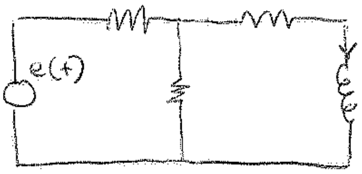
- DIVERSO CASO DI GRADINO



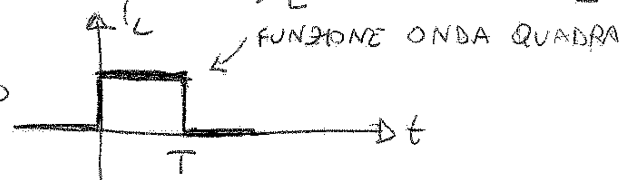
Definiamo una nuova variabile $t' = t - T$, con t' che vale 0 all'inizio del gradino. A questo punto la soluzione sarà opportunamente modificata:

$$V_c(t') = \left[V_c(0^+) - V_c(\infty)\right] e^{-\frac{t'}{\tau}} + V_c(\infty)$$

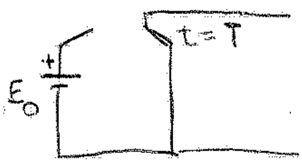
- STESSA COSA CON INDUTTORE (gen. non costante) [ONDA QUADRA]



, con $e(t) \rightarrow$



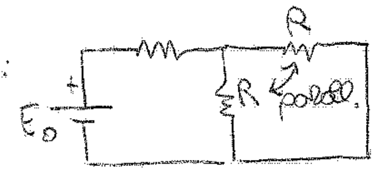
- Possiamo spezzare in due pezzi: prima consideriamo $e(t)$ in 0, dove è un normale gradino. Si può interpretare il circuito con due interruttori:



Primo tratto, $0 < t < T$, ovvero il solo GRADINO! Quindi sarà la soluzione al gradino di prima.

$$i_L(t) = \left[i_L(0^+) - i_L(\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(\infty)$$

- calcolo $\tau \rightarrow$ (considerazioni sul circuito) $= \frac{L}{\frac{3}{2}R}$
- condizione iniziale: $i_L(0^+) = i_L(0^-)$, quindi dalle condizioni della $e(t)$, $E = 0$ per $t < 0$, quindi il circuito è INERTE, e $i = 0$
- condizione finale:



È tutto STAZIONARIO come al solito, quindi $I =$ costante e $V = 0$, quindi al posto dell'induttore mettiamo un corto circuito.

La corrente sarà: $V_{Req} = E_0 \cdot \frac{\frac{R}{2}}{R + \frac{R}{2}} \rightarrow \frac{E_0 \cdot \frac{R}{2}}{\frac{3R}{2}} \rightarrow \frac{E_0}{3} \rightarrow I = \frac{E_0}{3R}$

Quindi $\boxed{i_L(t) = \left[0 - \frac{E_0}{3R}\right] \cdot e^{-\frac{t2L}{R3}} + \frac{E_0}{3R}} \rightarrow$ Questa vale fino a $t = T$!

$$\frac{dy}{dt} = \gamma\left(\frac{S}{\tau} - \frac{x}{\tau}\right) \rightarrow \frac{dy}{dt} = \gamma\left(\frac{S}{\tau} - \frac{y-U}{\tau \cdot \gamma}\right)$$ deriva da $y = U + \gamma x$, per togliere la x dalla eq.

$$\frac{dy}{dt} = \gamma\frac{S}{\tau} - \frac{y}{\tau} + \frac{U}{\tau} \rightarrow \gamma S + U = M \rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{M}{\tau}}$$

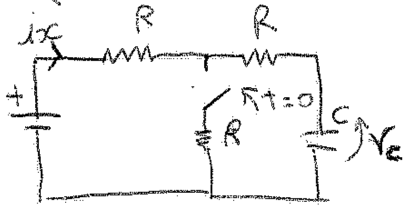
Quindi anche questa dipende da un'equazione differenziale, di cui possiamo scrivere la classica soluzione:

$$y(t) = \left[y(0^+) - y(\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty), \quad \text{per } t \geq 0$$

- MA! Qui c'è una differenza, cioè nella condizione iniziale $y(0^+)$, non abbiamo la condizione di continuità! Quindi

$y(0^+) \cancel{=} y(0^-)$ NO!

ESEMPIO

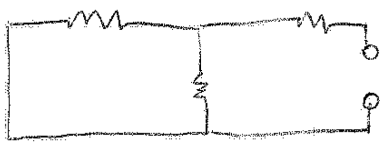


Qui vogliamo trovare i_x, sticazzi.

$$i_x(t) = \left(i_x(0^+) - i_x(\infty)\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + i_x(\infty)$$
$t \geq 0$

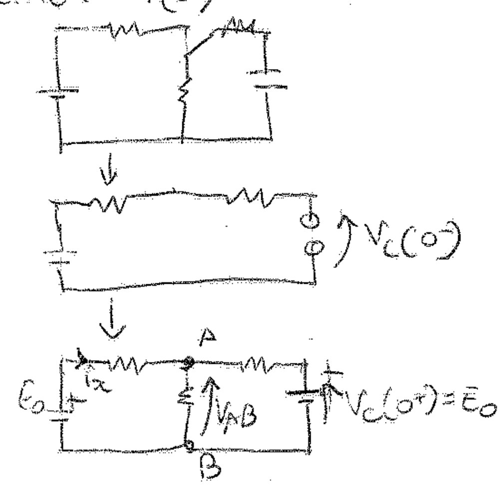
Calcoliamo le solite cagate:

- Iniziamo da τ as always, tutto normale: $\tau = C R_{eq}$.
R_{eq} si stacca il condensatore e spegnere il generatore:



$\rightarrow R = \frac{3}{2}R$

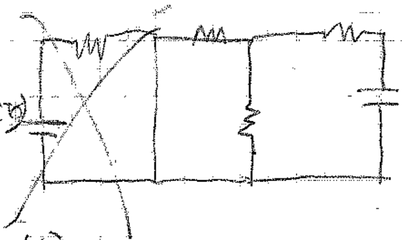
- condizione iniziale: $i_x(0^+)$, possiamo usare comunque la continuità della tensione, quindi $V(0^-)$:
la tensione sarà costante, e la corrente nulla, quindi al solito:
Abbiamo $V_c(0^-) = V_c(0^+) = E_0$.
Ora torniamo a 0^+.
Per la continuità, V_c è ancora E_0, e si può rappresentare come una batteria. A questo punto possiamo ad esempio usare millmann:



$V_{AB} = \frac{2E_0}{3}$, e poi KVL, a sinistra: $E_0 = R i_x + V_{AB}$, $i_x = \frac{E_0 - \frac{2}{3}E_0}{R}$

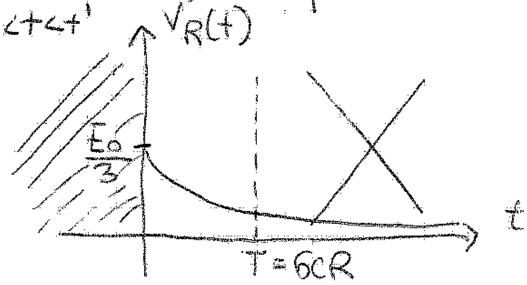
$$\boxed{i_x = \frac{E_0}{3R}}$$

- Condizione finale all'infinito, graficamo.
Il circuito è inerte, quindi $V_R(\infty)=0$
(generatore di tensione tolto perché in // con un corto circuito)



