NUMERO: 672

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Mottola

MATERIA: Geometria
Prof. Gatto

http://calvino.polito.it/~gatto

1 Introduzione

Il corso studierà proprietà di spazi vettoriali astratti

Es. spazio vettoriale: $C^0([0,1]) = \left\{ \begin{array}{l} \text{funzioni} \\ \text{continue} \\ f:[0,1] \to \mathbb{R} \end{array} \right.$

Thm: $f, g \in C^0([0,1])$

a) $\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda f \in C^0([0,1])$

b) $f, g \in C^0([0,1]) \quad f + g \in C^0([0,1])$

a, b) si possono riassumere $\forall \lambda, \nu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C^0([0,1])$

$\Rightarrow \lambda f + \nu g \in C^0([0,1])$

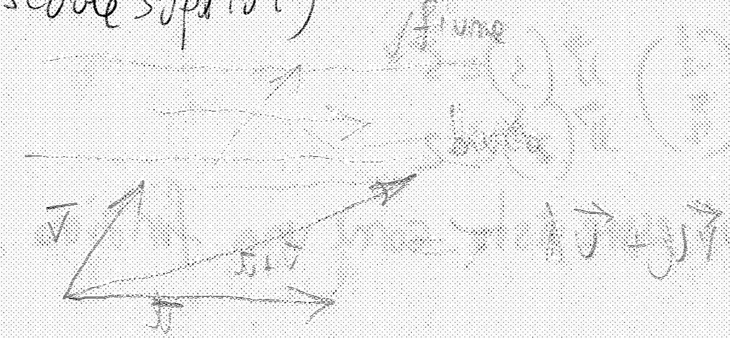
Quindi se $f, g \in C^0([0,1]) \Rightarrow$ la combinazione lineare di $f, g \in$
$\in C^0([0,1])$ a coefficienti reali $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$

$\lambda f + \nu g \in C^0([0,1])$

dove $\lambda f + \nu g$ è l'unica funzione tale che

$(\lambda f + \nu g)(x) = \lambda \cdot f(x) + \nu g(x)$

Esempio (dalle scuole superiori)



Esempio: $\{1,2,3,4\} \to \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{v}(1) = 2 \quad \vec{v}(2) = 5 \quad \vec{v}(3) = 0 \quad \vec{v}(4) = -1$

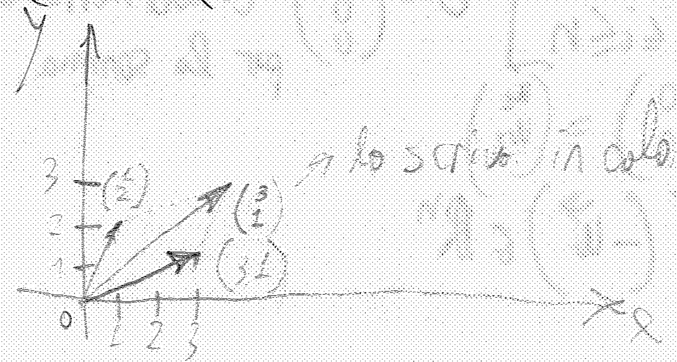
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Osservo che su $\mathbb{R}^n$ può definirsi una somma "+"

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

ossia $\vec{u} + \vec{v}$ è l'unico vettore di $\mathbb{R}^n$: $(\vec{u} + \vec{v})(i) = \vec{u}(i) + \vec{v}(i)$

ES. $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$



lo scrivo in colonna e distinguerlo dal punto

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

La somma è compatibile con la regola del parallelogramma

Inoltre, $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda\vec{u}$ è l'unico vettore tale che

$\forall \; 1 \leq i \leq n \quad (\lambda \vec{u})(i) = \lambda \cdot \vec{u}(i)$

$\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$ ossia $3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 15 \\ 21 \end{pmatrix}$

Pertanto ha senso l'espressione $\lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$ $\quad \lambda, \nu \in \mathbb{R}$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \nu v_1 \\ \lambda u_2 + \nu v_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n + \nu v_n \end{pmatrix}$$

$(\mathbb{R}^n, +)$ è dotato di una "operazione di moltiplicazione per uno scalare. Definito $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda\vec{u}$

$(\lambda \vec{u})(i) = \lambda \cdot \vec{u}(i)$

Verifica le proprietà $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

$(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ $\quad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\cdot\vec{u}$ $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot) = \mathbb{R}^n$ $\quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale. Abbiamo dimostrato la: Proposizione $\mathbb{R}^n$ rispetto somma e prodotto per scalare è uno spazio vettoriale (cioè verifica quelle proprietà).

Ricordiamo che le belle proprietà di $\mathbb{R}^n$ sono conseguenza delle proprietà algebriche di $\mathbb{R}$. Quali?

Infatti $(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo abeliano.

Inoltre $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano

$(a \cdot b)c = a(b c)$

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists a^{-1} / a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ è falsa. Infatti se $a=0$ non esiste a^{-1}, $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\ \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists a^{-1} / a^{-1} a = 1$

$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Inoltre valgono le proprietà distributiva

$a(b+c) = ab + ac$

$(a+b)c = ac + bc$

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ (esempio per $n=4$) 7

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_4 \end{pmatrix} =$$

$$= v_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{e_1}} + v_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{e_2}} + v_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{e_3}} + v_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{e_4}}$$

Es. $\vec{e_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = u_1 \vec{e_1} + u_2 \vec{e_2} + u_3 \vec{e_3} + u_4 \vec{e_4}$$

In generale $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \vec{u} = u_1 \vec{e_1} + u_2 \vec{e_2} + \dots + u_n \vec{e_n}$

indicatore di Kronecker

dove $\vec{e_i} \in \mathbb{R}^n$ è l'unica colonna tale che $\vec{e_i}(j) = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i= \\ 0 & i\neq \end{cases}$

Se $n=2$ $\vec{i} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{e_1}}$ $\vec{j} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{e_2}}$ | Se $n=3$ $\vec{i} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=e_1}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=e_2} = \vec{j}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{k}$

in $\mathbb{R}^3$ $\underbrace{\vec{u}}_{=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$

$$< \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \lambda v_2 + \mu v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} > =$$

Cioè $<,>$ è lineare rispetto al 1° argomento, ma ci sarà anche una linearità rispetto al 2° argomento.

