NUMERO: 675

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Russo

MATERIA: Analisi Matematica II
Prof. De Angelis

ANALISI MATEMATICA 2

EBBENE SÌ, DOPO AVER PASSATO ANALISI I CON 17 GIUSTE, MICA MALE!! CIOÉ CACCHIO, NON ERA FACILE, 4 CAZZO DI APPELLI PER PASSARLA, DIO SANTO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 103

INSIEME CHIUSO: un insieme si dice chiuso se contiene la sua frontiera, o BORDO.

SIMBOLI:

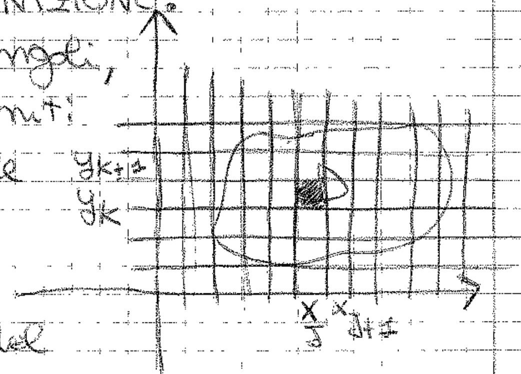
∂D FRONTIERA

$\mathring{D}$ INTERNO DI D $\rightarrow$ $\mathring{D} = D - \partial D$

$\overline{D}$ CHIUSURA DI D

- Sia D un insieme chiuso e limitato, la cui frontiera è costituita da un numero finito di grafici di funzioni continue; si chiamerà DOMINIO DI INTEGRAZIONE.

Lo tagliamo in tanti rettangoli, che chiameremo $R_{j,k}$, definiti da indici corrispondenti alle coordinate.



$R_{j,k}$ $\left.\begin{array}{l} Dx_j = x_{j+1} - x_j \\ Dy_k = y_{k+1} - y_k \end{array}\right\}$ lati del rettangolino.

Si sceglie un punto nel rettangolino, che è anche interno a D, di coordinate $(\xi_j, \eta_k) \in R_{j,k}$.

$f(\xi_j, \eta_k) Dx_j Dy_k$, si ottiene un cilindretto di base sull'asse x. Per ottenere il volume totale, sommiamo il volume di ogni cilindretto, con l'operazione chiamata SOMMA DI RIEMANN, ottenendo un'approssimazione tanto più accurata quanto si infittisce la rete di rettangolini in cui si divide D. Ogni pezzetto in cui si divide D è detto $\delta = \max\{\Delta x_j, \Delta y_k\}$. Quindi per la

2° MONOTONIA:

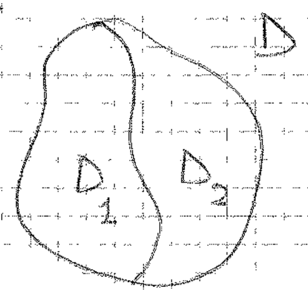
$$f \geq 0 \rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$$

$$f \leq g \rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

3° ADDITIVITÀ:

Supponiamo $D = D_1 \cup D_2$, e $D_1 \cap D_2$ non ha punti interni.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$



SOLO PUNTI DI FRONTIERA PER $D_1 \cap D_2$

Casi particolari:

- Se $f(x,y) = 1 \quad \forall (x,y) \in D$

$$\iint_D 1\,dx\,dy = \text{Area di } D$$

- Se $f(x,y) = c \quad \forall (x,y) \in D$

$$\iint_D c\,dx\,dy \rightarrow c \cdot \text{area di } D$$, quindi un volume

- Media del doppio integrale

La media di f in D è:

$$m = \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

- TEOREMA (risoluzione dell'integrale doppio).
Sia D semplice in y, sia f continua in D;
$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ si calcola come:

$$= \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Quindi si fissa la x ricavando un integrale solo su y. Una volta risolto, il ricavato va integrato su x sull'intervallo di definizione

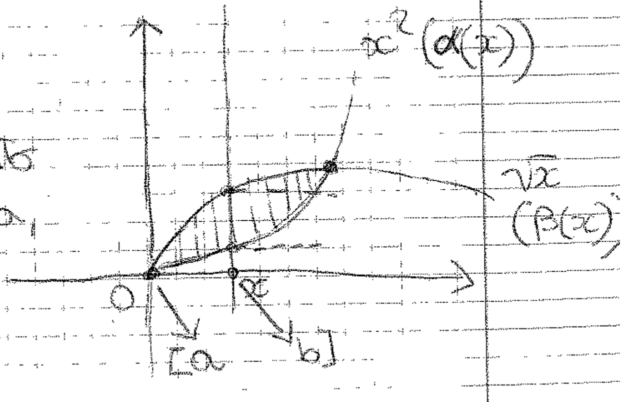
[a,b] della funzione. Questo ci dà graficamente l'area della sezione trasversale del cilindroide contenuta nel piano verticale passante per x e parallela al piano yz. [RISULTATO DEL PRIMO INTEGRALE]

- ESEMPIO

$\iint_D xy\,dx\,dy$, intervallo di integrazione [0,1]

D è la parte di piano delimitata da $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$

1° PASSO: disegnare D
Riconosco che è semplice in y.



2° PASSO: fare l'integrale dal punto d'ingresso a quello di uscita, della funzione da integrare:

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} xy\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy \right) dx$$

3° PASSO: risoluzione dell'integrale

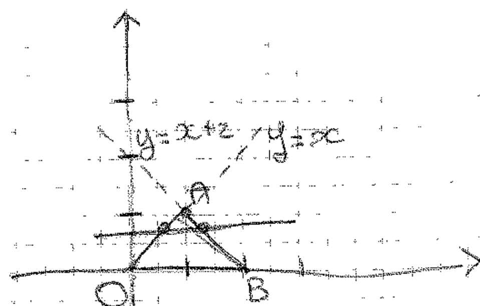
Graficamente, si seziona il cilindroide con piani paralleli al piano xz, non più yz.

- ! Se fosse sia semplice in x e y, si sceglie !

- ESEMPIO

$$\iint_T (x-y)\,dx\,dy \quad , \quad O(0,0), A(1,1), B(2,0)$$

Vediamo che il dominio T è semplice in x

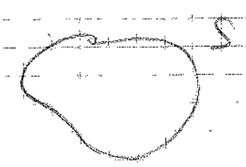


$y = x$, punto d'ingresso
$y = -x+2$, punto d'uscita

- Se lo volessimo semplice in y, dovremmo dividere il dominio in 2 separati, e avremo la somma dei due integrali sui due domini, per l'addività.

- CASO PARTICOLARE !!
Se avessimo un dominio composto da una corona circolare, dovremmo suddividerlo in più domini semplici, e sommare gli integrali, ad esempio così.

3° LEZIONE
BARICENTRI !!



DENSITÀ DI MASSA: massa per unità di superficie, parliamo una lamina piana $\sigma = \sigma(x,y)$

MASSA TOTALE $m = \iint \sigma(x,y)\,dx\,dy$ (integrale doppio del volume)

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |\det J\varphi| \; du\,dv}$$

FORMULOZZA

- Perchè nell'integrale definito devo mettere $\|\det J\varphi\|$ se prima non c'era?

- COORDINATE POLARI (per il cambiamento di coordinate)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \rightarrow \rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

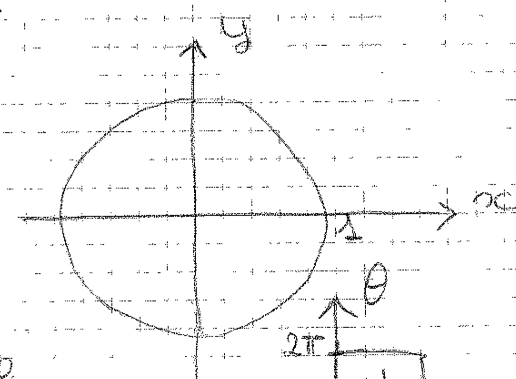
$$J\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta}, & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta}, & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ \rho\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

$$\det J\varphi = -\rho \operatorname{sen}^2\theta - \rho\cos^2\theta = -\rho$$

$$|\det J\varphi| = \rho$$

- ESEMPIO

$$\iint_D \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \; x^2+y^2 \leq 1\}$$

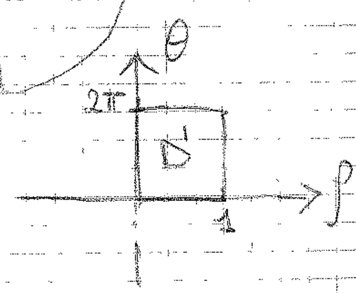


- CAMBIAMO IN COORD. POLARI:

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho \operatorname{sen}\theta$

$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}\right\}$ condizioni per cui è verificato il dominio, D'.



- Integrale interno:

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy = \dots \frac{1}{12} \text{ (vedere qualche foglio fa)}$$

$$x_G = \frac{1}{\frac{1}{12}} \iint_D x^2 y\,dx\,dy = \text{(dalla formula di baricentro)}$$

$$= 12 \int_1^0 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 y\,dy \right) dx$$

- Integrale interno

$$\left[x^2 \cdot \frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} = x^2 \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x^4 \right) = \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{2} x^6$$

- Integrale esterno:

$$12 \int_1^0 \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{2} x^6\,dx = 6 \int_0^1 x^3 - x^6\,dx = 6 \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{7} x^7 \right]_0^1 =$$

$$= 6 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) = \frac{9}{14}$$ è compreso tra 0 e 1, quindi va bene.