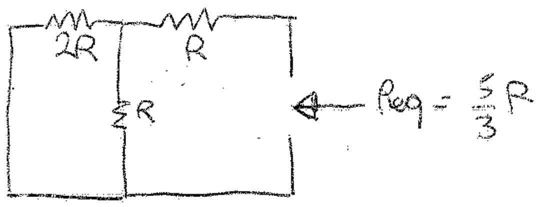
- FINALE:

$$V_R(t) = \left[\frac{E_0}{3} - 0\right] e^{-\frac{t}{3RC}} + 0 \quad \Big\} \text{ Per } 0<t<t'$$



Ora lo stesso per $0<t'<\infty$

calcolo $\tau' = CR_{eq} = \frac{5}{3}CR$



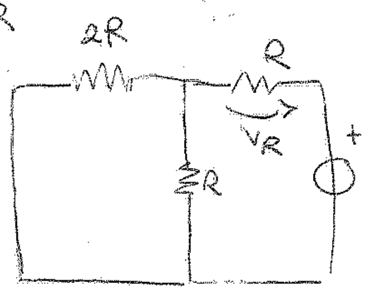
- Condizione iniziale:
Calcolo circuito in $V_R(0^+)$, non è funzione continua

$$V_C(0^- = t', t=T) = E_0 e^{-\frac{T}{3CR}} = E_0 e^{-2}$$

T ← sostituito con 6CR

$$V_C(0^+) = V_C(0^-)$$

$$V_R(0^+) = \frac{E_0}{e^2} \cdot \frac{3}{5}$$



- La condizione all'infinito sarà di nuovo 0.

FINALE:

$$V_R(t') = \left[\frac{E_0}{e^2} \cdot \frac{3}{5} - 0\right] e^{-\frac{3t'}{5CR}} + 0$$

$$V_R(t-t') = \frac{3}{5}\frac{E_0}{e^2} e^{\left(-\frac{3(t-t')}{5CR}\right)} \quad \Big\} \text{ TOTALE CON } t>T$$

Nel grafico totale, vediamo un salto di tensione in $t=T$!

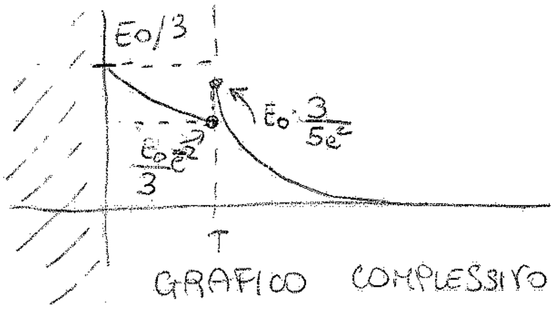


GRAFICO COMPLESSIVO

- Sempre $t=0$ come condizione iniziale:

$$V_C(0) = k_1 + k_2 + W_1$$

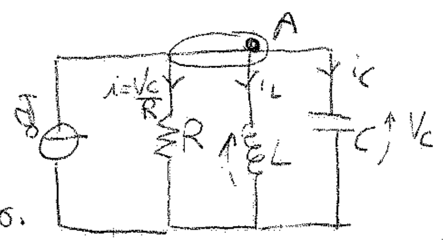
$$i_L(0) = k_1 m_1 + k_2 m_2 + W_2$$

- Per $t \to \infty$, l'esponenziale tende a 0, poiché non avrebbe senso avere V e $i = \infty$

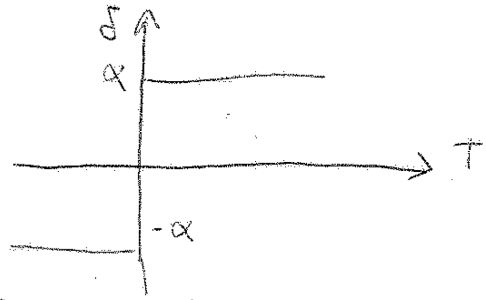
$$V_C(\infty) = k_1 0 + k_2 0 + W_1$$

$$I_L(\infty) = k_1 m_1 0 + k_2 m_2 0 + W_2$$

ESEMPIO

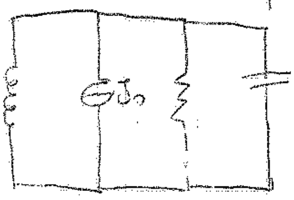


Costruiamo la matrice $\bar{A}$ del circuito.



Per ogni elemento diff. guardiamo la variabile complementare:

- Se è una corrente, scrivo la KCL a un nodo dell'elemento differenziale. Prendiamo ad esempio il nodo A.



(Con la sovrapposizione degli effetti potremo farla).

$$J_0 = \frac{V_C}{R} + i_L + i_C \qquad C\frac{dV_C}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dV_C}{dt} = -\frac{V_C}{RC} - \frac{1}{C} i_L + \frac{J_0}{C}}$$

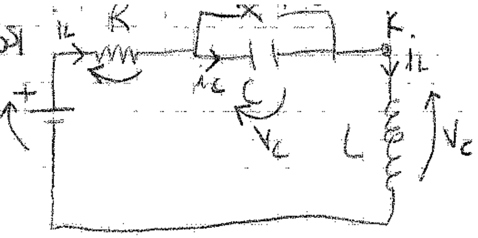
$$V_L - V_C = 0 \qquad \boxed{L\frac{di_L}{dt} = V_C \to \frac{di_L}{dt} = \frac{V_C}{L}}$$

- Se è una tensione, si fa KVL su un percorso chiuso che include l'elemento differenziale.

- Matrice:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{J_0}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO – AUTOVALORI COMPLESSI



A $t=0$ il circuito perde la parte sopra (si apre l'interruttore), e facciamo quindi KCL in K:

$i_C = i_L \rightarrow C \cdot \frac{dv_C}{dt} = i_L$, KVL sul circuito $\rightarrow E = Ri_L + V_C + V_L$, $V_L = L\frac{di_L}{dt}$

le scriviamo entrambe in maniera ordinata:

$$\begin{cases} \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L & (KCL) \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{Ri_L}{L} - \frac{V_C}{L} + \frac{E}{L} & (KVL) \end{cases}$$

Questo è il sistema risolutivo: $\vec{x} = \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}$

costruiamo la matrice: $\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E}{L} \end{bmatrix}$

- Autovalori: $(-\lambda)\left(-\frac{R}{L} - \lambda\right) - \frac{1}{C}\left(-\frac{1}{L}\right) = 0 \rightarrow \lambda^2 + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\alpha}\lambda + \underbrace{\frac{1}{CL}}_{\omega_0^2} = 0$ (notazioni da usare)

$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

1° CASO, se $\alpha^2 > \omega_0^2 \rightarrow \lambda_1 = -\alpha + \underbrace{(\text{numero} < \alpha)}_{\text{risultato della radice}}$, risultato negativo

$\lambda_2 = -\alpha - (\text{numero} < \alpha)$, risultato più grande sempre negativo

