www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 673

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Mottola

MATERIA: Analisi Matematica I Esercizi + quiz
Prof. Camporesi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 514

Sia $Q(n)$ una proposizione logica (formula, teorema, etc) dipendente da $n \in \mathbb{N}^+$ tale che:

1) $Q(1)$ è vera;

2) Se $Q(n)$ è vera per un certo n fissato (ma generico) $\Rightarrow$ $Q(n+1)$ è vera

cioè 2) $\forall n \in \mathbb{N}^+, \left(\underset{\text{vera}}{Q(n)}\right) \Rightarrow \left(\underset{\text{vera}}{Q(n+1)}\right)$

Allora $Q(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}^+$

DIMOSTRAZIONE: Nel nostro caso: $Q(n)$: $|P(A_n)| = 2^n \; \forall n$

1) $Q(1)$: $P(A_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$

$|P(A_1)| = 2 = 2^1$

2) fissato $n \in \mathbb{N}^+$ supponiamo che $Q(n)$ sia vera cioè che A_n abbia 2^n sottoinsiemi. Dobbiamo dimostrare che è vera $Q(n+1)$ cioè $|P(A_{n+1})| = 2^{n+1}$

sottoinsiemi di A_{n+1} = "vecchi" cioè quelli di A_n più i "nuovi" dove compare "$n+1$".

Per l'ipotesi induttiva (cioè $Q(n)$ vera) i vecchi sono 2^n. Per costruire i nuovi basta prenderne uno vecchio e aggiungere gli "$n+1$"

$\emptyset \longrightarrow \{n+1\}$

$\{1\} \longrightarrow \{1, n+1\}$

$\{n\} \longrightarrow \{n, n+1\}$

$\{1,2\} \longrightarrow \{1,2,n+1\}$

$\vdots$

$\{1,2,\dots,n\} \longrightarrow \{1,2,\dots,n+1\}$

$\Rightarrow$ il n dei nuovi è anche esso 2^n $\Rightarrow$ n totale $= 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 514

C. CANNITO A. IABACCO

INSIEMI: è costituito da certi elementi che appartengono all'insieme $a \in A$ a appartiene A. $\in$: appartiene

$a \notin A$ a non appartiene ad A

notazioni

$A = \{x : x$ ha la proprietà $P\}$ tali che

: tali che o si usa |

esempi: insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 0 incluso — $\mathbb{N}^+$: solo positivi, 0 escluso

numeri naturali

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ numeri interi

$\mathbb{Q}$ = numeri razionali $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} ; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

$\mathbb{R} = \{ x ; x$ è un allineamento decimale qualsiasi$\}$

$\mathbb{C}$ = numeri complessi $\mathbb{C} = \{ z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \}$ unità immaginaria

Questi sono tutti esempi di insiemi infiniti cioè con infiniti elementi

Un insieme finito ha invece solo un numero finito di elementi

$A_n = \{1, 2, 3, \dots n\} \Rightarrow$ insieme finito di n elementi con n naturale positivo

Diciamo che A è un sottoinsieme di B o che A è contenuto in B (o che B contiene A) $A \subseteq B$ se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B. $\forall$

$\forall$: per ogni, qualunque sia $\Leftrightarrow$: se e solo se

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \; x \in B \Leftrightarrow \forall x \, (x \in A) \Rightarrow x \in B$

proposizione logica: possiamo dire con certezza se è vera o falsa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 514

LEZ 4 A   nadia.montersino@polito.it

Disequazioni irrazionali

$$\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow f(x) \leq [Q(x)]^n$$

se n è dispari si possono elevare a n entrambi i membri

es. $\sqrt[3]{x(x^2-1)} > (x-1)$ $x(x^2-1) > (x-1)^3$

$x(x-1)(x+1) - (x-1)^3 > 0$

$(x-1)\left[x(x+1) - (x-1)^2\right] > 0$ $\sqrt{x^2-4} > x-4$

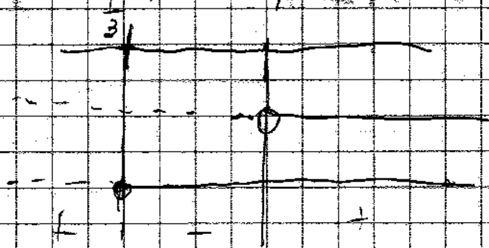
$(x-1)\left[x^2+x-x^2-1+2x\right] > 0$ $x^2-4 < x-4$

$(x-1)\left[3x-1\right] > 0$ $\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x-4 > 0 \\ x^2-4 < x^2 \ldots \end{cases}$

fattore F1   fattore F2

$(x-1) > 0 \Rightarrow x > 1$

$(3x-1) > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$



sol. $x < \frac{1}{3} \vee x > 1$

$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right), \left(1, +\infty\right)$

se n è pari invece 1) $\sqrt[n]{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \\ P(x) < [Q(x)]^n \end{cases}$

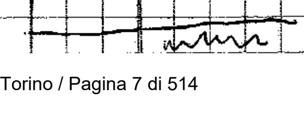
2) $\sqrt[n]{P(x)} > Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) > [Q(x)]^n \end{cases}$

ES. 1 proposto

$x-2 \leq \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow S_1 \begin{cases} x^2+1 \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ (x-2)^2 \leq x^2+1 \end{cases}$

$\begin{cases} \text{SEMPRE VER. } \forall x \in \mathbb{R} \\ x < 2 \\ x < 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ \cancel{x^2} - 4x + 4 \leq \cancel{x^2} + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ -4x \leq -3 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq \frac{3}{4} \\ x \geq 2 \end{cases}$

UNIONE SOLUZIONI: $x < 2 \vee x \geq 2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 514

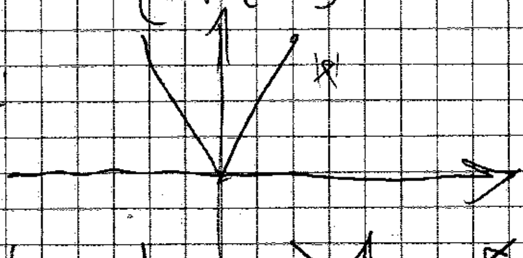
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

$y = f(x) \Rightarrow y = -f(x)$ ribalt rispetto asse x

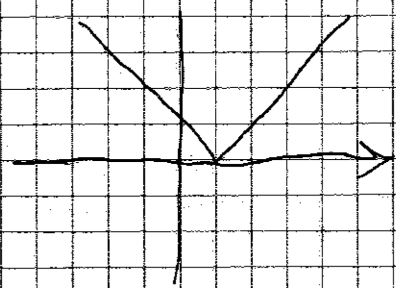
$y = f(x) \to y = f(-x)$ " " " " asse y

$$f(|x|) \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

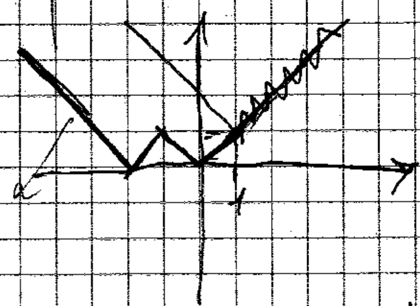
$|x|$



$|x-1|$

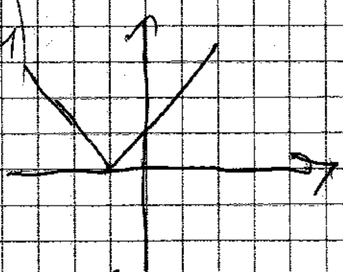


$1 + |x-1|$

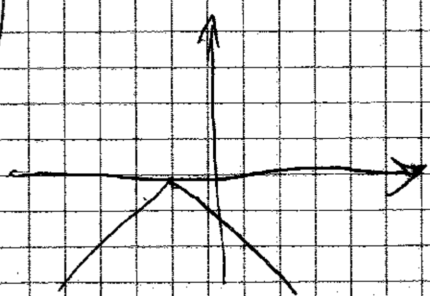


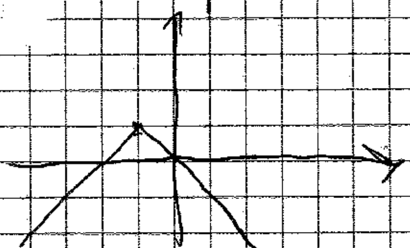
è solo uguale dall'uno in poi

$|x+1|$

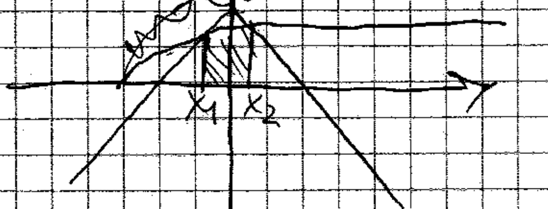


$-|x+1|$





SOL. $x \geq 1$



$2 - |x| > \sqrt{3+x}$

$2 - |x| > \sqrt{3+x}$

$$S_1 \begin{cases} x \geq 0 \\ 2 - x > \sqrt{3+x} \end{cases} \cup S_2 \begin{cases} x < 0 \\ 2 + x > \sqrt{3+x} \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 514

$$\sum_{k=1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

1) Dimostro che vale per $P(1)$ $\sum_{k=1}^{1} 1^3 = \frac{1(2^2)}{4}$ = VERA

Dimostro che vale per $P(n+1)$ $\sum_{k=1}^{n+1} 1^3 = \frac{(n+1)^2(n+1)^2}{4} =$

$$= \frac{(n^2+1+2n)(n^2+1+2n)}{4} = \frac{n^4+n^2+2n^3+n^2+1+2n+2n^3+2n+2n^2}{4} =$$

$$= \frac{n^4+4n^2+4n^3+4n+1}{4} = \frac{n^2(n^2+4n)+n(4n^2+4)+1}{4}$$

RICOMINCIO: $\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$3^n > n2^n$

$3^{n+1} > (n+1)2^{n+1}$ $\quad 3^{n+1} = 3n(n+1)2^{n+1} = n2^{n+1} + 2^{n+1}$

$3^n \cdot 3 > (n+1)2^n \cdot 2$ $\quad 2^{n+1}(n+1)$

$(1+a)^n \geq 1+na$ $\quad (1+a)^n(1+a) \geq 1+(n+1)a$

$(1+a)^n(1+a) \geq 1+na+a$

$(1+a)^n(1+a) \geq 1+a(n+1) = 1+(na+a)$ $\quad 1+a(n+1)$

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\quad \sum_{k=1}^{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2n+2}{2} =$$

$$\frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{1(n+2)+n(n+2)}{2} = \frac{(1+n)(n+2)}{2}$$

2. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ $\quad \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2n+2-1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 514

es. 16 proposti $\sum_{K=1} K \cdot K! = (n+1)! - 1 \quad \forall n \geq 1$

(i) predicato $n=1$ $P(1)$

$0! = 1$

per $n=1$ $\quad 1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 \qquad 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$1 = 2 - 1$ è vera

(ii) supponiamo che sia vero per un generico n fissato appartenente ai naturali, $n \in \mathbb{N}^+$

$$P(n): \sum_{K=1}^{n} K \cdot K! = (n+1)! - 1$$

(ii) dimostro che è vero per $n+1$

$$\sum_{K=1}^{n+1} K \cdot K! \overset{?}{=} ((n+1)+1)! - 1 = (n+2)! - 1 = (n+2)(n+1)! - 1$$

$$\sum_{K=1}^{n+1} K \cdot K! = \sum_{K=1}^{n} K \cdot K! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$$= (n+1)! \left[1 + (n+1)\right] - 1 = (n+1)!(n+2) - 1$$

es. 17 proposti

$$(1+a)^n \geq 1 + na \quad \forall a > -1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(i) per $n=0$ $\quad (1+a)^0 \geq 1 + 0a \rightarrow 1 \geq 1$ è vera

per $n=1$ $\quad 1+a \geq 1+a$ è vera

(ii) suppongo che sia vera per un n arbitrario, $P(n): (1+a)^n \geq 1+na$

$n \in \mathbb{N}$

devo dimostrare che è vera per $n+1$

$$(1+a)^{n+1} \overset{?}{\geq} 1 + (n+1)a$$

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1 + a + na + na^2 = 1 + (1+n)a + na^2$$

perciò $1 + (1+n)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$ vero perché c'è $+na^2$

siccome n è naturale e a è positivo, sarà sicuramente un numero positivo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 514

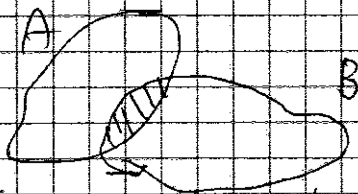
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 514

OPERAZIONI SU INSIEMI

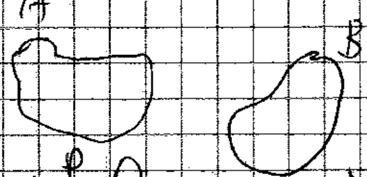
X = insieme ambiente

$A, B, C \ldots \subseteq X$

1) intersezione $A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\}$



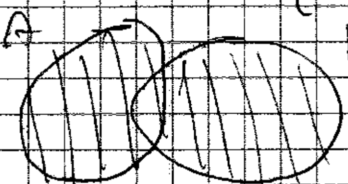
A, B si dicono disgiunti se $A \cap B = \emptyset$



Si noti la somiglianza tra $A \cap B$
e la congiunzione logica tra 2 proposizioni P, Q

P e Q opp. $P \wedge Q$ è vera se sono vere tutte e due

2) unione $A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$



Se A, B sono disgiunti allora $A \cup B$ = unione disgiunta

Unione analoga alla cosiddetta disgiunzione logica di P, Q

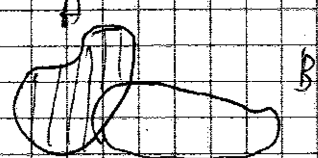
si indica: P o Q oppure $P \vee Q$

che è vera se almeno una delle proposizione P o Q è vera

è falsa se P e Q sono entrambe false

3) differenza

$\underset{\text{meno}}{A \setminus B} = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \notin B\}$



es: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = numeri irrazionali

4) differenza simmetrica: $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 514

Esempio di dimostrazione

$$C(A\cup B) = \{x\in X : x\notin A\cup B\} = \{x\in X : x\notin A \text{ e } x\notin B\}$$
$$= \{x\in X : x\in C(A) \text{ e } x\in C(B)\} = C(A)\cap C(B)$$

Funzioni

A, B insiemi (non vuoti) qualsiasi. Una funzione o applicazione da A a B (o di A in B): $f: A\to B$ opp $A\xrightarrow{f} B$
è una legge che ad ogni elemento di A fissato fa corrispondere uno e un solo elemento di B.
Se $x\in A$ l'elemento $y\in B$ che corrisponde a x secondo la funzione f si chiama l'immagine di x secondo f e si indica con $f(x)$.