- ORDINATA

$$y_G = 12 \iint_D x y^2\,dx\,dy = 12 \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x y^2\,dy \right) dx$$

- Int. interno:

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x y^2\,dy = \left[x \cdot \frac{1}{3} y^3 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} = x \left(\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^6 \right) = \frac{1}{3} \left(x^{\frac{5}{2}} - x^7 \right)$$

$$\frac{1}{3} \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} - x^7\,dx = \frac{12}{3} \left[\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{8} x^8 \right]_0^1 = 4 \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{8} \right) = \frac{36}{56} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

- Parte esterna

$$\int_0^1 \frac{x^3}{2}dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

- Parte interna, sul dominio D_2

$$\int_1^2 \left(\int_0^{-x+2} xy\,dy\right)dx$$

$$x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{-x+2} = x\left[\frac{x^2+4-4x}{2}\right] = \frac{x^3-4x^2+4x}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^3-4x^2+4x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x^3 - 2\int_1^2 x^2 + 2\int_1^2 x =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 - 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[4-\frac{1}{4}\right] - 2\left[\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right]$$

$$+2\left[2-\frac{1}{2}\right] = \frac{15}{8} - \frac{14}{3} + 3 = \frac{45-112+72}{24} = \frac{5}{24}$$

AREA TOT = $\frac{2}{7}$

- Svolgimento rispetto alle x

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2} = \frac{2-3}{6}$$

$$\int_0^1 \left(\int_y^{2-y} xy\,dx\right)dy$$

$$y\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{2-y} = y\left[\frac{y^2-4y+4}{2} - \frac{y^2}{2}\right] = \frac{\cancel{y^3}-4y^2+4y}{2} - \frac{y^3}{2}$$

$$\int_0^1 -\frac{4y^2}{2} + \frac{4y}{2} = -\frac{4}{2}\int_0^1 y^2 - y = -2\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = -2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

- REGOLE DI CALCOLO

1) D si dice "z semplice" se è di questo tipo:

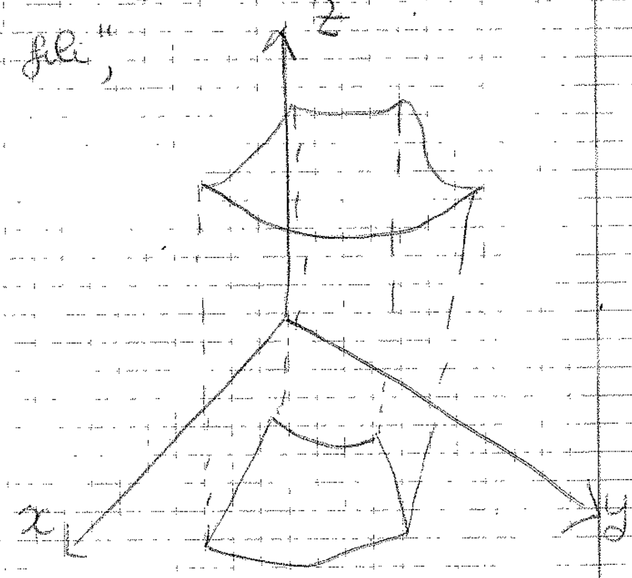
$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tali che $(x,y) \in A \subset \mathbb{R}^2$, e $\alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$,

con A dominio di integrazione di $\mathbb{R}^2$, α e β continue in A. Generalmente, si può avere un punto di ingresso in un punto di $\alpha(x,y)$, e uno di uscita in un punto di $\beta(x,y)$.

Faremo quindi l'integrale su z tra le $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.$$

Si chiama "integrale per fili", paralleli all'asse z.



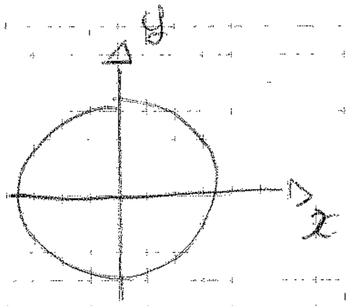
2) Stavolta lo faremo parallelo all'asse y, quindi con base della figura sul piano xz.

D si dice "y semplice" se:

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tali che $(x,z) \in B \subset \mathbb{R}^2$, e $\delta(x,z) \le y \le \gamma(x,z)\}$

$$\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big| = \frac{2}{3}(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}\iint_A (1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy$$



trasformazione in coordinate polari.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\frac{2}{3}\iint_A (1-\rho\cos^2\theta-\rho\,\text{sen}\,\theta)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\iint_A (1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \rho\, d\rho\, d\theta \cdot |\det J| =$$

manca il determinante dello Jacobiano, che è $= \rho$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \rho\, d\rho\right) d\theta$$

- Integrale interno

$$\int_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \rho\, d\rho \xrightarrow[\rho^2 = u]{\text{sostituzione}} \int_0^1 (1-u)^{\frac{3}{2}} du = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3}{2}}(1-u)^{1+\frac{3}{2}}(-1) + K =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{5}(1-u) = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}(1-\rho^2)^{\frac{2}{5}}\right]_0^1 = \left[-\frac{1}{5}(1-\rho^2)^{\frac{2}{5}}\right]_0^1 = 0 = \frac{1}{5}$$

$$\int_0^2 \left(\int_{-2x+1}^{-x^2+1} (x-1)\, e^{x^2+y}\, dy \right) dx$$

$\downarrow$

$$\int_0^2 (x-1)\, e^{x^2} \left(\int_{-2x+1}^{-x^2+1} e^{y}\, dy \right) dx$$

$$e^{-x^2+1} - e^{2x+1} = \int_0^2 (x-1)\, e^{x^2} \left(e^{-x^2+1} - e^{-2x+1}\right) dx$$

$$= e \int_0^2 (x-1)\, e^{x^2} \left(x^{-x^2} - e^{-2x}\right) dx = e \int_0^2 e^{x^3} - e^{x^2}\left(e^{-x^2} + e^{-2x}\right) =$$

$$= e \int_0^2 e^{x^3} + e^{x^2-2x}\, dx = e \int_0^2 e^{x^3} + e^{x(x+2)}\, dx =$$

$$= e \int_0^2 e^{x^3} dx + e \int_0^2 e^{x} dx + e \int_0^2 e^{x-2}\, dx =$$

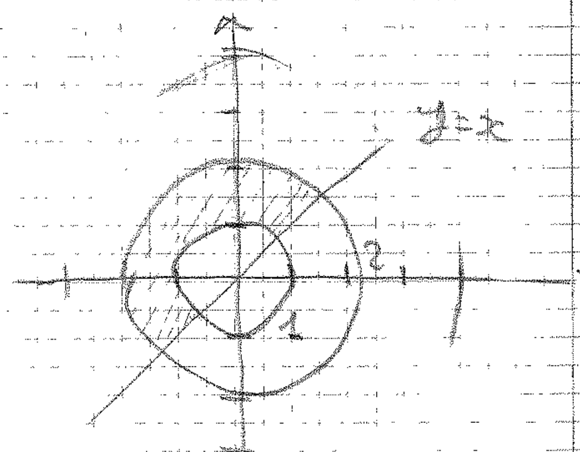
$$= e\left(\frac{x^2}{2} - x^2\right)_0^2 - \frac{1}{2}\left(e^{x-1}\right)_0^2 = 0$$

$$\int_0^1 -\frac{y^2}{2}\,dy + \int_0^1 y^2\,dy - \int_0^1 \frac{y^4}{4}\,dy + \int_0^1 y\sqrt{y}\,dy =$$

$$\left[-\frac{y^3}{6}\right]_0^1 + \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} =$$

$$\frac{-10+20-15+12}{60} = \frac{-35+32}{60} = \cancel{\frac{-3}{60}} = -\frac{1}{20} + \frac{3}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad D = \{\, y \geq x \vee 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \,\}$$



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,sen\,\theta \end{cases}$$

$|J| = \rho$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq \rho \leq 2 \\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi \end{array}\right\} \text{Nuove condizioni del dominio.}$$

$$\iint_D \frac{\rho\cos\theta \cdot \rho^2 sen^2\theta}{\rho^2}\,\rho\,d\theta\,d\rho$$

Jacobiano.

$$\int_1^2 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \rho^2\cos\theta \cdot sen^2\theta\, d\theta \right) d\rho = \int_1^2 \rho^2 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \cos\theta \cdot sen^2\theta\, d\theta \right) d\rho =$$

$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 \cdot \left[\frac{sen^3\theta}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right] \cdot \left[\frac{sen^3\frac{5}{4}\pi}{3} - \frac{sen^3\frac{\pi}{4}}{3}\right] =$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \frac{sen^3\frac{5}{4}\pi}{3}\right] =$$

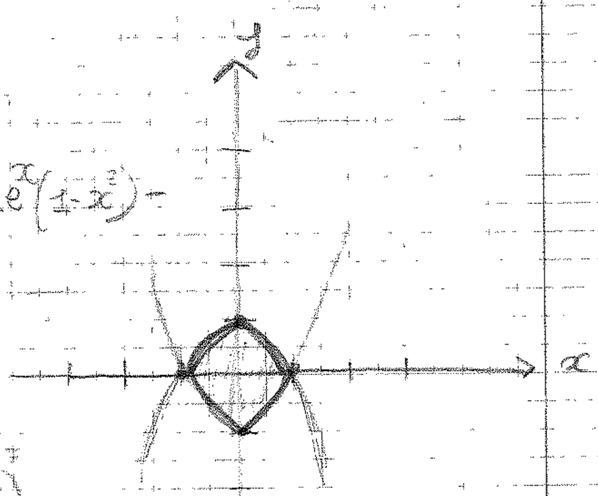
$$= \int_{2}^{-2} \cosh(u)\,\frac{1}{4}\,du = \frac{1}{4}\int_{2}^{-2}\cosh(u)\,du \cdot \int_{2}^{-2} dv =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\operatorname{senh}(u)\right]_{2}^{-2} \cdot (-4) = -\left(\operatorname{senh}(-2) - \operatorname{senh}(2)\right) =$$

$$= -\left[\operatorname{senh}(-2) + \operatorname{senh}(2)\right]$$

1° $\iint_D (3y+e^x)\,dx\,dy$; $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-1 \le y \le 1-x^2\}$

$$\int_{1}^{-1}\left(\int_{x^2-1}^{1-x^2}(3y+e^x)\,dy\right)dx =$$



$$= \frac{3}{2}y^2 + e^x y\Big|_{x^2-1}^{1+x^2} = \frac{3}{2}(1+\cancel{x^4}-2x^2) + e^x(1-x^2) -$$

$$- \left[\frac{3}{2}(\cancel{x^4}+1-2x^2) + e^x(x^2-1)\right] =$$

$$= e^x - e^x x^2 - e^x x^2 + e^x = 2e^x - 2e^x x^2 =$$
$$e^x(2-2x^2)$$

$$\int_{1}^{-1} e^x(2-2x^2)\,dx = -2e^x(x-1)^2\Big|_{1}^{-1} = -2e^{-1}(-2)^2 = -8e^{-1}$$

- ESERCIZIO

$$\iiint_D z^2\,dx\,dy\,dz \to D: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mathbin{//} x^2+y^2+z^2 \le 1\}$$

Il dominio sarà quindi compreso tra i piani $z=-1$ e $z=1$.