2° CASO, se $\alpha^2 < \omega_0^2 \rightarrow \lambda_1 = -\alpha + \underbrace{j\beta}_{\beta = \sqrt{|\alpha^2 - \omega_0^2|}}$, $\lambda_2 = -\alpha - j\beta$

Sono i due autovalori trovati (IMMORALI, CI SONO I COMPLESSI)

se $\alpha^2 = \omega_0^2$, allora $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$

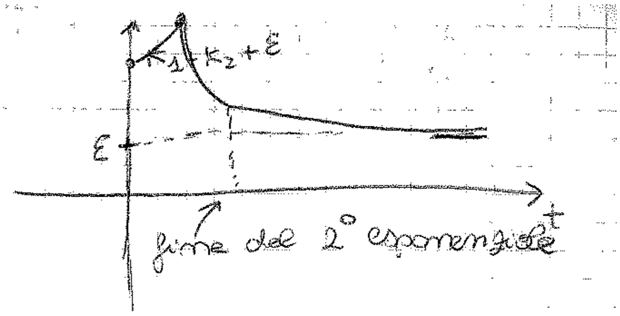
- AUTOVETTORI $\rightarrow \vec{A}\vec{\eta_i} = \lambda_i \vec{\eta_i}$ $i = 1,2$ $\vec{\eta_i} = \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_i \end{bmatrix}$ (supponiamo che la prima componente sia sempre 1).

$\frac{1}{c}\eta_i = \lambda_i$ $\eta_1 = c\lambda_1$, $\eta_2 = c\lambda_2$

- condizioni iniziali: $(V_C(0), i_L(0))$

c'è un circuito aperto sul condensatore, e $V_C(0^-) = 0$. Siamo in condizioni stazionarie, quindi tutto costante, e l'induttore è un corto circuito (quindi restano solo il gen. di tensione e il resistore), e $i_L = \frac{E}{R}$

Il grafico di $I_L(t)$ è omologo.



- CRITERIO! Se vogliamo trovare le variabili NON DI STATO, si deriva:

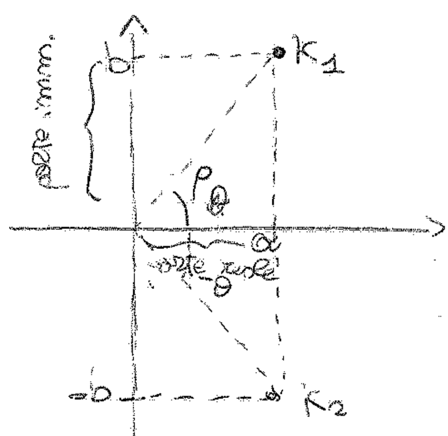
$$V_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = L\left[K_1 C \alpha_1^2 e^{-\alpha_1 t} + K_2 C \alpha_2^2 e^{-\alpha_2 t}\right]$$ → derivata della corrente sull'induttore

$$I_C(t) = \frac{1}{C}\frac{dV_C}{dt}$$

[2) Se $\alpha^2 < \omega_0^2$, abbiamo risultato complesso, $\lambda_1 = -\alpha + j\beta$, $\lambda_2 = -\alpha - j\beta$

, le costanti sono $K_1 = \dfrac{\frac{E}{R} - EC\alpha - jEC\beta}{2jC\beta}$, $K_2 = \dfrac{\left(\frac{E}{R} - EC\alpha\right) + jEC\beta}{2jC\beta}$,

si può scrivere per semplicità $K_1 = a + j\beta$, $K_2 = a - j\beta$, poiché sono valori COMPLESSI CONIUGATI, che si possono rappresentare sul piano di Gauss, in forma cartesiana $K_1 = a + jb$, o esponenziale, $K_1 = \rho e^{j\theta}$ ← fase, (ρ ← modulo), $K_2 = \rho e^{-j\theta}$



[Scriviamo ora il risultato complessivo del circuito, con le polari:

$$v(t) = \rho e^{j\theta} \cdot e^{(-\alpha + j\beta)t} + \rho e^{-j\theta} \cdot e^{(-\alpha - j\beta)t} + E =$$

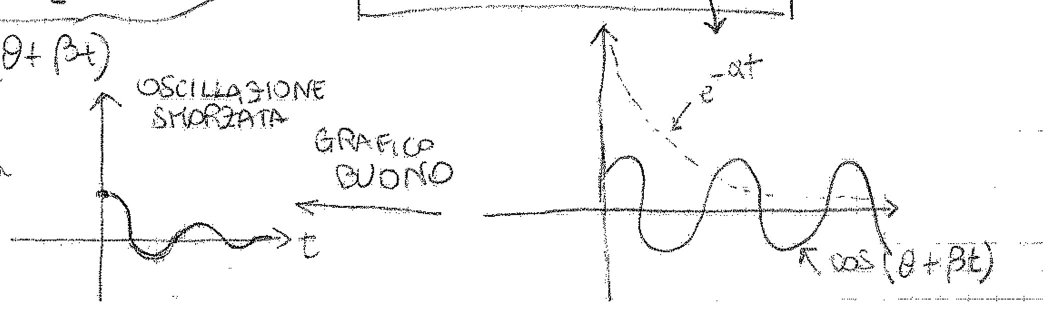
$$= \rho\left(e^{j\theta} \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{j\beta t} + e^{-j\theta} e^{-\alpha t} e^{-j\beta t}\right) + E =$$

$$= \rho e^{-\alpha t}\left(e^{j\theta + j\beta t} + e^{-j\theta - j\beta t}\right) + E = \rho e^{-\alpha t}\left(e^{j(\theta+\beta t)} + e^{-j(\theta + \beta t)}\right) + E$$

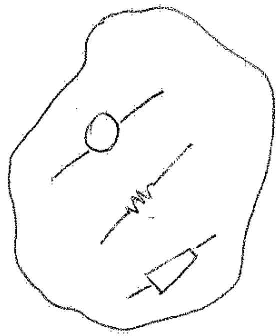
Dividiamo e moltiplichiamo per 2, per usare la formula di EULERO

$$2\rho e^{-\alpha t} \underbrace{\left(\frac{e^{j(\theta+\beta t)} + e^{-j(\theta+\beta t)}}{2}\right)}_{\cos(\theta + \beta t)} + E = \boxed{2\rho e^{-\alpha t} \cdot \cos(\theta + \beta t) + E} \; V_C!!$$

Viene un coseno schiacciato, per colpa dell'exp decrescente, fino a zero.

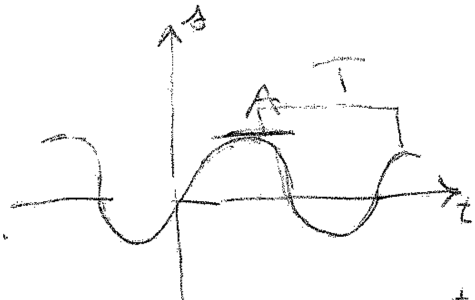


RETI IN REGIME SINUSOIDALE – GENERATORI NON COSTANTI



Per risolvere circuiti del primo ordine, abbiamo supposto di avere solo generatori costanti; prendiamo invece un generatore che eroghi secondo la funzione:

$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.