A = dominio di f B = codominio di f

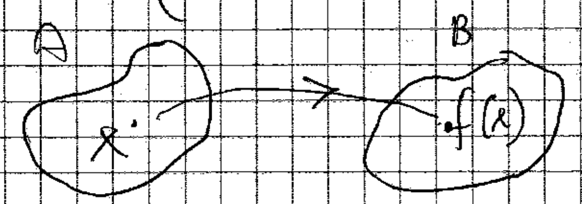
L'immagine di f è l'insieme di tutti gli immagini di A

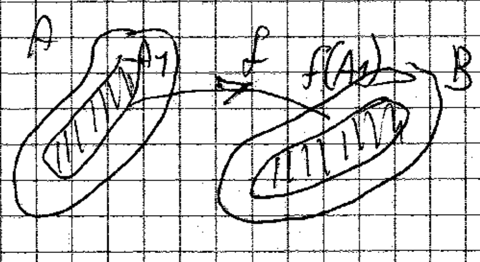
$$f(A) = \operatorname{im} f = \{f(x)\in B : x\in A\} = \{y\in B : \exists\, x\in A : f(x)=y\}$$

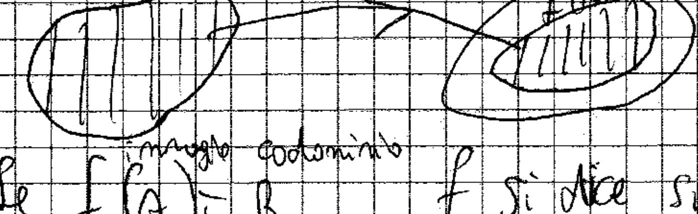
In generale $f(A)\subseteq B$

Se $A_1\subseteq A$ l'immagine di A_1 secondo la funzione f è

$$f(A_1) = \{f(x) : x\in A_1\}$$







Se $f(A) = B$ (immagine = codominio) f si dice suriettiva e si specifica su B

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 514

Nella 2: vale =

cioè $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \iff f$ è 1-1

- $\forall B_1, B_2 \subseteq B$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

$\forall X \subseteq A$ vale $f^{-1}(f(X)) \supseteq X$ e l'uguaglianza vale $\iff f$ è 1-1

$\forall Y \subseteq B$ vale $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

con uguaglianza $\iff Y \subseteq \operatorname{im} f$

Se $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$

una funzione $f: A \to B$ si dice funzione reale di variabile reale

Il grafico di una $f: A \to \mathbb{R}$

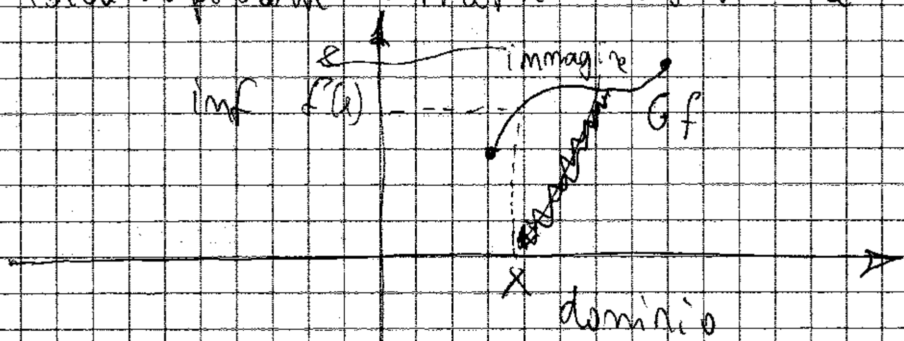
con $A \subseteq \mathbb{R}$ è il seguente sottoinsieme del piano $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ = piano cartesiano

$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\} = \{(x, \underbrace{f(x)}) : x \in A\}$ variabile indipendente, dipendente

x = variabile indipendente si mette in orizzontale

y = variabile dipendente si mette in verticale



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 514

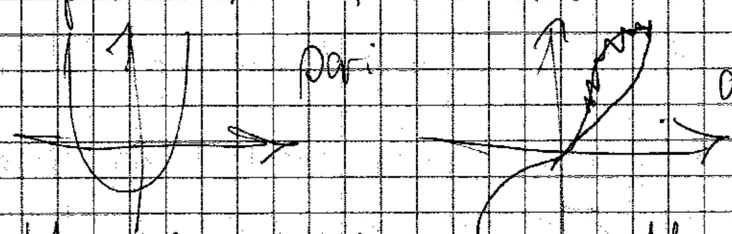
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 514

GRAFICI e OPERAZIONI SUI GRAFICI

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
con A simmetrico rispetto all'origine si dice pari se
$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in A$
si dice dispari se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in A$

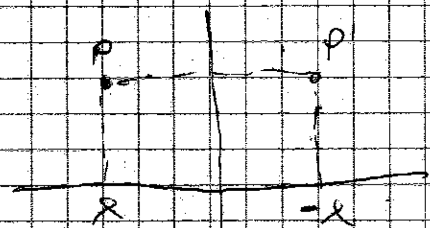
È immediato:

- f pari $\Leftrightarrow$ G_f è simmetrico rispetto all'asse y
- f dispari $\Leftrightarrow$ G_f è simmetrico rispetto all'origine

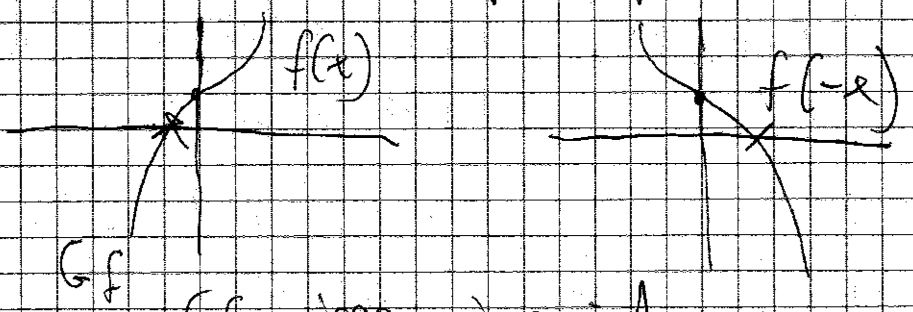


Infatti la simmetria rispetto all'asse y è l'applicazione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ definita da $(x,y) \to (-x,y)$

$P = (x,y) \to (-x,y) = P'$



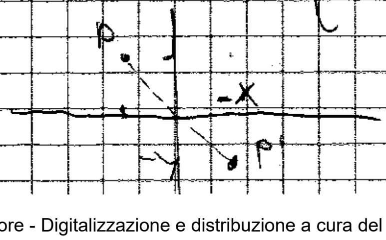
Operando questa simmetria su una funzione $f(x)$ otteniamo la funzione $f(-x)$, il cui grafico si ottiene da G_f riflettendo rispetto all'asse y.



Se f è pari G_f rimane invariato

La simmetria rispetto all'origine

$(x,y) = P \longrightarrow (-x,-y) = P'$

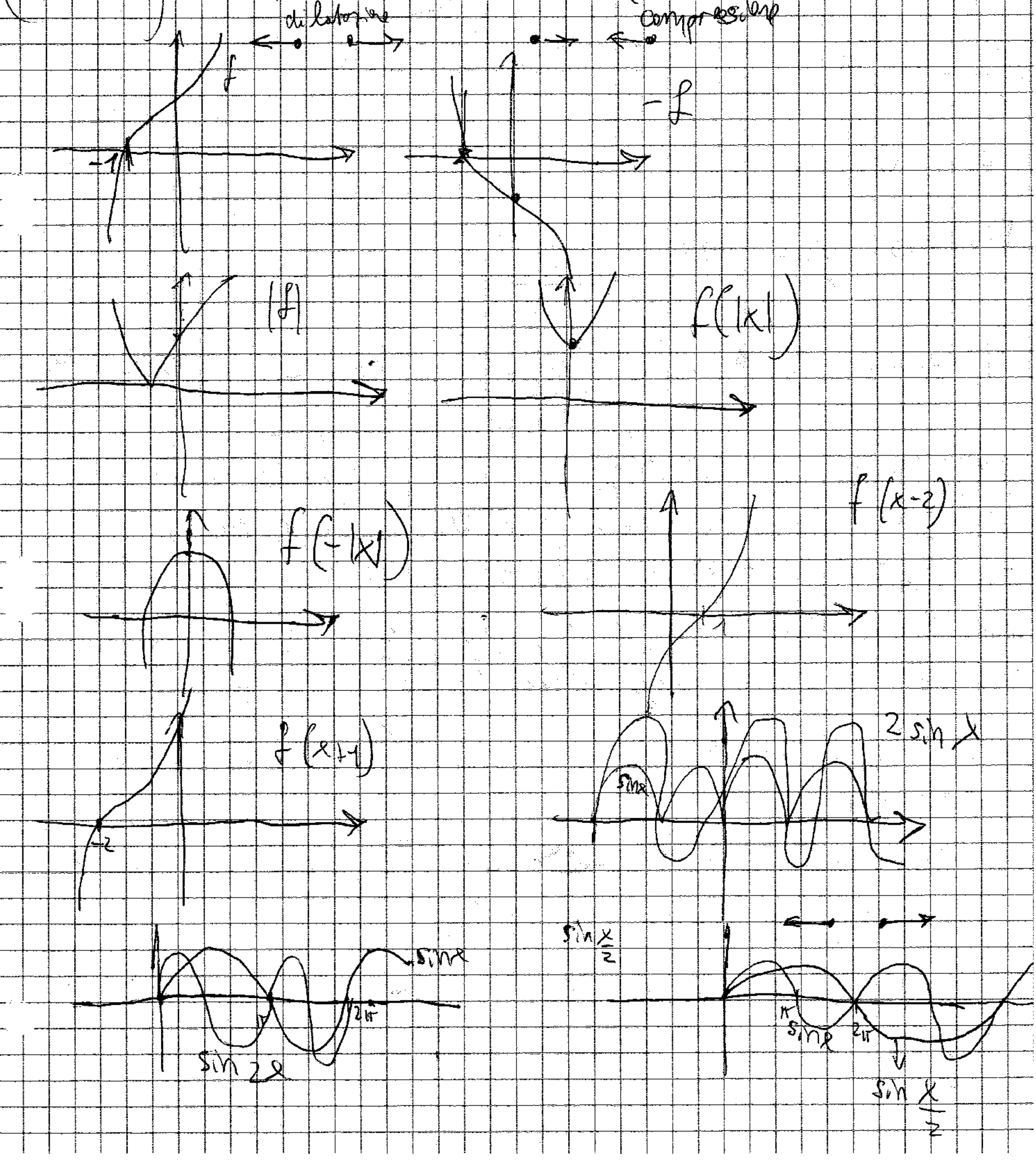


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 514

• $c f(x)$ $(c>0)$ si dilata G_f (se $c>1$), si comprime G_f (se $0<c<1$) nella direzione verticale

• $f(cx)$ $(c>0)$ si dilata se $0<c<1$, si comprime (se $c>1$) G_f in direzione orizzontale