$$<\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}> = <\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}, \vec{u}> = \lambda<\vec{v}, \vec{u}> + \mu<\vec{w}, \vec{u}>$$

infatti $= \lambda<\vec{u}, \vec{v}> + \mu<\vec{u}, \vec{w}>$

Il prodotto scalare euclideo standard è una FORMA bilineare simmetrica
prende valori lineari

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_1 + 4 x_2 y_2$$

Ricordiamo che $\mathbb{R}^n$ è lo spazio vettoriale delle colonne di numeri reali con n-entrate o componenti che $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $v(i) =$ = i-esima entrata o componente e che $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale rispetto alla nozione di combinazione lineare $(\lambda\vec{u} + \mu v)(i)$ $= \lambda \vec{u}(i) + \mu \vec{v}(i)$

Ricordiamo inoltre che su $\mathbb{R}^n$ si può definire una forma bilineare simmetrica $<> \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ detta prodotto scalare

$$<\vec{u}, \vec{v}> = \sum \vec{u}(i) \vec{v}(i)$$

Esempio $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$<\vec{u}, \vec{v}> = \sum_{i=1}^{2} \vec{u}(i) \cdot \vec{v}(i) = \vec{u}(1)\vec{v}(1) + \vec{u}(2)\vec{v}(2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$< \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} > = u_1 v_1 + u_2 \cdot v_2$$

Ufficialmente $<\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{w}> =$ ~~$\lambda\vec{u}, \vec{w}$~~ $\lambda<\vec{u}, \vec{w}> + \mu<\vec{v}, \vec{w}>$

$(\lambda a + \mu b)c =$

Idea della prova è:

N_1) : ovvia (per il fatto che $<,>$ è definita positiva)

N_2) Esercizio (Si basa sul saper calcolare $\sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$

N_3) Si basa sulla famosa disuguaglianza di Schwarz che afferma:

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \ |<\vec{u}, \vec{v}>| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ ← banale se $\vec{u}$ o $\vec{v}$ è nullo

Dim di Schwarz

Sia $f(\lambda) = |\lambda \vec{u} + \vec{v}|^2 \geq 0 \ (f \ \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

Quindi $(\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}) \quad f(\lambda) = <\lambda\vec{u} + \vec{v}, \lambda\vec{u} + \vec{v}> =$

$= <\lambda\vec{u}, \lambda\vec{u} + \vec{v}> + <\vec{v}, \lambda\vec{u} + \vec{v}> = \lambda<\vec{u}, \lambda\vec{u} + \vec{v}> + <\vec{v}, \lambda\vec{u} + \vec{v}>$

$= \lambda(<\vec{u}, \lambda\vec{v}> + <\vec{u}, \vec{v}>) + <\vec{v}, \lambda\vec{u}> + <\vec{v}, \vec{v}> =$

$= |\vec{u}|^2 \lambda^2 + 2<\vec{u}, \vec{v}>\lambda + |\vec{v}|^2$

Ossia $f(\lambda) = |\vec{u}|^2 \lambda^2 + 2<\vec{u}, \vec{v}>\lambda + |\vec{v}|^2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\Delta}{4} = <\vec{u}, \vec{v}>^2 - |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \leq 0$

Ossia: $\sqrt{<\vec{u}, \vec{v}>^2} \leq \sqrt{|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2}$

$|<\vec{u}, \vec{v}>|^2 \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

La disuguaglianza di Schwarz implica che $<\vec{u}, \vec{v}> \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ $\quad -1 \leq \frac{<\vec{u}, \vec{v}>}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \leq 1$

Def Se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{<\vec{u}, \vec{v}>}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Ricordiamo che il prodotto scalare euclideo è una forma (ossia che prende valori nei numeri reali) bilineare simmetrica

$$\langle , \rangle \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}(i) \cdot \vec{v}(i)$$

Per esempio, se

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad e \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \vec{v}(i) = v_i$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

$$n = 3 \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = P(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$$

forma

polinomio omogeneo (tutti gli addendi hanno il medesimo grado, in sto caso 2

è bilineare perché lineare nelle $\vec{u}$ e nelle $\vec{v}$

$$\langle (\vec{u} + \vec{v}), \vec{w} \rangle =$$

$$= (u_1 + v_1) w_1 + (u_2 + v_2) w_2 + (u_3 + v_3) w_3 =$$

$$= u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 + v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + \dots$$

trilineare

La linearità rispetto al 1° argomento significa

$$\langle \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \mu \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$\langle , \rangle$ è definito positivo, nel senso che $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n \ \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$

e anzi se $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow 0$

Prova per $n = 2$ $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$= u_1^2 + u_2^2 \geq 0$ Se $u_1^2 + u_2^2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = 0$

Il determinante di 3 vettori è una forma trilineare anti- simmetrica. 15

L'antisimmetria significa che $\vec{v}\wedge\vec{u}\wedge\vec{w} = -\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}$

$\vec{w}\wedge\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}$

Es. $\vec{v}\wedge\vec{w}\wedge\vec{u} = \vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}$

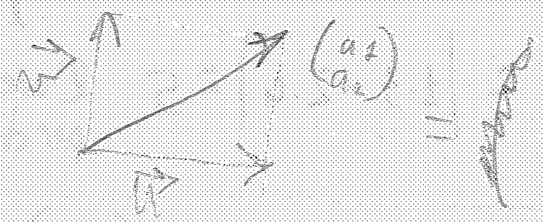
L'antisimmetria implica $\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{u}$

$\Rightarrow 2\cdot\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{u} = 0$

- Da dove viene il det? $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

$$\begin{cases} u_1 x + v_1 y + w_1 z = a_1 \quad (*) \\ u_2 x + v_2 y + w_2 z = a_2 \\ u_3 x + v_3 + w_3 z = a_3 \end{cases} \Leftrightarrow x\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$x\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$



Risolvendo $(*)$

$$X = \frac{N_x}{D} \qquad x = \frac{\quad}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$$

$$Y = \frac{N_y}{D}$$

$$Z = \frac{N_z}{D} \qquad Y = \frac{\quad}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$$

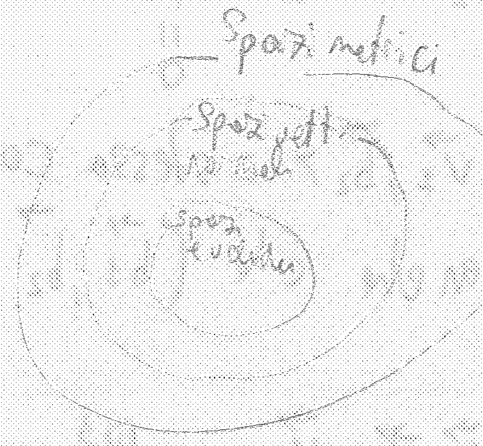
Avviso che $\mathrm{Vol}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = |\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}|$

il det si chiama anche forma volume

Il prodotto scalare è una struttura metrica [illegible]

