



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 674

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Russo

MATERIA: Meccanica delle Macchine

Prof. Eula

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Prima parte

Esame scritto con domande teoriche ed esercizi, laboratorio per un mese dal 12 Marzo al 17 Aprile.

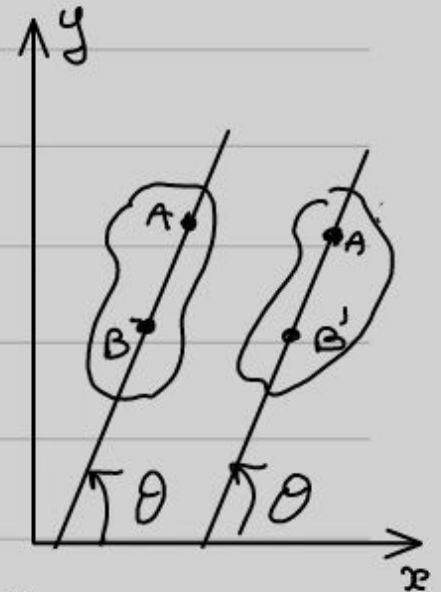
$$\text{Quindi: } \frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = r\omega\vec{\eta} = r\omega[\mathbf{k} \times \vec{\lambda}] = \omega\vec{k} \times (r\vec{\lambda}).$$

Si nota che derivare un vettore rotante è uguale a moltiplicare vettorialmente la velocità angolare per il vettore stesso. Notiamo che essendo una derivata di un vettore posizione, dà il vettore velocità. Graficamente, la derivata di un vettore rotante:

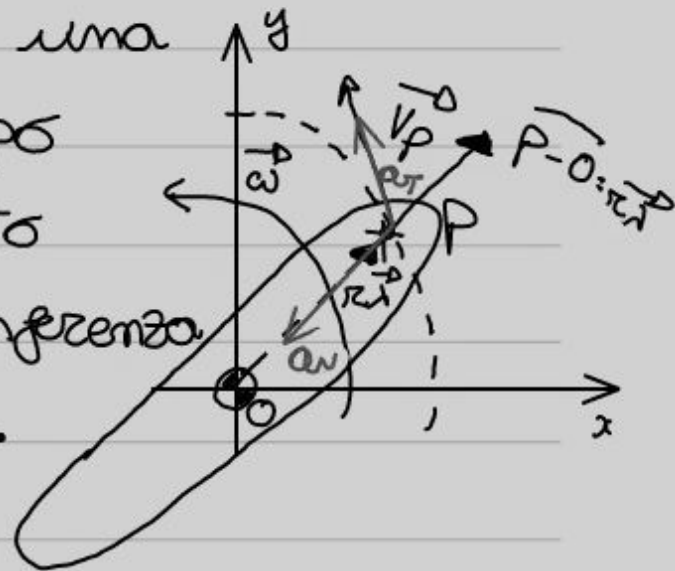
- 1) significa ruotarlo di 90° nel senso di $\vec{\omega}$
- 2) prendere il vettore derivata con modulo pari al vettore stesso $\times \vec{\omega}$

MOTO DEL CORPO RIGIDO NEL PIANO

- Iniziamo dalla sola TRASLAZIONE, se cambia la posizione dei punti ma θ è costante, il corpo NON può ruotare, per cui $\omega = 0$, $\alpha = 0$, $\theta = \text{cost.}$
 Inoltre $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, $\vec{a}_A = \vec{a}_B$,
 tutti i punti hanno stessa velocità e accelerazione lineare.



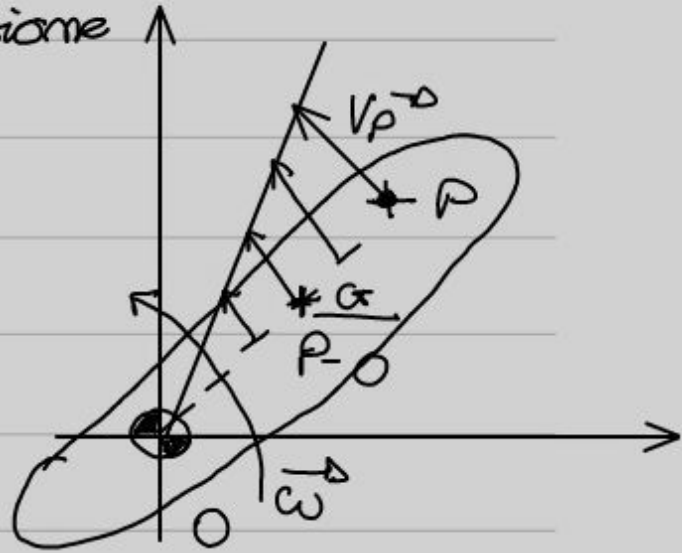
- Moto rotatorio attorno ad un punto fisso, detto POLO. Immaginiamo una BIELLA, fissata in O tramite una cerniera fissa. Il corpo ruota attorno al punto descrivendo una circonferenza di raggio PO, costante.
 Il vettore $\vec{P-O} = r\vec{\lambda}$,



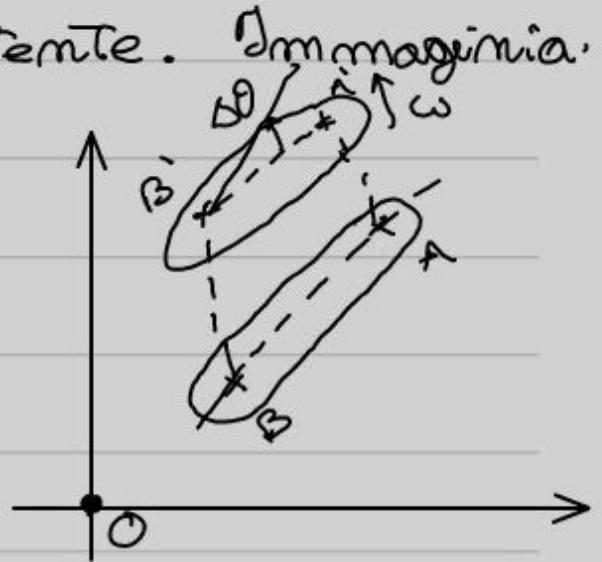
identifica la posizione di P. Calcoliamo la velocità di P: $\vec{v}_P = \frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{\lambda} + r\frac{d\vec{\lambda}}{dt}$
 $= r[\omega\vec{k} \times \vec{\lambda}] = \omega\vec{k} \times r\vec{\lambda} = \omega\vec{k} \times (\vec{P-O})$.

Questa è la formulazione generale della

Vediamo che la distribuzione della velocità per ogni punto della BIELLA è di tipo TRIANGOLARE.



- L'ultimo tipo è la ROTOTRASLAZIONE, ed è il più generico esistente. Immaginiamo una biella NON ingernierata, con il corpo che si muove di una certa quantità, e in B inizia a

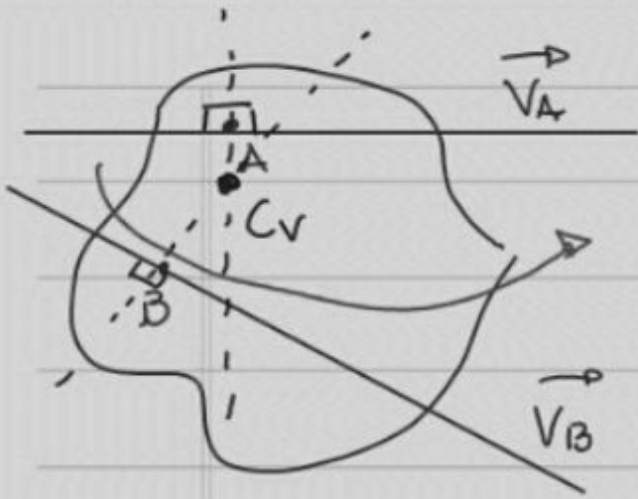


ruotare con polo in B. Per cui, lo spostamento di A complessivo è la combinazione di spostamento traslatorio e rotatorio:

$$\Delta \vec{r}_A = \Delta \vec{r}_B + \Delta \vec{r}_{A/B}, \text{ con}$$

$$\Delta r_{AB} = \Delta \theta (AB), \quad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times (A-B),$$

questa è la FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA. Notiamo che con $\omega = 0$ si ha

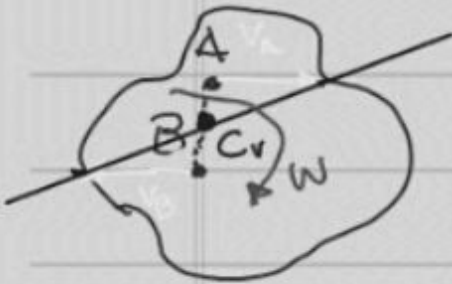


L'intersezione delle perpendicolari portando dai punti A e B e' il C_v

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{Cv} + \vec{V}_{A/Cv} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{A} - \vec{C}_v)$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{Cv} + \vec{V}_{B/Cv} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{B} - \vec{C}_v)$$

b) $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B \Rightarrow$ MDV (modulo direzione verso)



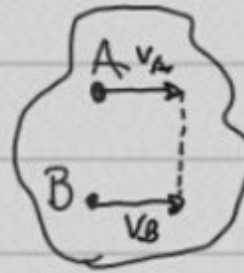
verso diverso

Il C_v si trova sulla distanza AB intersecando la retta che unisce V_A a V_B



Stesso verso

Una cosa simile al caso diverso



$|V_A| = |V_B|$

TRASLAZIONE

$C_v = \infty \rightarrow (\omega = 0)$

VINCOLI PRINCIPALI :

Tabella da incollare :

1°: Carrello con il vincolo sopra, può traslare orizzontalmente sul piano, e ruotare, quindi ha 2 GRADI DI LIBERTÀ, e 1 GRADO DI VINCOLO, cioè il movimento verticale.

2°: cerniera fissa, ha un solo GdL, e 2 GdV.

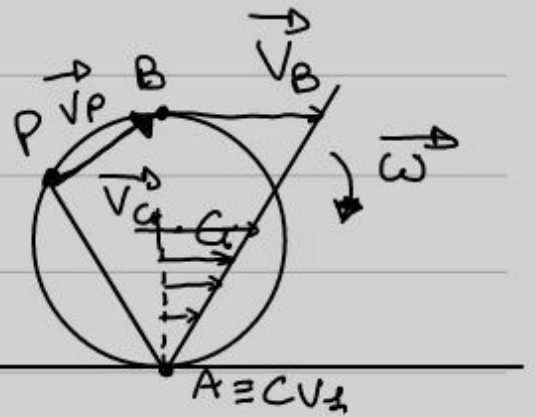
3°: Pattino, può solo traslare orizzontalmente

4°: Incastro, ha 0 GdL e 3 GdV.

SIMBOLO	DENOMINAZIONE	GRADI DI LIBERTÀ	GRADI DI VINCOLO	G.D.L. (TRATTEGGIATI) VINCOLI (TRATTO CONTINUO)
	CARRELLO	2	1	
	CERNIERA	1	2	
	PATTINO	1	2	
	INCASTRO	0	3	

RULLO SU UN PIANO:

A seconda di come si comporta il punto di contatto, può



avere 1 o 2 gradi di libertà:

- Se si fa PURO ROTOLAMENTO si fa 1

GdL, $\vec{v}_{A1} = \vec{v}_{A2}$ la velocità di ogni punto è uguale in ogni punto, e in ogni punto istantaneo di contatto, $v_{A1} = v_{A2} = 0$ al contatto e inoltre CV , poiché la velocità relativa al corpo, nulla. Si fa perciò distribuzione triangolare della velocità. Si fanno le velocità:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_{CV1} + \vec{\omega} \times (G - CV1)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{CV1} + \vec{\omega} \times (B - CV1)$$

$$BCV1 = d = 2 \text{raggio} = 2GCV1, \quad v_B = 2v_G$$

Inoltre, preso un punto P sulla traiettoria, $\vec{v}_P = \vec{v}_{CV1} + \vec{\omega} \times (P - CV1)$, è esterno alla distribuzione triangolare.