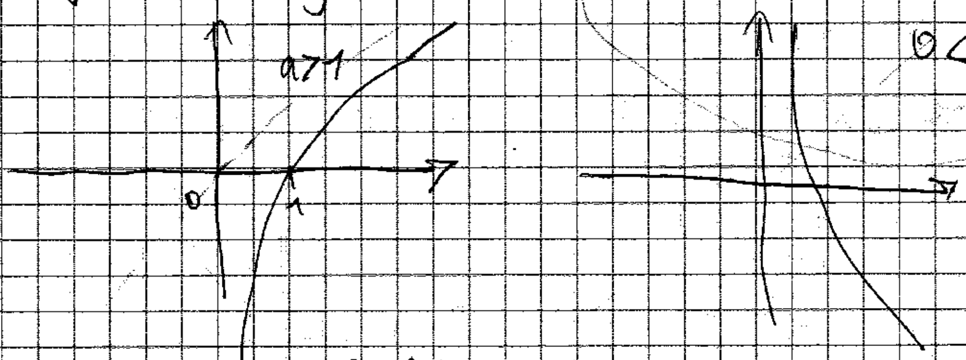
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 514

$\forall\, y > 0$ l'equazione $a^x = y$

ha 1 e 1 sola soluzione : $x = \log_a y$

Grafici di $\log_a x$



$a^x a^y = a^{x+y}$ $\quad (a^x)^y = a^{xy}$

$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a (x^y) = y \log_a x$

$(\log_a b) \cdot (\log_b c)\ \log_a c$

da cui segue subito che posto $\log x = \log_e x = \ln x$ = logaritmo naturale dove $a = e$ = n° Nepero $\simeq 2,71$

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

FUNZIONE COMPOSTA

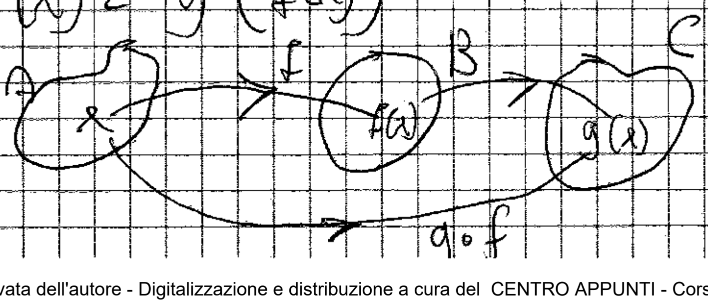
3 insiemi A, B, C

$f : A \to B \quad , \quad g : B \to C$

possiamo definire $h = g \circ f : A \to C$

$h(x) = g(f(x))$ quindi per def.

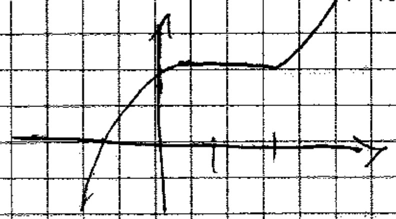
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 514

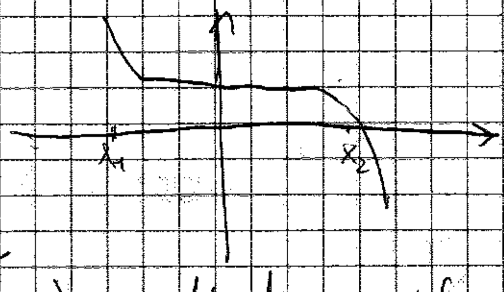
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 514

• crescente $\iff \forall x_1 < x_2 \quad f(x_1) \le f(x_2)$



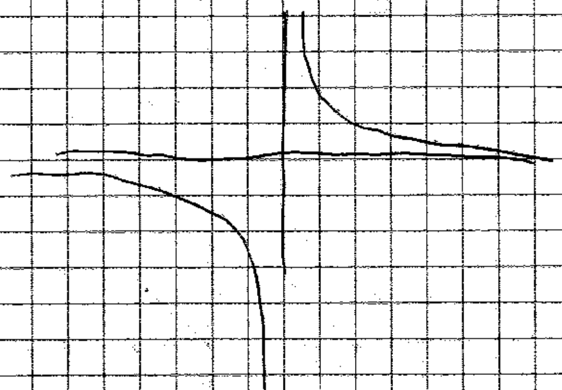
crescente ma non strettamente

• decrescente $\iff \forall x_1, x_2 \quad f(x_1) \ge f(x_2)$



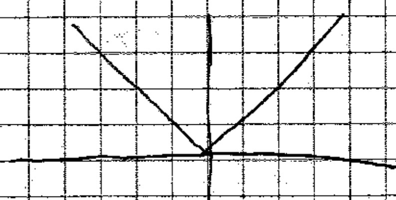
È immediato verificare che se f è strettamente monotona (crescente o decrescente) allora f è 1-1

Il viceversa non vale come mostra l'esempio di $\frac{1}{x}$



è 1-1
però non è strettamente monotona

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \ge 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



valore assoluto

$sgn(x)$ = segno di x

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

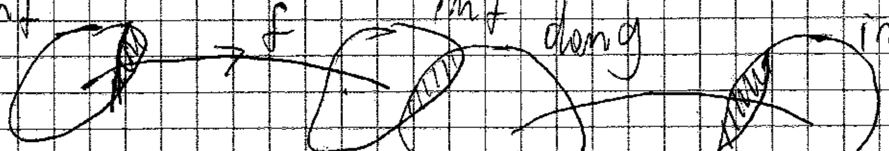
$[x]$ = parte intera di x = il più grande intero che non supera x

$[0] = 0 \quad [0{,}5] = 0 \quad [1] = 1 \quad [1{,}5] = 1 \quad [2{,}7] = 2 \quad [\pi] = 3$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 514

Ma in generale siano f, g tali che $\text{im} f \cap \text{dom} g \neq \emptyset$ 22



Potrò allora $g \circ f(x) = g(f(x))$ per tutti gli x tali che $f(x) \in \text{im} f \cap \text{dom} g$ cioè $\forall x \in f^{-1}(\text{im} f \cap \text{dom} g) =$
$= \text{dom}\, g \circ f$

$\text{im}\, g \circ f = g(\text{im} f \cap \text{dom}\, g)$

Date 2 funzioni f, g affinché risulti definita la funzione composta $g \circ f$ deve essere
$\text{im} f \cap \text{dom} g \neq \emptyset$

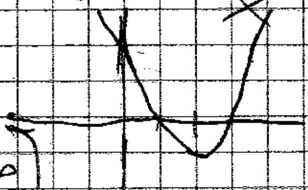
In tal caso risulta che il dominio della funzione composta:

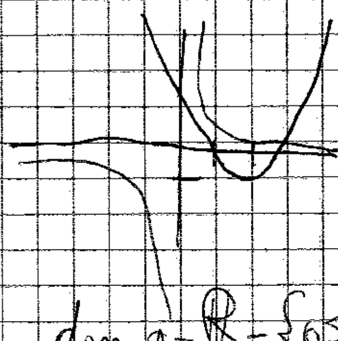
$\text{dom}\, g \circ f = f^{-1}(\text{im} f \cap \text{dom} g)$

$\text{im}\, g \circ f = g(\text{im} f \cap \text{dom}\, g)$

es: $f(x) = x^2 - 4x + 3 =$ $\quad g(x) = \frac{1}{x}$

$= (x-2)^2 - 1 = (x-1)(x-3)$





$\text{im} f = \{y : y \geq -1\} = [-1, +\infty)$ $\quad \text{dom}\, g = \mathbb{R} - \{0\}$

intervalli di $\mathbb{R}$ sono gli insiemi del tipo: $(a, b \in \mathbb{R}\ a<b)$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$(a,b] = \{x : a < x \leq b\}$

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 514

f, g entrambe crescenti
oppure
f, g entrambe decrescenti $\Rightarrow g \circ f$ crescente

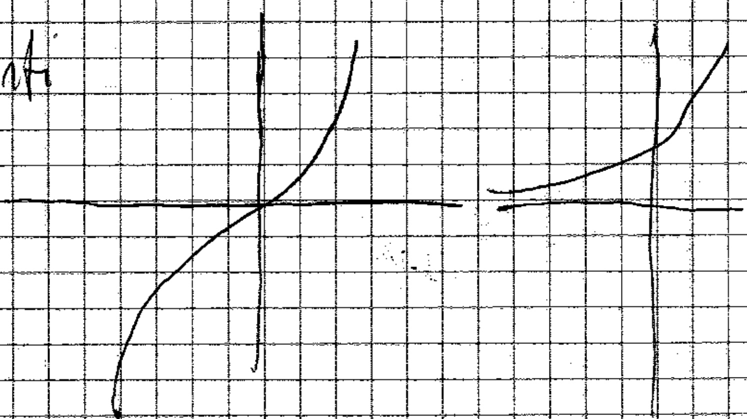
- f crescente, g decrescente
- f decrescente, g crescente

$\Rightarrow g \circ f$ decrescente

Inoltre $g \circ f$ è strettamente monotona se g ed f sono entrambe strettamente monotone

es.: $f(x) = x^3$, $g(x) = 2^x$

Sono strettamente crescenti



$\Rightarrow g \circ f(x) = 2^{x^3}$

è strettamente crescente — anche $f \circ g(x) = (2^x)^3 = 2^{3x}$ è strettamente crescente

La regola si può enunciare anche per f e g ristrette a intervalli del loro dominio:

Sia $I \subseteq \mathrm{dom}\, g \circ f$ e sia $J = f(I) \subseteq \mathrm{dom}\, g \Rightarrow$

- $f|_I$ crescente, $g|_J$ crescente
- $f|_I$ decrescente, $g|_J$ decrescente

$\Rightarrow g \circ f|_I$ crescente

- $f|_I$ decrescente, $g|_J$ crescente
- $f|_I$ crescente, $g|_J$ decrescente

$\Rightarrow g \circ f|_I$ decrescente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 514

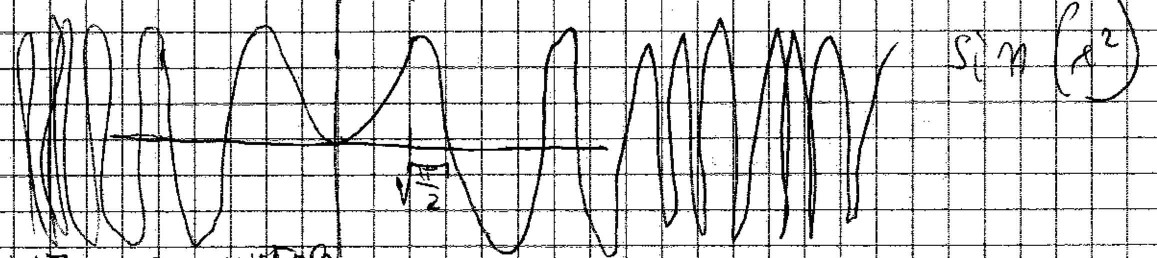
31

$\Rightarrow \sin(x^2)\Big|_{\left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]}$ crescente

$I = \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\pi}\right]$, $g|_I$ crescente

$J = g(I) = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f|_J$ decrescente

$\sin(x^2)\Big|_{\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\pi}\right]}$ decrescente



FUNZIONE INVERSA

Sia $f : A \xrightarrow[su]{1-1} B$ biunivoca

Dato $y \in B$ $\exists!$ esiste un solo $\exists!\ x \in A$ tale che $f(x) = y$

Possiamo allora definire una nuova funzione $f^{-1} : B \to A$ detta la funzione inversa di f, definendo $f^{-1}(y) = x$ cioè quell'unico elemento di A tale che $f(x) = y$

Quindi per definizione $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$ e quindi

$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$, $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B$

Se $f : A \xrightarrow[su]{1-1} B$ o anche se $f : A \xrightarrow{1-1} B$

f si dice invertibile (su A) scambio tra loro dominio e immagine

Proprietà della funzione inversa

1) Se $f : A \to B$ è biunivoca anche $f^{-1} : B \to A$ è biunivoca e vale $(f^{-1})^{-1} = f$

2) $f^{-1} \circ f = id_A$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 514

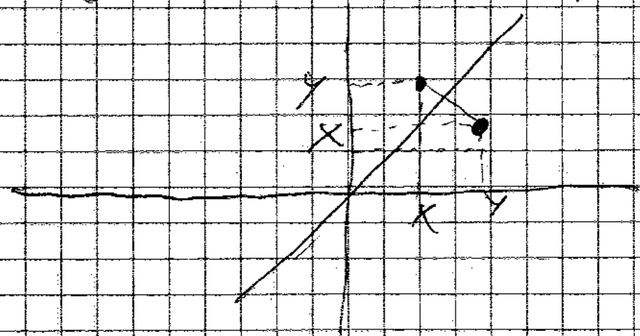
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 514

Detta $f^{-1}: B \to A$ l'inversa vale:

- f strettamente cresc. su $A \Rightarrow$
  f^{-1} " " " " " " B
- f strett. decrescente su $A \Rightarrow$
  f^{-1} " " " " " " B

5) Se $f: A \xrightarrow[su]{1-1} B$

$f^{-1}: B \xrightarrow[su]{1-1} A$ con $A, B \subseteq \mathbb{R}$, allora il grafico di f^{-1} è il simmetrico del grafico G_f di f rispetto alla bisettrice $y = x$