$I = \int_1^{-1} \left(\iint_{A_z} z^2\,dx\,dy \right) dz$, dobbiamo ancora definire quale sia A_z; le sezioni saranno tutte cerchi tagliati con piani che cambiano di quota in base a z. Quindi: $A_z: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mathbin{//} x^2+y^2 \le 1-z^2\}$

- Risolviamo l'integrale interno:

$$\iint_{A_z} z^2\,dx\,dy = z^2 \underbrace{\iint dx\,dy}_{} = \underline{z^2 \cdot \pi \left(1-z^2\right)^2} \to \text{area cerchio.}$$

Sappiamo che troveremo l'area del cerchio tagliato, quindi sapendo il raggio, la risolviamo.

$$\int_1^{-1} z^2 \pi (1-z^2)\,dz = \pi \int_1^{-1} z^2(1+z^2) = \pi \left[\frac{1}{3} z^3 - \frac{z^5}{5} \right]_1^{-1} = \frac{4}{15}\pi$$

- COORDINATE del baricentro del solido D di densità uniforme.

$$x_G = \frac{1}{Vol(D)} \iiint_D x\,dx\,dy\,dz$$

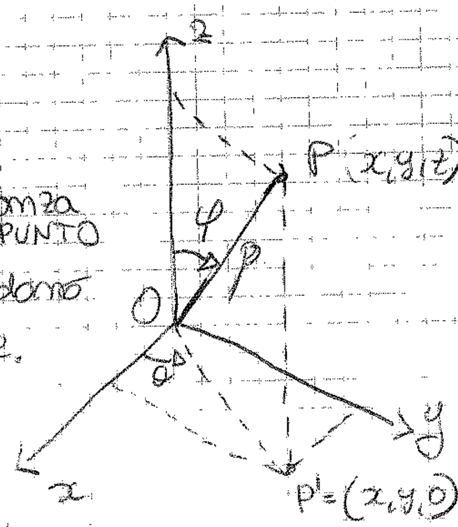
$$y_G = \frac{1}{(Vol)D} \iiint_D y\,dx\,dy\,dz$$

$$z_G = \frac{1}{Vol(D)} \iiint_D z\,dx\,dy\,dz$$

- coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = \cos\varphi \end{cases}$$

in cui la distanza DEL PUNTO



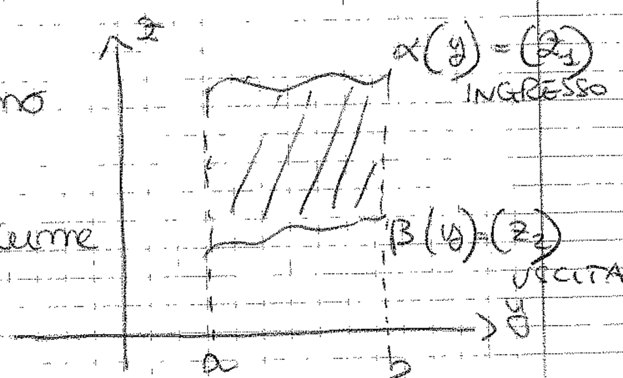
Utile per domini che dipendono dalla distanza dall'origine.

$Det(J) = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$

con $\varphi \in [0, \pi]$
$\theta \in [0, 2\pi]$
$\rho \in [0, +\infty)$

- SOLIDI DI ROTAZIONE

consideriamo una rotazione attorno all'asse z della regione piana delimitata da due funzioni (α, β), la regione appartiene al piano yz.



- Possiamo calcolarne il volume con l'integrale triplo per FILI. Entriamo dalla superficie definita da α, e usciamo da β, il tutto nelle coordinate z corrispondenti.

$$\text{Volume} = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \left(\iint_{\alpha(\sqrt{x^2+y^2})}^{\beta(\sqrt{x^2+y^2})} dz \right) dx\,dy.$$

- Si esegue il cambiamento di coordinate poiché si ottiene una corona circolare.

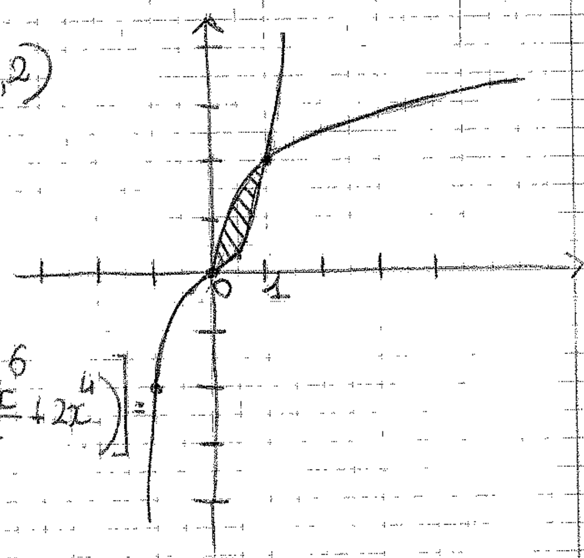
$0 \le \theta \le 2\pi, \quad a \le \rho \le b$

* ESERCIZIO

3

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy \Rightarrow D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^3 \le y \le 2\sqrt{x} \right\}$$

Intersezione in $(0,0)$ e $(1,2)$



$$\int_0^1 \left(\int_{2x^3}^{2\sqrt{x}} (x+y)\,dy \right) dx =$$

$$= \left[\frac{y^2}{2} + yx \right]_{2x^3}^{2\sqrt{x}} = \left[\frac{4x}{2} + 2x\sqrt{x} - \left(\frac{4x^6}{2} + 2x^4 \right) \right] =$$

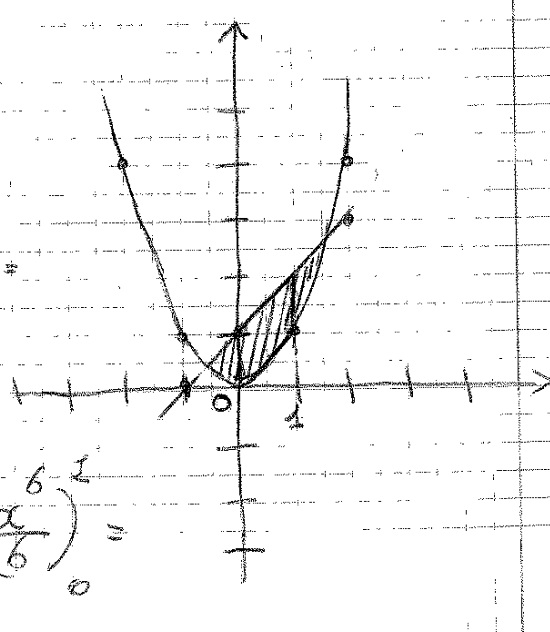
$$= 2x + 2x\sqrt{x} - 2x^6 - 2x^4 =$$

$$\int_0^1 2x + 2x\sqrt{x} - 2x^6 - 2x^4\,dx = \left[x^2 \right]_0^1 + 2\left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 - 2\left[\frac{x^7}{7} \right]_0^1 - 2\left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 =$$

$$= 1 + 2\left(\frac{2}{5} \right) - \frac{2}{7} - \frac{1}{10} = 1 + \frac{4}{5} - \frac{2}{7} - \frac{2}{5} = \frac{35 + 28 - 10 - 14}{35} = \frac{39}{35}$$

4

$$\iint_D (xy)\,dx\,dy \rightarrow D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1+x \right\}$$



$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{1+x} xy\,dy \right) dx =$$

$$= \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{x^2}^{1+x} = \frac{x}{2}\left(1 + x^2 + 2x \right) - \frac{x^5}{2} =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{x^5}{2} = \frac{x + x^3 + 2x^2 - x^5}{2}$$

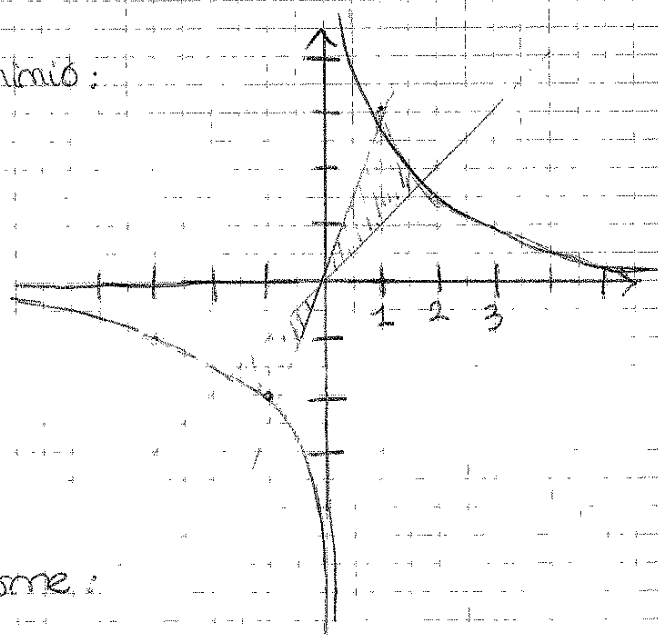
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} \right)_0^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} \right)_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{6} \right)_0^1 =$$

9) $\displaystyle\iint_D x^2 e^{xy}\,dx\,dy \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,//\, x\le y\le 3x \,;\, xy<3\}$

- Condizioni del dominio:

$y<\frac{3}{x}$

$1\le \frac{y}{x}\le 3$



$\left.\begin{array}{l}\frac{y}{x}=1\\[2ex] \frac{y}{x}=3\end{array}\right\}$ CONDIZIONI LIMITE

trovo le x di intersezione:

$\begin{cases} y=\frac{3}{x}\\ y=3x\end{cases}$ → Intersezione per $x=1$

$\begin{cases} y=\frac{3}{x}\\ y=x\end{cases}$ → Intersezione per $x=\sqrt{3}$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\left(\int_x^{3x} x^2 e^{xy}\,dy\right)dx$$