Se $\mathbb{R}^n$ è dotato di una norma se $(\mathbb{R}^n, \|\ \|) \Rightarrow \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ distanza

$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ (27)



$(\mathbb{R}^n)^\vee$ / V $V^\vee$

duale: insieme di tutte le forme lineari (polinomi omogenei di 1 grado

$\|$ $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$

insieme delle n-uple scritte per riga

$\mathbb{R}^n$, E^n: spazio affine euclideo

Ricordiamo che $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sono ortogonali $\Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ si dice versore $\Leftrightarrow |\vec{u}| = 1$

Esempio $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$ sono versori perché $|\vec{e_i}| = 1$

$\forall\ 1 \leq i \leq n$ $\quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow |\vec{e_2}| = 1$

Supponiamo che $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n} \in \mathbb{R}^n$ siano versori ortogonali due a due allora vale la seguente proprietà

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare di $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}$ ossia $\forall \vec{v}, \exists!\, a_1, a_2, \ldots, a_n \mid \vec{v} =$

$= a_1 \vec{b_1} + a_2 \vec{b_2} + \ldots + a_n \vec{b_n}$

Infatti si ha: $\vec{v} = \underbrace{\langle \vec{v}, \vec{b_1} \rangle}_{a_1} b_1 + \langle \vec{v}, \vec{b_2} \rangle b_2 + \ldots + \langle \vec{v}, \vec{b_n} \rangle b_n$

Prima: $\langle \vec{v}, \vec{b_1} \rangle = \langle a_1 \vec{b_1} + a_2 \vec{b_2} + \ldots + a_n \vec{b_n}, b_1 \rangle =$

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2\, y \\ \sqrt{2}/2\, y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} z \\ \frac{\sqrt{2}}{2} z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} y + \frac{\sqrt{2}}{2} z = 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} y + \frac{\sqrt{2}}{2} z = 7 \end{cases}$$

Per la proprietà

$$x = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 5$$

$$y = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{7\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$z = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{7\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\vec{v} = 5\vec{b}_1 + 3\sqrt{2}\, \vec{b}_2 + 4\sqrt{2}\, \vec{b}_3$$

Prodotto vettore

Si definisce solo su $\mathbb{R}^3$ $\quad \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} \times \vec{v}$$

Se $\vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ Quali le componenti di $\vec{v} \times \vec{v}$

Definizione $\vec{u} \times \vec{v}$ è l'unico vettore di $\mathbb{R}^3$ che verifica la seguente proprietà: $\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$

Proprietà di $\vec{u} \times \vec{v}$

a) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ (antisimmetrico)

$$\langle \vec{v} \times \vec{u}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \wedge \vec{u} \wedge \vec{w} = -\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w} = -\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Se vale $\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$

prodotto misto

$$(\vec{u} \times \vec{v})(3) = \langle \vec{u} \times \vec{v}, K \rangle = K \wedge \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & v_1 \\ 0 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - v_1 u_2$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{K} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & u_1 & v_1 \\ \vec{j} & u_2 & v_2 \\ \vec{K} & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

esercizio Calcolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 3 \\ \vec{j} & 2 & 1 \\ \vec{K} & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2+1)\vec{i} - j(1+3) + \vec{K}(1-6) =$$

$$= 3\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{K} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ è ortogonale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Osservazione "x non è commutativo

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 1 \\ \vec{K} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{j} \times \vec{K} = \vec{i}$ $\quad K \times \vec{i} = \vec{j}$ $\quad \vec{i} \to \vec{j}$ $\quad \vec{i} \times \vec{K} = -\vec{j}$

$\vec{K}$

$$(3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{K}) \times (5\vec{i} - 3\vec{j}) =$$

$$= -9\vec{K} - 10\vec{K} + 20\vec{j} + 12\vec{i} = 12\vec{i} + 20\vec{j} - 19\vec{K}$$

"x" non associativo. Se fosse associativo $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ ma non è. Infatti $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0} \times \vec{j} = \vec{0}$

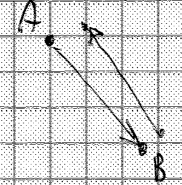
$\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{K} = -\vec{j}$

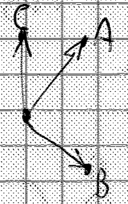
L'ultima uguaglianza $\Rightarrow \vec{u}_A + \vec{w} = u_B \Rightarrow$

$\vec{w} = \vec{u}_B - u_A$

dati $A, B \Rightarrow \exists\, \vec{w} \mid A + \vec{w} = B$

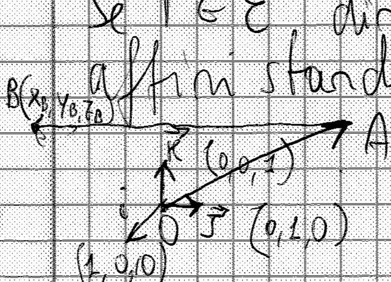
Notazione $A, B \in \mathcal{E}^3$ si indicherà con $\vec{AB}$ l'unico vettore di $\mathbb{R}^3$ che sposta A in B





Definizione: Un riferimento ortogonale standard di $\mathcal{E}^3$ è $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dove $O \in \mathcal{E}^3$ e $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è la solita base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

Se $P \in \mathcal{E}^3$ diremo che P ha coordinate cartesiane affini standard $(x_P, y_P, z_P) \Leftrightarrow \vec{OP} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$



$\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

coordinate^{alon}: punti che si spostano

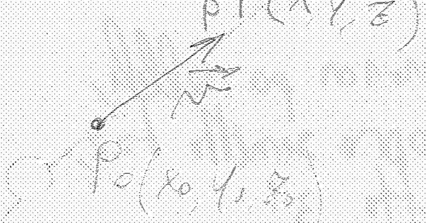
$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ Esempio: In $\mathcal{E}^3$ sia dato il riferimento $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e siano

$A(1, 2, -3)$ $B(3, 1, 5)$

Trovare le componenti del vettore che sposta A in B

Ricordiamo $\mathcal{E}^3$ è lo spazio affine tridimensionale euclideo ~~dove~~ in cui ogni punto possiede un indirizzo dato dalle proprie coordinate rispetto a un dato sistema di riferimento ottenuto scegliendo un'origine e dichiarando che $P \in \mathcal{E}^3$ ha coordinate $x, y, z \iff x, y, z$ sono le componenti dell'unico vettore $\overline{OP}$ che trasla O in P.