- Calcolo dei gradi di libertà, abbiamo una sola ω , quindi possiamo avere un solo GdL. usiamo Grübler:

$$\alpha = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$$

$$\begin{cases} m = 4, (AO, AB, 3, \text{ telaio}) \\ C_1 = 4, (O, A, B, \text{ guida orizzontale } \perp) \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Ne consegue come previsto, $\alpha = 1$.

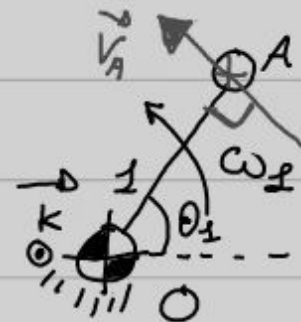
- Calcoliamo ora le variabili cinematiche, conviene partire sempre da qualcosa di moto, cioè il corpo OA, in cui A ha velocità angolare nota.

- OA, lo disegnammo staccato dal resto.

$$\omega_1 = \frac{2\pi N_1}{60} = 157,07 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$V_A = V_O + V_{A/O}, \quad V_O = 0 \text{ poiché fisso.}$$

$$V_A = \omega_1 \vec{k} \times (\vec{A} - \vec{O})$$



$$\text{Modulo di } V_A \rightarrow M = \omega_1 \cdot AO = 32,08 \text{ m/s}$$

$$\text{Direzione di } V_A \rightarrow \perp AO$$

Verso: è quello di ω_1 .

M | $\omega_2 = \frac{V_{B/A}}{AB} = 44,15 \text{ rad/s}$

D | $\perp AB$ (uscite dal foglio)



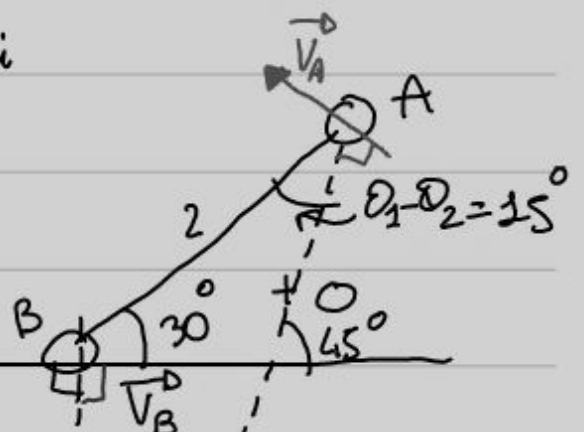
La velocità angolare è determinata, poiché dalla conoscenza di $V_{B/A}$ vediamo che deriva dalla rotazione di 90° di $B-A$, infatti la relazione per trovare $V_{B/A}$ era:

$\vec{V}_{B/A} = \omega_2 \mathbf{k} \times (\vec{B}-\vec{A})$, quindi è un vettore ottenuto ruotando di 90° $B-A$, tramite prodotto vettoriale con ω_2 .

2° METODO RISOLUTIVO, usando il CV.

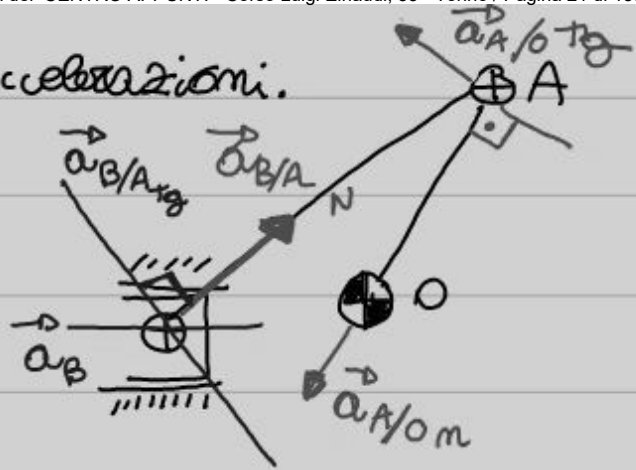
Riferimento alla figura iniziale, ogni corpo è separabile dagli altri e fa un proprio CV. Per il corpo 1, cioè AO, il punto fermo O è un primo CV. Per il corpo 3 che trasla, il CV è all'infinito. Per cui rimane il corpo 2. Prolungando i segmenti ortogonali alle velocità, si trova il CV₂.

Questo ci dice che tutti



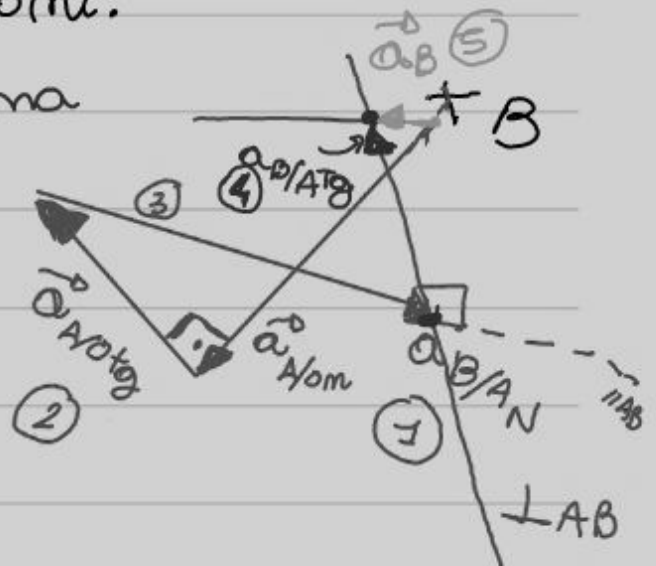
Tracciamo tutte le accelerazioni.

Per calcolare le incognite, tracciamo il poligono delle accelerazioni. Per



costruirlo, tracciamo i contributi da quello con parti più note a quello con meno informazioni.

Dall'ordine della somma vettoriale otteniamo il verso incognito.



CONSIDERAZIONI: Il sistema biella manovella è un esempio di moto semplice, le distanze tra le parti sono immutabili.

$$\vec{V}_{Pass} = \omega \vec{k} \times (\vec{P} - \vec{O}) = \pm \vec{V}_{P_{rel}} \lambda + [\omega_1 \vec{k} \times (\vec{P} - \vec{O}_1)]$$

M	$\omega PO = 47,2 \text{ m/s}$?	$\omega_1 PO_1 = ?$
D	$\perp PO$	lungo PO_1	$\perp PO_1$
V	ω	?	ω_1 ?

La velocità di traslaminamento di P e la velocità del punto nel proprio sottosistema:

$V_{P_{trasc}} = V_{O_1} + V_{P/O_1} = 0 + \omega_1 \vec{k} \times (\vec{P} - \vec{O}_1)$. Il moto assoluto è quello di P che ruota intorno ad O, quindi $V_{Pass} = \omega \vec{k} \times (\vec{P} - \vec{O})$, che si scompone nelle due parti.

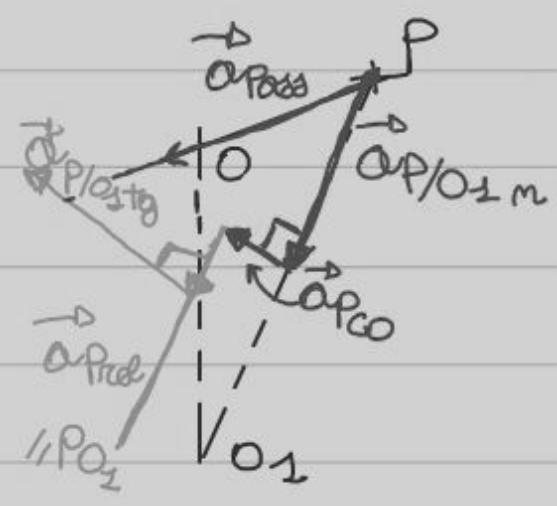
- Calcoliamo i gradi di libertà del sistema:
 $x = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$, $m = 3$ (1, 2, telaio), $C_1 = 2$ (O, O_1),
 $C_2 = 1$ (P che trasla nella guida e ruota, come un corcello). $\rightarrow x = 1$, infatti si fa un solo ingresso, cioè una sola velocità angolare.
- Ragioniamo ora solo sul corpo 1, un sottosistema: $\vec{V}_P = V_O + V_{P/O} = \omega \vec{k} \times (\vec{P} - \vec{O})$
 $M = \omega PO$, $D = \perp PO$, $V = \omega$

Per il corpo 2, abbiamo: $\left| \begin{array}{l} \parallel PO_1 \\ \text{?} \end{array} \right| \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \end{array}$

$$\vec{a}_{P_{oss}} = \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{tr}} + \vec{a}_{P_{co}} = \pm a_{P_{rel}} + [a_{O_1} + \omega_1 \vec{k} \times (P-O_1) - \omega_1^2 (P-O_1)]_{tr} + [2\omega_1 \vec{k} \times \vec{V}_{P_{rel}}]$$

	$\dot{\omega} PO_1 = ?$	$\omega_1^2 PO_1$	$2\omega_1 V_{P_{rel}} = 3528,9 \text{ m/s}^2$
D	$\perp PO_1$	$\parallel PO_1$	$\perp V_{P_{rel}}$
v	$\dot{\omega}_1 ?$	$P \rightarrow O_1$	

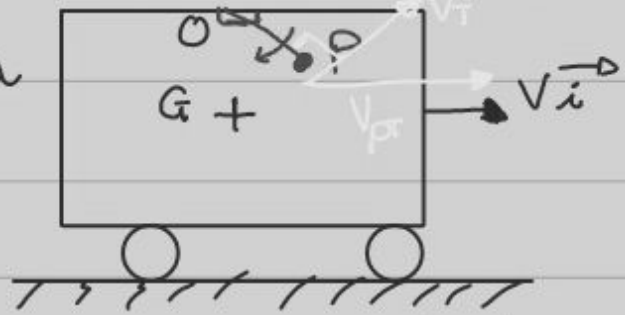
- Il verso di Coriolis si ottiene prendendo $V_{P_{rel}}$ e ruotandola di 90° nel verso di ω_1 . Per il prodotto esterno.
- Costruiamo ora il poligono delle accelerazioni. Si parte dal dato noto, quindi $\vec{a}_{P_{oss}}$.



$\omega_{TRASC} \vec{e} = 0$, per cui anche $a_{CO} \vec{e} = 0$.

ALTRO ESEMPIO DI MOTO COMPOSTO

Un punto P interno ad un carrello, la
il moto relativo della
rotazione di P attorno
ad O, e quello di



TRASCINAMENTO, traslazione lungo \vec{i} . La
loro combinazione dà il moto assoluto
di P. In questo tipo di problemi si
calcola il moto assoluto solo per
composizione.

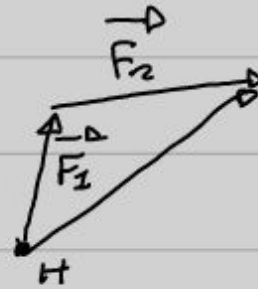
$$\vec{v}_{P_{comp}} = \vec{v}_{P_{oss}} + \vec{v}_{P_{trasc}}$$

$$\vec{v}_{P_{rel}} = \pm v_{rel} \vec{\lambda}$$

$$\vec{v}_{P_{oss}} = \omega \vec{k} \times (\vec{P} - \vec{O}) = \pm v_{rel} \vec{\lambda} + \omega_1 \vec{k} \times (\vec{P} - \vec{O})$$

punto d'incontro, quindi le parallele alle forze; il parallelogramma così ottenuto ha come diagonale la risultante dei due vettori sommati:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



CASO, COMPOSIZIONE DI FORZE PARALLELE

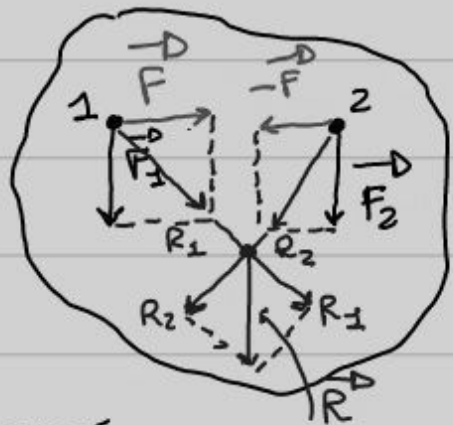
Per risolvere, si somma e sottrae una stessa forza \vec{F} , così che

si annulli. Definiamo

il parallelogramma

per entrambe le forze

F_1 e F_2 , e ne prolungiamo



le risultanti. Si ottiene così un terzo parallelogramma, la cui diagonale è la risultante.