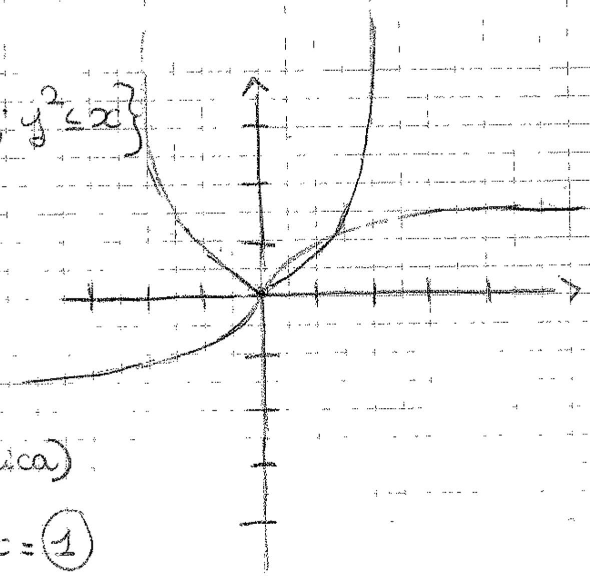
$$\int_1^{\sqrt{3}} x^2\left(\int_x^{3x} e^{xy}\,dy\right)dx = \left[\frac{e^{xy}}{x}\right]_x^{3x} = \frac{e^{3x^2}}{3x}-\frac{e^{x^2}}{x} = \frac{e^{3x^2}-3e^{x^2}}{3x}$$

$$=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2e^{3x^2}-x^2 3e^{x^2}}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{3}} xe^{3x^2} - \int_1^{\sqrt{3}} xe^{x^2} = \frac{1}{6}\int_1^{\sqrt{3}} xe^{3x^2} - \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} xe^{x^2} =$$

$$=\frac{1}{6}\left(e^{3x^2}\right)_1^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right)_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\left[e^9-e^3\right]-\frac{1}{2}\left(e^3-e\right) = \frac{1}{6}e^9-\frac{1}{6}e^3-\frac{1}{2}e^3+\frac{1}{2}e =$$

$$=\frac{e^9-e^3-3e^3+3e}{6} = \frac{e^9-4e^3+3e}{6}$$

(11) $\iint_D y^2\,dxdy \rightarrow D:\{x^2 \le y ; y^2 \le x\}$



$\begin{cases} y \ge x^2 \\ y \le \sqrt{x} \vee y \ge \sqrt{x} \end{cases}$

$\frac{3}{2}+c \quad \frac{3+2}{2}$

- Prima intersezione (unica)

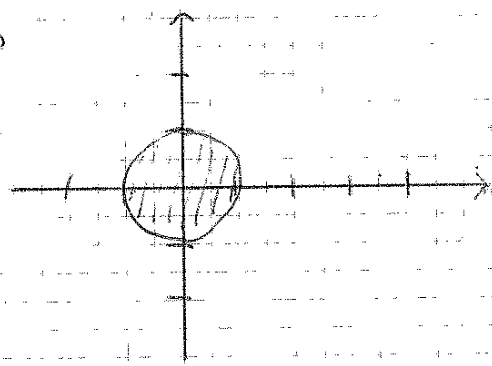
$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \rightarrow x^2 = \sqrt{x} \rightarrow x = 1$

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2\,dy \right) dx = \left[\frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^6}{3} = \int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^6}{3}\,dx =$$

$$= \left[\frac{2}{15} x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^7}{21} \right]_0^1 = \frac{2}{15} - \frac{1}{21} = \frac{14-5}{105} = \frac{9}{105} = \frac{3}{35}$$

(12) $\iint |xy|\,dxdy \rightarrow D: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$

- cambiamento di coordinate, in polari.



$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\theta \end{cases}$

$0 \le \rho \le 1$

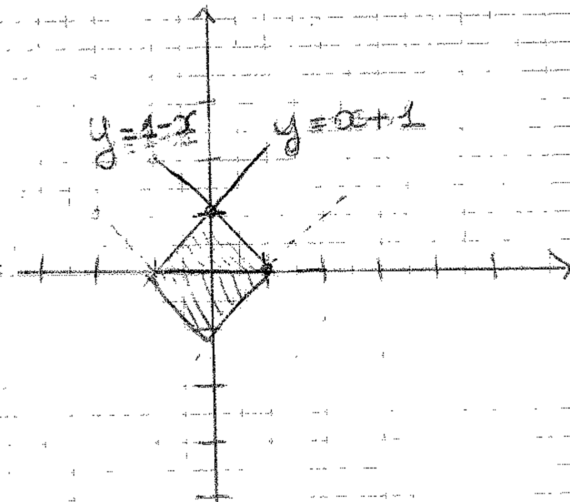
$0 \le 2\pi \le$

$$\int_{2\pi}^{0} \left(\int_0^1 |\rho^2 \cos\theta\,\text{sen}\theta|\,d\theta \right) \rho\,d\rho = \int_{2\pi}^{0} \rho^3 \cdot \left(\int_0^1 |\cos\theta\,\text{sen}\theta|\,d\theta \right) d\rho =$$

$$= \int_0^1 \rho^3\,d\rho \cdot \int_{2\pi}^{0} |\cos\theta\,\text{sen}\theta|\,d\theta = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \cdot \frac{1}{2} \left[\text{sen}^2\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

14) $\iint_D x^2y^2\,dx\,dy \qquad D: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y| \le 1\}$

$|y| \le 1-|x|$



- Va spezzato in due integrali

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{1+x} x^2y^2\,dy\right)dx + \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1+x} x^2y^2\,dy\right)dx =$$

- Primo integrale:

$$\int_{-1}^{0} x^2\left(\int_{0}^{1+x} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x^2\left(\frac{(1+x)^3}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} x^2(1+x)^3\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} x^2(1+x^3+3x^2+3x)\,dx$$

$$\frac{1}{3}\int_{-1}^{0} x^2+x^5+3x^4+3x^3\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}+\frac{3}{5}x^5+\frac{3}{4}x^4\right]_{-1}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{-40+20-14+90}{120}\right) = \frac{7}{45}$$

- Secondo integrale

$$\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1-x} x^2y^2\,dy\right)dx = \int_{0}^{1} x^2\left(\int_{0}^{1-x} y^2\,dy\right)dx = \int_{0}^{1} x^2\left(\frac{1-x^3+3x^2-3x}{3}\right)dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{x^2-x^5+3x^4-3x^3}{3}\,dx = \left[\frac{x^3}{9}-\frac{x^6}{18}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{20-10+36-45}{180} =$$

$$= \frac{1}{180} \longrightarrow \frac{29}{180}$$

- RICHIAMI SULLE CURVE

Curva su $\mathbb{R}^m$, $\gamma\,[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Data $t \in [a,b]$, $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots x_m(t))$

è la curva γ. Ha le seguenti caratteristiche:

- di classe C^1
- sia semplice (cioè iniettiva, ovvero $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$)

SOSTEGNO DELLA CURVA

$\gamma([a,b]) \in \mathbb{R}^m$ è l'immagine della curva.

ESEMPIO:

- $\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t \\ y = y_0 + \alpha_2 t \\ z = z_0 + \alpha_3 t \end{cases}$ È una retta passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. È una CURVA PIANA

CURVA SOSTEGNO

- $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\,t \\ z = ct \end{cases}$ È un'elica, non è piana

- $\left.\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen}\,t \end{cases}\right\} \gamma_1$, $t \in [0, 6\pi]$; $\left.\begin{cases} x = \cos \omega t \\ y = \text{sen}\,\omega t \end{cases}\right\} \gamma_2$, $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$ Sono curve diverse, ma hanno lo stesso sostegno.

- $y = f(x)$

$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$

$$\int_\gamma x^2 y \, ds = \int_0^\pi 4\cos^2 t \cdot 2\operatorname{sen} t \, \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^\pi 4\cos^2 t \cdot 2\operatorname{sen} t =$$

$$\gamma' \begin{cases} -2\operatorname{sen} t = x \\ 2\cos t = y \end{cases} \rightarrow \|\gamma'(t)\| = 2 \quad \left(\sqrt{(2\operatorname{sen} t)^2 + (2\cos t)^2}\right)$$

$$= \int_0^\pi 4\cos^2 t \cdot 2\operatorname{sen} t \cdot 2 \, dt = 16\left[\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_0^\pi = 16\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

- Il punto fondamentale è la PARAMETRIZZAZIONE della curva.

- Massa e baricentro
- Consideriamo un filo disposto lungo una curva, con densità lineare di massa $\sigma = \sigma(x,y,z)$

MASSA TOTALE = $m = \int_\gamma \sigma(x,y,z)\, ds$

BARICENTRO

$$x_G = \frac{1}{m}\int_\gamma x\,\sigma(x,y,z)\,ds$$

$$y_G = \frac{1}{m}\int_\gamma y\,\sigma(x,y,z)\,ds$$

$$z_G = \frac{1}{m}\int_\gamma z\,\sigma(x,y,z)\,ds$$

- ESEMPIO: supponiamo di avere due masse uguali m distribuite uniformemente. Dividiamo due casi:
  - su un filo disposto lungo una semicirc. di raggio r.
  - su una lamina piana che occupa un semicerchio di raggio r.

$$= \frac{2}{\pi R^2} \int_\pi^0 \left(\int_0^R \rho^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\rho \right) = \frac{2}{\pi R^2} \int_\pi^0 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \cdot \int_R^0 \rho^2 d\rho = \frac{2}{\pi R^2} \Big[\cos\theta\Big]_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} R^3 = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$$ → è più vicino all'origine del baricentro della linea.

- ESERCIZI SU INTEGRALI TRIPLI

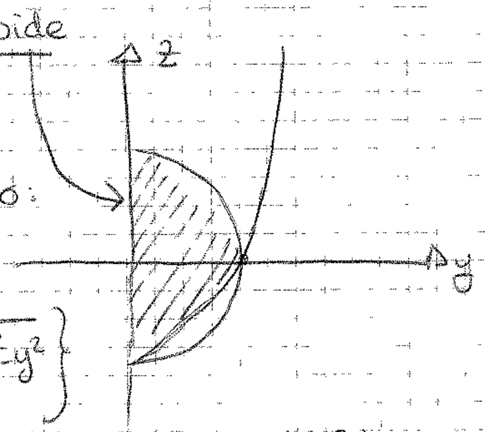
$$\iiint_D z \, dx\, dy\, dz \qquad D = \left\{ x^2+y^2+z^2 = 1, \quad z = x^2+y^2-1 \right\}$$

è una sfera con dentro un paraboloide

- Quindi si interseca con la parabola all'equatore, dove c'è il punto di uscita.

Scriviamo meglio il dominio:

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, \; x^2+y^2-1 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \right\}$$



Conviene usare le CILINDRICHE per un cambio di coordinate.

$$D' = \left\{ \rho \in [0,1], \theta \in [0, 2\pi], \; \rho^2-1 \leq z \leq \sqrt{1-\rho^2} \right\}$$, e

integriamo per FILI paralleli all'asse z.