Ricordiamo che la retta affine è $\{P \mid P = P_0 + t\vec{v}\}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$
$\qquad\qquad\qquad$ retta $r_{P_0,\vec{v}}$



$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v} \qquad \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \\ z = z_0 + t v_3 \end{cases}$$

Esercizio. Si consideri il punto $P_0 = (3, 1, 4)$ e il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Scrivere equazioni parametriche retta passante per $P_0 \parallel \vec{v}$.

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 5t \\ z = 4 + 7t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + 15t \\ z = 4 + 21t \end{cases}$$

ma poi [illegible] la velocità del secondo sistema è triplo

Equazioni parametriche di un piano

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Equazioni cartesiane piani sono del tipo:

Piano che passa per P_0 e ortogonale a un vettore $\vec{n}_\pi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Sia $P \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_\pi \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

stella di piani passante per $P_0 (x_0, y_0, z_0)$

o una ~~rete~~ rete di piani

Es. $3tx + 5y + (1-t)z - 5$

questa è una famiglia di piani ed è una stella di piani

Trovare il piano del fascio passante per $(2,1,1)$

Imporre passaggio: $3 \cdot 2t + 5 + (1-t) \cdot 1 - 5 = 0$

$6t + 5 + 1 - t - 5 = 0 \quad 5t = -1 \Rightarrow \underline{t = -\frac{1}{5}}$

Siccome un fascio di piani ha una retta in comune, per trovare questa retta:

$t(3x - z) + 5y + z - 5 = 0$

$\forall t$ l'equazione è soddisfatta per tutti i $P(x,y,z)$ verificanti il sistema $\begin{cases} 3x - z = 0 \\ 5y + z - 5 = 0 \end{cases}$

come immergiamo circonferenze di $\mathcal{E}^2$ in $\mathcal{E}^3$, allo stesso modo possiamo immergere sfere di $\mathcal{E}^3$ in $\mathcal{E}^4$

$P_0 \in \mathcal{E}^4$ $\quad O \to P_0 \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$

$P = P_0 + t\vec{u}$

Sia $S \subseteq \mathcal{E}^3$ ← sfera in $\mathcal{E}^3$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

Immergo S in $\mathcal{E}^4$ devo mettere due vincoli

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ X_4 = 0 \end{cases}$$

sfera → per esempio il piano x,y nel piano tridimensionale ha $z = 0$

Ha centro nell'origine di $\mathcal{E}^4$ $O(0,0,0,0)$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \\ x_4 = t \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \\ x_4 = t \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} t^2 + t^2 + t^2 = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

no soluzioni, quindi la retta passa per il centro della sfera ma non la interseca

Ricordiamo che $(\mathbb{R}^n, +)$ e prodotto per numeri reali è uno spazio vettoriale.

Considereremo spazi vettoriali astratti, ossia $(V, +), K$ dove + verifica le proprietà che verifica in $\mathbb{R}^n$ e K è un campo che verifica $K = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \\ \mathbb{Q} \end{cases}$

Esempio

$$3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ $\quad 3\vec{u} + 5(\vec{v} - 2\vec{w}) + 3\vec{v} - 3\vec{u} = 8\vec{v} - 10\vec{w}$

Esempio $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$W \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in W$

$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in W$? Sì

$$\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 \end{pmatrix}$$

Definizione: Sia V un K spazio vettoriale e sia $W \subseteq V$

W si dice sottospazio vettoriale di V $\iff W \neq \emptyset$

(sottoinsieme che mi dà uno spazio vettoriale)

$\forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W \quad \forall \lambda, \mu \in K \quad \lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 \in W$ continua a stare in W

Esempi: Ogni K-spazio vettoriale possiede due sottospazi vettoriali banali, cioè $\{\vec{0}\}$ $\quad V$

$\lambda \vec{0} + \mu \vec{0} = \vec{0}$

Indichiamo con $G(V) = \{$ insieme dei sottospazi vettoriali di $V \}$

$G(V) \neq \emptyset$ Infatti $\{\vec{0}\} \in G(V) \quad V \in G(V)$

Esempio: Consideriamo $W \subseteq \mathbb{R}^3$

dove $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\}$

esempi: considerando $\mathbb{R}^2$ non omogenea

consideriamo $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - y - 3 = 0 \right.$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$ perché $-3 = 0$, perché esco fuori

se prendo $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \in W$, $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} \in W$ ma $\begin{pmatrix} 16 \\ 10 \end{pmatrix}$ non è uno spazio sottob

$S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S^1$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid (x-1)^2 + y^2 = 1 \right.$

$\vec{u}, \vec{v} \in W$ $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in W$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, ma $3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$

se l'equazione è di primo grado e omogenea, è un sottospazio

Ricordiamo che se V è un K spazio vettoriale
allora $W \neq 0$ $W \subseteq V$ è detto sottospazio di V
$\Longleftrightarrow \forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$, $\forall \lambda, \mu \in K$ $\lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 \in W$

$G(V) = \{ W \mid W \text{ sottospazio di } V \}$

Si considerino ora $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ non è un sottospazio (perché è un insieme finito e basta che lo sommo a un altro insieme che esco). Si consideri allora $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_n] =$
$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \mid \lambda_i \in K \right\}$

Esempio: $V = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \}$

V è spazio vettoriale rispetto alla notazione

$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ e $C^0([0,1]) \subsetneq V$

(funzione continue in $[0,1]$) è sottospazio di V.

Infatti se $f, g \in C^0([0,1]) \Rightarrow$ (per analisi I)

$\lambda f + \mu g \in C^0([0,1])$ Però $C^0([0,1])$ ha dimensione infinita perché $\mathbb{R}[x] \subseteq C^0([0,1])$

Esempio: Sia $V = \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è un $\mathbb{Q}$ spazio vettoriale

rispetto ai concetti dei numeri razionali $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda r_1 + \mu r_2$ $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$

$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ per esempio $\sqrt{2}$ non è rappresentabile con numeri razionali

Definizione: Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in W$, $W \in G(V)$

$v_1, \dots, v_n$ si dicono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ l'unica combinazione lineare nulla è quella a coefficienti tutti nulli.