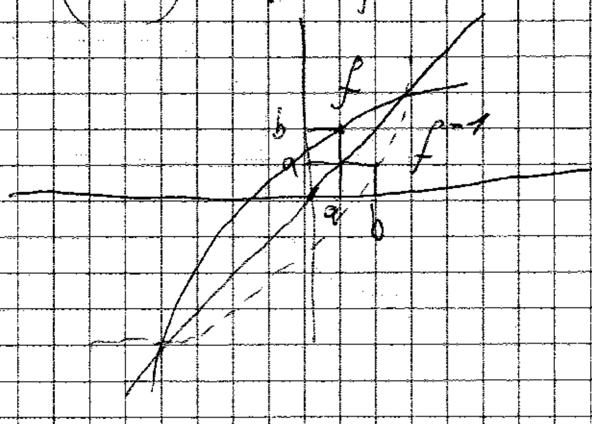


Tale simmetria è:

$$\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases}$$

Allora per definizione se $(a,b) \in G_f$
allora $(b,a) \in G_{f^{-1}}$

Infatti se $(a,b) \in G_f \Rightarrow (a,b) = (a, f(a))$; e inoltre
$a = f^{-1}(b) \Rightarrow (b, f^{-1}(b)) = (b,a) \in G_{f^{-1}}$

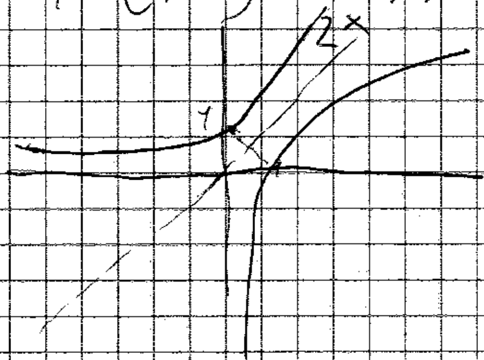


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 514

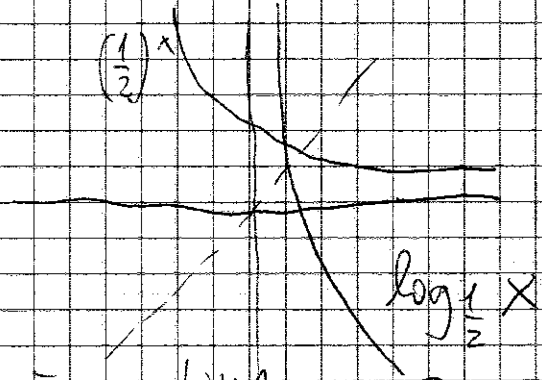
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 514

4) $f(x)=a^x \quad (a>0,\ a\neq 1)$

$a^x = y \ (y>0) \iff x=\log_a y$



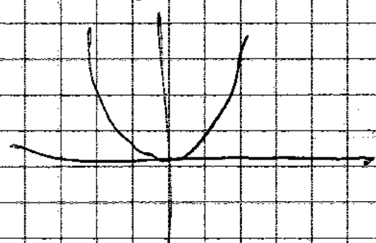
$2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

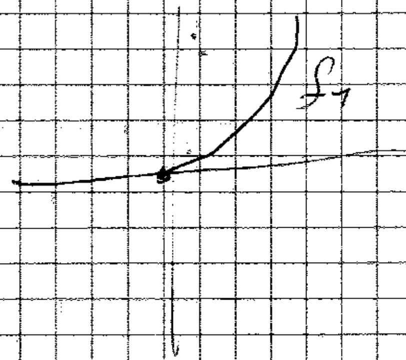


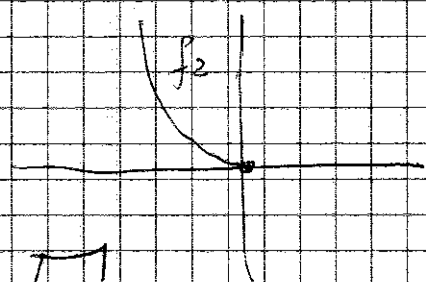
5) $f(x)=x^2$ non è invertibile su $\mathbb{R}$ perché non è 1-1

$f_1 = f|_{[0,+\infty)}$

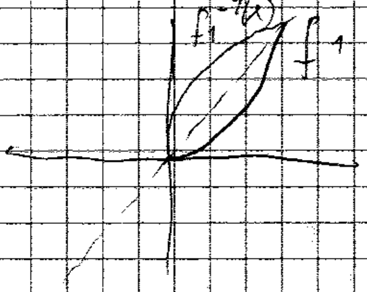
$f_2 = f|_{(-\infty,0]}$

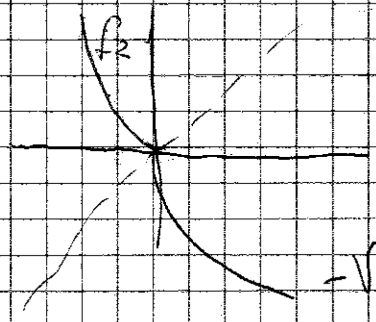






$x^2=y \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$

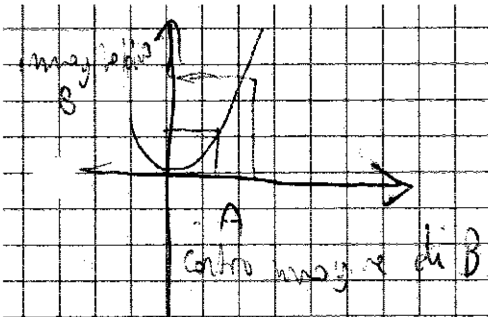




$-\sqrt{x} = f_2^{-1}(x)$

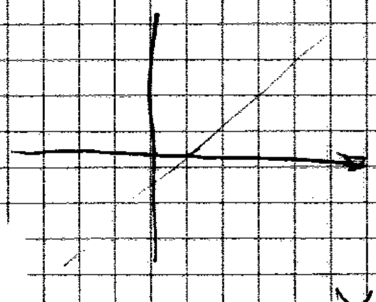
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 514



FUNZIONE INVERSA

$B = \text{dom } f^{-1} = \text{im} f \quad \text{im} f^{-1} = \text{dom} f = A$



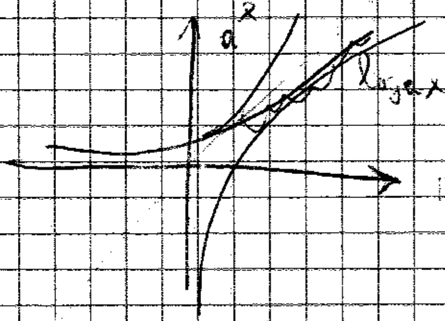
$y = x - 1$

$\text{dom} f = \mathbb{R} \quad f$ 1-1, su

$\text{im} f = \mathbb{R}$

$x = y + 1$

$x \xrightarrow{f} \overbrace{x-1}^{y} \xrightarrow{f^{-1}} y+1 = (x-1) + 1 = x$



$a^x: \mathbb{R} \to (0; +\infty)$

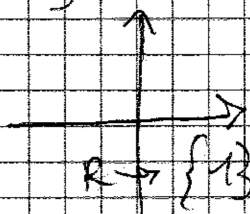
dominio immagine

inversa $\log_a x : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$

$x \to a^x \to \log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x \to \log_a x \to a^{\log_a x} = x \quad \forall x \in (0; +\infty)$

$a^x \quad a = 1$

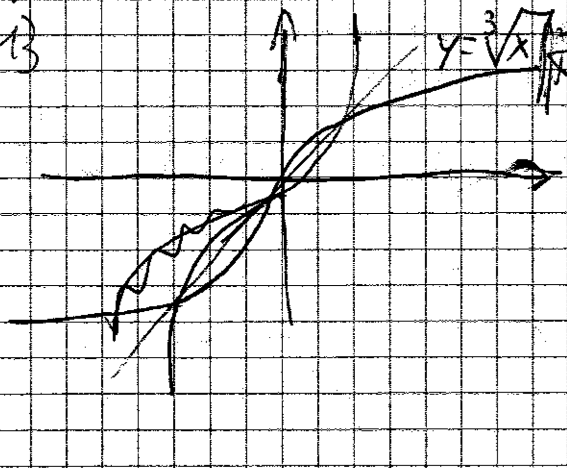


$\mathbb{R} \to \{1\}$

NON HA SENSO $\log_1 x$

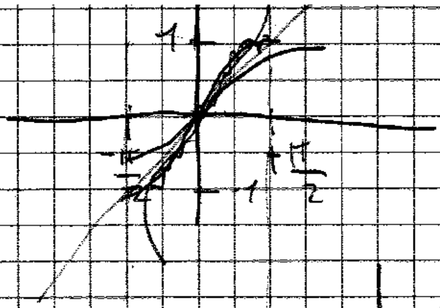
$y = x^n \quad n \geq 3$

$y = x^3$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 514

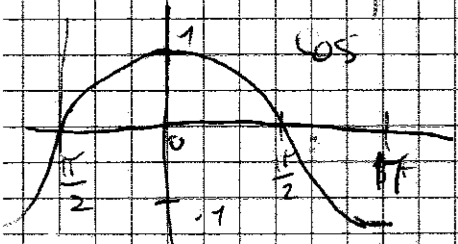
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 514

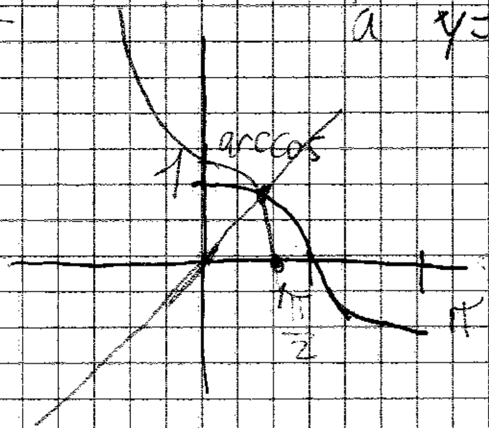


$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ 40

$y = \arcsin x$

$y = a\sin$ purtroppo nella calcolatrice $y = \sin^{-1}$ che non significa a $y = \frac{1}{\sin x}$



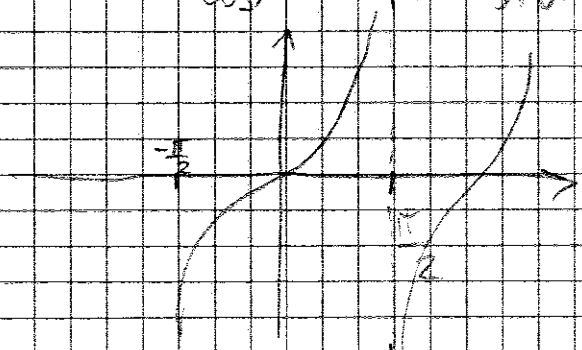


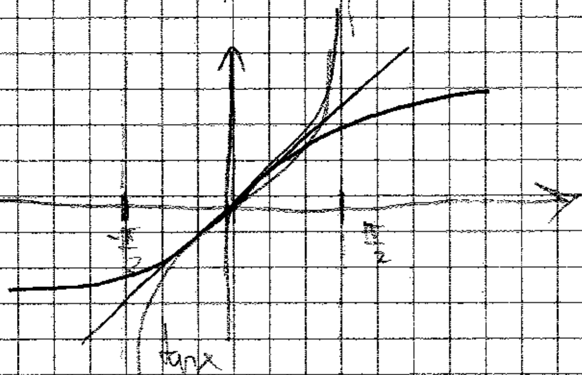
$[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ PERIODICA DI PERIODO π

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\text{dom} f \rightarrow \mathbb{R}$





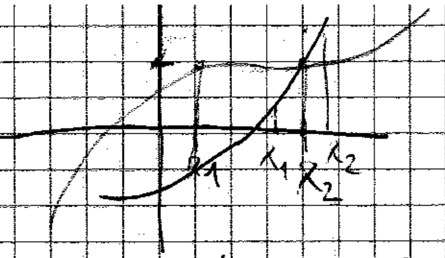
$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 514

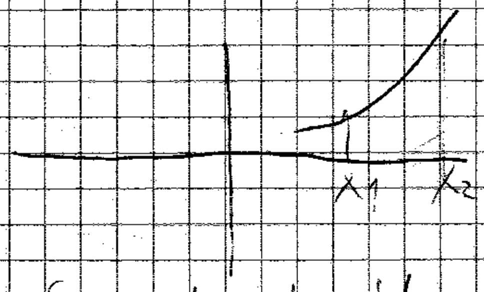
monotonia



funzione crescente

funzione strettamente crescente

Se f è strettamente monotona in A è iniettiva

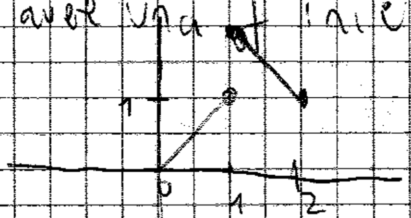


iniettiva: devo fare vedere che $\forall x_1, x_2 \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Se $x_1 \neq x_2$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