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\int_{\rho^2-1}^{\sqrt{1-\rho^2}} z\, dz \right) \rho \, d\rho\, d\theta$$

← determinante della Jacobiana

$$D_1 = \iint_{D_1} \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \cdot \rho \, d\theta \, d\rho = \iint_{D_1} \rho \, d\theta \, d\rho = \int_0^1 \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta =$$

$$\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \cdot \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{3}\right] \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}. \quad TOT = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi 4 + 6\pi}{24} = \frac{10}{24}\pi = \frac{5}{12}\pi$$

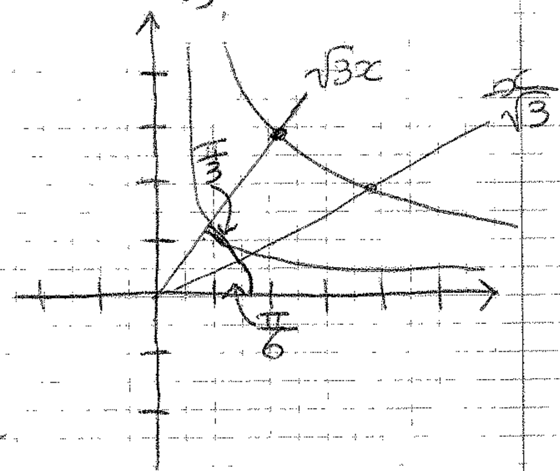
24)

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} \, dx \, dy \qquad D : \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,//\, 0 \le \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x \right.$$

$$1 \le xy \le 4 \quad \begin{cases} 1 = xy \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$xy = 4$

$x = \frac{4}{y}$



- cambiamento di coordinate

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

$1 \le \rho\sin\theta \, \rho\cos\theta \le 4 \Rightarrow 1 \le \rho^2 \sin\theta\cos\theta \le 4$

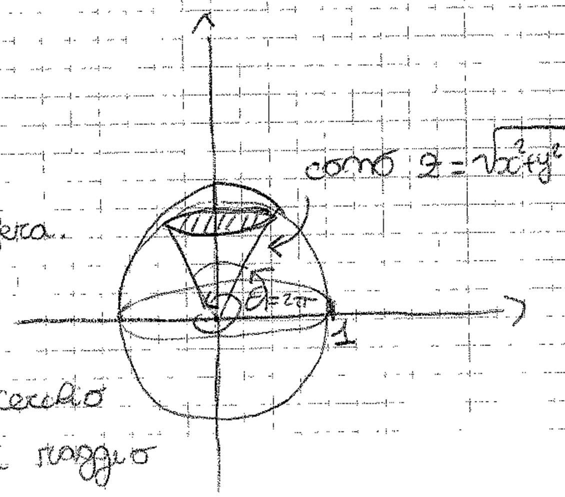
- Poiché $\sin\theta$ e $\cos\theta$ sono > 0 per gli angoli, possiamo dividere per $\sin\theta\cos\theta$: $\frac{1}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} \le \rho \le \frac{2}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}$ (estratta la radice).

$$D' : \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \,//\, \frac{1}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} \le \rho \le \frac{2}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}, \ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}} \frac{\rho^2 \sin\theta\cos\theta}{\rho^2} \cdot \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\cos\theta \, d\theta \cdot \int_{\frac{1}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}} \rho \, d\rho =$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\left[\cos^3\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \left[\frac{\rho^2}{2}\right] = \left(\rho\right.} = \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{3}{2}\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \dots$$

L'equazione della sfera è
$x^2+y^2+z^2=1$, il cono è
$z^2=x^2+y^2$
si mette il cono nell'eq della sfera.
$2z^2=1 \Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt{2}}$



- Ora vedo che si forma un cerchio dove c'è la base del cono, di raggio
$R=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, o $\frac{1}{2}$

$x=\rho\,\text{sen}\varphi\cos\theta$
$y=\rho\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta$
$z=\rho\cos\varphi$

$0\le\theta\le 2\pi$
$0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ è l'ampiezza del cono, φ è l'angolo di rotazione intorno all'asse z.
$0\le\rho\le 1$

- Ora faccio l'integrale.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \rho^2\,\text{sen}^2\varphi\cos^2\theta\cdot\rho^2\,\text{sen}\varphi\;d\rho\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\text{sen}^3\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}\rho^4\,d\rho=\left[\frac{\theta+\text{sen}\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}}\cdot\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{1}{3}\frac{2\sqrt{2}}{8}\right.$$

$$=\pi\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5}\cdot\left[-\right]$$

- INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE

È l'integrale di un campo lungo una curva.

- CAMPO VETTORIALE: supponiamo un dominio in $\mathbb{R}^3$, un campo vettoriale è una funzione $F: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Per rappresentarlo usiamo le linee di flusso, che hanno la proprietà di rappresentare il campo tramite il vettore tangente alla curva.

- Ad esempio il CAMPO ELETTRICO $E: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da $E(x,y) = \left(\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}, \frac{2y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} \right)$.

- Data una curva $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ e dato un campo $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, supponiamo che il campo sia continuo sul sostegno di γ. $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $F = F(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

- Definiamo così l'integrale delle condizioni poste:

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot T \, ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \qquad T = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}}$$

Questo è l'integrale "lungo γ" del campo F.

- CONSIDERAZIONI:

$F(x,y,z) = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))$

$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$

$F \cdot T$ rappresenta il lavoro fatto da F per spostare un punto lungo la curva γ.

$$= \frac{1}{2} m \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\dot{x}(t)^2 \right) dt = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}(t)^2 \right]_a^b = \boxed{\frac{1}{2} m \left(\overbrace{\dot{x}(b)}^{=v^2} \right)^2 - \frac{1}{2} m \left(\dot{x}(a) \right)^2}$$

Troviamo il teorema delle forze vive, ovvero variazione dell'energia cinetica.

- Esiste anche una scrittura alternativa per l'integrale curvilineo.

$$\int_\gamma X dx + Y dy + Z dz \quad \text{FORMA DIFFERENZIALE}$$

$$X(x,y,z)x'(t) \qquad Y(x,y,z)y'(t) \qquad Z(x,y,z)z'(t)$$

- Avendo la parametrizzazione, ne consegue che la sostituzione avviene così:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx = x'(t)dt \\ dy = y'(t)dt \\ dz = z'(t)dt \end{matrix}$$

[* N.B, una CURVA REGOLARE, ha SEMPRE $\gamma'(t) \neq \vec{0}$!]

- CONSIDERAZIONE:

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \|\gamma'(t)\| dt \Rightarrow \text{PRIMA SPECIE}$$

$$\int_\gamma F T ds = \int_a^b F(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \cdot \gamma'(t) dt \Rightarrow \text{SECONDA SPECIE}$$

- Il primo integra una funzione f, il secondo un CAMPO. Entrambi gli integrali NON DIPENDONO dalla rappresentazione parametrica, ma dal SOSTEGNO DELLA CURVA.
- Inoltre se nel primo integrale CAMBIAMO COORDINATE, non succede nulla, ma nel secondo, poiché abbiamo un vettore tangente con un'orientazione, il risultato non cambia SOLO SE non cambia l'orientamento del γ' nelle nuove variabili rispetto alle vecchie.

- TEOREMA

Sia $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, C^1, sono equivalenti le condizioni:

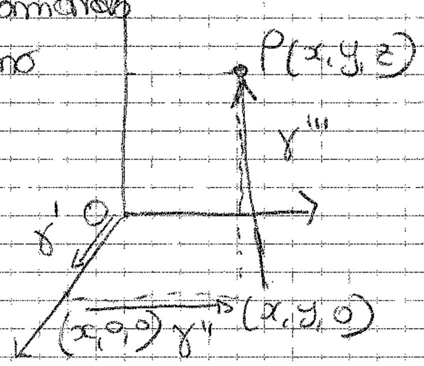
- Il campo F è CONSERVATIVO
- L'integrale di seconda specie NON DIPENDE DAL CAMMINO, calcolato su due curve diverse γ_1 e γ_2, con gli stessi punti di partenza e arrivo.
- Data una curva γ chiusa e contenuta in A, l'integrale chiuso vale 0. $\oint_\gamma F \cdot T \, ds = 0$

- ESEMPIO

$F(x,y,z) = (2xyz, \, x^2 \overset{sen}{\gamma} sen z, \, x^2 y \cos z)$

Supponiamo che sia conservativo, verifichiamo le condizioni.

- Possiamo scegliere il cammino che vogliamo, quindi ci muoviamo paralleli ai piani, chiamando con vari "γ" i tragitti che compongono il totale.



- Dalla proprietà dell'energia potenziale abbiamo che:

$u(x,y,z) - u(0,0,0) = \int_\gamma F \cdot T \, ds$

- Parametrizziamo la curva: $\gamma_1 \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \to \gamma_1'(1,0,0)$

Lungo γ_1, $\int_0^x F(x,y,z) \cdot \gamma_1' = \int_0^x 0 \, dt = 0$, per il p. scalare

- $\gamma_2 \begin{cases} x = x \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$, $t\,[0,y] \to \gamma_2'(0,1,0)$. Lungo γ_2, $\int_0^y x^2 sen z \cdot 1 = 0$

sempre perché avremo sen z, e $z = 0$

- Questo perché: se un campo è conservativo, $F = \nabla u$, con u di classe C^2, quindi

$\partial_x u = F_x$, $\partial_y u = F_y$, $\partial_z u = F_z$, e

$\partial_y F_1 = \partial_y(\partial_x u)_p = \partial_x(\partial_y u) = \partial_x F_2$

↑ tutto dal calcolo del rotore.

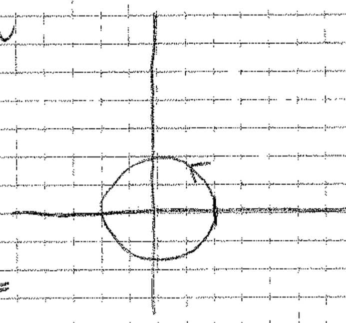
- ESEMPIO

$F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, è IRROTAZIONALE, infatti

$$\partial_y\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

- Dimostriamo che NON è CONSERVATIVO, come caso particolare:

Calcoliamo l'integrale curvilineo sulla circonferenza:



$$\oint_\gamma F \cdot T \, ds = \qquad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t)(\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\,dt =$$

$= 2\pi \neq 0 \Rightarrow$ quindi la circuitazione NON è NULLA, e non è quindi conservativo.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{QUINDI L'IRROTAZIONALITÀ NON È SUFFICIENTE A} \\ \text{GARANTIRE LA CONSERVATIVITÀ.} \end{array} \right\}$

↓

Perché questa condizione sia invece SUFFICIENTE, dobbiamo avere un dominio fatto in un dato modo:

IRROTAZIONALITÀ E CONSERVATIVITÀ IN $\mathbb{R}^3$

- Per $\mathbb{R}^3$, esistono condizioni per il dominio che garantiscono la conservatività dell'irrotazionalità? Sì, anche qui esiste la condizione.

- Torniamo un attimo in $\mathbb{R}^2$: si può dire che la condizione necessaria sia che il dominio sia CONTRAIBILE in un punto. Questa è un'altra definizione per DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO.

Nello spazio, diventa:

A sia tale che ogni curva chiusa γ contenuta in $A \subseteq \mathbb{R}^3$, è contraibile in un punto rimanendo sempre all'interno di A.