SISTEMI EQUIVALENTI

Due sistemi si dicono equivalenti se fanno la stessa risultante, e lo stesso momento risultante.

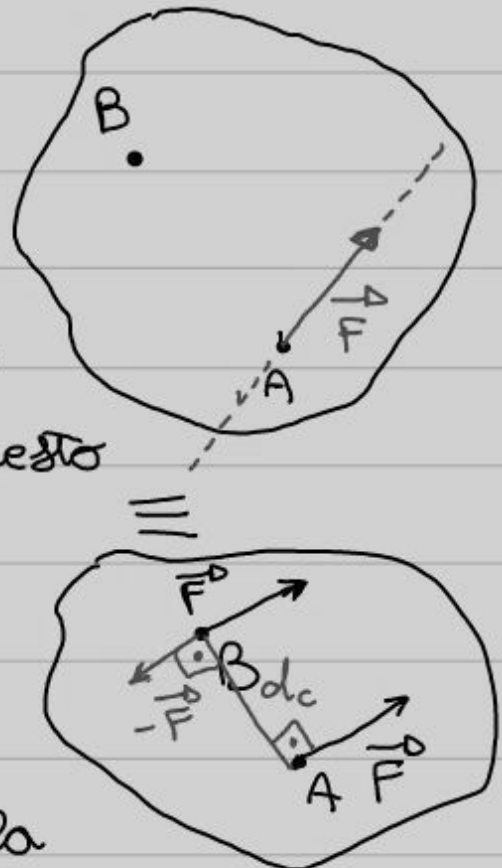
SISTEMI IN EQUILIBRIO:

Si dice sistema in equilibrio, un sistema in cui $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_R = 0$.

TRASPORTO DI UNA FORZA FUORI DALLA SUA RETTA DI AZIONE

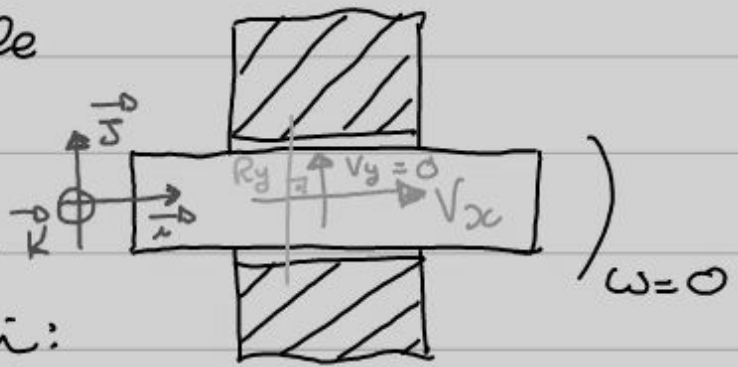
Vogliamo applicare la forza \vec{F} in B. Per farlo, costruiamo un sistema equivalente.

Prima di tutto aggiungiamo e togliamo la forza \vec{F} applicandola in B; a questo punto costruiamo un terzo sistema, con risultante \vec{F} spostata, e momento risultante della

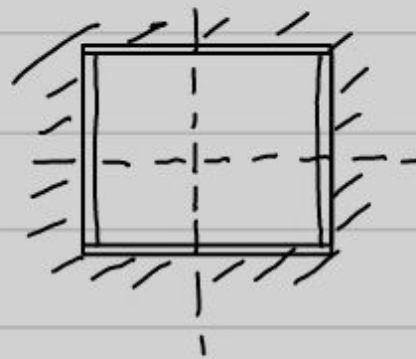


a) COPPIA PRISMATICA (, Pattino)

2 vincoli verticale e di rotazione, danno le reazioni nei versi rispettivi:



$$\begin{cases} V_x \neq 0 \\ V_y = 0 \\ \omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y \neq 0 \\ M_z \neq 0 \end{cases}$$

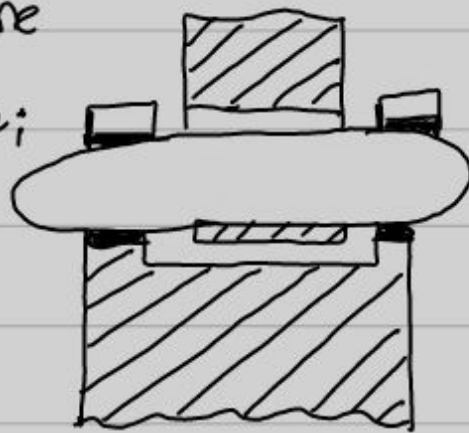


Reazioni senza attrito.

b) CERNIERA PIANA

Impedisce traslazione orizzontale e verticale;

$$\begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = 0 \\ \omega \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x \neq 0 \\ R_y \neq 0 \\ M_k = 0 \end{cases}$$



- $C_e = F_1 \cdot b \rightarrow C_e - \underbrace{F_1 \cdot b}_c = 0$, $\Sigma M_F = 0$, equilibrio alla rotazione.

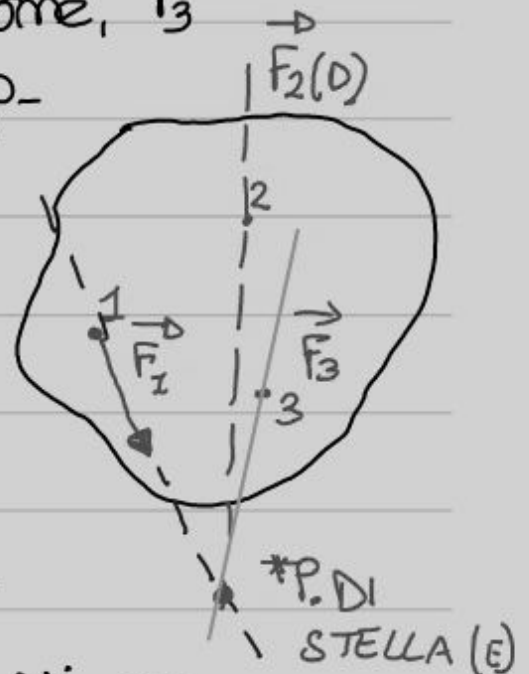
EQUIVALENZA:

$\underline{C = F_1 \cdot b}$, $|F_1| = |F_2|$
 è un'identità, non un'equazione.

3) CORPI RIGIDI soggetti a 3 forze.

\vec{F}_1 è nota, F_2 solo in direzione, F_3 è nota solo per punto di ap-

plicazione. Si prolungano le direzioni delle prime due forze fino al punto d'incontro, detto "punto di stella". L'equilibrio impone



che ANCHE la terza forza passi per

il punto di stella. Questo perché l'eq.

alla rotazione dà: $\Sigma M_F = 0$, $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$, $M_O = Fb$,
 con $b \perp F$, e rispetto al punto di stella, (o "E"),

abbiamo: $F_1 \cdot b_E^{\circ} + F_2 \cdot b_E^{\circ} + F_3 \cdot b_E^{\circ} = 0$ (E è quindi

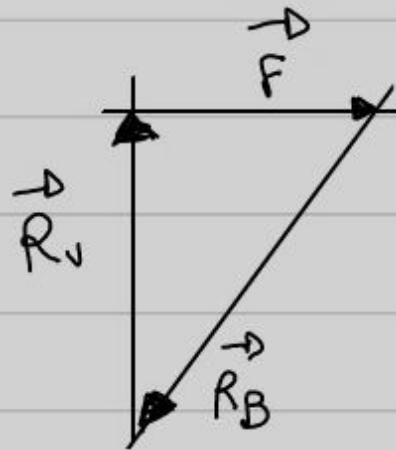
il polo). Se la terza forza NON PASSASSE

per E, si avrebbe un momento non nullo.

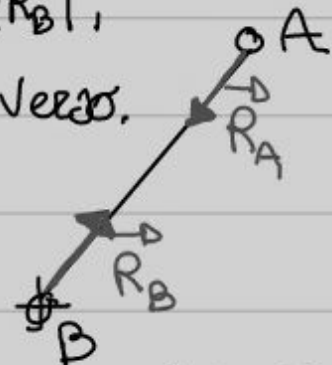
punto di applicazione, il punto di stella è proprio il punto B, e da qui troviamo che la forza non nota in direzione, deve passare per B per garantire l'eq.

Sappiamo anche che il corpo 2, è un'asta scaria, le forze sono dirette lungo di essa. A questo punto costruiamo il triangolo: $F + R_B + R_V = 0$

Tramite vari calcoli, ora possiamo trovare moduli delle forze incognite.



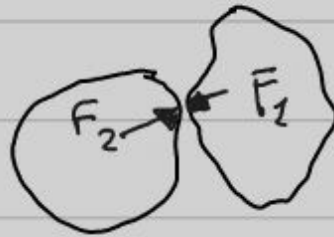
- Passando al corpo 2, è importante ricordare che R_B cambia verso per il principio di azione e reazione. Si ha $|R_A| = |R_B|$, e le due reazioni opposte in verso.



- Stessa cosa nel corpo 1, R_A cambia verso rispetto a quando è in 2.

LEGGI DELLA DINAMICA

- 1) Una particella resta a riposo o si muove di moto rettilineo uniforme se $\vec{R}_F = 0$
- 2) L'accelerazione di una particella è proporzionale alla $\sum \vec{F}_{ext}$ tramite la massa. $\sum \vec{F}_{ext,i} = m \vec{a}$
- 3) Principio di azione e reazione,
 $|F_1| = |F_2|$



2^o legge per i corpi rigidi:

$\sum_i \vec{F}_{ext,i} = m \vec{a}_G$, equilibrio alla traslazione.

$\sum_i M_{ext,i} = I_G \dot{\omega}$, con I momento di inerzia

baricentrico, detto anche "momento di inerzia di massa", si misura in $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Invece

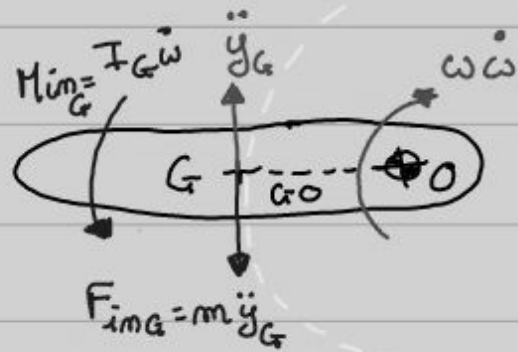
I_A è il momento di inerzia di area, $\text{kg} \cdot \text{m}^4$.

- AZIONI DI INERZIA

Sono sempre opposte alle accelerazioni

• ESEMPIO, sbarra.

$I_G = \frac{ml^2}{12}$, $l =$ lunghezza asta
 $m =$ massa cm.

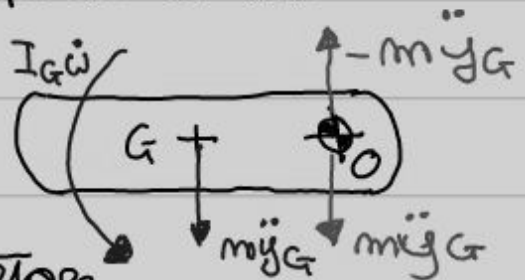


Equilibrio alla traslazione, ed equilibrio alla rotazione (conviene farlo rispetto ad un vincolo, così ci togliamo le reazioni vincolari).

Rotazione: $0 \uparrow + \dots + \underbrace{(m\ddot{y}_G)(GO) + I_G \dot{\omega}}_{\text{rispetto a G.}} + \dots$ Vet. libero.