$\Big\}\ f(x_1) \neq f(x_2)$

posso avere una f iniettiva ma non monotona

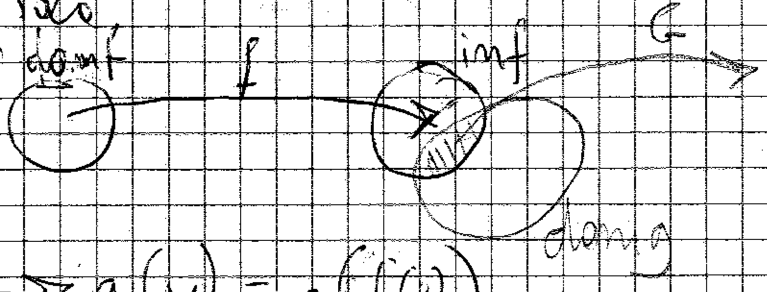


$[0,2]$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 3 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

non è monotona perché prima è crescente e poi decrescente monotonia vuol dire che deve essere in a cosa solo

Es. f^{-1} FUNZIONE COMPOSTA



$x \rightarrow f(x) \rightarrow g(y) = g(f(x))$
$\qquad\quad y$

$g(f(x)) = (g \circ f)$ g composto f o $g \circ f$

$f(x) = \sin x \qquad x \xrightarrow{f} \sin x \xrightarrow{g} \log(\sin x)$

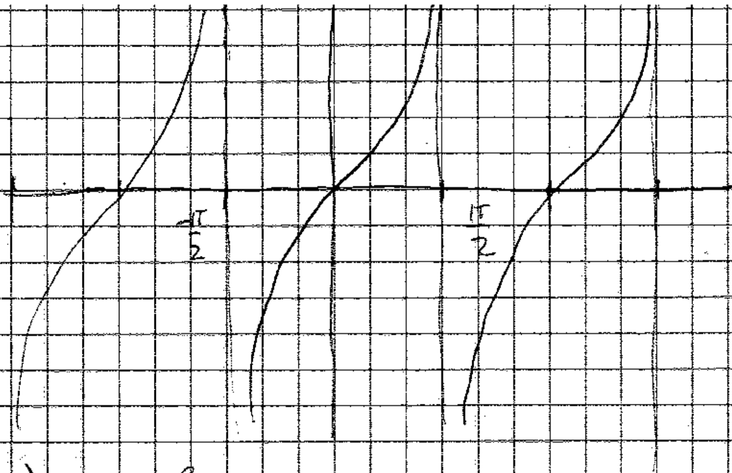
$g(x) = \log x \qquad x \xrightarrow{g} \log x \xrightarrow{f} \sin(\log x)$

$g \circ f \neq f \circ g$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 514

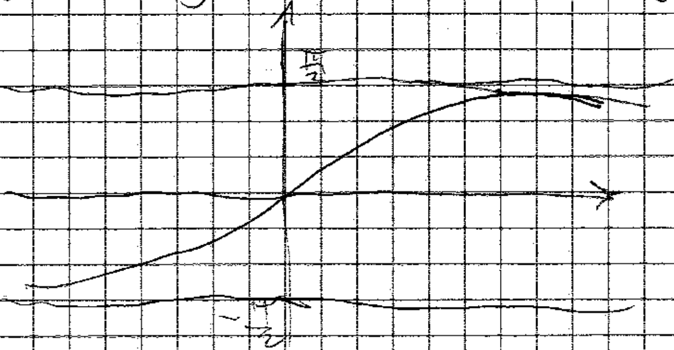
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 514

$tg\,x = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

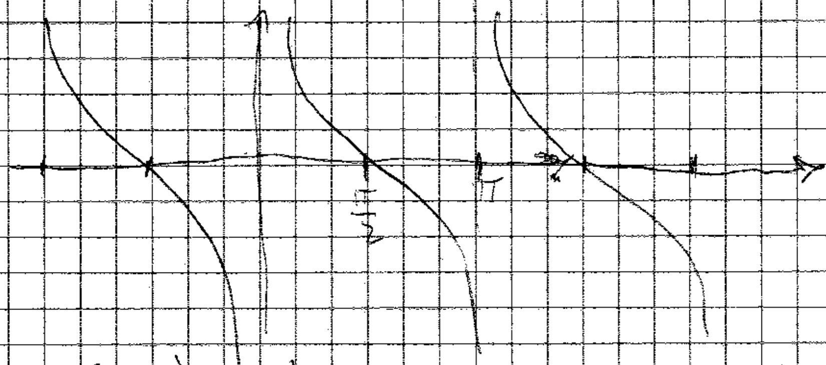


$f_1(x) = tg\,x \big|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} : \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = arctg\,x = arctan\,x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

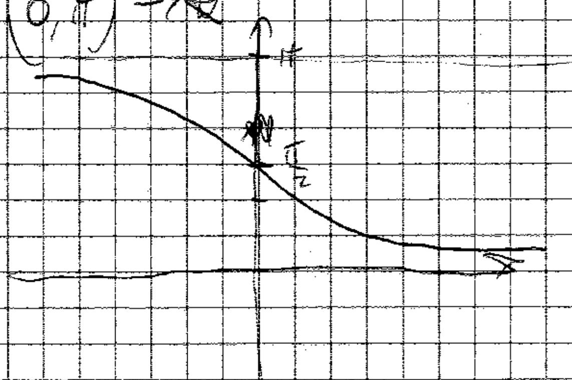


$cotg\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$



$f_1(x) = cotg\,x \big|_{(0,\pi)} : (0,\pi) \to \mathbb{R}$

$arccotg\,x : \mathbb{R} \to (0,\pi)$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 514

Esempio per induzione

$$\sum_{K=1}^{n} K = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

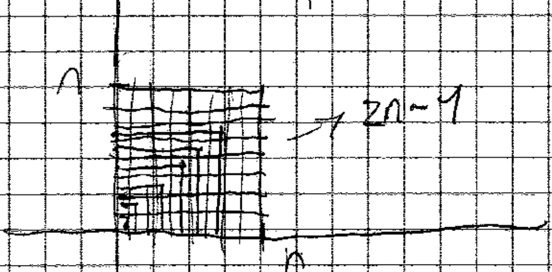
2) $$\sum_{K=1}^{n} (2K-1) = 1+3+5+7+\dots+(2n-1) = n^2$$

$n=1 \to 1$ $\quad n=3 \to 1+3+5=9$

$n=2 \to 1+3=4$ $\quad n=4 \to 1+3+5+7=16$

1° dimostrazione per induzione (x es.)

2° dimostrazione prendere un quadrato di lato n



area $= n \cdot n = n^2$

3° dimostrazione $$\sum_{K=1}^{n} (2K-1) = 2\sum_{K=1}^{n} K - \sum_{K=1}^{n} 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

3) $$\sum_{K=1}^{n} K^2 = 1+4+9+16+25+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

per induzione (a casa)

4) $$\sum_{K=1}^{n} K^3 = 1+8+64+125+\dots+n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

5) Somma della progressione geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$

$$1+x+x^2+x^3+\dots+x^n = \sum_{K=1}^{n} x^K = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \forall x \neq 1$$

Fattoriale

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad (n \geq 1) \qquad 0! = 1$

Proprietà fondamentale

$n! = n \cdot (n-1)! = n(n-1) \cdot (n-2)!$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 514

TEOREMA (Binomio Newton)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} +$$

$$+ \binom{n}{n} b^n$$

Interpretazione insiemistica di $n!$ e di $\binom{n}{k}$

$A_n = \{1, 2, 3 \dots, n\}$

Una permutazione di A_n è una disposizione ~~degli~~ dei suoi elementi in una sequenza ordinata del tipo $(a_1, a_2 \dots a_n)$ con $a_j \in A_n$ e $a_i \neq a_j$ per $i \neq j$ cioè $a_1 \neq a_2$ $a_2 \neq a_3$

es: le permutazioni di A_3 sono: $(1,2,3)$ $(2,3,1)$ $(3,1,2)$ $(1,3,2)$ $(2,1,3)$ $(3,2,1)$ ovvero $3!$

Ad ogni permutazione $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ di A_n corrisponde una funzione biunivoca $f: A_n \xrightarrow[su]{1-1} A_n$ come segue

$f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, ..., $f(n) = a_n$

es: $(2,3,1) \Leftrightarrow f: A_3 \rightarrow A_3$

$f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$

Viceversa data una $f: A_n \xrightarrow[su]{1-1} A_n$

gli si associa la permutazione $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ di A_n con $a_1 = f(1)$ $a_2 = f(2)$ .... $a_n = f(n)$

$\Rightarrow$ permutazioni di A_n coincidono con le funzioni biunivoche di A_n in se

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 514

Siano $0 \le K \le n$

e sia $C_{n,K}$ il numero dei sottoinsiemi di K elementi contenuti in A_n

TEOREMA

$C_{n,K} = \binom{n}{K}$

Dim: le K-uple ordinate $(a_1, a_2, \dots, a_K)$ che differiscono fra loro per l'ordine corrispondono tutte allo stesso insieme di K elementi $\{a_1, a_2, \dots, a_K\}$ =>

=> $C_{n,K} = \dfrac{n^\circ\ K\text{-uple ordinate}}{K!} = \binom{n}{K}$

disposizione di n oggetti distinti in sequenze di K

es: $n=4$ $K=2$

$\{1,2\}\{1,3\}\{1,4\}\{2,3\}\{2,4\}\{3,4\} \to 6$

$\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$

Quante cinquine al lotto?

$n=90$, $K=5$ $\binom{90}{5} = \dfrac{90!}{5!\,85!} = \dfrac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot \cancel{85!}}{120\cdot \cancel{85!}}$

$= 43949268$

Quante sestine al superenalotto

$n=90$, $K=6$

$\dfrac{n!}{K!\,(n-K)!} = \dfrac{90\cdot 89 \cdots}{6!\,(84)}$

$\binom{90}{6} = \dfrac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85}{720} = 622614600$

COROLLARIO Il numero totale di sottoinsiemi di A_n è 2^n

Dim: n totale = (n insiemi di 0 elementi) + (n di sottoinsiemi di 1 elemento) + (2 elementi) + ... (n elementi)

$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 514

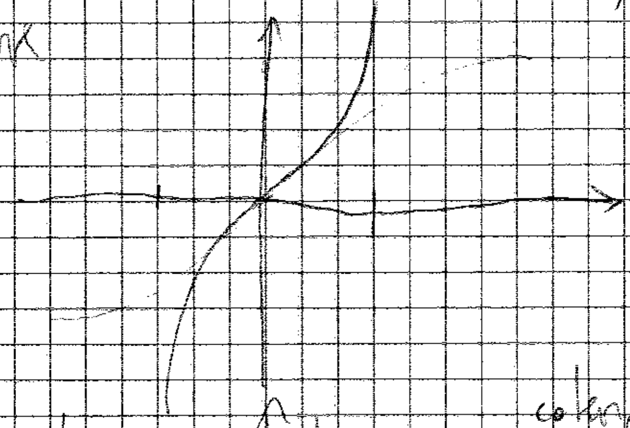
rappresentare arctg(tan x)

$f(x) = \arctan(x)$ $\qquad g(x) = \tan x$

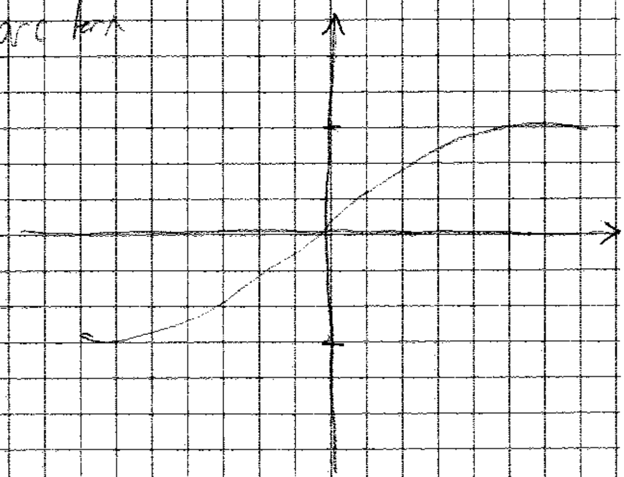
$f \circ g$ $\quad \text{dom } g \circ f = f^{-1}(\text{im} f \cap \text{dom} g)$