...mi la soluzione $x = x_p + x_0$, ovvero ...me soluzione PARTICOLARE una ...unzione del tipo $x_p = k_p\cos(\omega t + \varphi)$. $\omega \to \frac{2\pi}{T}$

...uesta soluzione è anche la più importante, poiché $x_0 = e^{-\frac{t}{\tau}}$ muore dopo qualche τ, quindi va a 0 rapidamente; perciò ...ermane quella particolare. (In alcuni sistemi si ha τ più grande).

...p deve soddisfare l'equazione differenziale $k_p\omega\sin(\omega t+\varphi) + \frac{k_p}{\tau}\cos(\omega t+\varphi) = \frac{A}{2}\cos(\omega t+\varphi)$, che è PESSIMA. Quindi usiamo EULERO per passare agli esponenziali, con funzioni complesse.

$s(t) = A\cos(\omega t+\varphi) \to s(t) = A\frac{e^{j(\omega t+\varphi)}+e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}$ / $x_p = k_p\frac{e^{j(\omega t+\varphi)}+e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}$

...stituzione nell'equazione differenziale:

$$\frac{k_p}{2}j\omega e^{j(\omega t+\varphi)} + \frac{k_p}{2}(-j\omega)e^{-j(\omega t+\varphi)} + \frac{k_p e^{j(\omega t+\varphi)}}{2\tau} + \frac{k_p e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2\tau} = \frac{A}{2\tau}e^{j(\omega t+\varphi)} + \frac{A}{2\tau}e^{-j(\omega t+\varphi)}$$

mettiamola scritta meglio

$$\left[j\omega\frac{k_p}{2}e^{j\varphi} + \frac{k_p}{2\tau}e^{j\varphi} - \frac{A}{2\tau}e^{j\varphi}\right]e^{j\omega t} = \left[\frac{A}{2\tau}e^{-j\varphi} - \frac{k_p}{2\tau}e^{-j\varphi} + j\omega\frac{k_p}{2}e^{-j\varphi}\right]e^{-j\omega t}$$

Questa relazione sussiste solo se il contenuto delle quadre è nulla. Possiamo usare questa relazione per trovare l'unica incognita, ovvero kp.

$k_p = \frac{A}{2\tau\left(\frac{j\omega}{2}+\frac{1}{2\tau}\right)}$ Vediamo che non dipende dal tempo, e per la presenza di j è una costante COMPLESSA.

mpio:

$=Ri$

nsideriamo un generatore sinusoidale.

$$\left.\begin{aligned} V\cos(\omega t+\varphi) &= \operatorname{Re}\{\hat{V}e^{j\omega t}\} \\ I\cos(\omega t+\varphi_I) &= \operatorname{Re}\{\hat{I}e^{j\omega t}\} \end{aligned}\right\} \text{GRANDEZZE SINUSOIDALI}$$

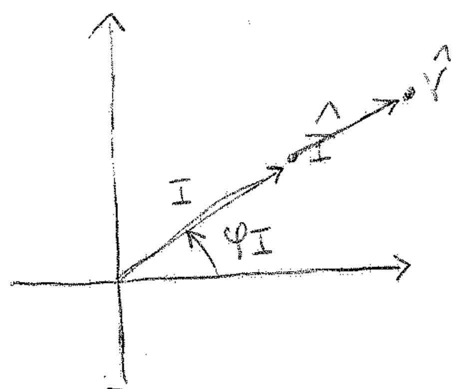
$$=Ri \Rightarrow \operatorname{Re}\{\hat{V}e^{j\omega t}\} = R\cdot\operatorname{Re}\{\hat{I}e^{j\omega t}\} \Rightarrow \operatorname{Re}\{\hat{V}e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{R\hat{I}e^{j\omega t}\}$$

$$\operatorname{Re}\{\hat{V}e^{j\omega t} - R\hat{I}e^{j\omega t}\} = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\{(\hat{V}-R\hat{I})e^{j\omega t}\} = 0$$

a parte reale $=0$ implica $(\hat{V}-R\hat{I})e^{j\omega t} = 0 \Rightarrow \hat{V}-R\hat{I} = 0 \Rightarrow \hat{V} = R\hat{I}$

GRAFICO DEL FASORE DELLA CORRENTE

ediamo che fasore della corrente e
ensione hanno STESSA FASE e diverso
MODULO.



ELEMENTI DINAMICI CON REGIME SINUSOIDALE

$v = \operatorname{Re}\{\hat{V}e^{j\omega t}\}$
$i = \operatorname{Re}\{\hat{I}e^{j\omega t}\}$ $\Rightarrow$ passaggio alle condizioni in regime sinusoidale.

applichiamo $v = L\frac{di}{dt}$ su un'induttore

$$\operatorname{Re}\{\hat{V}e^{j\omega t}\} = L\frac{d}{dt}\{\hat{I}e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\left\{L\frac{d}{dt}\hat{I}e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Re}\{L\hat{I}j\omega e^{j\omega t}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\{\hat{V}e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{L\hat{I}j\omega e^{j\omega t}\} \Rightarrow \operatorname{Re}\{\hat{V}e^{j\omega t} - L\hat{I}j\omega e^{j\omega t}\} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{j\omega t}(\hat{V} - j\omega L\hat{I}) = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{V} = j\omega L\hat{I}}$$ EQUAZIONE DI FUNZIONAMENTO DELL'INDUTTORE

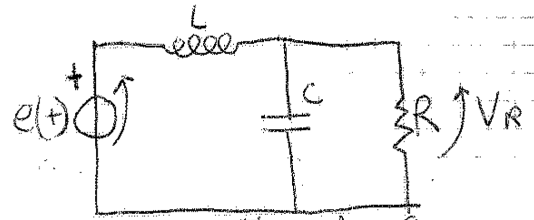
- EQUAZIONE PER IL CONDENSATORE

Definiamo un fasore $\hat{I}$ e $\hat{V}$ per la relazione $i = C\frac{dv}{dt}$,
quindi troviamo (con dimostrazione analoga),

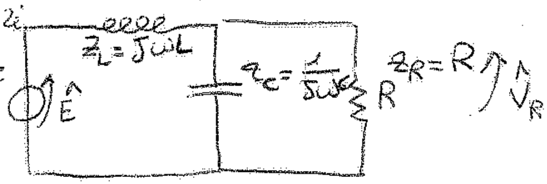
$|\hat{I} = j\omega C\hat{V}|$

ESERCIZIO

$e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$



Innanzitutto ridisegniamo il circuito, mettendo le quantità complesse: $e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \longrightarrow \hat{E} = E_0 e^{j\varphi}$ (wb)
scriviamo gli induttori e condensatori
resistori con le dovute ammettenze
impedenze. Se si fa sbagliato,
SONO BAFFI!!