Analisi rispetto ad O:

Si sa che $I_G \neq I_O$



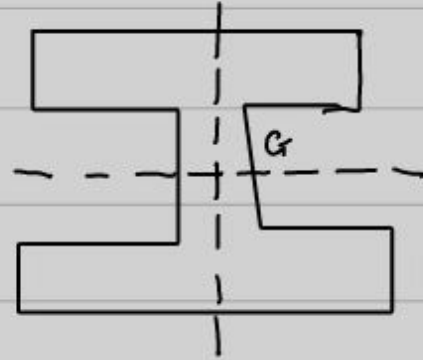
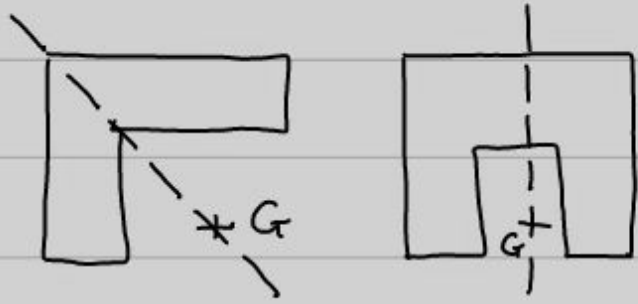
Inoltre dobbiamo trasportare

la forza di inerzia sul punto desiderato, spostando la retta d'azione, e creando un momento di trasporto:

$C(\text{trasporto}) = (m\ddot{y}_G) GO$
 $\vec{y}_G = \vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\omega} \vec{k} \times (\vec{G}-\vec{O})$
 Modulo $\rightarrow \ddot{y}_G = \dot{\omega}(GO)$.

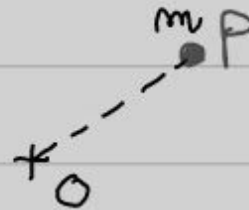
Creiamo quindi il sistema equivalente con le forze trasportate:

Varie forme.



MOMENTO DI INERZIA

$$I_0 = m(PO)^2$$



1) Sistema discreto:


$$O_+ \quad I_0 = \sum_i m_i (P_i O)^2 = \boxed{\sum_{i=1}^n m_i r_i^2}$$

2) Sistema continuo:

$$I_0 = \int_M r^2 dm = \boxed{\int_V r^2 \rho dV}$$

LAVORO DI UNA FORZA (in Joule)

$$dL = \vec{F} \times d\vec{s} = F ds \cos \alpha = [F \cos \alpha] ds = F_T ds$$

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \times d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} F_T ds = F_T \Delta s$$


$$L_c = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \rightarrow \text{Lavoro di una coppia}$$

POTENZA (in Watt W, o Joule/secondo)

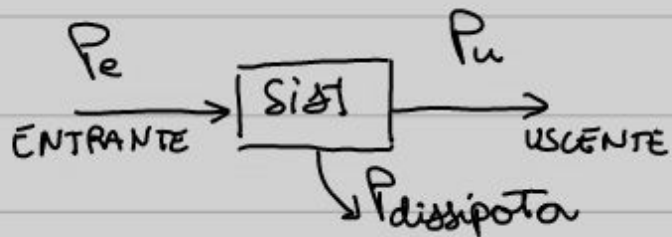
$$P_F = \frac{dL}{dt} = F_T \frac{ds}{dt} = F_T \cdot v \quad (\text{forza per velocità lineare})$$

$$P_c = \frac{dL_c}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M \cdot \omega \quad (\text{forza per velocità angolare})$$

$$P_{TOT} = F_T \cdot v + M \cdot \omega$$

RENDIMENTO

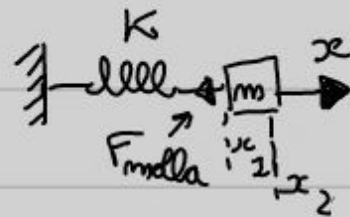
$$\eta = \frac{P_u}{P_e} \leq 1$$



LAVORO DI UNA MOLLA

$$F_{molla} = -kx$$

$$L_{molla} = - \int_{x_1}^{x_2} (kx) dx = -\frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$$



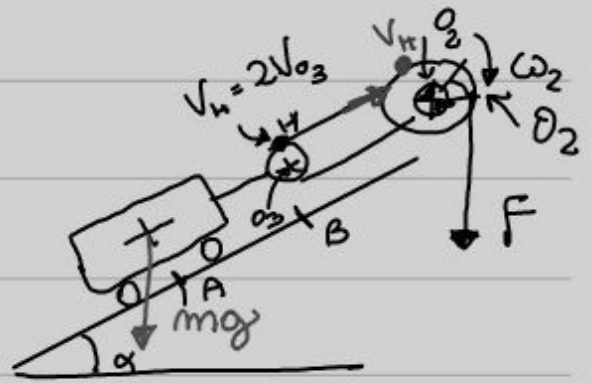
$$\Delta E_{p,el} = -L_{molla} = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$$

ESEMPIO:

$$V_A = 0$$

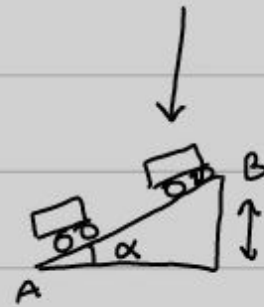
$$V_B = g$$

$$AB = 2m$$



$$F_{ext} \Rightarrow F \Rightarrow L_{F,ext} = F \theta_2^*$$

Per la massa che si sposta:



$$R = AB \sin \alpha$$

$$E_{P,A} = 0, E_{P,B} = m_1 g R \quad \left. \vphantom{E_{P,A}} \right\} \text{Variazioni di energia potenziale gravitazionale.}$$

$$E_{K,A} = 0, E_{K,B} = \frac{m_1 v_B^2}{2} + \left(\frac{1}{2} I_0 \omega_2^2 \right) \quad (\text{energia cinetica della puleggia})$$

Conosciamo tutte le energie, applichiamo la conservazione dell'energia:

$$F(\theta_2^*) = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_B^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega_2^2}_{\Delta E_K} + \underbrace{m_1 g R}_{\Delta E_P} + 0$$

$$v_H = 2v_{O3} = \omega_2 r_2$$

$$2(AB) = \theta_2^* r_2$$

$$F \left(\frac{2AB}{r_2} \right) r_2 = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 + \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{2v_B}{r_2} \right)^2 + m_1 g R$$

$$= M \theta_2^*$$

$$\vec{K}_P = \sum_{i=1}^n r_i \vec{\lambda} \times m_i \underbrace{[\vec{\omega} \times r_i \vec{\lambda}]}_{v_i \vec{\lambda}}$$

$$\vec{K}_P = \sum_{i=1}^n [r_i^2 m_i \omega] [\vec{\lambda} \times \vec{\mu}] \rightarrow \lambda \times \mu = \vec{v}$$

$$\vec{K}_P = \sum_{i=1}^n (m_i r_i^2) \omega \vec{v} \quad (\perp \text{ piano})$$

$$\vec{K}_P = I_P \omega \vec{v} \quad \text{nel piano con } P \equiv G$$

$$\vec{K}_G = I_G \omega \vec{v}$$

$$\vec{M}_{im,G} = -I_G \dot{\omega} = -\frac{dK_G}{dt}$$

Dall'equilibrio: $\sum \vec{M}_{ext,i} + \vec{M}_{im,G} = 0$

$$\sum \vec{M}_{ext,i} = -\vec{M}_{im,G} = \frac{dK_G}{dt} \quad \text{TEOREMA DEL MOMENTO}$$

DELLA Q. DI MOTO

Come prima, in un sistema isolato:

$$\sum \vec{M}_{ext,i} = 0 \rightarrow \frac{dK_G}{dt} = 0 \rightarrow K_G = \text{costante}$$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO

DELLA Q. DI MOTO

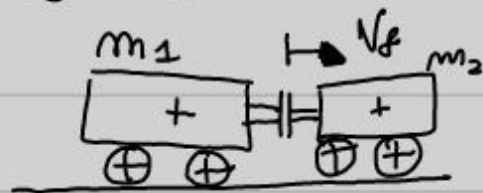
Dobbiamo trovare le velocità incognite:

$$E_{k,im} = E_{k,fin} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = m_1 v_{1f}^2$$

(Si usa il fatto che se l'urto è elastico, si ha conservazione dell'energia).

- Se l'urto fosse ANELASTICO : il nuovo sistema è composto dalle due masse.

Perché i sistemi stanno solo traslanti:



$$\Sigma F_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{Q} = \text{cost}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{Q}_i = m_1 v_{1i} \\ \vec{Q}_f = (m_1 + m_2) v_f \end{array} \right\} \text{ Si ha dissipazione di energia!}$$

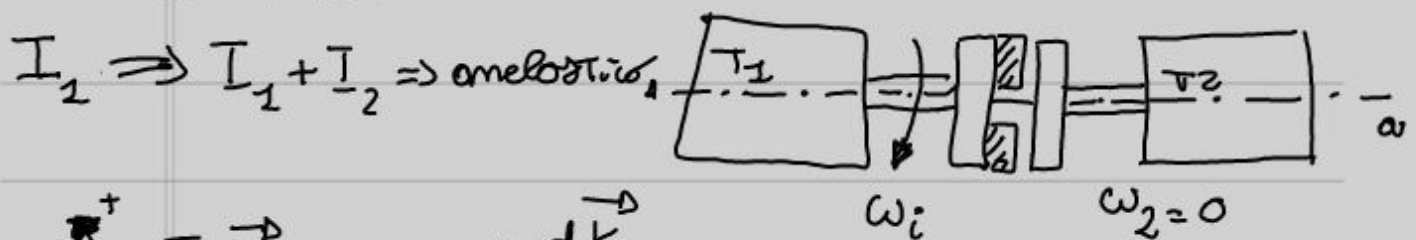
$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \rightarrow v_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

Si ha variazione di energia cinetica:

$$\Delta E_k = E_{k,fin} - E_{k,im} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

↓
energia dissipata

ESEMPIO, VOLANO?



$$a) \Sigma \vec{M}_{ext} = 0 \rightarrow \frac{dK_g}{dt} = 0$$

$$\vec{K}_g = \text{cost}$$

Secondo quaderno

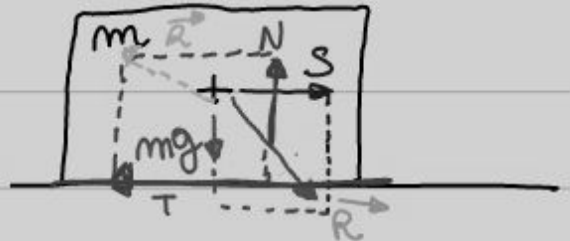
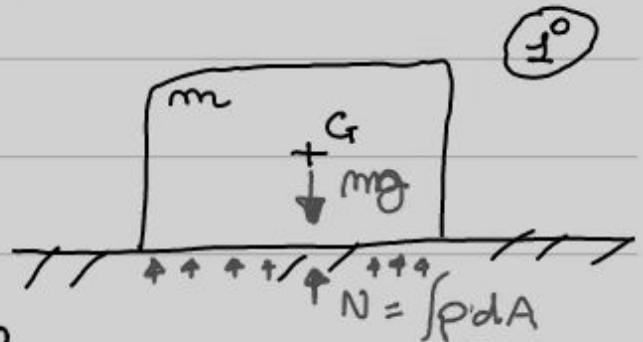
ATTRITO

- 1) Attrito statico σ di aderenza.
- 2) Attrito radente σ di strisciamento.
- 3) Attrito rotolante.