$\mathcal{N}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \mid \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \}$

combinazione lineare nulla

$\mathcal{N}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \neq \emptyset$ Infatti

$(0, 0, \dots, 0)$ verifica la condizione $(*)$

Allora $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ sono l. ind. $\Leftrightarrow$

$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Viceversa se esiste uno combinazione lineare degli altri, per esempio $\vec{v}_h \Rightarrow \exists\, \mu_1, \dots, \mu_h \mid \vec{v}_h = \mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_{h-1} \vec{v}_{h-1}$

$\Rightarrow \vec{v}_h - \mu_1 \vec{v}_1 - \dots - \mu_{h-1} \vec{v}_{h-1} = \vec{0}$

L'ultima uguaglianza è una relazione lineare non banale cioè a coefficienti non tutti nulli.

Proposizione $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_h\}$ sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ ogni $\vec{v} \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_h]$ si scrive come combinazione lineare unica di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_h$

Dimostrazione: supponiamo che $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_h$ siano l.i e siano $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_h \vec{v}_h = \mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_h \vec{v}_h$ due espressioni di $\vec{v}$ come combinazione lineare di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_h$

l'uguaglianza $\Rightarrow \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_h \vec{v}_h - \mu_1 \vec{v}_1 - \dots - \mu_h \vec{v}_h = \vec{0}$

$(\lambda_1 - \mu_1)\vec{v}_1 + \dots + (\lambda_h - \mu_h)\vec{v}_h = \vec{0}$

rel. nulla di vettori l.i

$\Rightarrow \lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \dots = \lambda_h - \mu_h = 0$

$\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_h = \mu_h$

Viceversa supponiamo che ogni $\vec{v} \in [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_h]$ si scriva in modo unico come C.L. di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_h$. Allora $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_h$ sono l.i. Infatti $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_h \vec{v}_h = \vec{0}$

$\vec{0} \in [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_h]$ $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_h = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_h \vec{v}_h$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \dots \lambda_h = 0$ Quindi $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_h$ sono l.i

Definizione: supponiamo che $V = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_h]$ e $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_h$ linearmente indipendenti (unica combinazione lineare). Allora $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_h)$ si dice BASE di V

ordinata (se si pone cura all'ordine)

Ricordiamo che se A, B sono insiemi: $A \subseteq B \iff x \in A \Rightarrow x \in B$ 29

$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Sotto l'ipotesi $(*)$ proviamo che

$\underbrace{[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{h-1}, \vec{v}_h]}_{\vec{w}} \subseteq [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{h-1}]$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_h \in \mathbb{K} /$

$\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{h-1} \vec{v}_{h-1} + \lambda_h \vec{v}_h$ per $(*)$ $\exists \mu_1 \dots \mu_{h-1} \in \mathbb{K}$

$\vec{v}_h = \mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_{h-1} \vec{v}_{h-1} \Rightarrow \vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{h-1} \vec{v}_{h-1} +$

$+ \lambda_h (\mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_{h-1} \vec{v}_{h-1}) = (\lambda_1 + \lambda_h \mu_1) \vec{v}_1 + \dots + (\lambda_{h-1} + \lambda_h \mu_{h-1})$

$\vec{v}_{h-1}$

L'algoritmo di riduzione dei generatori si dice "metodo degli scarti successivi" si arriva a insieme minimale di generatori.

Ricordiamo che $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m) \in \underbrace{W \times W \times \dots W}_{m \text{ volte}}$

$\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\} \subseteq W$ si dice base di $W \iff W = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m]$ e che

Sono linearmente indipendenti $(\lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_m \vec{b}_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0)$

quindi $b_1, b_2, \dots, b_m$ sono tutti indispensabili perchè tutti i coefficienti = 0

quindi è un insieme minimale di generatori, non si può eliminare nessuno.

Inoltre si è detto che in tal caso $\forall \vec{w} \in W \ \exists! \lambda_1 \dots \lambda_m /$

$\vec{w} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_m \vec{b}_m$

Sia $W \in G(V)$ (W può essere anche V) finitamente generato, ossia esistono $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_h \in W \,/\, W = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_h]$. Estraiamo basi di W.

Domanda se $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$ e $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m)$ sono due basi di uno stesso $W \in G(V)$, sarà che $m = n$? Sì. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ $\mathbb{C} = [1]_{\mathbb{C}}$ $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = z \cdot 1$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$ $\quad \mathbb{C}^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ V possiede una base formata da n elementi

Esercizio: Sia $W \in \mathbb{R}^4$ il sottoinsieme delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x_2 - 2x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Provare che W è sottospazio di $\mathbb{R}^4$, trovare una base e la dimensione. Si è un sottospazio perché è formato da due equazioni lineari omogenee

$$W \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x_2 - 2x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{matrix} \right. \qquad \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W \Rightarrow \lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 \in W$$

ha dimensione 2 perché ci sono 2 equazioni

Trovare base: sommando viene: $3x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

Sostituendo $x_2 \to x_1$ prima eq: $x_1 + x_3 + x_4 = 0$

$x_1 = -x_3 - x_4$

Quindi $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow = \begin{pmatrix} -x_3 - x_4 \\ -x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$

quindi ci sono solo 2 parametri liberi

$$= x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = W$$

Ricordiamo che se V è uno spazio vettoriale e $W \in G(V)$

$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_h)$ è detta base di $W \Leftrightarrow W = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_h]$ e

$\vec{b}_i$ sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ ogni $\vec{w} \in W$ esistono unici $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_h \in \mathbb{K}$ tali che $\vec{w} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_h \vec{b}_h$

$\dim_{\mathbb{K}} W = h$

$$W_a = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \right\}$$

Mostriamo che $W_a \in G(\mathbb{K}^n)$

Siano $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ due soluzioni $\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n + \mu v_n \end{pmatrix}$ è soluzione di $(*)$

Infatti $a_1(\lambda u_1 + \mu v_1) + a_2(\lambda u_2 + \mu v_2) + \dots + a_n(\lambda u_n + \mu v_n) =$

metto in evidenza λ / al posto di x

$$= \lambda(\underbrace{a_1 u_1 + \dots + a_n u_n}_{=0}) + \mu(\underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n}_{=0}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v} \in W_a \Rightarrow \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in W_a \qquad W_a \in G(\mathbb{K}^n)$$

Esercizio: provare che l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$

Dim: Siano $a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$

$a_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$

$\vdots$

$a_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$

$$S = W_{a_1} \cap W_{a_2} \cap \dots \cap W_{a_m} \in G(\mathbb{K}^n)$$

Siccome le soluzioni di ogni eq. lineare omogenea è un sottospazio, l'insieme di queste soluzioni è anch'esso un sottospazio.