$\text{im } g \circ f = g(\text{im} f \cap \text{dom} g)$

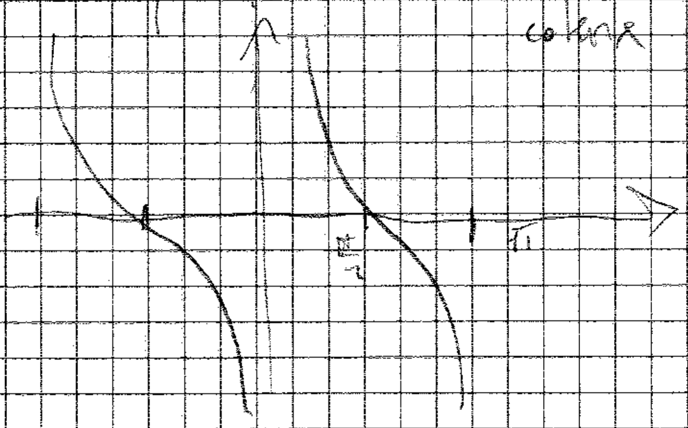
tan x



arc tan



cotan

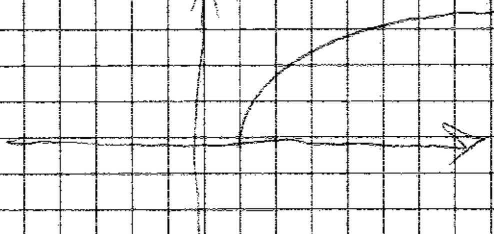


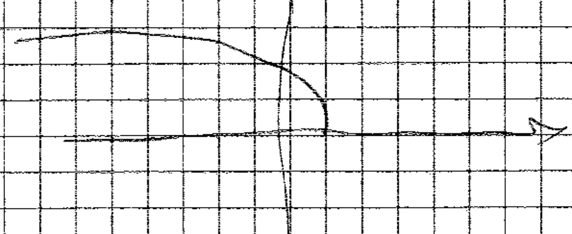
$\frac{1}{x^2+1}$

es. 1 $\quad g \circ f \quad f(x) = 2x - 5 \qquad g(x) = \log x$

$f(x) = \frac{2x+1}{x+2} \qquad g(x) = \sqrt{1-x}$

$\frac{1}{2} \qquad 2x+1 \qquad \sqrt{-(x-1)}$





$g \circ f$ esiste solo se $A = \text{im}(f) \cap \text{dom} g \neq \emptyset$

sono $\text{dom}(g \circ f) = f^{-1}(\text{im} f \cap \text{dom}(g))$, $\text{im}(g \circ f) = g(\text{im} f \cap \text{dom}(g))$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 514

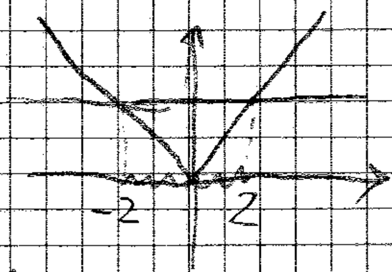
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 514

Es 4 proposti

$f(x) = \log(2-|x|) + \sqrt{1-x^2}$ dom, sim, iniettività

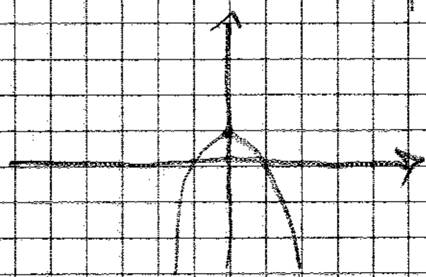
dom f: $\left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} 2-|x|>0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{array} \right\}$

1ª diseq. $2-|x|>0$ $\quad |x|<2$



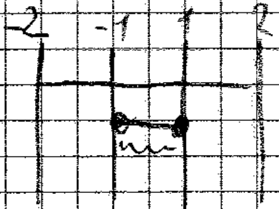
$-2<x<2$ $\quad (-2,2)$

2ª diseq. $1-x^2 \geq 0$



$x^2 \leq 1$

$-1 \leq x \leq 1$



$[-1,1] = \text{dom}$

Se $f(-x) = f(x)$, f si dice pari

Se $f(-x) = -f(x)$, " " dispari

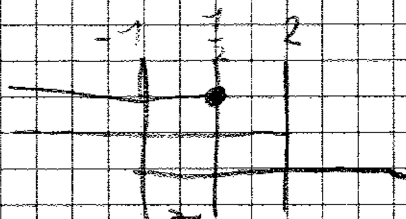
$f(x) = \log(2-|x|) + \sqrt{1+(-x)^2}$

$f(-x) = \log(2-|-x|) + \sqrt{1-(-x)^2}$

5 $\quad f(x) = \sqrt{\log(2-x) - \log(x+1)}$

$\begin{cases} \log(2-x) - \log(x+1) \geq 0 \\ 2-x>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \log(2-x) \geq \log(x+1) \\ x<2 \\ x>-1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2-x \geq x+1 \\ x<2 \\ x>-1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x<2 \\ x>-1 \end{cases}$



$\text{dom} f = \left(-1, \frac{1}{2}\right]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 514

6 proposti $f(x) = \log(2-|x|)$ determ. $f^{-1}((-\infty, 0])$

controimmagine:

$f: X \to Y \quad f^{-1}(y) = \{x \in \text{dom. } f(x) = y\}$

dom (f) : $2-|x| > 0 \quad |x| < 2 \quad -2 < x < 2$

dom $(f) = (-2, 2)$

$\log(2-|x|) \leq 0$

$2-|x| \leq 1 \quad |x| \geq 1 \quad x \leq -1 \vee x \geq 1$

confrontare questo valore

quindi intersecarlo col dom(f)

$\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$ perciò : $(-2, -1] \cup [1, 2)$

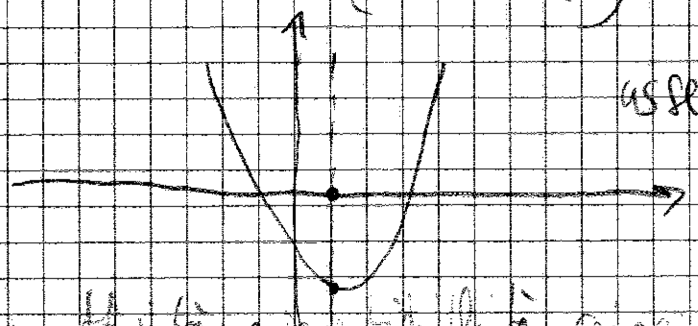
es. 8 proposti

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 - x + 1$ verificare che non è invertibile

$f(x) = x^2 - x + 1$ non è invertibile in quanto è una parabola

con vertice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(+\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$

asse in $x = \frac{1}{2}$



(iniettività e invertibilità coincidono), le restrizioni possibili sono 2 : $f_1 : f|_{(-\infty, \frac{1}{2}]} : \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \to \left[\frac{5}{4}, +\infty\right)$

$f_2 : f|_{[\frac{1}{2}, +\infty)} : \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \to \left[-\frac{5}{4}, +\infty\right)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 514

faccio $f \circ g\,(f(x))$ e devo esattamente avere $= x$

$\forall x \geq \frac{3}{4}$ perché si guarda il dominio di g e verifico che $(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \geq \frac{3}{2}$

si guarda il dominio di f

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}\right) + 3 =$$

$$= \frac{9}{4} + x - \frac{3}{4} + \cancel{3\sqrt{x - \frac{3}{4}}} - \frac{9}{2} - \cancel{3\sqrt{x - \frac{3}{4}}} + 3 =$$

$$x + \frac{9 - 3 - 18 + 12}{4} = 0 + x \qquad x = x$$

2) utilizzare la rappresentazione grafica per f e f^{-1} per risolvere $f(x) = g(x)$ e trovare le intersezioni della x

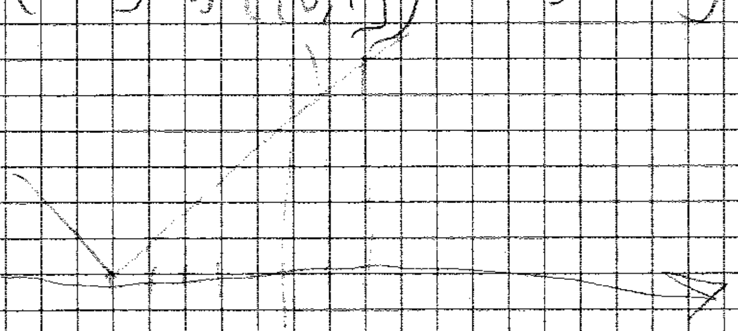
$f(x) = |x + 3|$ $\qquad f^{-1}([1, 2])$ è uguale a

$y = -x - 3$

$y = x + 3$

$(-5, -4] \cup [-2, -1)$

$3 - \log(x+1) \quad f([0, 1]) = 3 - \log 2, 3$



1) $-x - 3 = y \rightarrow x = -y - 3$

2) $x + 3 = y \rightarrow x = y - 3$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 514

NUMERI REALI

$\mathbb{R}$ = insieme di tutti gli allineamenti decimali con segno cioè le espressioni del tipo $x = a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ dove a_0 è un numero intero $a_0 \in \mathbb{Z}$ e a_j (decimali) $\in \{0,1,2,3,4,5,6,7,\dots\}$

Domande

1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$? Come si identifica il sottoinsieme $\mathbb{Q}$?
2) Come si definisce l'ordinamento su $\mathbb{R}$?
3) Come si definiscono le operazioni su $\mathbb{R}$?
4) Qual'è la rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}$?
5) Quali proprietà distinguono $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$?

1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Data una frazione $\frac{p}{q}$ si ottiene la forma decimale di $\frac{p}{q}$ con l'algoritmo della divisione

es. $\frac{10}{7}$

$$\begin{array}{l|l} 10 & 7 \\ \hline 30 & 1,428571 \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \\ 30 & \end{array}$$

torna al punto di partenza

$$\Rightarrow \frac{10}{7} = 1,\overline{428571}$$

Tutti i resti sono < 7 e da questo segue $1 < \frac{10}{7} < 2$

$1,4 < \frac{10}{7} < 1,5$ $\quad 1,42 < \frac{10}{7} < 1,43 \quad 1,428 < \frac{10}{7} < 1,429$

$\frac{p}{q} > 0$, $p, q \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{array}{l|l} p & q \\ \hline R_0 & a_0 \end{array} \qquad R_0 < q$$

$$\begin{array}{l|l} 10 R_0 & q \\ \hline R_1 & a_1 \end{array} \qquad R_1 < q \qquad \begin{array}{l|l} 10 R_1 & q \\ \hline R_2 & a_2 \end{array}$$

$$\frac{p}{q} = a_0, a_1 a_2 a_3$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 514

$$2,31\overline{7} = \frac{2317-231}{900}$$

In generale per costruire la funzione generatrice dato l'allineamento *

$$* = \frac{a_0 a_1 \dots a_k t_n - a_0 a_1 a_k}{\underbrace{99\dots9}_{n}\underbrace{00\dots0}_{K}}$$

L'unico caso in cui a due allineamenti distinti corrisponde lo stesso $\frac{p}{q}$ è quello in cui uno dei due allineamenti ha periodo 9. Tale problema viene risolto automaticamente dalla regola vista sopra:

$$0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Quindi $0,\overline{9} = 1,\overline{0}$

$$0,1\overline{9} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$3,14\overline{9} = \frac{3149-314}{900} = \frac{315}{100} = 3,15$$

Regola del periodo 9:

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_k \overline{9} = a_0, a_1 a_2 \dots (a_k + 1)$$

Esercizio per ripassare le divisioni
Calcolare l'allineamento della frazione $\frac{100}{49}$ (il periodo)
Corrispondenza biunivoca fra Q e gli allineamenti decimali finiti (con queste regole che qua) o infiniti periodici
Si ha $Q \subset R$ (R^*)
Gli elementi $R \setminus Q$ si chiamano numeri irrazionali
Questi sono gli allineamenti infiniti non periodici
esempi $\sqrt{2}$, π, e

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 514

Definendo la troncata n-esima di un allineamento

$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$

come

$x^{(n)} = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$

$\left(x_0 = a_0 \, , \; x^{(1)} = a_0, a_1 \, , \; x^{(2)} \; a_0, a_1 a_2 \dots \right)$

si ha che l'allineamento di $\sqrt{2}$ è quell'unico allineamento x tale che $\forall n \in \mathbb{N}, (x^{(n)})^2 < 2$ e al tempo stesso $\left(x^{(n)} + 10^{-n}\right)^2 > 2$

Rimane da dimostrare che tale allineamento x soddisfa $x^2 = 2$. Questo seguirà dopo le operazioni su $\mathbb{R}$

Ordinamento in $\mathbb{R}$

allineamenti positivi sono quelli col segno $+$

" " negativi " " " " " $-$

2 allineamenti $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ $y = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots$

si dicono uguali $\Longleftrightarrow a_0 = b_0$, $b_1 = a_1$, $a_2 = b_2$, $a_n = b_n \; \forall n$

Sia $x \neq y$ con x, y positivi

Diciamo che $x > y$ o $y < x$ se $a_0 > b_0$ oppure $\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 > b_1 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ a_2 > b_2 \end{cases}$

oppure ... $\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ a_n > b_n \end{cases}$ per un certo $n \in \mathbb{N}$

Tale n deve esistere, eventualmente con x e y scambiati di modo

Ordinamento lessicografico

Nota bene: qui si devono evitare gli allineamenti di periodo 9

(se no sarebbe
$1,000\dots > 0,9999\dots$)

Se x è positivo $\Rightarrow x > 0$ per def.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 514