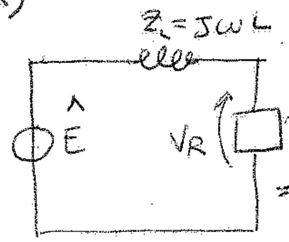


Ora per la richiesta dell'esercizio, cioè la tensione sul resistore, possiamo fare il parallelo tra il condensatore e il resistore. $Z_{eq} = Z_C // Z_R = \frac{Z_C Z_R}{Z_C + Z_R}$, poiché abbiamo quantità reali e immaginarie, dobbiamo stare attenti: $\frac{R \frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} =$

$$\frac{\frac{R}{j\omega C}}{\frac{1 + j\omega C R}{j\omega C}} = \underbrace{\frac{R}{1 + j\omega_0 C R}}_{\text{è un complesso!}} = \frac{R}{\underbrace{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}}_{\text{MODULO}(M)}\, e^{\overbrace{j\,\mathrm{arctg}(\omega_0 C R)}^{\text{FASE}(\alpha)}}} = \boxed{\frac{R}{M} e^{-j\alpha}}$$

↑ segno dell'esponente cambiato per girare l'espressione.

Ridisegniamo il circuito:
Ora possiamo usare un classico
partitore di tensione:



$Z_{eq} = \frac{R}{M} e^{-j\alpha} = A + jB$ (forma cartesiana)

$$\hat{V}_R = \frac{\hat{E} \cdot Z_{eq}}{Z_L + Z_{eq}} = \frac{E_0 e^{j\varphi} \cdot \frac{R}{M} e^{-\alpha j}}{j\omega L + \frac{R}{M} e^{-j\alpha}} = \frac{E_0 e^{j\varphi} \cdot \frac{R}{M} e^{-j\alpha}}{\underbrace{j\omega_0 L + A + jB}} =$$

con $A = \frac{R}{M}\cos\alpha$, $B = -\frac{R}{M}\sin\alpha$

$j\omega_0 L + A + jB$ è un complesso, in cui $\underbrace{\sqrt{A^2 + (B + \omega_0 L)^2}}_{= m}$, $e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{B + \omega_0 L}{A}} = e^{j\beta}$

$$\frac{E_0 e^{j\varphi} \cdot \frac{R}{M} e^{-j\alpha}}{m e^{j\beta}} = \text{dobbiamo tornare in forma cartesiana}, = \frac{E_0}{m}\frac{R}{M} e^{(\varphi - \alpha - \beta)} =$$

$$= \rightarrow v_R(t) = \frac{E_0 R}{m M} \cos(\omega_0 t + \varphi - \alpha - \beta)$$

[ALTRA NOTAZIONE, per l'impedenza:

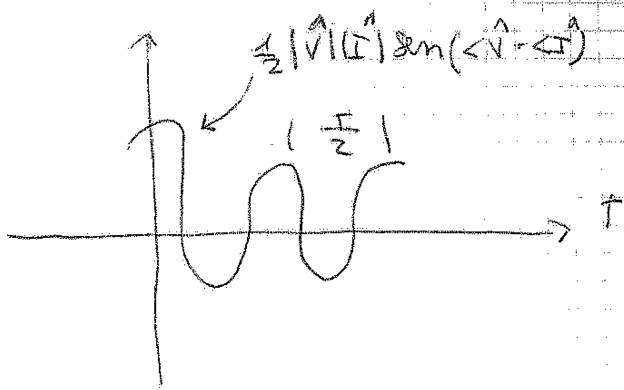
$Z = |Z| e^{j\angle Z} = R + jX \longrightarrow$ (REATTANZA), per l'ammettenza: $Y = |Y| e^{j\angle Y} =$

POLARE RESIST. CARTESIANA

$= G + jB \longrightarrow$ SUSCETTANZA

CONDUTTANZA

a la seconda riga, con periodo
e SENO sempre dimezzato,



e complessivo della POTENZA, creato dai due grafici, è la media tra le due funzioni.

potenza media $\boxed{P = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(<\hat{V}-<\hat{I})}$ + 0, poiché la media del seno fa 0. In tutte le apparecchiature le tensioni creano potenza oscillante, noi percepiamo la potenza media. Le oscillazioni del coseno sono dette POTENZA ATTIVA, cioè il nostro bipolo assorbirebbe solo energia; il grafico del seno è invece SIA POSITIVO CHE NEGATIVO, quindi è detta potenza REATTIVA.

CASO PARTICOLARE 1, $\overset{R}{\text{—ww—}}$, c'è un solo resistore, per cui $<\hat{V} = <\hat{I}$, $P = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|(1+\cos(2\omega t + 2<\hat{I}) - \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|sen(2\omega t + 2<\hat{I})\cdot 0 =$

$= \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|(1+\cos(2\omega t + 2<\hat{I}))$, quindi c'è SOLO LA PARTE ATTIVA!

Quindi la potenza è sempre ASSORBITA.

CASO PARTICOLARE 2, —ℓℓℓ—, $\hat{V} = j\omega L\hat{I}$, $<\hat{V} = <\hat{I} + \frac{\pi}{2}$

$P = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}(1+\ldots) - \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|sen(2\omega t + 2<\hat{I})$, qui c'è solo il seno, quindi SOLO POTENZA REATTIVA! Ruoli scambiati col resistore, qui la potenza oscilla tra positiva e negativa, perciò eroga e assorbe periodicamente, a seconda della posizione del seno nel tempo (la media è 0).

CASO PARTICOLARE 3, condensatore (YOU DON'T SAY!) $\hat{I} = j\omega C\hat{V}$, $<\hat{I} = <\hat{V} - \frac{\pi}{2}$

Qui NO potenza attiva, sì reattiva ma opposta rispetto a L.
Quindi P=0

$\hat{V} = |\hat{V}| e^{j\angle\hat{V}}$, $\hat{I} = |\hat{I}| e^{j\angle\hat{I}}$

andiamo a fare $\frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}^* = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}| e^{j\angle\hat{V}} + e^{-j\angle\hat{I}} = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}| e^{j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})} =$

passiamo in cartesiana $= \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I}) + j\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}| \mathrm{sen}(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})$

confrontiamo ora il risultato con la potenza: vediamo che sono simili, a meno del termine con la frequenza, che però sparisce nella potenza media, $P = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})$, che è uguale alla parte reale del nostro risultato.

Quindi, la nostra relazione:

$$\underbrace{\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}_{\text{potenza media } P} + j\underbrace{\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}| \mathrm{sen}(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}_{\text{ampiezza delle oscillazioni della potenza reattiva, detta } Q}$$

Quindi possiamo abbreviare: $\boxed{\frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}^* = P + jQ}$ = S (POTENZA COMPLESSA)

$S = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}| e^{j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})} \rightarrow |S| = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|$ (il modulo della P. complessa è detta POTENZA APPARENTE)

UNITÀ DI MISURA BISLACCHE!

Potenza ATTIVA in WATT

Potenza REATTIVA Q in VAR (volt ampere reattivi)

Potenza APPARENTE |S| in VA (volt ampere)

ALTRE NOTAZIONI!

$\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\underbrace{\angle\hat{V}-\angle\hat{I}}_{=\varphi})$ si usa chiamarlo $\cos\varphi$, FATTORE DI POTENZA, è semplicemente quindi la FASE DELL'IMPEDENZA.

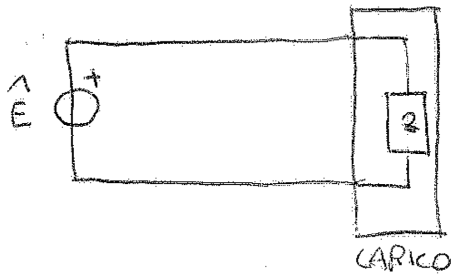
Infatti ogni dispositivo elettrico viene venduto con 3 valori indispensabili: i DATI DI TARGA

- Valore efficace
- Potenza media (P)
- fattore di potenza ($\cos\varphi$)

Da questi dati, dobbiamo essere in grado di risalire ai rispettivi componenti dei numeri complessi.