Sia $\dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$ $W_1, W_2 \in G(V)$. W_1 e W_2 hanno dimensione finita, diciamo h e k. $\exists B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h)$ base di W_1

<u>Esempio</u>. Siano $W_1, W_2 \in G(\mathbb{R}^3)$ e $\dim W_i = 2$ $(i = 1, 2, 3)$ 4 5

Supponiamo che $W_1 \neq W_2$ $\underbrace{\dim(W_1 + W_2)}_{3} = \underbrace{\dim W_1}_{2} + \underbrace{\dim W_2}_{2} - ?$

Quell'uno da togliere è risolto dal teorema:

<u>Teorema</u> (Relazione di GRASSMANN)

Sia V $\dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$

dimensione finita

$W_1, W_2 \in G(V)$

$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

nel caso di insiemi: $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$

Viene confermato il fatto che

se $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ la somma è diretta

$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$

Es. $\mathbb{R}^5 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \oplus [\vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5]$

Ricordo allora che per verificare che $W_1 + W_2$ è diretta basta controllare che $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$

<u>Esercizio</u> Siano $W_1 = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]$ e $W_2 = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$

da Grassmann sappiamo che $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2)$

Trovare $W_1 \cap W_2$. Se $\vec{v} \in W_1 \cap W_2$

$\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda + 2\mu\\ \lambda + \mu\\ 0\lambda + \mu\end{pmatrix}$

$\vec{v} = a \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + b \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\a+b\\a+b\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = b \\ \lambda + \mu = a + b \\ \mu = a + b \end{cases} \Rightarrow \quad \mu = \frac{b}{2}, \quad \mu = a + b, \quad \lambda = 0$$

$\vec{v} = \frac{b}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = b \begin{pmatrix}1\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$

Infatti $\forall \vec{u} \in V \quad \varphi(\vec{0}_V) = \varphi(0 \cdot \vec{u}) = 0 \cdot \varphi(\vec{u}) = \vec{0}_{\mathbb{V}}$ 47

Definizione: $\varphi \in Hom_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{V})$ si dice isomorfismo $\Leftrightarrow$ φ è biettiva cioè è iniettiva e suriettiva

φ iniettiva $\Leftrightarrow$ $\varphi(\vec{u_1}) = \varphi(\vec{u_2}) \Rightarrow \vec{u_1} = \vec{u_2}$

φ è suriettiva $\Leftrightarrow \exists \vec{v} \in \mathbb{V} \ \exists \vec{u} \in V / \varphi(\vec{u}) = \vec{v}$

Definizione due spazi vettoriali V e $\mathbb{V}$ si dicono isomorfi $\Rightarrow$ $\exists$ isomorfismo da $V \to \mathbb{V}$

$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ è isomorfo a $\mathbb{R}^3$

$a + bx + cx^2 \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + u_3\vec{e_3}$

$\varphi(\lambda p_1 + \mu p_2) = \lambda\varphi(p_1) + \mu\varphi(p_2)$

Esempio Noi non sappiamo ancora cos'è una matrice

$\mathbb{R}^{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \quad 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^{2\times 2}$ è ovviamente isomorfo a $\mathbb{R}^4$

Infatti posso considerare $\varphi: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$

$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è un omomorfismo

$\varphi\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Esempio Sia $B = (\vec b_1, b_2, b_n)$ base di V

Quali sono le componenti di b_1 rispetto alla base B? $(\vec b_1)_B = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \vec e_1$

$\vec b_1 = \vec b_1 = 1 \cdot b_1 + 0\, b_2 + 0\, b_n$ $\qquad (b_2)_B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \vec e_2$

$(\vec b_n)_B = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} = \vec e_n$

Quindi l'isomorfismo $\varphi_B : V \to \mathbb{K}^n$
$\vec v \longmapsto (\vec v)_B$ che
manda $B \to E_n = (\vec e_1, \dots, \vec e_n)$
$\vec b_i \longrightarrow (\vec b_i)_B = \vec e_i$

Definizione $\varphi : U \to V$ lineare $\vec v \in V$

$\varphi^{-1}(\vec v) = (\vec u \in U / \varphi(\vec u) = \vec v)$

$\varphi^{-1}(v)$ si dice controimmagine di $\vec v$ per mezzo di φ. Se φ è iniettiva $\Rightarrow \varphi^{-1}(\vec v)$ è un insieme formato da un solo vettore.

Proposizione

Sia $\varphi : U \to V$ un isomorfismo. Allora $\varphi^{-1} : V \to U$ definita da $\varphi(\varphi^{-1}(\vec v)) = \vec v$ è un isomorfismo (def. inversa)

Proviamo che è lineare

Sia $\lambda \vec u + \mu \vec v \in V$ un arbitraria combinazione lineare

$\varphi^{-1}(\lambda \vec u + \mu \vec v) = \varphi^{-1}(\lambda \varphi(\varphi^{-1}(\vec u)) + \mu \varphi(\varphi^{-1}(\vec v))) =$
$= \varphi^{-1}(\varphi(\lambda \varphi^{-1}(\vec u) + \mu \varphi^{-1}(\vec v))) = \varphi^{-1} \circ \varphi(\lambda \varphi^{-1}(\vec u) + \mu \varphi^{-1}(\vec v)) =$
$= \lambda \varphi^{-1}(\vec u) + \mu \varphi^{-1}(\vec v)$

se $\vec{w}=0$ posso considerare $\varphi = f^{-1}(\vec{0}_V) = Ker(f) = \{\vec{v} \in U \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\}$

perché $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_V$ nucleo di f

insieme di tutti i vettori di U tali che $f(\vec{u})$ va nel vettore nullo

Proposizione $f \in Hom_K(U,V)$ $Ker(f) \in G(U)$ ($Ker\, f$ è sottospazio di U)

esempio

$D = d/dx$ $y'' - 3y' + 2y = 0$ risolvere questa eq. differenziale equivale

$(D^2 - 3D + 2)y = 0$ a trovare il nucleo $Ker(D^2 - 3D + 2) = [e^x, e^{2x}]_{\mathbb{R}}$

Dim $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in Ker\, f$ $\forall \lambda, \mu \in K$

$f(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) = \lambda f(\vec{u}_1) + \mu f(\vec{u}_2)$ $= \lambda \vec{0}_V + \mu \vec{0}_V = \vec{0}_V \Rightarrow Ker(f) \in G(V)$