Si nota che le colonne si stabilizzano cioè da un certo punto poi non cambia più la cifra corrispondente e rimane costante. Definiamo allora $x+y = \frac{8}{9} + \sqrt{2}$ come quell'allineamento ottenuto portando in ogni colonna i valori stabilizzati:

$\frac{8}{9} + \sqrt{2} = 2,30310245$

cioè $(x+y)^{(n)}$

Si noti $(x+y)^n \neq x^n + y^n$

2
2,3
2,30
2,303
2,3031

infatti devo aspettare la stabilizzazione

In generale dati

$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \geq 0$

$y = b_0, b_1 b_2 b_3 \geq 0$

calcoliamo

$c_n = x^{(n)} + y^{(n)}$

$d_n = \left(x^{(n)} \cdot y^{(n)}\right)^{(n)}$ (somma e prodotto in $\mathbb{Q}$)

Si dimostra allora che le sequenze c_n, d_n sono stabilizzate e definiscono ognuna in modo univoco un unico numero reale che sarà rispettivamente $x+y$, $x \cdot y$

In generale una successione o sequenza di allineamenti $c_0, c_1, \ldots$ si dice stabilizzata se disponendo tali allineamenti uno sotto l'altro a formare una matrice infinita

colonna, colonna, colonna, colonna della matrice

$c_0 = c_{00}, c_{01} c_{02} c_{03}$

$c_1 = c_{10}, c_{11} c_{12} c_{13} \ldots$

$c_2 = c_{20}, c_{21} c_{22} c_{23} \ldots$

si ha che ogni colonna della matrice con gli allineamenti disposti uno sotto l'altro a formare una matrice infini

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 514

proprietà (non algebrica) di continuità della retta:

Assioma: Data una sezione della retta cioè una sua partizione in 2 sottoinsiemi A, B tali che

1) $A \cup B =$ retta, $A \cap B = \emptyset$

2) $\forall a \in A$ $\forall b \in B$, $a < b$

esiste/un solo

allora $\exists!$ elemento separatore cioè un unico $s \in$ retta tale che $a \leq s \leq b$ $\forall a \in A, \forall b \in B$

Si identifica $\mathbb{R} \cong$ retta tramite l'applicazione

$$x \in \text{retta} \xrightarrow[\text{su}]{1-1} a_0, a_1 a_2 \in \mathbb{R}$$

$x \leq y$ se x è $< y$ oppure se $x = y$

Definizione $A \subset \mathbb{R}$ si dice denso in $\mathbb{R}$ se $\forall x \in \mathbb{R}$ e per ogni errore $\forall \varepsilon > 0$ esiste un elemento a di A che dista da x meno di ε, cioè

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a \in A$: $d(x, a) = |x - a| < \varepsilon$

TEOREMA 1) $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

2) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

3) le frazioni decimali (allineamenti finiti) sono anch'esse dense in $\mathbb{R}$

dim 3) fissato $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots > 0$

$\varepsilon = 10^{-N}$ basta prendere la frazione decimale $x^{(n)}$ essendo ogni troncata $x^n \leq x \leq x^n + 10^{-N} \Rightarrow |x - x^{(n)}| \leq 10^{-N}$

PROPRIETÀ RIASSUNTO DEI NUMERI REALI

a) algebriche (operazioni)

b) ordinamento ($\leq$)

c) completezza ($\mathbb{R} \cong$ retta)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 514

$A \subset \mathbb{R}$ si dice connesso se dati $x_1, x_2 \in A$ l'intervallo $[x_1, x_2]$ è tutto contenuto in A, $[x_1, x_2] \subseteq A$

$\Rightarrow$ TEOREMA

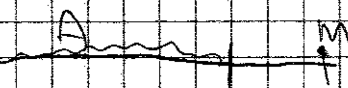
I sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ sono precisamente gli intervalli

(a,b), $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ } limitati

$(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$ } non limitati

c) $A \subset \mathbb{R}$ si dice limitato superiormente se esiste $\exists m \in \mathbb{R}: a \leq m \quad \forall a \in A$

Tale m se esiste si chiama un maggiorante di A



$A \subset \mathbb{R}$ è inferiormente limitato se esiste almeno un minorante m' di A cioè se $\exists m' \in \mathbb{R}: a \geq m' \quad \forall a \in A$

$A \subset \mathbb{R}$ si dice limitato se è sia limitato superiormente che inferiormente

$\Leftrightarrow \exists m, m' \in \mathbb{R}: m' \leq a \leq m \quad \forall a \in A$

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}: |a| \leq c \quad \forall a \in A$

esempio $A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ è limitato essendo $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ma non è finito)

Se esiste un maggiorante di A (m di A) che appartiene ad A, m si chiama il massimo di A e si indica con $m = \max A \Leftrightarrow$

$\Rightarrow$
1) $m \in A$
2) $\forall a \in A, a \leq m$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 514

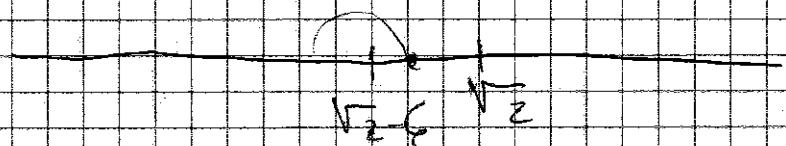
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 514

$\Rightarrow$ ogni $\varepsilon > 0$ non è minorante di A)
Ma essendo 0 minorante di A e $0 \notin A \Rightarrow \nexists \min A$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \le 2\} \subset \mathbb{R}$$
$$= \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\} = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ non appartengono all'insieme, perciò pur essendo minoranti e maggioranti in teoria, in realtà non lo sono

È evidente che $\sqrt{2}$ è maggiorante di A
Dimostriamo che $\sqrt{2}$ è il più piccolo dei maggioranti
Fisso $\varepsilon > 0$



dimostro che $\sqrt{2}-\varepsilon$ non è maggiorante di A
Per es. se $\varepsilon = 10^{-N}$
prendo $a = \sqrt{2}^{(N)}$ e allora sarà $\sqrt{2}^{(N)} \le \sqrt{2} \le \sqrt{2}^{(N)} + 10^{-N}$
e dunque $\sqrt{2} - 10^{-N} \le \sqrt{2}^{(N)} \in A$
Poiché però $\sqrt{2} \notin A \Rightarrow \nexists \max A \in \mathbb{R}$
Analogamente $\nexists \min A$

Def Dato $A \subset \mathbb{R}$ si chiama estremo superiore di A, $\sup A$, il + piccolo dei maggioranti di A. Quindi:

$s = \sup A \iff$ 1) s maggiorante di A
2) $\forall l$ maggiorante di A, $s \le l$

$\iff$ 1) $a \le s \ \forall a \in A$
2) $\forall \varepsilon > 0$, $s - \varepsilon$ non è maggiorante di A

$\iff$ 1) $a \le s \ \forall a \in A$
2) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : s - \varepsilon < a$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 514

Definisco

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 , x^n \leq y\}$

Si dimostra che l'insieme è non vuoto e superiormente limitato

Posto $l = \sup A \in \mathbb{R}$ si dimostra che, usando le prop. dell' $\sup A$, non può essere $l^n > y$ e non può essere $l^n < y$

$\Rightarrow l^n = y$

$a > 0 , b > 0 \quad a^b = ? \quad$ es $\sqrt{2}^{\pi}$

se $b = \frac{m}{n} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad m \in \mathbb{Z} , n \in \mathbb{N}^+$

Se $b = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots > 0$

definisco per $a > 0$

$A = \{ a^{b_0} ; a^{b_0,b_1} ; a^{b_0,b_1b_2} , \ldots \}$

I numeri di A crescono se $a > 1$

decrescono se $0 < a < 1$

all'aumentare dell'ordine n di $b^{(n)}$

Si pone $a^b = \begin{cases} \sup A & \text{se } a > 1 \\ \inf A & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$ è l'estensione

= cioè equivale $a^b = \begin{cases} \sup \{ a^{\frac{p}{q}} : \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} , \frac{p}{q} \leq b \} \\ \inf \{ A^{\frac{p}{q}} : \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \; \frac{p}{q} \leq b \} \; (\text{se } 0 < a < 1) \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 514

Posso allora enumerare gli elementi di A) come

$a_0 = f_0$, $a_1 = f(1)$; $a_2 = f(2)$, ...

77

TEOREMA 1) $\mathbb{Q}$ è numerabile

2) $\mathbb{R}$ non è numerabile

Dim. 1) $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$

Si chiama altezza di $\frac{p}{q} = p+q$

Posso allora enumerare tutte le frazioni procedendo per altezze crescenti:

$(0,n)$ $(1,n-1)$ $(n,n-2)$ .... $(n-1,1)$ (p,q)

n frazioni di altezza n

$n=1$ $(0,1) \to \frac{0}{1} = 0$

$n=2$ $(0,2) \to \frac{0}{2} = \cancel{0}$ si toglie xké c'era già prima

$(1,1) = \frac{1}{1} = 1$

$n=3$ $(0,3) \to \cancel{0}$

$(1,2) \to \frac{1}{2}$

$(2,1) = 2$

$n=4$ $(0,4) \to 0$

$(1,3) = \frac{1}{3}$

$(2,2) = \cancel{1}$

$(3,1) = 3$

$n=5$ $(0,5) = \cancel{0}$

$(1,4) = \frac{1}{4}$

$(2,3) = \frac{2}{3}$

$(3,2) = \frac{3}{2}$

$(4,1) = 4$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 514

Motivazione per introdurre i complessi: mi chiedo se esiste un campo numerico +grande di $\mathbb{R}$, contenente $\mathbb{R}$, tale che in esso tutte le eq. algebriche $P=0$ (P = polinomio) abbiano soluzione. A tal fine è sufficiente introdurre un nuovo numero, i, detto unità immaginaria tale che $i^2=-1$

Posso allora risolvere un equazione di 2° grado a coefficienti reali $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta=b^2-4ac$

anche se $\Delta<0$ ponendo $\sqrt{\Delta}=i\sqrt{-\Delta}$

es. $3x^2+x+1=0$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{6}=$

$=\frac{-1\pm i\sqrt{11}}{6}=-\frac{1}{6}\pm\frac{i\sqrt{11}}{6}$

Proprietà dei numeri complessi

1) Ogni numero reale è anche un numero complesso, se $x,y\in\mathbb{R}$ allora se sommo o moltiplico $x+y$, $x\cdot y$ come numeri complessi coincidono con $x+y$, $x\cdot y$ come numeri reali

2) Vi è un numero complesso i = unità immaginaria tale che $i^2=-1$

3) Ogni numero complesso si può scrivere in modo unico come

$z=a+ib$ con $a,b\in\mathbb{R}$ (a = parte reale)

(forma algebrica o cartesiana)

$a=\mathrm{Re}\,z$ = parte reale di z

$b=\mathrm{Im}\,z$ = parte immaginaria di z

Quindi per definizione: $z=\mathrm{Re}\,z+i\,\mathrm{Im}\,z$

4) Sono definite una somma e un prodotto che derivano

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 514

Potremmo introdurre $\mathbb{C}$ anche come l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie (a,b) con le operazioni:

- somma $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
- prodotto $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

$= (ac - bd, ad + bc)$

$0 = (0,0) \qquad 1 = (1,0)$

opposto di $(a,b) = (-a,-b)$

reciproco $= \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$i = (0,1)$ infatti se moltiplico $(0,1)(0,1)$

$(0,1)(0,1) = (-1,0) = -(1,0)$

Vale allora che la coppia a,b

$(a,b) = (a,0) + (0,b)$

$= (a,0) + (0,1)\cdot(b,0)$

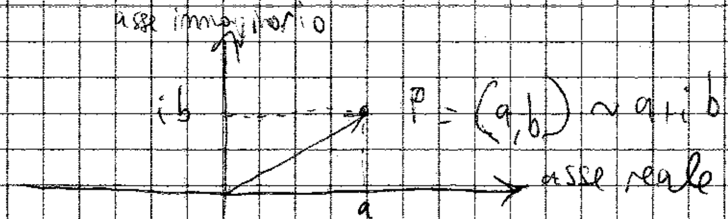
$= a + ib$

$f: \mathbb{C} \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \mathbb{R}^2$

$a + ib \overset{\text{identificato come}}{\sim} (a,b)$

rappresentando nel piano (a,b) come $a+ib$ otteniamo il piano complesso

$P = (a,b) \sim a + ib$

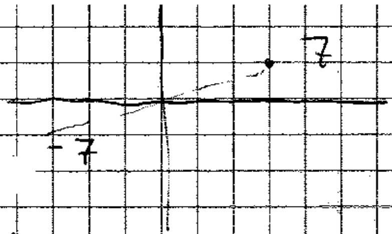


$\mathbb{R} = \{ x = x + i0, \ x \in \mathbb{R} \}$ asse reale

$i\mathbb{R} = \{ iy = 0 + iy \ \ y \in \mathbb{R} \}$ asse immaginario

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 514



Valgono

$z = \text{Re}\,z + i\,\text{Im}\,z$

$\bar z = \text{Re}\,z - i\,\text{Im}\,z$ $\Rightarrow$ $\text{Re}\,z = \frac{z+\bar z}{2}$