ATTRITO STATICO (di aderenza)

$$v=0$$

Immaginiamo di tirare la cassa con una forza S ; la cassa è sempre ferma, per una ulteriore forza

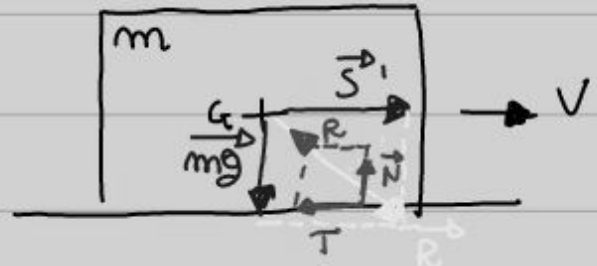


esercitata dal terreno in reazione, uguale e opposta a R . Questa reazione può essere scomposta in due componenti, il cui punto di incontro NON passa per il baricentro. "T" è la componente TANGENZIALE di attrito (è una forza reattiva opposta al possibile moto), e

ATTRITO DI STRISCIAMENTO

$$V \neq 0, V = \text{cost}, S' = T$$

T è la forza $tg \cdot$

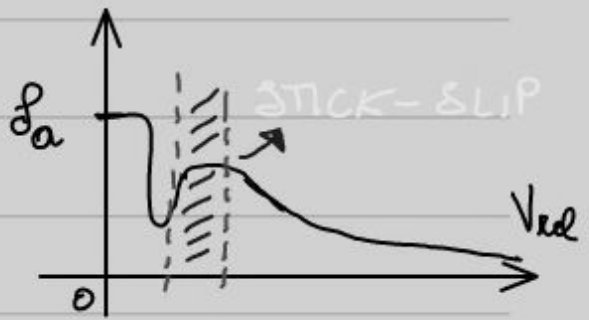


di attrito di strisciamento cassa-terreno opposta al moto. La legge dell'attrito è:

$$T = f \cdot N$$

com f un nuovo coeff. di attrito.

T è opposta a \vec{V} , $N \perp$ al piano di scorrimento. Nel grafico è riportato l'attrito in



funzione della velocità tra i due corpi a

contatto. Si verifica anche lo stick-slip, ovvero un fenomeno di attaccamento-staccamento tra i due corpi (ad esempio il cigolio).

Esiste anche il modello geometrico:

$$T = tg \psi \cdot N$$

$$tg \psi = f$$

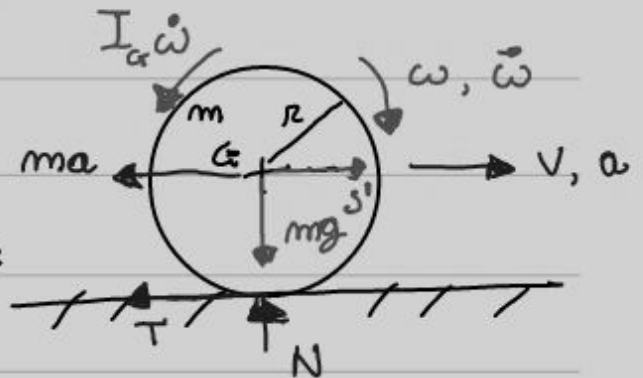


- Può essere utile trovare gli angoli

ATTRITO IN CASO DI ROTAZIONE

Consideriamo una ruota trascinata.

Il corpo ruota con relative velocità e forze, si può scrivere l'equilibrio:



$$\sum_x \rightarrow s' - ma - T = 0 \quad (1)$$

$$\sum_y \rightarrow N - mg = 0 \quad (2)$$

$$\sum_G^+ \rightarrow I_G \dot{\omega} - Tr = 0 \quad (3)$$

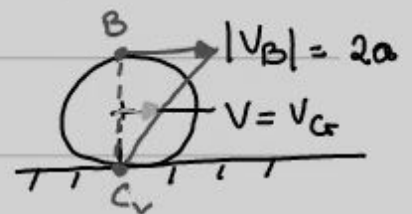
Non sono sufficienti queste equazioni!

Bisogna quindi studiare l'attrito, identificandone la tipologia; studiamo i gradi di libertà del sistema:

- ruota $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ GdL (} v \text{ e } \omega \text{ sono LEGATE)} \\ \text{PURO ROTOLAMENTO, SOLO ADERENZA} \\ 2 \text{ GdL (} v \text{ e } \omega \text{ indipendenti)} \\ \text{NO PURO ROT., SI HA STRISCIAMENTO} \end{array} \right.$

1° caso, Puro rotolamento:

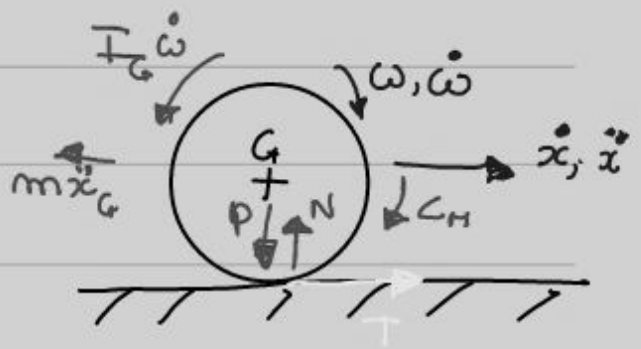
Identificato il C_v nel punto



di contatto, si fa distribuzione

triangolare della velocità, tutte proporzionali alla distanza dal C_v (nel quale $v = 0$)

RUOTA MOTTRICE



$$\Sigma_x: -m\ddot{x} + T = 0$$

$$\Sigma_y: N - P = 0$$

$$G \uparrow^+ : I_G \dot{\omega} - C_H + T r = 0$$

$$\text{Ipotesi: } \begin{cases} A \equiv C_v \text{ (può rotolamento)} \\ \dot{x} = r\omega ; \ddot{x} = r \cdot \dot{\omega} \\ T \leq f_a \cdot N \text{ (aderenza)} \end{cases}$$

$$\text{Se invece: } \begin{cases} T > f_a \cdot N \Rightarrow \text{la legge } T = f \cdot N \\ \ddot{x} \neq r \dot{\omega}, \dot{x} \neq r\omega \\ \text{no puro rotolamento, strisciamento} \end{cases}$$

N.B, poiché nella ruota c'è distribuzione

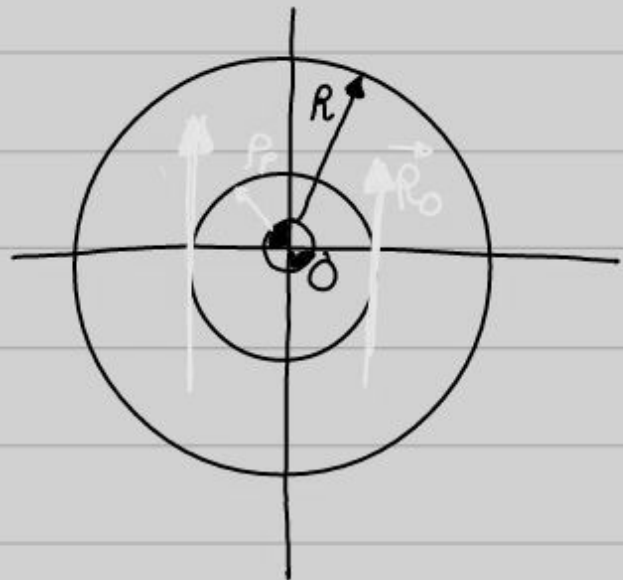
triangolare delle velocità, si ha:

- $\vec{V}_B = 2V_G$
- $\vec{Q}_G = a_{G/Cv} = \dot{\omega} \mathbf{k} \times (G - C_v)$ [poiché la componente normale si annulla con a_{ω}].

- 2) \vec{Q} opposta a $\vec{\omega}$ (è un attrito, quindi si oppone)
- 3) Q deve rispettare l'equilibrio del perno $[\vec{Q} \parallel \vec{F}; |\vec{Q}| = |\vec{F}|]$

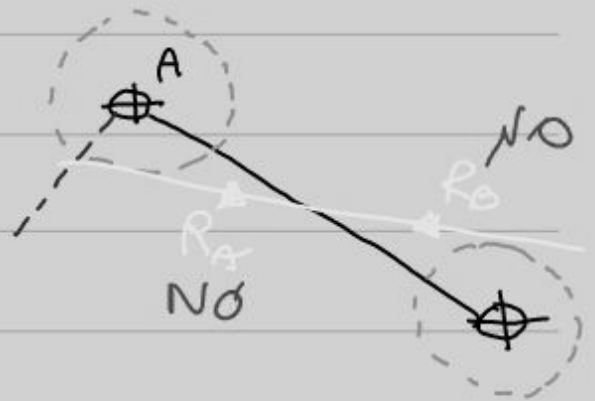
RISOLUZIONE DEI PROBLEMI:

- 1) Separare le parti del sistema
 - 2) Tracciare il cerchio di attrito nella cerniera
 - 3) Stabilire direzione e verso di \vec{Q} , in base alle condizioni di equilibrio.
- N.B. d'attrito o il perno NON sposta da O' né peso né inerzie.



Proviamo ora un altro caso:

NO.



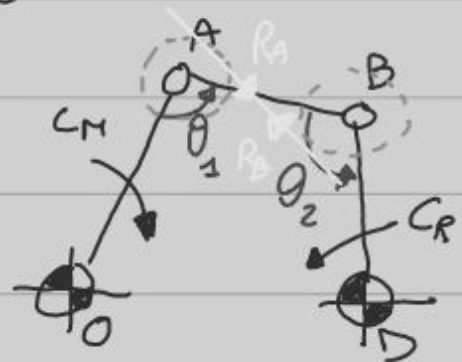
Ultimo caso:

Qui sono rispettate
TUTTE le condizioni
di equilibrio.



QUADRILATERO ARTICOLATO

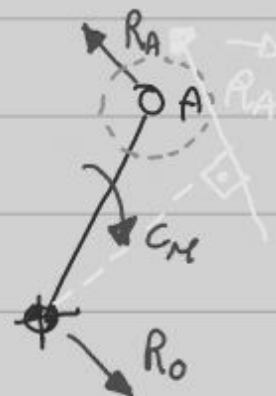
Vediamo che la tangente
è diretta come la
biella manovellata.



CORPO I

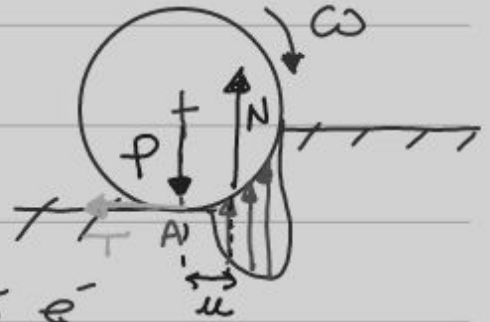
R_A e R_O creano una
coppia opposta a C_M

$R_O \parallel R_A$, $|R_O| = |R_A|$



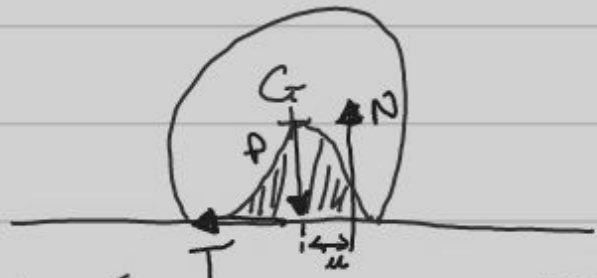
ATTRITO VOLVENTE

Nasce in caso di rotolamento, poiché è resistenza al



rotolamento. Il terreno è deformabile (tipo neve), dove la reazione normale è spostata rispetto al baricentro, di una quantità "u" detto PARAMETRO DI ATTRITO VOLVENTE.

- Si verifica anche in caso di ruota non perfettamente



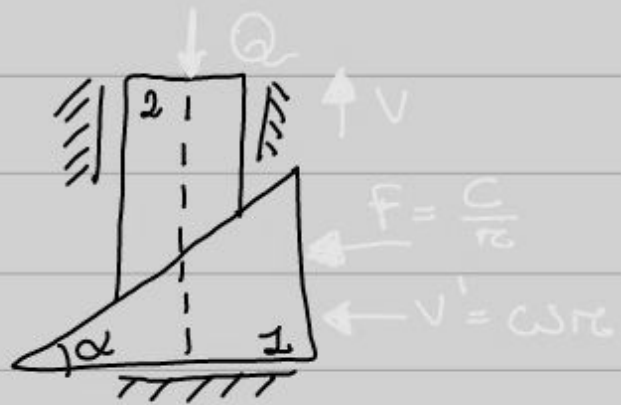
circolare. Anche qui è u il parametro, la relazione fondamentale è data dal momento: $G \uparrow N \cdot u = T R \Rightarrow T = f_v \cdot N$,

con $f_v = \frac{u}{R}$, coeff. di attrito volvente.

l = madre vite

l = vite

r = raggio vite.