Proposizione $f \in Hom_K(U,V)$ applicazione lineare f è iniettiva $\Leftrightarrow Ker(f) = \{\vec{0}_V\}$

$\Leftrightarrow \dim Ker(f) = 0$ più è grande la funzione più è iniettiva

Dim $\Rightarrow$) dimostro che se f è iniettiva contiene solo il vettore nullo

$\vec{u} \in Ker(f)$ $\vec{0}_V = f(\vec{u}) = f(\vec{0}_V)$ siccome f è iniettiva

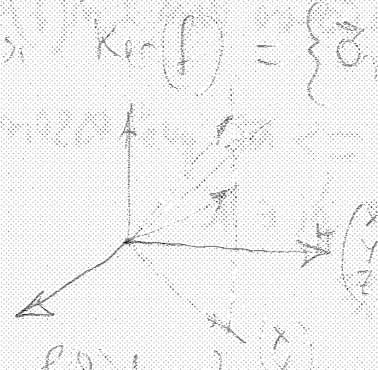
$\vec{u} = \vec{0}_V$ Supponiamo $Ker(f) = \{\vec{0}_V\}$

$f(\vec{u}_1) = f(\vec{u}_2)$ $f(\vec{u}_1) - f(\vec{u}_2) = \vec{0}_V$ ha senso perché siamo in uno spazio vettoriale

$f(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \vec{0}_V \Rightarrow \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \in Ker(f)$

Per ipotesi $Ker(f) = \{\vec{0}_V\} \Rightarrow \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{0}_V \Rightarrow \vec{u}_1 = \vec{u}_2$

Esempio



$\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ non è iniettiva

infatti $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker\, \pi \Leftrightarrow \pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Ker\, \pi \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$ $\dim Ker\, \pi = 1$ $Ker\, \pi = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = [\vec{e}_3]$

pertanto $\vec{v} = f(\vec{u}) = f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n \vec{b_n}) =$ (linearità)
$= \lambda_1 f(\vec{b_1}) + \dots + \lambda_n f(b_n)$

Applicazione:

1) Sia $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Prendo una base di $\mathbb{R}^4$: $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$
a) è iniettiva ← falso
b) è suriettiva
c) può essere suriettiva
d) può essere iniettiva

$[f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3}), f(\vec{e_4})] = Im(f)$

Per risolvere tale esercizio devo provare
$f: V \to T$ è iniettiva $\Leftrightarrow$ l'immagine di un qualsiasi insieme di vettori di V linearmente indipendenti sono linearmente indipendenti

La a è falsa perché $\dim [f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)] \leq 2$ e quindi non sono linearmente indipendenti

La b è falsa perché se prendo $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ e calcolo l'immagine

$[f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)] = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{0}, \vec{0}, \vec{0}]$ al posto di x metto

Prima proposizione

Supponiamo f iniettiva allora $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}$ sono l.i. $\Rightarrow$
$f(\vec{u_1}), \dots, f(\vec{u_n})$ sono l.i.
Sia infatti $\lambda_1 f(\vec{u_1}) + \lambda_2 f(\vec{u_2}) + \dots + \lambda_n f(u_n) = \vec{0}_V$
Per linearità $(*) \Rightarrow f(\lambda_1 \vec{u_1} + \dots + \lambda_n \vec{u_n}) = \vec{0}_V$
Allora $\lambda_1 \vec{u_1} + \dots + \lambda_n \vec{u_n} \in Ker(f)$
f iniettiva $\Rightarrow Ker f = \{\vec{0}_V\} \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \vec{0}$
Siccome $\vec{u_i}$ sono l.i. $\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$
Viceversa se immagine di l.i. è l.i. f è iniettiva
Infatti $\vec{u} \in Ker f \Rightarrow \vec{u} = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n \vec{b_n}$ dove $B = (\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n})$ è una base di V $\quad f(\vec{u}) = f(\sum \lambda_i \vec{b_i}) = \lambda_1 f(\vec{b_1}) + \dots + \lambda_n f(b_n) = \vec{0}_V$

Può $f: \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^3$ essere iniettiva? No perché

Sappiamo che $\underset{\text{dim spazio partenza}}{10} = \underset{\leq 3}{\dim \mathrm{Im}(f)} + \dim \mathrm{Ker} f$ ma se $\dim \mathrm{Ker} \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = 10$ (essendo $\mathrm{Im} f \subseteq \mathbb{R}^3$)

Può $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ essere suriettiva? No,

$3 = \underset{5}{\dim \mathrm{Im} f} + \underset{-2}{\dim \mathrm{Ker} f}$ (non può essere, assurdo)

MATRICI: Sia $\mathbb{K}$ un campo ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) e sia $\mathbb{K}^{m \times n}$ (m, n interi non negativi) l'insieme di tutte le tabelle rettangolari a m righe e n colonne con entrate in $\mathbb{K}$.

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ A possiede m righe e n colonne. Si può indicare con $A(i,j) \in \mathbb{K}$ lo scalare in posizione (i,j) della tabella. La notazione riflette il fatto che la matrice è una funzione che va da $A: \mathbf{m} \times \mathbf{n} \to \mathbb{K}$ dove $\mathbf{m} = \{1, \dots, m\}$ $\mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$ $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ è il prodotto cartesiano

Esempio: $\{1,2\} \times \{1,2,3\} = 2 \times 3$

rappresentazione ordinata

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{11}{2} \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A(2,2) = 5$$

In generale una tabella della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} \in \mathbb{K} \quad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n$$

identifica la funzione $A: \mathbf{m} \times \mathbf{n} \to \mathbb{K}$
$(i,j) \mapsto A(i,j) \in \mathbb{K}$

Dove $\vec{u}(i) = u_i$

$$A\cdot\vec{u} = \left(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)\right)\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ \vdots \\ u_n\end{pmatrix}$$

$$= u_1 C_1(A) + u_2 C_2(A) + \dots + u_n C_n(A)$$

Esempio $A = \begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\4&5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ righe colonne

Definisce $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot7\\-1\cdot3+3\cdot7\\3\cdot4+5\cdot7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\18\\47\end{pmatrix}$$

$A\,\vec u = \begin{pmatrix}R_1(A)\cdot\vec u\\R_2(A)\cdot\vec u\\ \vdots\\R_m(A)\cdot\vec u\end{pmatrix}$ Allo stesso modo A definisce un'applicazione lineare $A: (K^m)^\vee \longrightarrow (K^n)^\vee$