- Verificata questa condizione per $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con A irrotazionale, F è CONSERVATIVO.

- QUESTO PERCHÉ NELLO SPAZIO, LA CONDIZIONE DEL "NON AVERE BUCHI", NON È PIÙ SUFFICIENTE, VALE SOLO NEL PIANO!

- Ad esempio una sfera a cui si tolga dentro una sferetta, è ancora SEMPLICEMENTE CONNESSO.

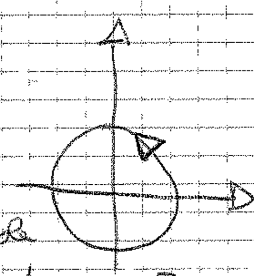
- IRROTAZIONALITÀ E CONSERVATIVITÀ IN $\mathbb{R}$

Per una semplice $f(x)$, basta che essa sia CONTINUA nel suo dominio. A questo punto, $U(x) = F(x)$

— ESERCIZIO

$I = \oint_\gamma (\operatorname{sen} x + y)\,dx + (-3x + e^y)\,dy$

$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;//\; x^2+y^2 \leq 4\}$



- Proviamo a usare Gauss Green per passare dall'integrale curvilineo a quello doppio: $\partial_x F_2 = -3 \quad \partial_y F_1 = 1$

$I = \iint_D (-3-1)\,dx\,dy = -4 \iint_D dx\,dy \rightarrow \iint = (\pi 4)(-4) = -16\pi$

area del dominio.

— CONSEGUENZE DI GAUSS GREEN

- D è ammissibile per G.G., allora:

$F = (-y, 0)$, facciamone le derivate: $\partial_y F_1 = -1$, $\partial_x F_2 = 0$

$$\iint_D 1\,dx\,dy = \underbrace{\boxed{\int_D dx\,dy = \int_{\partial D} -y\,dx}}_{\text{forma differenziale del teorema di Gauss Green}}$$

- Il teorema quindi ci lega un calcolo di area attraverso l'integrale curvilineo, con l'integrale semplice.

- Oppure se $F = (0, x)$, $\partial_y F_1 = 0$, $\partial_x F_2 = 1 \rightarrow \iint_D dx\,dy = \int_{\partial D} x\,dy$,

ne risulta la formula finale come somma dell'integrale in x e y: $\boxed{\iint_D dx\,dy = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x\,dy - y\,dx}$

INTEGRALI DI SUPERFICIE

- Superfici parametriche

$D \subset \mathbb{R}^2$, $\sigma \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, continua in D

$u, v \subset \mathbb{R}^2 \in D$, $\sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

Quindi u e v sono parametri di σ.

- $\Sigma = \sigma(D) \subset \mathbb{R}^3 \to$ è l'immagine o sostegno della superficie Σ.

- Ad esempio una superficie piana

$$D: \begin{cases} x = u \\ y = v \end{cases} \quad (u,v) \in D$$

è una superficie cartesiana, in cui la parametrizzazione è

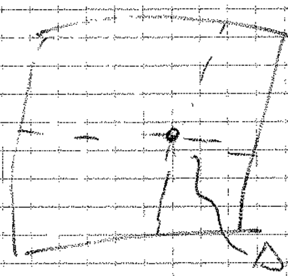
$$g(x,y) \quad \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u,v) \end{cases}$$

- Si dice SEMPLICE se è INIETTIVA

ESEMPIO

$$u = u_0 \quad \boxed{\begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \\ z = z(u_0, v) \end{cases}}$$

$$v = v_0 \quad \boxed{\begin{cases} x = x(u_0, v_0) \\ y = y(u, v_0) \\ z = z(u, v_0) \end{cases}}$$



$\to \sigma(u_0, v_0)$

- Queste due curve hanno vettori tangenti:

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \quad \gamma_2 : \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$$

$\to$ [illegible]

- Il modulo è: $\boxed{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}$

- Quindi la norma sarà la radice di 1 + modulo del gradiente di f^2

- Il piano tangente nel punto $P_0(u_0, v_0)$

$$(-\partial f_u)(u_0,v_0)(x-x_0) - (\partial f_v)(u_0,v_0)(y-y_0) + z - f(u_0,v_0) = 0$$

$$\downarrow$$

$$f(u_0,v_0) + \partial f_u(u_0,v_0)(x-x_0) + \partial f_v(u_0,v_0)(y-y_0) = z$$

- Integrale di superficie di prima specie

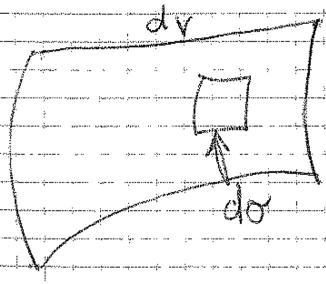
- ci serve una superficie σ regolare, $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

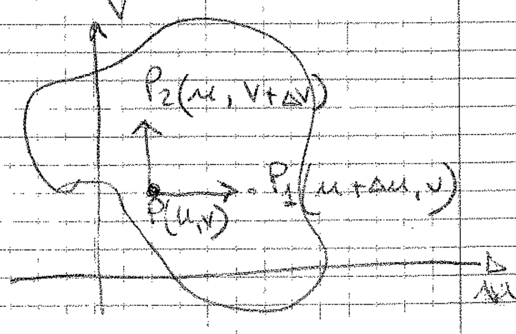
$$\sigma = \begin{cases} x = x(u_0, v_0) \\ y = y(u_0, v_0) \\ z = z(u_0, v_0) \end{cases}$$

f continua in $\Sigma = \sigma(D)$

$$\iint_\Sigma f\,d\sigma = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \underbrace{\|N(u,v)\|\,du\,dv}_{\substack{\text{elemento di superficie} \\ = d\sigma}}$$

- Quindi qui l'integrale è DOPPIO, ma la funzione integranda è sempre data dall'immagine della parametrizzazione.





- ci servono i vettori tangenti

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}\left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right)$$

- il vettore normale:

$$N(u,v) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\frac{u}{\sqrt{R^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{R^2}} \end{pmatrix} = \frac{u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} - \left(\frac{v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right)^{4} + 1$$

$$= \text{modulo di } N = \sqrt{\frac{u^2}{R^2-u^2-v^2} + \frac{v^2}{R^2-u^2-v^2} + 1} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2-u^2-v^2}} =$$

$$= \frac{R}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}$$

- ora possiamo scrivere il baricentro

$$z = \frac{1}{\iint_\Sigma d\sigma} \cdot \iint_D z\, d\sigma = \frac{1}{2\pi R^2} \iint_D \cancel{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \cdot \frac{R}{\cancel{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}}\, du\, dv =$$

$\iint_\Sigma d\sigma = 2\pi R^2$, ~~area~~ superficie di una semisfera

$$= \frac{1}{2\pi R^2} \iint_D R\, du\, dv = \frac{1}{2\pi R} \underbrace{\iint_D du\, dv}_{\text{area del dominio, quindi } \pi R^2 \text{ (cerchio)}} = \frac{R}{2}$$

scalare ci dà una misura della variazione del flusso, poiché quando vettore normale e superficie saranno $\perp$, l'integrale sarà uguale a 0, mentre se sono $//$, avrà valore massimo.

- ESEMPIO

$F(x,y,z) = (\cos(xz), xy, z)$

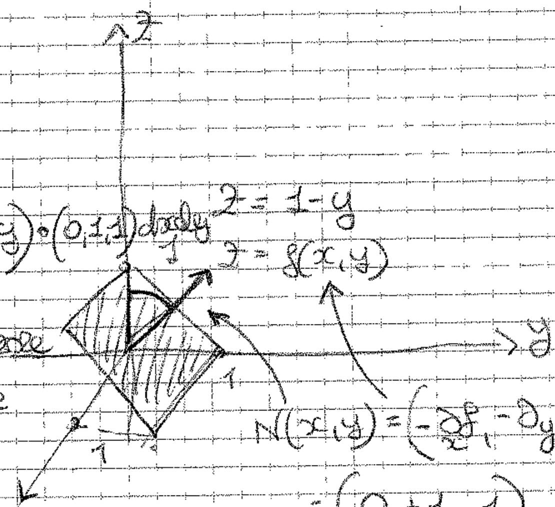
Flusso di F attraverso la superficie data dalla parte di piano di equazione $z = 1-y$, al variare di $0<x<1$, $0<y<1$ e con la normale $n \cdot k > 0$ (angolo acuto)

↑ versore di asse z.

$$\iint_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \iint_D (\cos(x(1-y)), xy, 1-y) \cdot (0,1,1) \, dxdy$$

$z = 1-y$

$z = f(x,y)$



- Quindi dobbiamo parametrizzare z in modo che sparisca e quindi l'integrale doppio resti in solo x e y, quando il campo passa per la superficie

$N(x,y) = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1) = (0, +1, 1)$

$$I = \iint_D xy + 1 - y \, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy + 1 - y \, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2}x^2 y + x - xy \right]_0^1 \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}y + 1 - y \, dy = \left[\frac{1}{4}y^2 + y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1+4-2}{4} = \frac{3}{4}$$

FLUSSOOO

definita dal bordo di Σ. Quindi:

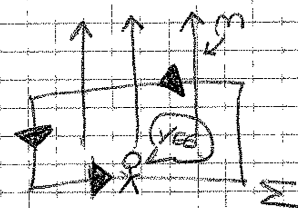
$$\int_{\partial\Sigma} F\cdot T\, ds = \iint_{\Sigma} \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma$$

ci permette di passare da un integrale doppio a uno curvilineo.

(circuitazione sul bordo della curva σ)

Il LAVORO del campo lungo la curva è uguale al FLUSSO del rotore di F attraverso essa (Σ)

- Il verso di percorrenza del $\partial\Sigma$ e la normale n sono scelte in modo che un osservatore che percorre il bordo di Σ disposto lungo la normale, vede Σ sempre sulla sinistra.



- Ragionamenti su Stokes: Esaminiamo il caso piano, su $\mathbb{R}^2$. Il termine di destra di Stokes è $\iint_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\,dx\,dy$ mentre quello a sinistra: $\int_{\partial D} F\cdot T\, ds$, quindi l'uguaglianza tra le espressioni, sul PIANO, è proprio Gauss-Green!!
- Il T. di GG e di Stokes (su $\mathbb{R}^3$), lega un integrale doppio, fatto di derivate parziali, sulla destra (in Stokes infatti un ROTORE, in GG derivate parziali), e sulla sinistra, un integrale dello stesso oggetto lungo il bordo di una curva parametrizzata.
- Il Teorema fondamentale del calcolo integrale, dice che $\int_A^B fx = F(B) - F(A)$, cosa che succede anche in questi due teoremi, ma con superfici o figure piane. La differenza è che nel T. fondamentale avevamo cose definite su un intervallo, in Stokes o GG, estremi di superfici piane o non.