La madre vite

spostandosi, faolare il corico. Spezziamo

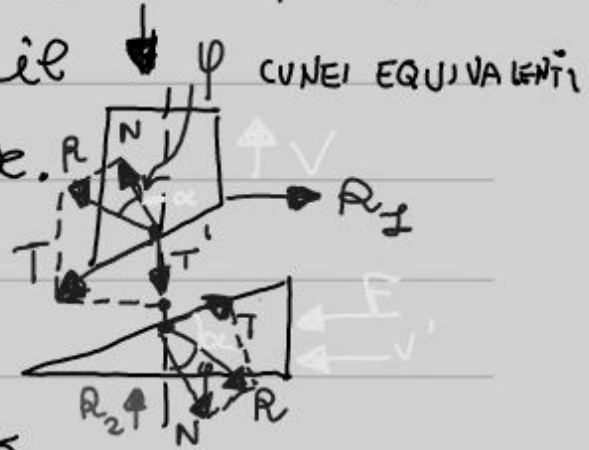
il sistema per studiare il sistema di forze trasmesse.

φ è l'angolo fra R e N ,

angolo di attrito di

strisciamento, $\hat{\alpha}$ è l'angolo

di inclinazione del filetto, tra N e l'asse.

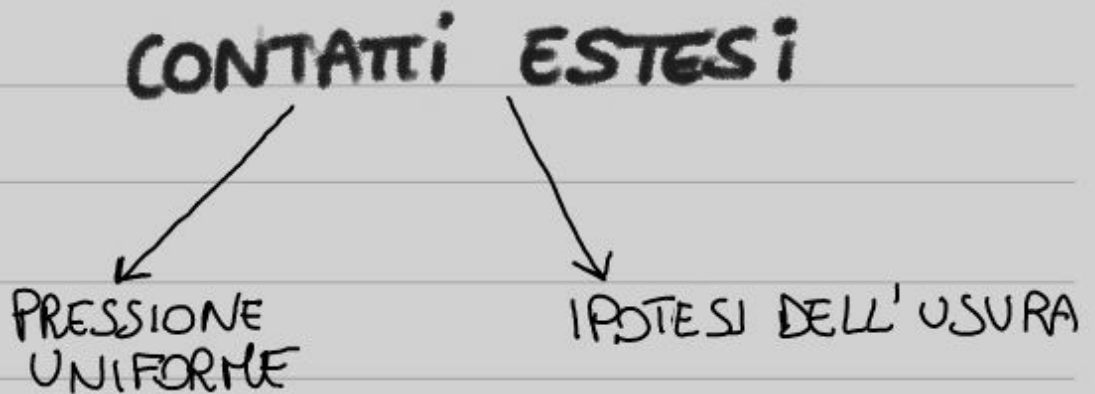


- R_1 è la reazione vincolare della vite contro la sua sede (coppia prismatica); N e T si compongono quindi per dare la forza di attrito risultante tra vite e madre vite.

- Sulla madre vite, vi sono N e T uguali e opposte, e la reazione R_2 del piamo.

$$\textcircled{2} \begin{cases} + \uparrow - Q + R \cos(\alpha + \varphi) = 0 \\ \rightarrow R_1 - R \sin(\alpha + \varphi) = 0 \end{cases}$$

-zione α .



IPOTESI DELL'USURA (ipotesi di Reye)

Il volume di materiale asportato nell'unità di tempo per attrito è proporzionale al lavoro fatto dalle forze di attrito nella stessa unità di tempo.

δ = spessore di materiale asportato
 $dV = \left(\frac{dH}{dt}\right) dA = K \frac{dL_T}{dt}$, K è una costante di proporzionalità, dL_T è il lavoro delle forze di attrito:

$$\delta dA = K \left[dT \frac{dS}{dt} \right] \rightarrow \delta dA = K [(fP dA) v_{rel}]$$

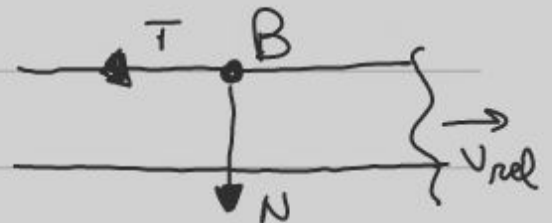
$$dT = f dV = f(P dA), \quad P = \text{pressione di contatto}$$

possiamo tracciare la distribuzione delle pressioni di contatto, e di conseguenza dell'usura:

$$S dA = k (p dA) v_{rel} \xrightarrow{\text{cost}} S = P \quad (\text{si suppone } v_{rel} \text{ costante}).$$

• Consideriamo il nostro:

Le reazioni sono uguali e opposte.



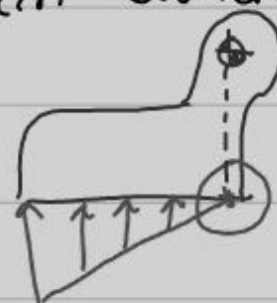
• R e R_0 generano una coppia opposta a C :

$$C = R \cdot d, \quad R = \frac{T}{\sin \varphi} = \frac{N}{\cos \varphi}, \quad |R| = |R_0|$$

$$N x_0 = \int_a^{a+b} (P dx) x \rightarrow N = \int_A P dA \rightarrow N x_0 = \int_A (P dA) \cdot x = \int_a^{a+b} (P \cdot dx \cdot d) x$$

Si uguaglia il lavoro della forza normale, a quello delle pressioni infinitesime, integrando su tutto il pattino in lunghezza.

Si nota che l'accostamento rigido prevede 1 GdL.

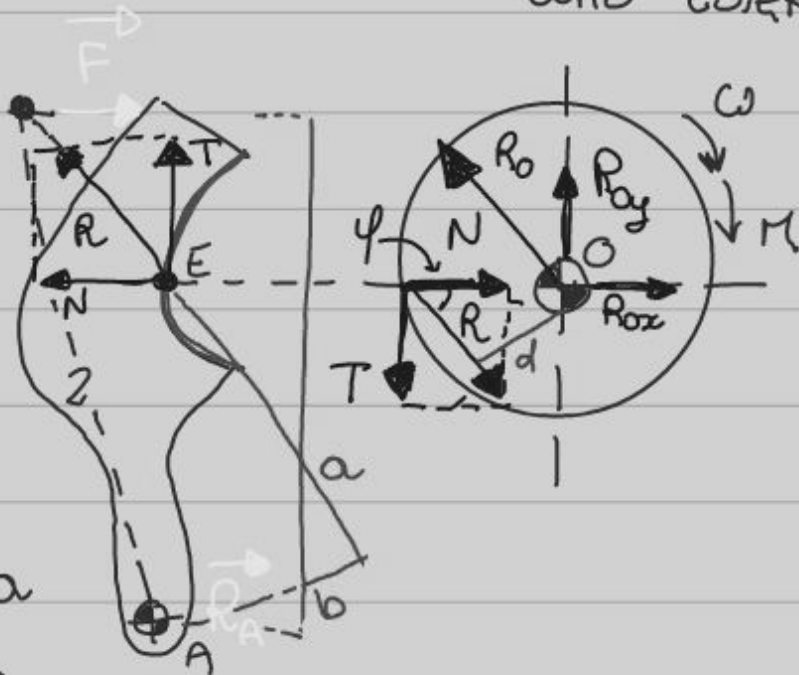


3) FRENO A TAMBURO AD ACCOSTAMENTO

RIGIDO

CEPPO ESTERNO

La reazione vincolare in O e la risultante dell'attrito formano una coppia opposta



a C . Scegliamo di non usare l'ipotesi dell'usura, ma ipotizziamo che N e T siano applicate in E (asse orizzontale tamburo) e tangenti al tamburo.

- Dobbiamo trovare l'equilibrio del ceppo, che ricade nella terza regola degli equilibri: prolungando R_A , R , e F , troviamo il punto di stella.

$$\begin{cases} F + R_A + R = 0 \\ O \downarrow^+ M - R \cdot d = 0 \quad (\text{momento del tamburo}) \\ A \downarrow^+ F \cdot a - R \cdot b = 0 \quad (\text{momento del ceppo}) \end{cases}$$

Dalle equazioni ricaviamo F e M , a

Si fa quindi R che forma un angolo con l'orizzontale, che NON è φ , ma viene chiamato ε . Naturalmente sul ceppo si fa una R uguale e opposta, e una R_A al perno. Si trova sulla leva il punto di stella, e possiamo scrivere l'equazione di eq:

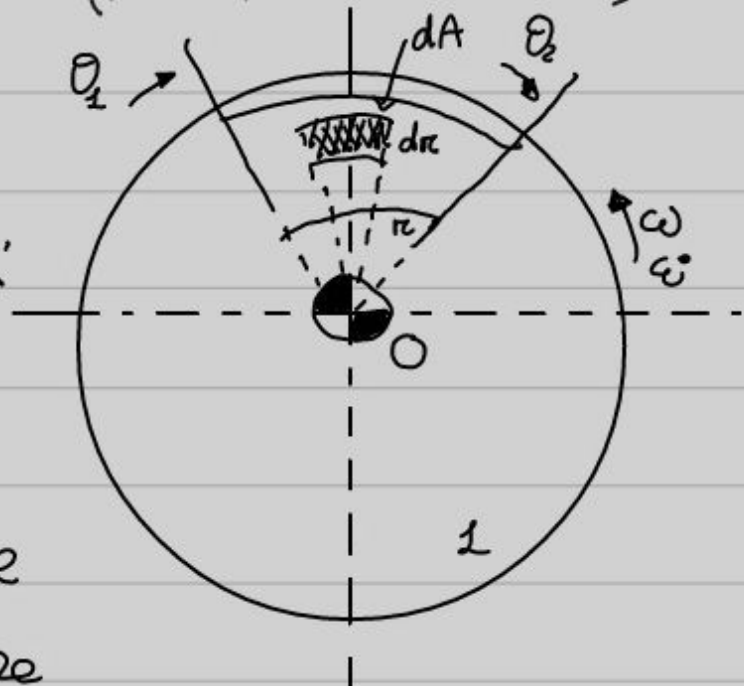
$$O \downarrow \overset{+}{C_n} - R \rho_+ = 0$$

$$|R| = |R_A|$$

$$B \downarrow \overset{+}{F} \cdot a - R_A \cdot b = 0$$

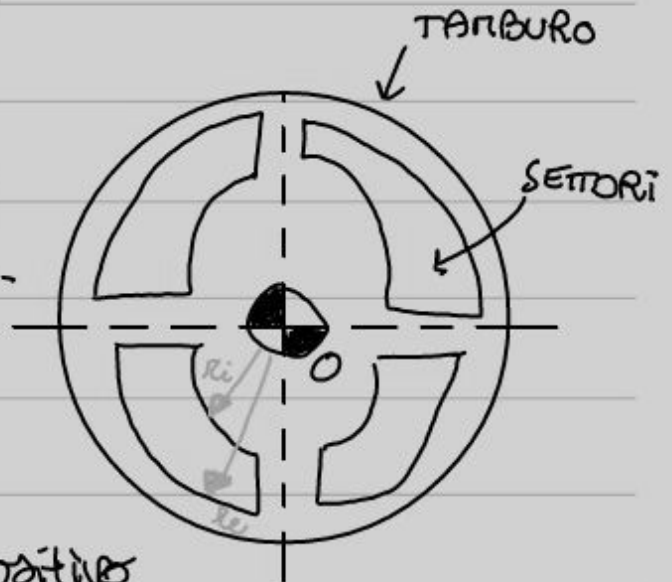
5) FRENO A DISCO (ACCOSTAMENTO RIGIDO)

1 è il disco del freno ruota con una certa velocità angolare, e una pastiglia viene premuta contro il disco per esercitare azione frenante.