Ad esempio, la potenza complessa S, la possiamo rappresentare sul piano di Gauss:

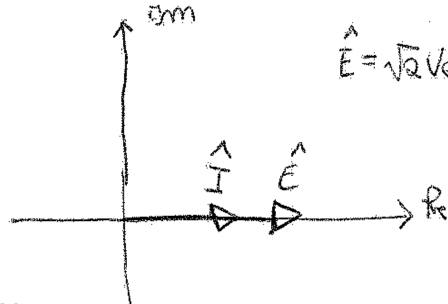
ESEMPIO:
dati di targa
V_{eff}, P, $\cos\varphi$



1° CASO $Z = R \Longrightarrow \cos\varphi = 1$

$$|\hat{I}| = \frac{2P}{\sqrt{2}\, V_{eff} \cos\varphi} = \sqrt{2}\,\frac{P}{V_{eff}}$$

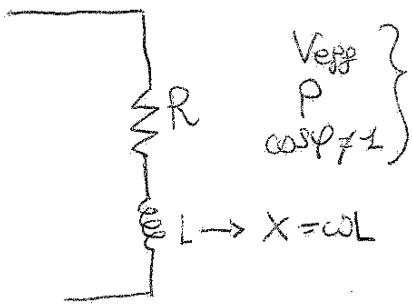
$\hat{E} = \sqrt{2}\, V_{eff}\, e^{j0}$



Sono in FASE poiché parliamo del carico di un resistore, ovvero stessa direzione e moduli diversi.
In particolare, sappiamo che lungo i fili c'è sempre una piccola resistenza, quindi per far passare corrente dobbiamo "sprecare" potenza, in proporzione alla corrente che deve passare.

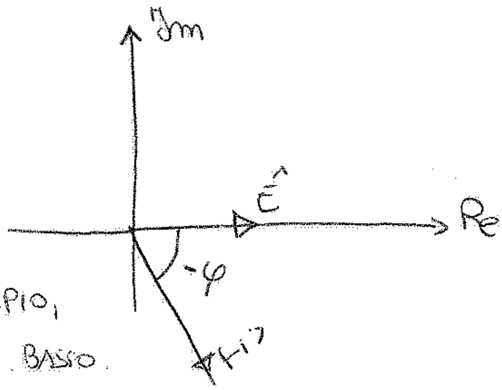
2° CASO: $Z = R + jX$

$$|\hat{I}| = \frac{\sqrt{2}\, P}{V_{eff} \cos\varphi}$$



V_{eff}, P, $\cos\varphi \neq 1$

Stavolta la corrente è MAGGIORE, perché il coseno al denominatore è < 1. Ovviamente qui non siamo più in fase.
In questo caso, P sprecata è maggiore di quella sprecata nel caso 1, perché i fili sono gli stessi, ma si richiede PIÙ CORRENTE (AD ESEMPIO, UN CARICO COSÌ È QUELLO DELLE LAMPADINE A BASSO CONSUMO).



Queste cose alle compagnie elettriche non piace, quindi quando si firma un contratto per l'energia, si dice che chi utilizza l'energia deve usare impianti (elettrodomestici) con valore di targa $\cos\varphi > 0,9$. Altrimenti il contratto viene rescisso, e si pagano costi aggiuntivi.

pplichiamolo ora al segnale di un generatore!

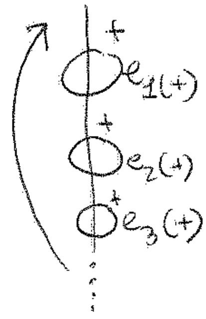
(t) è una funzione periodica di media nulla;

$$(t) \sim \sum_{m=1}^{N} E_K \cos\left(k\frac{2\pi}{T}t + \varphi_K\right) = E_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_1\right) + E_2\left(2\cdot\frac{2\pi}{T}t + \varphi_2\right) \ldots$$

quindi è una somma di generatori, che può essere
rensata come una SERIE di generatori!

$$e_1(t) = E_1\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_1\right)$$

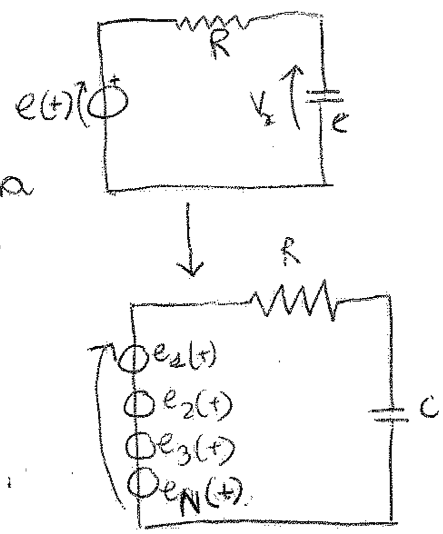
$$e_2(t) = E_2\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{T} + \varphi_2\right)$$



uindi sono serie di generatori
inusoidali, che differiscono per
se, ampiezza e frequenza (il
rimo avrà ω_0, il secondo $2\omega_0$, ecc...). Ciò significa che
per N generatori in serie, il circuito si risolve N
olte per SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI, con fasori alle N
frequenze.

SEMPIO:

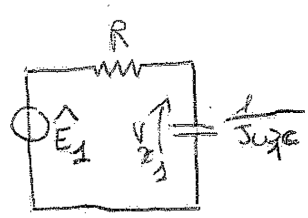
l nostro e(t) è approssimato
on Fourier, a tanti genera-
tori, in cui la serie si ferma
. N invece che andare a ∞
ome dovrebbe (per questo è
pprossimato)



Facciamo il primo circuito,
spegnendo tutto tranne il
generatore considerato.

GEN.

assiamo ai fasori!



$$e_1(t) = E_1\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_1\right)$$

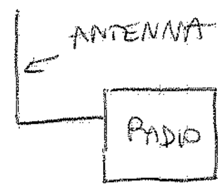
$$\hat{E}_1 = E_1 e^{j\varphi_1} \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right) \leftarrow \omega_1$$

Vogliamo V_{x_1}, come da richiesta! Si fa il partitore di
tensione.

$$V_{x_1} = \frac{\hat{E}_1 \cdot Z_{c1}}{R + Z_{c1}} \rightarrow V_{x_1} = \frac{\hat{E}_1 \cdot \frac{1}{j\omega_1 c}}{R + \frac{1}{j\omega_1 c}} = \ldots \rightarrow V_{x_1} = \hat{E}_1 \frac{1}{2\pi c R\left(\frac{1}{2\pi c R} + jf\right)}$$