TEOREMA DI GAUSS, O DELLA DIVERGENZA.

- Si dice divergenza di un campo vettoriale F:

$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$, di classe C_1 in un aperto di $\mathbb{R}^3$,

$$\boxed{div(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)},$$

la come risultato uno SCALARE da un campo (a differenza del ROTORE, che dava un vettore).

- Si può anche dire $\boxed{div(F) = \nabla \cdot (F)}$, poiché moltiplichiamo il gradiente (tutte le derivate parziali), calcolato nei punti del campo F. Ricordiamo che $\boxed{ROT(F) = \nabla \times F}$

- ALGEBRA DEL ROTORE

- Vero e proprio teorema!

Ipotesi: Sia D un dominio di integrazione in $\mathbb{R}_3$, il cui bordo è costituito da un numero finito di superfici semplici; sia $F = F(x,y,z)$ un c. vettoriale di classe C_1, su un aperto che contiene D. Confrontiamo due elementi:

DIMOSTRAZIONE

- si parte dal flusso:

$$\iint_{\partial E} (g \cdot F) N_e \, d\sigma = \iiint_E \mathrm{div}(g \cdot F) \, dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_E \mathrm{div}\, g \cdot F + \mathrm{div} F \cdot g \, dx\,dy\,dz \quad \text{(dall'algebra della div)}$$

$$\boxed{\iiint_E \mathrm{div}\, g \cdot F \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial E} (g \cdot F) N_e \, d\sigma - \iiint_E \mathrm{div} F \cdot g \, dx\,dy\,dz}$$

FATTO.

SERIE NUMERICHE

una successione $a_0, a_1, a_2, a_3 \dots a_n \in \mathbb{R}$, consideriamo l'oggetto dato da $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$;

possiamo associare a questa somma, una SUCCESSIONE DELLE RIDOTTE, o SOMME PARZIALI;

$$\underbrace{S_0 = a_0}_{\text{S. PARZIALE}}, \quad \underbrace{S_1 = a_0 + a_1}_{\text{S. PARZIALE}}, \dots, \quad S_2 = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2}_{''} \dots \quad S_n = \underbrace{a_0 + a_1 + \dots a_n}_{''}$$

- se $\lim_{n \to \infty} S_n$, può essere:
  - FINITO, $S \in \mathbb{R}$, e la serie si dice CONVERGENTE, e ha per somma S. Si dice anche che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$, poiché S è il limite
  - INFINITO ($\pm\infty$), e la serie si dice DIVERGENTE (positivamente o negativamente, a seconda del segno di ∞). Si dice anche che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \ (-\infty)$
  - INDETERMINATA se il limite NON ESISTE.

!! LA CONDIZIONE NON È SUFFICIENTE !!

Infatti ad esempio $\sum_{n+1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, scriviamo le ridotte:

$s_1 = \log 2$, $s_2 = \log \frac{3}{2} + \log 2 = \log 2 + \log 3 - \log_2 = \log 3$

$s_3 = \log_2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} = \cancel{\log 3} - \cancel{\log_3} + \log_4 = \log_4$ ... quindi

$s_n = \log(n+1)$ ovvero il limite della somma a infinito

è un valore infinito $\rightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} \log(1+n) = +\infty}$

SERIE GEOMETRICA

$\sum_{n=0}^{r} r^n = 1 + r + r^2 \ldots \rightarrow = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

- CONVERGE $\sum_{n} r^n = \frac{1}{-r+1}$ per $|r| < 1$

- DIVERGE POSITIVAMENTE per $r \geq 1$

- È INDETERMINATA per $r \leq -1$, poiché ha segno oscillante.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ SERIE DI MENGOLI

$s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{1}{3 \cdot 2}$, $s_3 = \frac{1}{3 \cdot 4}$ ... $\rightarrow s_n = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \ldots \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$

$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

$= 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ (ad ∞).

$$\sum_n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \quad a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-1}$$

↑ questa serie diverge POSITIVAMENTE

- CRITERI PER SERIE A TERMINI POSITIVI

- Criterio del confronto:

$\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $\forall n$, e $a_n \leq b_n$ $\forall n$

Allora: 1. Se la serie dei b_n converge, allora converge anche a_n. 2. Se la serie degli a_n diverge positivamente, anche la serie dei b_n diverge positivamente.

DIMOSTRAZIONE

1) $S_n = a_0 + a_1 \ldots + a_n$, $T_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$

$a \leq b$, $\Rightarrow S_n \leq T_n$, $\forall n \Rightarrow \sup_n \{S_n\} \leq \sup_n \{T_n\}$

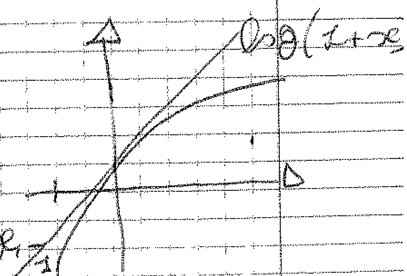
Ma $\lim_{n\to\infty} S_n = \underbrace{\sup_n \{S_n\}}_{<+\infty} \leq \lim_{n\to\infty} T_n = \underbrace{\sup_n \{T_n\}}_{<+\infty}$

Sono entrambi limiti $<+\infty$ per ipotesi, poiché sono supposte CONVERGENTI

2) Se la serie dei b_n convergesse, allora da sopra anche $\sum_n a_n$ convergerebbe, ma questa va contro l'ipotesi (la serie diverge)

ESEMPIO (SERIE ARMONICA) $\forall n \geq 1$

$\sum_n \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots$, $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \longrightarrow$



Sappiamo che la serie armonica diverge, allora anche $\frac{1}{n}$ diverge

ESEMPIO

$\sum_n \frac{1}{n} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$, nell'intorno di 0 $\operatorname{sen}(x) \sim x$, quindi in infinito, $\operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, perciò la serie $\sum_n \frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$, e converge come dimostrato.

- ESERCIZIO!

$\sum_n \left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2 \to \sim \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sim \frac{1}{n^2}$, converge

$\sum_n \frac{\log n}{n^3} \to \log n < n^\alpha$ per $n>0$ sufficientemente grande.

- Prendiamo $\alpha = \frac{1}{2}$, otteniamo $\log n < n^{\frac{1}{2}}$, $\frac{\log n}{n^3} < \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^3} =$

$= \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{1}{n^2} \to$ questa converge, dunque converge anche

si sarebbe potuto fare lasciando α, e poi determinandolo alla fine.

ESERCIZIO

$\sum_n \frac{\log^5 n}{n^{\frac{5}{2}}+\log n} \sim \frac{\log^5 n}{n^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{n^{5\alpha}}{n^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}-5\alpha}} = \frac{1}{n^{\frac{5-10\alpha}{2}}}$, diverge per

$\frac{10\alpha-5}{2} \leq 2, \to 10\alpha - 5 \leq 4 \to \boxed{\alpha \leq \frac{9}{10}}$

- CRITERIO DEL RAPPORTO

$\sum_n a_n$, $a_n > 0$ $\forall n$, supponiamo l'esistenza del limite finito $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

1. se $l < 1$, allora la serie converge
2. se $l > 1$, allora la serie diverge positivamente
3. se $l = 1$ non puoi dire niente

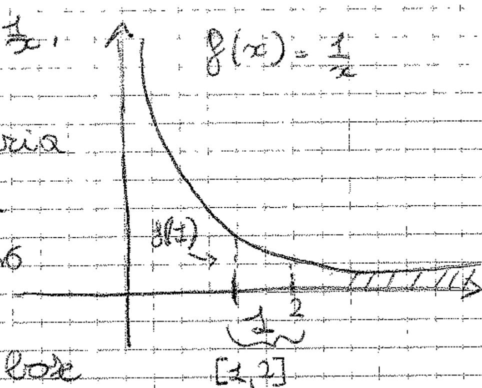
- CRITERIO INTEGRALE

Sia $f(x)$ una funzione POSITIVA, DECRESCENTE e CONTINUA in $[1,+\infty)$, possiamo considerare l'integrale improprio

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$ → hanno lo stesso carattere! se diverge uno diverge l'altro, bla bla.

SI PASSA ALL'INTEGRALE IMPROPRIO

Prendendo una $f(x)$ come $\frac{1}{x}$, l'integrale improprio considera l'area impropria infinita; le somme Σ su ogni intervallo calcolano l'area del rettangolo creato dalla serie (sotto, base e altezza del rettangolo), e dalla funzione (sopra), quindi l'integrale è "imprigionato" tra la funzione e la serie, e questo garantisce lo stesso comportamento.



ESEMPIO

$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \sum_n \frac{1}{n}$, entrambe divergono

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \rightarrow \sum_n \frac{1}{n^\alpha}$, diventa $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$, che $\begin{cases} \text{diverge per } 0 < \alpha \leq 1 \\ \text{converge per } \alpha > 1 \end{cases}$,

quindi anche $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$

ESEMPIO $\sum_{n=2} \frac{1}{n\log n} \rightarrow \sim \frac{1}{n}$, diverge

- CRITERIO DI LEIBNEIZ (serie a termini alterni!!)

$\sum_n (-1)^n b_n$, $b_n > 0$ $\forall n$, quindi in base a n pari o dispari avremo alternanza serie per serie in cui la serie dei moduli DIVERGE (quindi la serie di partenza NON CONVERGE ASSOLUTAMENTE)

se: $\begin{cases} b_{n+1} \le b_n, \ \forall n \\ b_n \to 0, \text{ per } n \to \infty \end{cases}$, ovvero INFINITESIMA e DECRESCENTE,

allora la serie CONVERGE.