$\text{Im}\,z = \frac{z-\bar z}{2i}$

$z\bar z = |z|^2$

$z = \bar z \iff \text{Im}\,z = 0 \iff z = x \in \mathbb{R}$

$z = -\bar z \iff a+ib = -(a-ib) = -a+ib$

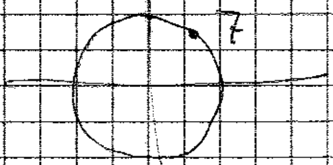
quindi $\text{Re}\,z = 0 \iff z = iy$

$\overline{(\bar z)} = z$ $\quad \overline{(z+w)} = \bar z + \bar w$ $\quad \overline{(zw)} = \bar z\,\bar w$

$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar z}{\bar w}$ naturalmente $\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$

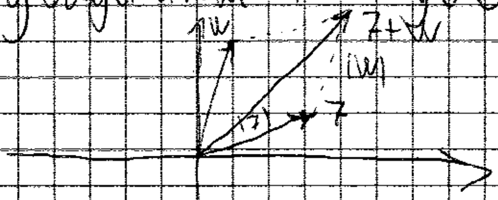
$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{\bar z}{|z|^2}$

Se $|z| = 1 \Rightarrow a^2+b^2 = 1 \Rightarrow z = a+ib \in$ circonferenza unitaria



$|z| = 1$

1 disuguaglianza triangolare: $|z+w| \le |z| + |w|$



$\Rightarrow$ in un triangolo la lunghezza di un lato è < della somma degli altri due

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 514

Dato $a \in \mathbb{N}$ $\exists b \in \mathbb{N}$? No perché $3+b=0$

$a+b=0$

Bisogna estendere Dato $a \in \mathbb{Z}$ $\exists b \in \mathbb{Z}$ $a+b=0$

$(-3)+(+3)=0$

$a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ 1 elemento neutro

Dato $a \in \mathbb{N}$ $\exists b \in \mathbb{N} : a \cdot b = 1$ NO

NEANCHE PER $\mathbb{Z}$

ma per avere questa proprietà bisogna estendere l'insieme dei numeri, quindi l'insieme corretto è $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ somma

prodotto

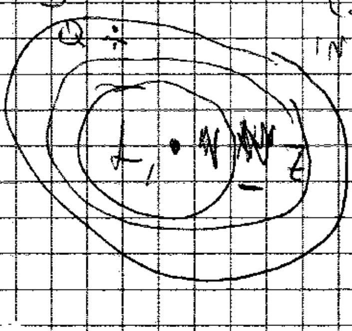
$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $\exists \frac{q}{p} : \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1$ $p \neq 0$ $q \neq 0$ (per def)

$\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $\exists \frac{q}{p} : \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = 1$

Differenza non sono operazioni di base
Quoziente

$a-b \iff a+(-b)$ la differenza è possibile da $\mathbb{Z}$ in poi

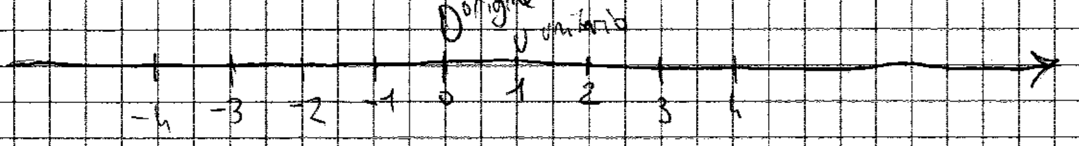
$\frac{a}{b} \iff a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$ è possibile solo in $\mathbb{Q}$



INVERSO DI B

$\mathbb{Q}$ non basta x es. $x^2-3=0$ $x \notin \mathbb{Q}$

RAPPRESENTAZIONE DI UN INSIEME NUMERICO SULLA RETTA



$\mathbb{Z}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 514

$\mathbb{R}$ è l'insieme che realizza la proprietà

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\ P \in$ retta che corrisponde

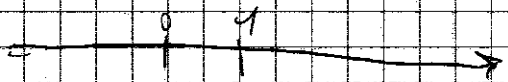
$\forall P \in$ retta $\exists\ x \in \mathbb{R}$ che corrisponde

punto $\longleftrightarrow$ NUM $\mathbb{R}$ è completo

In $\mathbb{R}$ posso introdurre $+, \cdot, -, \div$ che godono di tutte le proprietà

$\frac{1}{3}$ FORMA DI ALLINEAMENTO $0,333333$

PARTE INTERA + PARTE FRAZIONARIA



$\frac{1}{50} = \frac{2}{100} = 0{,}02$

$\frac{p}{q}$ se q ha solo i fattori 2 o 5 dà luogo ad un allineamento limitato

se q ha fattori $\neq 2$ e $\neq 5$ $\Rightarrow$ allineamento periodico

$\frac{1}{7}$

$1 : 7 = 0{,}142857\,1$

10, 30, 20, 60, 40, 50

Esercizi

1) Risolvere l'equazione

$z^2 + z + 1 = 0$

1° metodo: $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2° metodo $z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$

sostituisco $\Rightarrow (x+iy)^2 + x + iy + 1 = 0$

$x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy + 1 = 0$

$x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y) = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 514

- $x=0 \quad z=iy$

$|z|=|y|$

$|y|^3-3(-y^2)-4|y|=0$

$|y|^3+3|y|^2-4|y|=0$

$|y|(|y|^2+3|y|-4)=0$

$\Rightarrow |y|(|y|-1)(|y|+4)=0$

$y=0 \Rightarrow z=0$

$|y|=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow z=\pm 1i$

$|y|=-4$ impossibile

- $y=0 \Rightarrow z=x \ , |z|=|x|$

$|x|^3-3|x|^2-4|x|=0$

$|x|(|x|^2-3|x|-4)=0$

$|x|(|x|+1)(|x|-4)=0$

$x=0 \Rightarrow z=0; \ |x|=-1$ imposs

$|x|=4 \Rightarrow x=\pm 4 \Rightarrow z=\pm 4$

$\Rightarrow z=0, \ z=\pm i, \ z=\pm 4$

4) Risolvere $z^3-(3+i)z^2+(2+3i)z-2i=0$

Verificando che $z=i$ è una soluzione

Chiamiamo $P(z)=z^3-(3+i)z^2+(2+3i)z-2i$

$P(i)=i^3-(3+i)i^2+(2+3i)i-2i$

$-i+3+i+2i-3-2i=0$ verificato

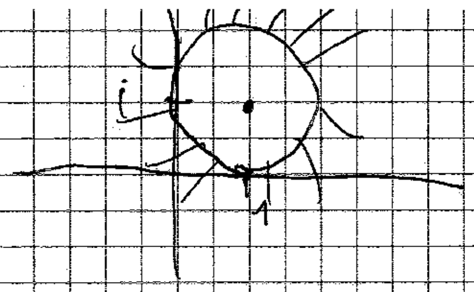
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 514

$|z - i - 1| > 1$

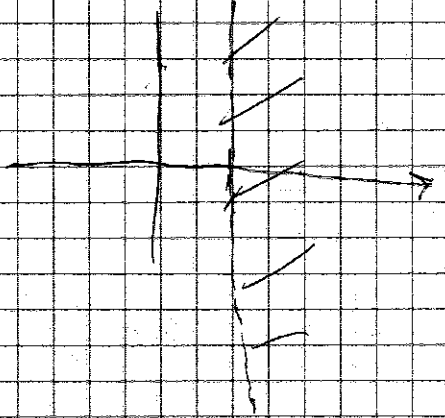
$|z - i - 1| > 1$

$|z - (1+i)| > 1$



$\mathrm{Re}\, z > 1 \Rightarrow x > 1$

$z = x + iy$



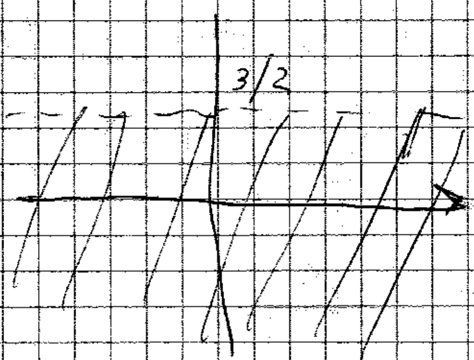
$\mathrm{Im}(z + 2i) < \frac{7}{2}$

$z = x + iy$

$\mathrm{Im}(x + i(2+y)) < \frac{7}{2}$

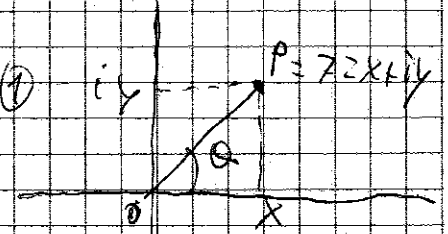
$2 + y < \frac{7}{2}$

$y < \frac{3}{2}$



Coordinate polari nel piano

(r, θ) definite $\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}}$ (1)



Otteniamo la forma polare o trigonometrica di un numero complesso: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

θ = angolo in radianti tra il semiasse x positivo e la semiretta Oz (o OP) definito a meno di multipli di 2π, e positivo (negativo) se il semiasse $x > 0$ ruota in senso anti orario (

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 514

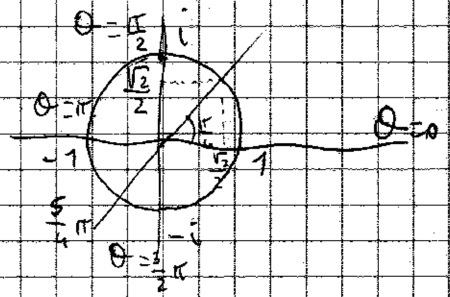
Con queste restrizioni c'è una corrispondenza biunivoca

$$(x,y) \leftrightarrow (r,\theta)$$

Angoli notevoli $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$

$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \sin 0 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$



$\Rightarrow \cos \frac{5}{4}\pi = \sin \frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

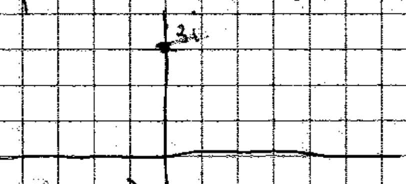
$\cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{7}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Es. $\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2} \end{cases}$

Scrivere in forma polare i seguenti numeri complessi z:

$z = 3i = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$



oppure $z = -3i = 3\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right)$

$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right)$

$z = -\sqrt{3} + i \quad r = \sqrt{3+1} = 2$

$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$ II quadrante

$\Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 514

$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$

da cui la formula di De Moivre

$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

es: $(1-i)^4 = ?$

$1-i = r(\cos\theta + i \sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right)$

$r = \sqrt{2}$

$(1-i)^4 = (\sqrt{2})^4\left(\cos 4 \frac{7}{4}\pi + i \sin 4 \frac{7}{4}\pi\right) =$

$= 4(\cos 7\pi + i \sin 7\pi) = -4$

per es. : $(1+i)^6$ ...... $-8i$

$f(\theta) = \cos\theta + i \sin\theta$

dalla (*) con $r = r' = 1$ ottengo che $f(\theta) f(\theta') = f(\theta + \theta')$ che è simile alla regola che vale per le potenze $a^{\theta} a^{\theta'} = a^{\theta + \theta'}$

si definisce l'esponenziale con l'esponente immaginario

$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta}$ e: n nepero

Si ottiene così la forma esponenziale di un numero complesso $\boxed{z = r e^{i\theta}}$

es: $z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 514

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 514

2) $B = \left\{ \frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7} \right\}$

B è limitato $0 < \frac{1}{2n+1} \leq 1$

0 è minorante dell'insieme B, 1 è maggiorante di B

⇓

0 è il più grande dei minoranti di B, dimostro:
suppongo per assurdo che ciò non sia vero ⇒ esisterà allora un numero ε che sia >0 $\varepsilon > 0$ tale per cui $\varepsilon \leq \frac{1}{2n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$2n+1 \leq \frac{1}{\varepsilon}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{2n+1, n \in \mathbb{N}\}$ è l'insieme dei num dispari che non è limitato superiormente ⇒ 0 è ~~minorante~~ il più grande dei minoranti $\inf B = 0$

$0 \notin B$ perché $\frac{1}{2n+1} \neq 0$, non esiste il minimo

$\nexists \min B$

~~1 coincide~~ $1 = \max B = \sup B$

$C = \{ x \in \mathbb{R} : 5^x + 5^{\frac{x}{2}} < 2 \}$

$5^x + \sqrt{5^x} - 2 < 0$ $\qquad \sqrt{5^x} = t$

$t^2 + t - 2 < 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$ $\qquad -2 < t < 1$

$-2 < \sqrt{5^x} < 1$ $\qquad \sqrt{5^x} < 1$ $\qquad \sqrt{5^x} > -2$

$\begin{cases} \sqrt{5^x} < 1 \\ \sqrt{5^x} > -2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x < 0 \end{cases}$

$C = \{ x \in \mathbb{R} : x < 0 \} = (-\infty, 0)$ l'insieme è limitato superiormente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 514