$= 2\pi f$

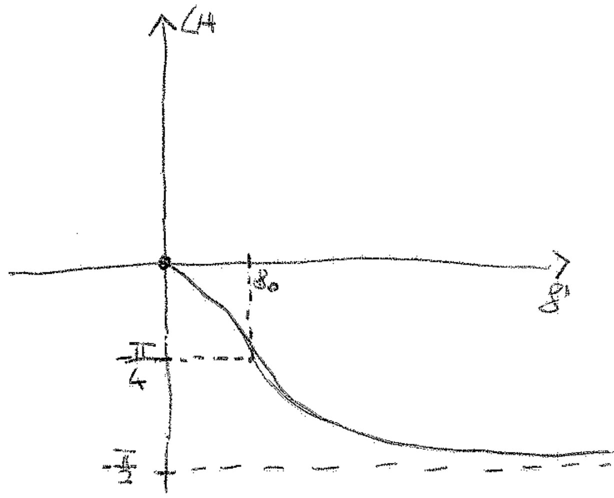
enza filtro le frequenze si confonderebbero tra loro,
; sarebbe un gran bordello. Ad esempio per la radio
dell'automobile, abbiamo un'antenna e un ricevitore.
'antenna deve solo percepire il
campo magnetico della stazione
radio desiderata, è un pezzo di
metallo; però essa capta tutti i campi
magnetici, e il ricevitore interno alla radio elimina
o filtra TUTTI i segnali tranne quello desiderato, e
lo manda all'altoparlante.



un'altro esempio è l'elettrocardiogramma.

grafico della fase

$\angle H(f') = -\mathrm{arctg}\left(\frac{f'}{f_0}\right)$



DEFINIZIONE!

Un modulo qualsiasi A viene
rappresentato coi logaritmi in
decibel Db, con $A = 20\log_{10} A$
con $A = 1$, in Db vale 0.
con $A = 10$, in Db vale 20.
Inoltre per il grafico avremo anche valori negativi, perché
il Log per valori tra 0 e 1, vale risultati negativi.

Il modulo in Db vale: $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2}} \Rightarrow 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 20\overset{0}{\widehat{\log 1}} - 20\log\sqrt{1+\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2} \Rightarrow -20\cdot\frac{1}{2}\log\left[1+\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2\right]$

Se $f' = 0$, $|H|_{dB} = 0$, se $f' \ll f_0$, $|H|_{dB} \xrightarrow{\sim} 0$

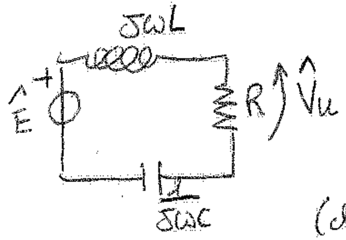
Se $f' = f_0$, $|H|_{dB} = -3\,dB$

Se $f' \gg f_0$, $|H|_{dB} = -20\cdot\frac{1}{2}\log\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2 = -20\log\frac{f'}{f_0}$ (l'1 è trascurato) $=$
$= -\underbrace{20\log f'}_{=x} + \underbrace{20\log f_0}_{=a} = -20(\log f_0 - \log f') \Rightarrow a - 20x$ è una RETTA!!

Questa nuova variabile e notazione, ci dà un
grafico molto diverso

FILTRI DEL SECONDO ORDINE

amiamo la funzione di
riferimento $H = \frac{\hat{V}_u}{\hat{E}}$



$= jωL + R + \frac{1}{jωC} = R + ωLj - \frac{1}{ωC}j =$

$R + j\left(ωL - \frac{1}{ωC}\right)$

(due elementi diff., per questo sono del 2° ordine)

abbiamo un (-) nella parentesi, quindi esisterà un $ω_0$ per cui la parte immaginaria dell'impedenza è nulla, in particolare $\underbrace{ω_0^2 = \frac{1}{LC} = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$ (il segno negativo non ha senso fisico).

PULSAZIONE DI RISONANZA, vale per sistemi elettrici e meccanici, per cui l'impedenza è puramente reale.

Scriviamo ora la Fdt:

$\hat{V}_u = \hat{E}\frac{R}{R + jωL + \frac{1}{jωC}} \rightarrow H = \frac{R}{R + j\left(ωL - \frac{1}{ωC}\right)} \rightarrow H = \frac{R}{R\left(1 + j\left(\frac{ωL}{R} - \frac{1}{RωC}\right)\right)} =$

= si moltiplicano i termini in parentesi tonda per C e L rispettivamente $= \frac{1}{1 + j\left(\frac{ωLC}{RC} - \frac{L}{RωCL}\right)} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{ω}{\underbrace{ω_0^2}_{\text{P. DI RISONANZA}} RC} - \frac{ω_0^2 L}{ωR}\right)} =$

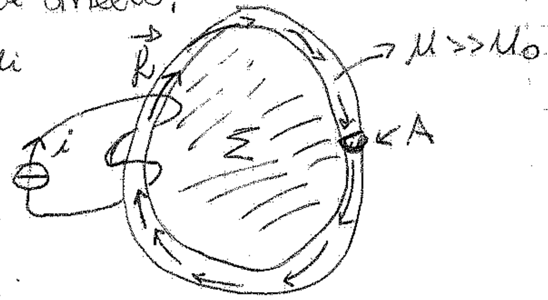
$= \frac{1}{1 + j\left(\frac{ω}{ω_0} \cdot \frac{1}{ω_0 RC} - \frac{ω_0}{ω} \cdot \frac{ω_0 L}{R}\right)} \rightarrow H = \frac{1}{1 + jQ_s\left(\underbrace{\frac{ω}{ω_0} - \frac{ω_0}{ω}}_{\text{LI TRASFORMIAMO IN FREQ.}}\right)} = \frac{1}{1 + jQ_s\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$

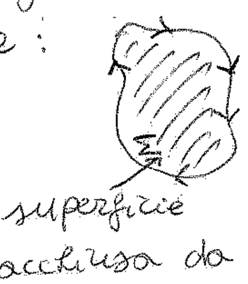
Questi due termini sono identici anche se scritti in modo diverso, li chiamiamo "Q_s", FATTORE DI QUALITÀ, sono uguali perché:

$\frac{1}{ω_0 RC} \cdot \frac{ω_0}{ω_0} = \frac{ω_0 LC}{RC} = \boxed{\frac{ω_0 L}{R}}$

Sistemi magnetici

upponiamo di avere un anello con materiale ad alta ermeabilità magnetica alta rispetto all'aria. Prendiamo n filo e lo avvolgiamo attorno all'anello, traversato da corrente, che quindi roduce un campo magnetico. Chiameremo $\vec{h}$ il campo magnetico, iretto con la regola della mano estra. Poiché il materiale è ad lta permeabilità magnetica, questo campo scorre ttraverso l'anello, descrivendo una traiettoria uguale alla forma dell'anello. Dalla fisica, sappiamo che:





Dalla legge di Ampère, se facciamo la circuitazione del campo magnetico lungo il percorso chiuso è uguale alla densità di corrente attraverso la superficie

in formula: $\oint_\gamma \vec{h}\, dL = \int_\Sigma J\, d\Sigma$.

Nel nostro caso, γ è l'anello! Quindi l'integrale è semplice, con L = lunghezza dell'anello, e si avrà:

$\oint_\gamma \vec{h} \cdot dL = |h| \cdot L$. La corrente del termine a destra della legge di Ampere starà solo sul filo avvolto attorno all'anello! Analizziamolo matematicamente:

$\int_\Sigma J d\Sigma = N \cdot i$, con N numero delle spire del filo arrotolato attorno all'anello.