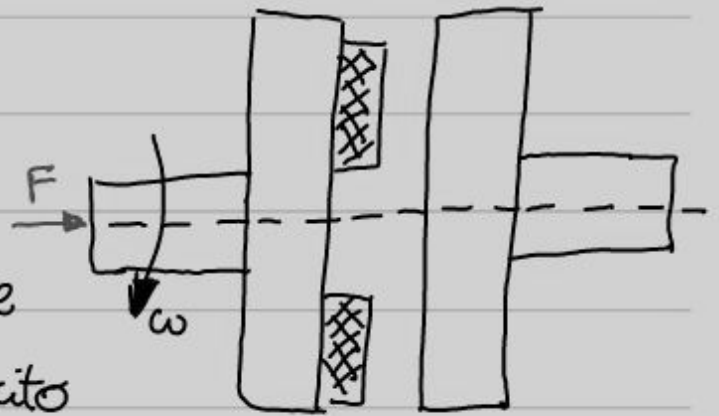


FRIZIONE PIANA

I settori sono composti di materiale ottomente premante, è un dispositivo di sicurezza che permette al carico di fermarsi se il dispositivo rimane impigliato.



Dal disegno, si vede che due innesti sono tenuti insieme solo grazie all'attrito della frizione.



$$F = k' \frac{2\pi}{(\theta_2 - \theta_1)} (r_e - r_i), \quad P = \frac{k'}{r_0} \text{ (usura)}$$

$$C_{\text{frizione}} = \int_A (dT)r = f 2\pi k' \left[\frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \right] = f F \left(\frac{r_e + r_i}{2} \right)$$

Quella che nei dischi era la coppia premante, qui è la coppia trasmessa dalla frizione in fase di strisciamento.

strisciamento: $dF_T = f dF_N$,

per cui le equazioni diventano:

$$\begin{cases} d\bar{T} - T - dT + T = 0 \\ dF_N - T \frac{d\theta}{2} - \frac{dT d\theta}{2} - T \frac{d\theta}{2} = 0 \\ dF_T = f dF_N \end{cases}$$

↓

$$dF_T = dT = f dF_N = f(T d\theta)$$

$$dF_N = \cancel{T} \frac{d\theta}{\cancel{2}}$$

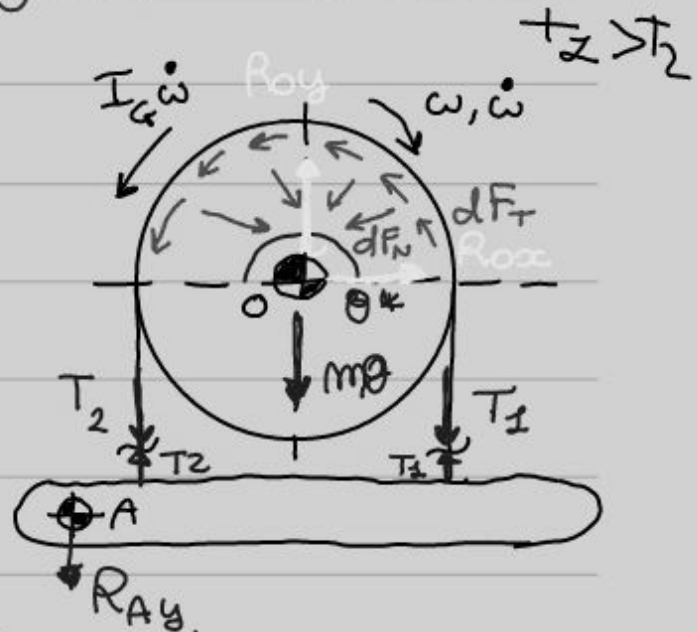
↓

$$dT = f T d\theta \rightarrow \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\theta^*} f d\theta \rightarrow \ln \frac{T_2}{T_1} = f \theta^* \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{T_2}{T_1} = e^{f \theta^*} \quad (\text{naturalmente al numeratore } \frac{f \theta^*}{T} >)$$

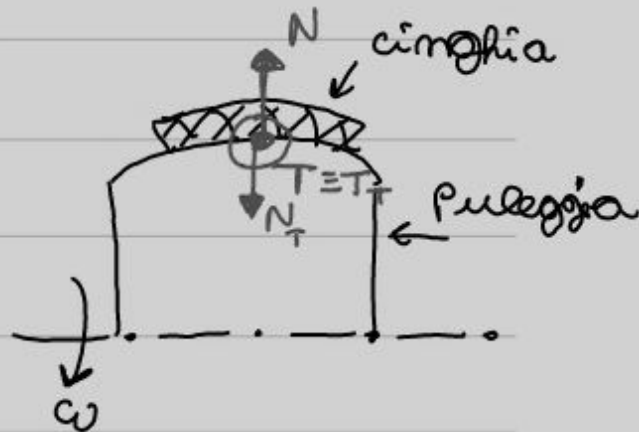
Quest'ultima espressione è l'equazione dei flessibili, con f coefficiente d'attrito e θ^* angolo di avvolgimento attorno al tamburo.

Diagramma di corpo libero del freno a nastro. Sul diagramma - ma vanno messe o le tensioni, o la coppia frenante, NON entrambi!



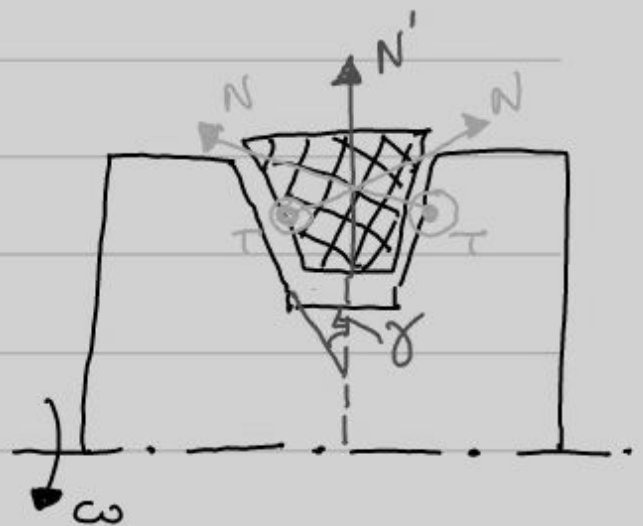
TIPOLOGIE DI CINGHIE

PIANA: è rappresentata in sezione trasversale. Le componenti scambiate tra cinghia e puleggia sono opposte (N, N_T), e entranti nel tamburo (T, T_T)



TRAPEZIA:

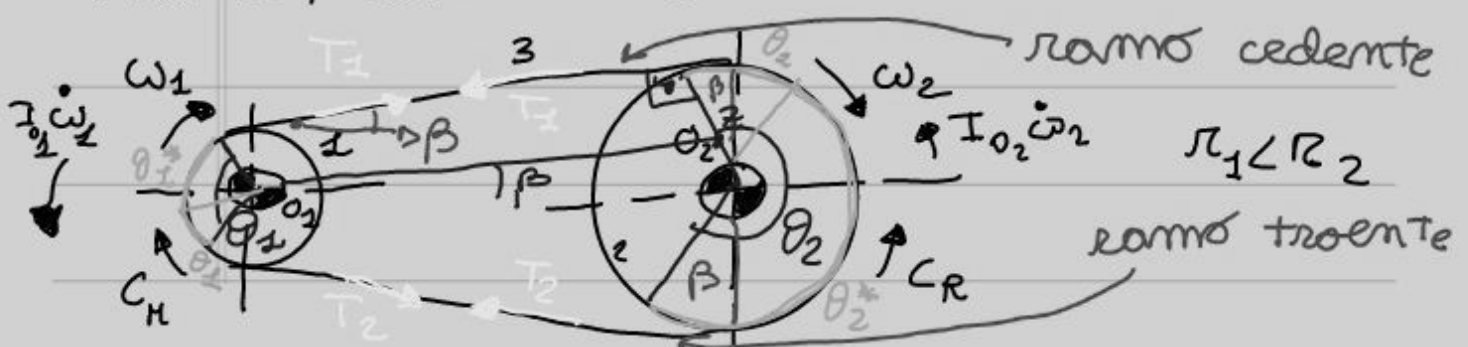
N' è la risultante delle N , γ è un angolo di apertura:



$$T_{TOT} = \frac{f}{\sin \gamma} \cdot N$$

Studio della cinghia piana

I parametri fondamentali sono i parametri cinematici, di attrito, rendimento, azioni scambiate.



$$CO_2 = r_2, \text{ con } \beta = \arcsin \left[\frac{r_2 - r_1}{a} \right]$$

$$CZ = BO_1 = r_1$$

$$ZO_2 = CO_2 - CZ = r_2 - r_1$$

$$O_1 \hat{=} O_2: ZO_2 = O_1 O_2 \sin \beta$$



$$r_2 - r_1 = a \sin \beta, \text{ a è l'interasse}$$

- Equazione dei flessibili con $v \neq 0$

$$\frac{T_2 - qv^2}{T_1 - qv^2} = e^{\beta \theta_1^*}, \text{ con } T_2 > T_1, q \text{ massa cinghia, } v \text{ velocità della cinghia}$$

Si può approssimare a quella del caso a motore:

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\beta \theta_1^*} \quad (\theta_1^* \text{ strisciamento della puleggia motrice})$$

Per usare l'espressione è comunque necessario ricavare l'angolo di strisciamento,

θ_1^* , che è uguale a:

$$\theta_{1avv} = \theta_{1ad} + \theta_1^* \quad (\text{somma di aderenza e}$$

$$\theta_{2avv} = \theta_{2ad} + \theta_2^* \quad \text{strisciamento})$$

Si fa che gli angoli di aderenza

TRASMETTONO il moto, quelli di strisciamento generano una differenza di tensione.

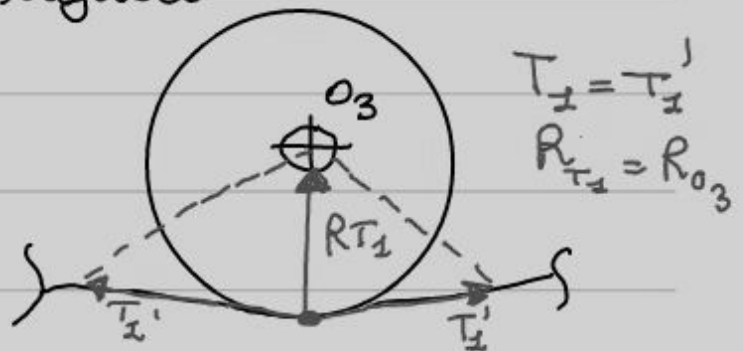
Tensioni momento grazie al carico P_1

- Se la $T_1 = T_1'$, se due sovrapposti non ci sono:

- coppie esterne applicate
- inerzie
- attrito al perno O_3

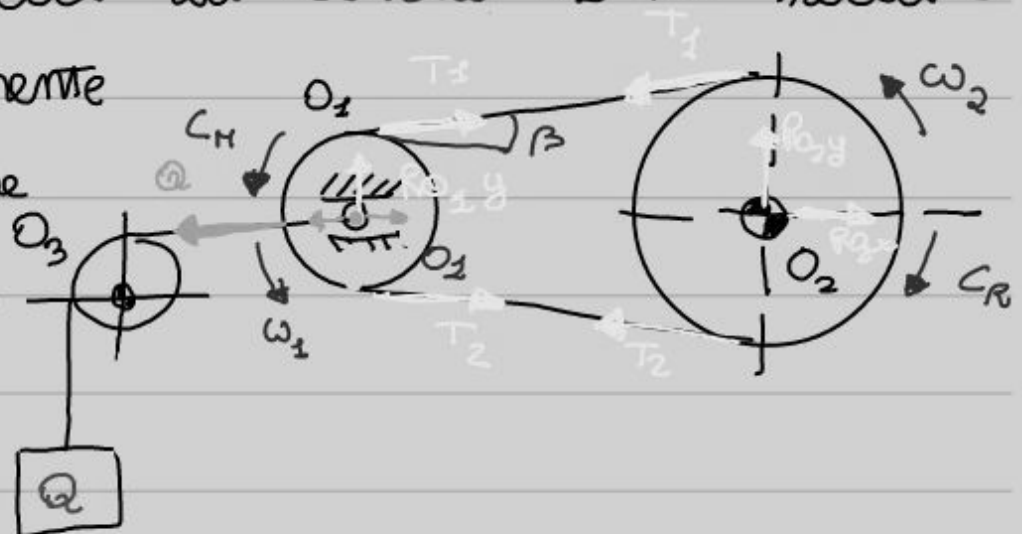
È un caso ideale.