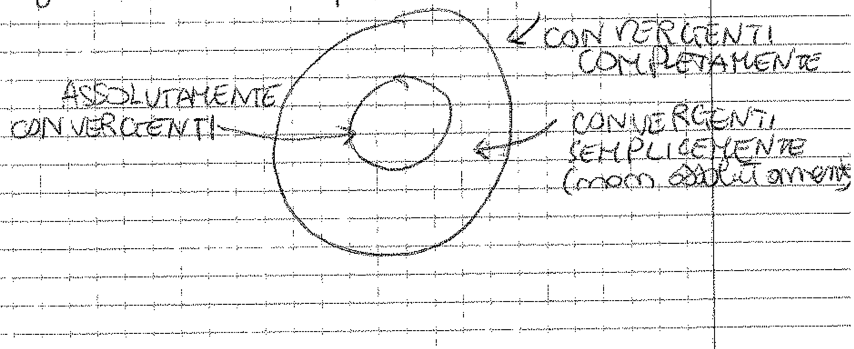
ESEMPIO

$\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$

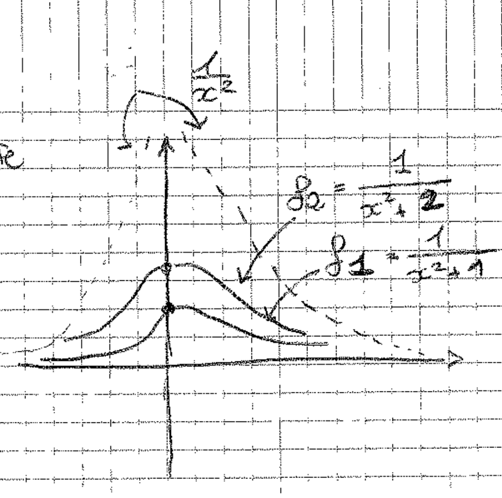
Tende a 0 per $n \to \infty$, ed è decrescente poiché $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.
Quindi per Leibniz, la serie converge.

- RIEPILOGO CONVERGENZA ASSOLUTA

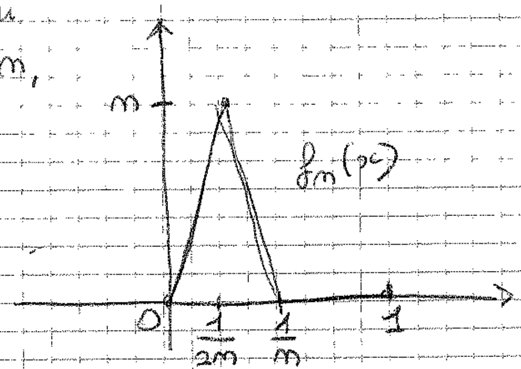
Quindi una serie può convergere semplicemente ma non assolutamente, mentre se converge assolutamente, converge anche semplicemente.



Quindi converge puntualmente a $\frac{1}{x^2}$ in tutto l'insieme A tranne in 0, quindi si è persa la limitatezza.



ESEMPIO, date le funzioni definite così per varie n,



per $x=0$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

per $x>0$:

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, perché prendendo un "n" grande, nell'intervallo $[0,1]$ delle x, $f_n(x)=0$.

$f_n(x)$ converge p. a $f(x)=0$ per $0 \le x \le 1$.

↓

$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, poiché è l'area del triangolo.

Invece $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 0 = 0$, quindi alla funzione limite $f(x)$, la funzione originale da 0 sotto integrale, quindi la convergenza è solo PUNTUALE, ovvero il limite dell'integrale è $\neq$ dall'integrale del limite.

CONVERGENZA UNIFORME

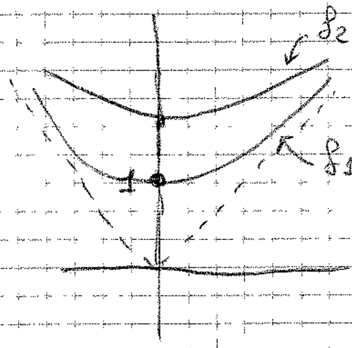
DEFINIZIONE: Data una successione di funzioni $f_n(x)$ definite in $A \subseteq \mathbb{R}$, e $f(x)$ definita in A, si dice che $f_n(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE ad f se: $\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall x \in N$, $\forall n>N$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. Qui quindi l'indice N NON DIPENDE da x, da qui UNIFORME.

ESEMPIO $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$

studiamo conv. puntuale:

$\lim_{n \to \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = |x|$, quindi converge a $|x|$ che è la funzione limite.

Disegniamo graficamente varie funzioni:



$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $\to \sqrt{x^2+1}$ per $n=1$

$\sqrt{x^2+2}$ per $n=2$

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f_n| = \sqrt{\frac{1}{n}}$, poiché dal grafico la distanza minima tra le due funzioni è in $x=0$, $= \sqrt{\frac{1}{n}}$

Perciò $\lim_{n \to \infty} \sup |f_n(x) - f_n| = \sqrt{\frac{1}{n}}$, ovvero 0. Perciò converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE:

Data $f_n(x) \to f(x)$ converge uniformemente in A

$x_n \to x$ in $A \Rightarrow f_n(x_n) \to f(x)$ (converge a $f(x)$)

ESEMPIO: $f_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$, $\mathbb{R}$.

$= f_n(x) = \frac{(x^2)^n - 1}{(x^2)^n + 1}$, studiamo la convergenza puntuale:

- Per $x=0$, $f_n(x)$ cioè $f_n(0) = -1$ $\underset{n}{\text{converge a } -1}$ (per $n \to \infty$)
- Per $|x|<1$ $f_n(x) = -1$

$\lim_{x \to \infty} \sup_{x \in [R, \infty)} \ldots = 0.$

- Per $(1, +\infty)$

$\sup_{x \in [0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = 2$, intuitivamente. Dimostriamo che non potrebbe convergere (quindi lim = 0), con $|f_n(x_n) - f(x)| = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} e+1$, scegliendo una x_n nell'intervallo considerato che sia conveniente per i calcoli.

SERIE DI FUNZIONI

Sono oggetti $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, dove le f_n sono definite su $A \to \mathbb{R}$ come $f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) \ldots$, sapendo che fissato una x in A, si hanno serie numeriche.

Le SOMME PARZIALI o RIDOTTE: $S_0(x) = f_0(x)$, $S_1(x) = f_0(x) + f_1(x)$, e così via.

- CONVERGENZA PUNTUALE

Si dice che la serie $\sum_0^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente su A se la successione delle somme parziali $S_n(x)$ converge puntualmente su A.

- CONVERGENZA ASSOLUTA

Si dice che la serie converge assolutamente se (su A), la serie dei moduli converge puntualmente per ogni $x \in A$.

- CONVERGENZA UNIFORME

Si dice che la serie converge uniformemente su A se la successione delle ridotte $S_n(x)$ converge uniformemente, sempre su A.

Questo introduce una nuova definizione: si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE TOTALMENTE su A, se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ CONVERGE.

SCHEMA RIASSUNTIVO sulle implicazioni dei criteri

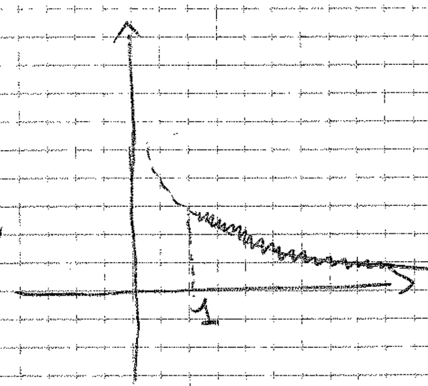
$$\begin{array}{ccc} \text{CONVERGENZA TOTALE} & \Longrightarrow & \text{CONVERGENZA UNIFORME} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{CONVERGENZA ASSOLUTA} & \Longrightarrow & \text{CONVERGENZA PUNTUALE} \end{array}$$

ESEMPIO:

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$, in $[1, +\infty)$

$|e^{-nx}| = e^{-xn} \leq e^{-n} \quad \forall x \in [1, +\infty)$

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$, la quale converge poiché è una serie geometrica; quindi la serie di partenza converge TOTALMENTE.



ESEMPIO 2

il coseno si maggiora con 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \rightarrow \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Poiché $\frac{1}{n^2}$ converge, anche quella di partenza converge (e anche TOTALMENTE).

Sostanzialmente Weier si applica quando si riesce a maggiorare la serie di partenza (in modulo) con una serie convergente (M_n)

DIMOSTRAZIONE

- CONVERGENZA ASSOLUTA: $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \quad \forall x \in A$, è una serie numerica, e per ipotesi è $\leq M_n$, e se essa converge, converge quella di partenza (CRITERIO DEL CONFRONTO)

DIMOSTRAZIONE: Dall'ipotesi la serie converge, e questo implica $\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. Questo implica $a_n x_1^n$ è LIMITATA poiché ad ∞ va a 0. Quindi $\exists M>0$ tale che $|a_n x_1^n| \leq M$, $\forall n$. Prendiamo il modulo della serie:

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leq M \underbrace{\left|\frac{x}{x_1}\right|^n}_{\text{converge, perché serie geometrica}}$$

Per il criterio del confronto, anche la serie di potenze iniziale converge. !VALE SOLO PER L'INTERVALLO APERTO!

- RAGGIO DI CONVERGENZA DI UNA SERIE DI POTENZE.

Data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, si definisce il suo raggio di convergenza $R = \sup\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ CONVERGE}\}$. R può essere numero reale ≥ 0 / $+\infty$

Il raggio è l'ampiezza dell'intervallo di convergenza.

- TEOREMA:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

1) Se $R=0$, allora la serie converge solo in $x_0=0$

2) Se $0 \leq R < +\infty$, la serie allora:
- CONVERGE ASSOLUTAMENTE IN $(-R, R)$ SOLO APERTO
- CONVERGE UNIFORMEMENTE in tutti gli intervalli del tipo $[-k, k]$ con $0 \leq k < R$
- Al di fuori di $(-R, R)$, la serie NON PUÒ CONVERGERE. (se $|x|>R$)

3) Se $R=+\infty$, la serie CONVERGE ASSOLUTAMENTE in tutto $\mathbb{R}$ e CONVERGE UNIFORMEMENTE in $[-k, k]$ con $k>0$

- convergenza assoluta in $(-1,1)$
- convergenza uniforme in $[-k,k]$, $0<k<1$
- $\frac{1}{1-x}$ continua in $(-1,1)$
- Non c'è convergenza uniforme in $(-1,1)$

ESEMPIO $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$, $a_n = \frac{1}{n+1}$

Dobbiamo studiare il limite:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \lim \frac{1}{\underbrace{(n+1)^{\frac{1}{n}}}_{\to 1}} \Rightarrow R = \frac{1}{\ell} = 1$, allora:

- converge assolutamente in $(-1,1)$
- non converge per $|x|>1$
- converge uniformemente in $[-k,k]$, $\forall\ 0<k<1$
- per $x=1$, $\sum \frac{1}{n+1}$ DIVERGE POSITIVAMENTE
- per $x=-1$, $\sum \frac{1}{n+1}(-1)^n$, per Leibniz converge.

ESEMPIO

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$, usiamo il criterio del rapporto:

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{(n+1)}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} \sim \frac{1}{2}$, $R=2$

- CONV. ASSOLUTA in $(-2,2)$
- non converge per $|x|\geq 2$
- converge uniformemente in $[-k,k]$, $0<k<2$
- Per $x=2$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} 2^n$, DIVERGE POSITIVAMENTE