Complessivamente, nel nostro caso la legge di Ampere dà:

$\boxed{|h| L = N \cdot i}$

Inoltre, oltre al campo magnetico, esiste anche l'INDUZIONE magnetica, $b = \mu \vec{h}$, che ci porta ad un'espressione alternativa della legge di Ampere, $b = \mu \frac{Ni}{\cancel{L}}$

risultato dell'integrale dà:

$$\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}'x + \mathcal{R}l_2 + \mathcal{R}'x = \frac{b}{\mu}l_1 + \frac{b}{\mu_0}x + \frac{b}{\mu}l_2 + \frac{b}{\mu_0}x = b\left(\frac{l_1+l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}\right)$$

$$\left(\frac{l_1+l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}\right) = Ni$$

coliamo il flusso:

$$\Phi = bA = \frac{Ni}{\frac{l_1+l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}} A$$

gge di Faraday:

$$n = N\frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{\left(\frac{N^2 A}{\frac{l_1+l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}}\right)}_{L}\frac{di}{dt}$$

upponiamo ora di avere due situazioni: (sempre dal disegno di primo).

: Traferro $x \neq 0$, $L = \dfrac{N^2 A}{\frac{l_1+l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}}$, $\underbrace{\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}L_1 i^2}_{\text{ENERGIA DELL'INDUTTORE}}$

Nessun traferro, $x = 0$, $L = \dfrac{N^2 A}{\frac{l_1+l_2}{\mu}}$, $\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}L_2 i^2$

$\Delta\mathcal{E} = Fx$, ovvero è il lavoro prodotto dalla forza per attaccare la barretta inferiore al "ferro di cavallo", togliendo il traferro. Questa non è altro che una ELETTROCALAMITA, funziona SOLO in presenza di corrente nell'avvolgimento (infatti se $i=0$, $\mathcal{E}=0$). Un passato era STRAUTILIZZATO in automobili, case, per gli interruttori, ecc..

SEMPLIFICAZIONE DEL TRASFORMATORE

Soliti dati $\phi = \mu \frac{A}{\ell}(N_1 i_1 + N_2 i_2)$, $V_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$, $V_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$

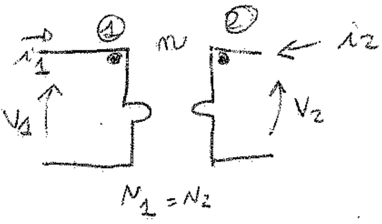
Idealizziamo un materiale che compone l'anello, che sia così buono da avere $\mu \to \infty$. MA ϕ deve rimanere finito, altrimenti $\mathcal{E} \to \infty$ e non ha senso. La condizione è che la parentesi tenda a 0, cioè $(N_1 i_1 + N_2 i_2) = 0$, cioè $i_1 = -\frac{N_2}{N_1} i_2$.

Scriviamo ora il rapporto tra V_1 e V_2: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1 \, d\phi/dt}{N_2 \, d\phi/dt} = \frac{N_1}{N_2}$, molto più semplice di prima, ed è un RAPPORTO SPIRE.

n rapporto spire $\quad m = \frac{N_2}{N_1}$, $\underbrace{V_2 = m V_1, \quad i_2 = -\frac{1}{m} i_1}$

EQUAZIONI DEL TRASFORMATORE IDEALE.

Vediamo che è tutto in funzione delle SPIRE. Nei circuiti si trovano idealizzati come



EQUAZIONI DEL TRASFORMATORE IDEALE:

$$\begin{cases} i_1 = -\frac{N_2}{N_1} i_2 \to -m i_2 \\ i_2 = -\frac{1}{m} i_1 \\ V_2 = m V_1 \\ V_1 = \frac{V_2}{m} \end{cases}$$

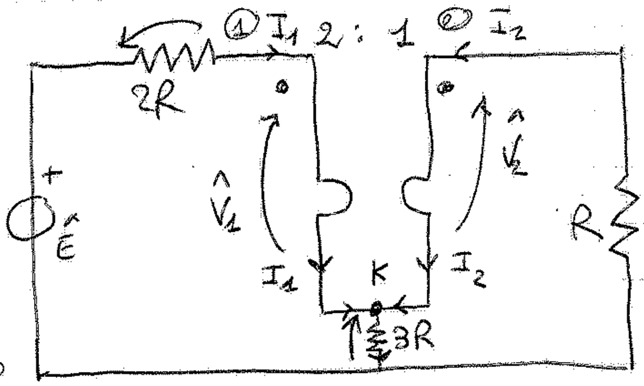
$m = \frac{N_2}{N_1}$ RAPPORTO SPIRE

CALCOLIAMO LA POTENZA SUI DUE BIPOLI

1) Prima porta, sarà assorbita, quindi $P_1 = i_1 V_1$

2) " " $P_2 = i_2 V_2 = m V_1 \left(-\frac{1}{m} i_1\right) = -V_1 i_1$

Vediamo che sono uguali in modulo e opposte, ma nel secondo bipolo è potenza EROGATA e non assorbita. Sostanzialmente il trasformatore fa entrare la potenza da un bipolo e la fa uscire di segno opposto (idealmente resta invariata, ... ha un rendimento del 99%



SERCIZIO 3:

ovare la potenza assorbita
dal resistore R.

e nodo K, $I = \hat{I}_1 + \hat{I}_2$

acciamo una KVL sul percorso
chiuso a sinistra:

$\hat{E} - (2R \cdot \hat{I}_1) - \hat{V}_1 - 3R(I_1 + I_2) = 0$, usiamo le eq. del trasfor-
-matore: $\hat{E} = 2RI_1 + V_1 + 3R(I_1 - \frac{1}{n} I_1)$

acciamo KVL a destra:

$\hat{V}_2 + R\hat{I}_2 + 3R(\hat{I}_1 + \hat{I}_2) = 0$

oiché vogliamo la potenza sul resistore, ci conviene tenere
la I_2 come incognita:

$\hat{E} = -2Rn\hat{I}_2 + \hat{V}_1 + 3R\hat{I}_2(1-n)$

$\hat{V}_2 = -R\hat{I}_2 - 3R\hat{I}_2(1-n)$

nV_1

$n(\hat{E} + 2Rn\hat{I}_2 - 3RI_2(1-n)) = -R\hat{I}_2 - 3R\hat{I}_2(1-n)$

$[2Rn^2 - 3Rn(1-n) + R + 3R(1-n)]\hat{I}_2 = -n\hat{E}$

$I_2 = \dfrac{-n\hat{E}}{2Rn^2 - 3Rn + 3Rn^2 + R + 3R - 3Rn}$ = sostituire n con $\frac{1}{2}$, rapp. spire =

$\Rightarrow \hat{I}_2 = -\dfrac{2}{9}\dfrac{\hat{E}}{R}$

sappiamo che in sinusoidale, $P = \dfrac{|V| \cdot |I|}{2}\cos\varphi = \dfrac{R|\hat{I}_2|^2}{2}$, perché
sul resistore $\cos\varphi = 1$ (V e I in fase) $A \rightarrow P = \dfrac{4}{2 \cdot 81}\dfrac{|E|^2}{R}$