Le tensioni sono uguali ed opposte, la loro risultante bilancia la reazione vincolare al perno.



2) Tenditore. La cerniera O_1 può traslare orizzontalmente

in funzione del carico.



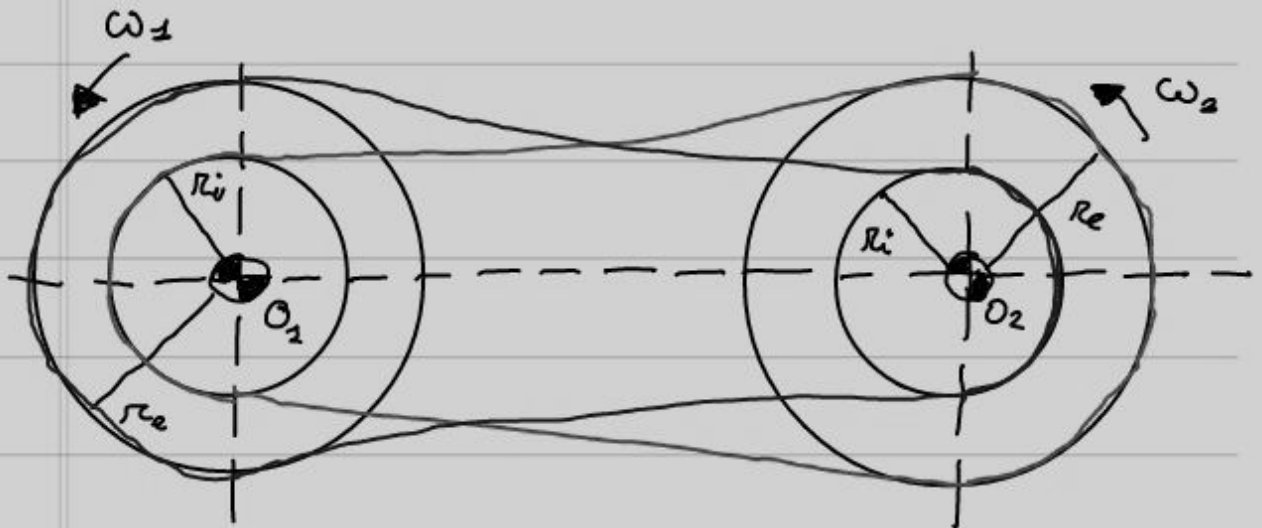
La tensione si regola automaticamente al variare del carico Q .

e da T_1 a T_2 , da cui si ricava:

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

dove T_0 è detto FORZAMENTO INIZIALE,
fissato a cinematica ferma.

VARIATORE DI VELOCITÀ



Giocando sulla tensione delle cinghie
e le posizioni delle pulegge, cambia
il rapporto tra le velocità:

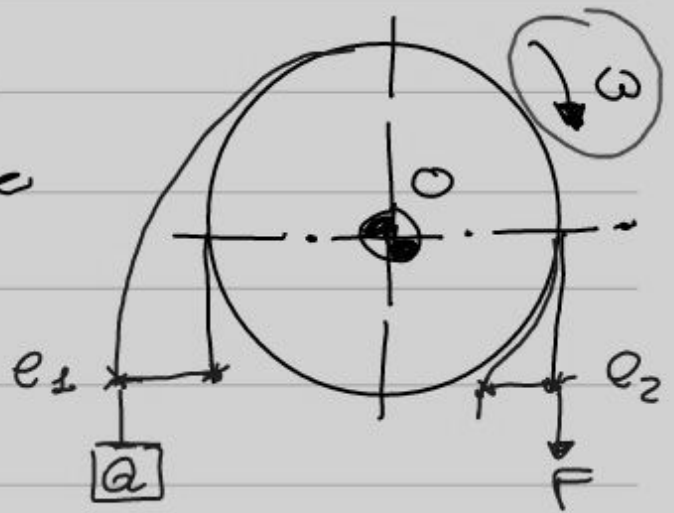
$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_e}{r_i} > 1$$

$$\bar{i} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cong \frac{r_i}{r_e} < 1$$

Si riesce quindi a cambiare il raggio
su cui lavora la puleggia motrice.

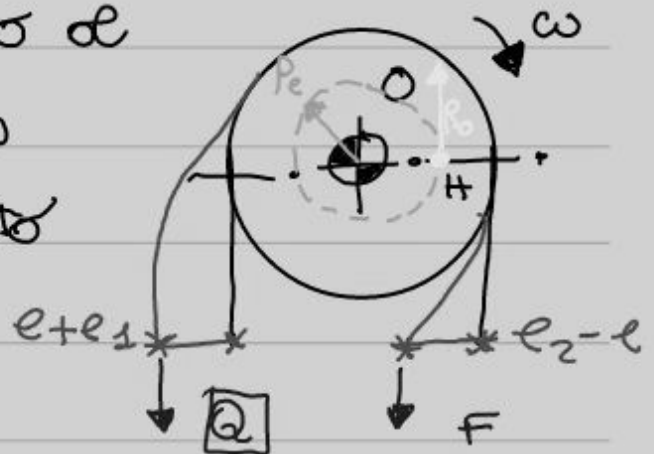
Si vede che non c'è differenza dal caso ideale senza elasticità.

b) In base al verso di rotazione, la fune si deforma da un lato o dall'altro.



c) È il caso fune, vede la sovrapposizione delle due rigidità, è come una sovrapposizione degli effetti.

Mettiamo anche attrito al fermo. Se avessimo ω opposta, lo sponciamento della fune sarebbe opposto.

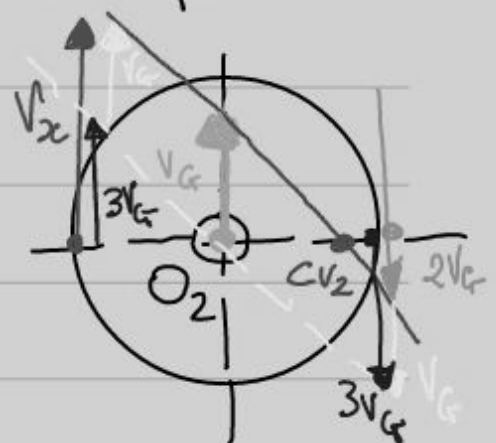


$$H \downarrow + -Q[e+e_1+r+p_e] + F[r-(e_2-e)+p_e] = 0$$

$$\downarrow F = Q \frac{[\dots]}{[\dots]}$$

Eseguiamo ora l'analisi cinematica per legare la velocità V_A a V_G :

- Puleggia 4; il C_V si trova nel punto di contatto, dove c'è aderenza e puro rotolamento tra puleggia e fune. Si fa quindi distribuzione triangolare delle velocità, che è nulla nel C_V e doppia nella periferia opposta della puleggia.
- Puleggia 3; la velocità $2V_G$ si trasmette, e passa sull'arco di fune della puleggia 2 per la distribuzione triangolare.
- Puleggia 2; qui si fa un caso particolare, il C_V si trova compreso tra il centro della puleggia e l'estremità, e ne esce una velocità non più identica, detta V_x . Per trovarla, spostiamo di una quantità " V_G " la retta congiungente le velocità, per



Se me ricava quindi la formula generale per la tensione sull' n -esima puleggia:

- $T_n = m_{c}^n \cdot F$ n -esima tensione

• Bozzello, equazioni di equilibrio:

$$\uparrow^+ T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = P \rightarrow F(m_c + m_c^2 + m_c^3 + m_c^4) = P$$

Quindi la generica formula sarà:

- $F(m_c + \dots + m_c^m) = P$ Forza

• Infine calcoliamo il rendimento totale

del parametro: $\eta_{TOT} = \frac{P_u}{P_e} = \frac{P \cdot V_G}{F(4V_G)} = \frac{P}{4F}$
 $= V_A$

- $\eta_{TOT} = \frac{P}{Fm} = \frac{m_c + \dots + m_c^m}{m}$ Rendimento Totale

$$V = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

Le ruote vengono premute grazie a una forza e trasmettono l'aderenza

- $$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$
 RAPPORTO DI TRASMISSIONE

PROFILO DEI DENTI

Per favorire l'ingranamento, il profilo è costruito ad "evolvente di cerchio":

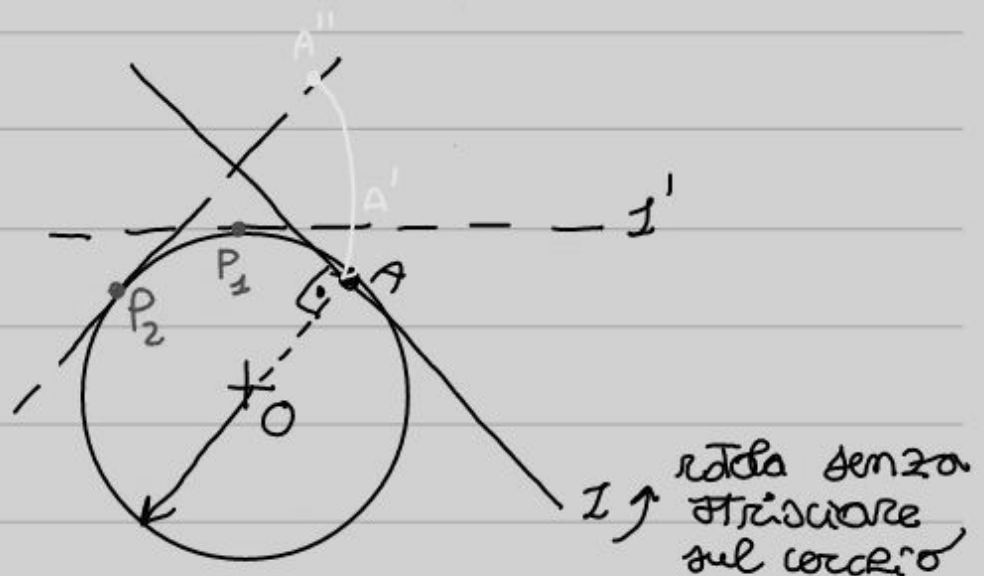
- È una curva i cui centri di curvatura stanno tutti su una circonferenza detta CERCHIO DI BASE (curva evoluta).

GOSTRUZIONE DELL'EVOLVENTE DI CERCHIO

Proprietà dell'evolvente:

$$\widehat{P_1 A} = \overline{P_1 A'}$$

$$\widehat{P_2 A} = \overline{P_2 A''}$$



$$V_1 = V_2 = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

$$\vec{V}_{STR} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \Rightarrow 0$$

\vec{V}_N è perpendicolare ai profili, quindi deve essere uguale sulle due ruote, altrimenti si sfacciano.

TIPDI RUOTE

a) ASSI // :
 → ruote dentate cilindriche a denti dritti
 → ruote dentate cilindriche a denti elicoidali

b) ASSI CONCORRENTI : ruote coniche ($i = 5/10$)

c) ASSI SGHENBI : vite-senza fine ruote a denti elicoidali ($i = 100$)

RUOTE ESTERNE

- ruote con C_{V12} interno a O_1, O_2 (interasse), ω_1 e ω_2 sono DISCORDI,

RUOTE INTERNE

C_{V12} esterno all'interasse $O_1 O_2$