$\alpha\cdot A = \alpha(1)R_1(A)+\dots+\alpha(m)R_m(A)$ $\quad \alpha \longmapsto \alpha A$

$= \left(\alpha\cdot C_1(A), \dots, \alpha\, C_n(A)\right)$

Verifichiamo la linearità di A. Siano $\vec u_1, \vec u_2 \in K^n$

$A(\lambda\vec u_1 + \mu\vec u_2) \overset{?}{=} \lambda A\vec u_1 + \mu A\vec u_2$

Esempio Sia $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-y+z\\x-3y+7z\end{pmatrix}$ $\quad f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

Provare che f è lineare. È lineare perché $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}+z\,($

$= \begin{pmatrix}2&-1&1\\1&-3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\quad A(\lambda\vec u_1+\mu\vec u_2)$

$\alpha \longmapsto \alpha A$

$\mathbb{K}^{1\times n} = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\} = (\mathbb{K}^n)^\vee$

Le matrici 1×1 $(\mathbb{K}^{1\times 1})$ sono identificabili agli scalari

$(\lambda) \in \mathbb{K}^{1\times 1}$ $\lambda \in \mathbb{K}$ $\quad \mathbb{K}^{1\times 1} \longrightarrow \mathbb{K}$ (isomorfismo identificante)

$(\lambda) \longrightarrow \lambda$

Proposizione: L'applicazione $(\mathbb{K}^n)^\vee \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ definita da $\left((a_1, \dots, a_n), \begin{pmatrix} u_1 \\ u_n \end{pmatrix}\right) \longmapsto \alpha \cdot \vec{u} = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$ detta prodotto di riga per colonna è BILINEARE ossia

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in (\mathbb{K}^n)^\vee$ (riga), $\forall \vec{u} \in \mathbb{K}^n$ (colonne) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$(\lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2)\vec{u} = \lambda(\alpha_1 \vec{u}) + \mu(\alpha_2 \vec{u})$

$\forall \alpha \in (\mathbb{K}^n)^\vee, \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{K}^n, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$\alpha(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) = \lambda \alpha \vec{u}_1 + \mu \alpha \vec{u}_2$

$(\mathbb{K}^n)^\vee$ e $\mathbb{K}^n$ sono isomorfi per mezzo dell'ovvia biezione

$T: \mathbb{K}^n \longrightarrow (\mathbb{K}^n)^\vee \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{u}^T = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

e $(\mathbb{K}^n)^\vee \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$\alpha = (a_1, \dots, a_n) \longmapsto \alpha^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Perché $T: \mathbb{K}^n \longrightarrow (\mathbb{K}^n)^\vee$ è biezione? $\vec{u}_1^T = \vec{u}_2^T \Rightarrow (\vec{u}_1^T)^T = (\vec{u}_2^T)^T$

Usando $\underset{\alpha^{TT}}{(\alpha^T)^T} = \alpha$ $\quad \underset{\vec{u}^{TT}}{(\vec{u}^T)^T} = \vec{u}$ (trasposizione ... che $(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2)^T = \lambda \vec{u}_1^T + \mu \vec{u}_2^T$)

Osserviamo che se $\alpha \in \mathbb{K}^{1\times 1} = (\mathbb{K}^{1\times 1})^\vee \Rightarrow \alpha^T = \alpha$

Osservazione n-1: il prodotto riga × colonna $\alpha \vec{u}$ è commutativo, non è simmetrico ma $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{u}^T \cdot \alpha^T$ infatti per esempio

$(a_1, a_2)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} (u_1, u_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 7 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 23 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$$

Il prodotto AB è bilineare nel senso che:

$\forall A, A_1, A_2 \in \mathbb{K}^{m \times p}$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$\forall B, B_1, B_2 \in \mathbb{K}^{p \times n}$

$$(\lambda A_1 + \mu A_2) B = \lambda A_1 B + \mu A_2 B$$

$$A(\lambda B_1 + \mu B_2) = \lambda A B_1 + \mu A B_2$$

Osserviamo inoltre che

$AB : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ è lineare

Prendiamo $A \in \mathbb{K}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{K}^{p \times q}$, $C \in \mathbb{K}^{q \times n}$

Allora
$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{C} \mathbb{K}^q \xrightarrow{B} \mathbb{K}^p \xrightarrow{A} \mathbb{K}^m$$

$\underbrace{}_{B \cdot C}$

$$A(BC) = (AB)C$$

Prodotto righe colonne è associativo

Osserviamo che $A(i,j) = R_i(C_j(A)) = C_j(R_i(A))$

$$\varepsilon_i \cdot C_j(A)$$

$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$$\varepsilon_i (A \cdot \vec{e}_j) = (\varepsilon_i A) \cdot \vec{e}_j$$

$$Ker(A) = \{\vec{a} \in \mathbb{K}^n \mid A\vec{a} = \vec{0}\}$$

Def. Sia $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $A = \begin{pmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ R_m(A) \end{pmatrix} = (C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A))$

$R_i(A) \in (\mathbb{K}^n)^V$

$C_j(A) \in \mathbb{K}^m$ $\mathcal{C}(A) = [C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)] \in G(\mathbb{K}^m)$

$\mathcal{C}(A)$ si dice spazio vettoriale generato dalle colonne di A o spazio colonna

Proposizione Sia $A \in K^{m \times n}$ e sia $\vec{u}_0$ una soluzione particolare del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$. Allora $A^{-1}(\vec{b}) \neq \emptyset$

$A^{-1}(\vec{b}) = \vec{u}_0 + Ker(A)$ dove $\vec{u}_0 + Ker(A) = \{\vec{u}_0 + \vec{u} \mid \vec{u} \in Ker(A)\}$

$\dim Ker(A) = \dim K^n - \dim Im(A)$ quindi il traslato del nucleo e somma $\vec{u}_0$

$= n - rk(A)$

Viceversa $A^{-1}(\vec{b}) \subseteq \vec{u}_0 + Ker(A)$

Sia $\vec{w} \in A^{-1}(b)$

Riassumendo $A^{-1}(b) \neq \emptyset \Longleftrightarrow rk(A) = rk(A|\vec{b})$

Inoltre se $A^{-1}(\vec{b}) \neq \emptyset$ allora $\exists \vec{u}_0 \in A^{-1}(b)$

$A^{-1}(\vec{b}) = \vec{u}_0 + Ker(A)$

numero incognite $\longrightarrow$ numero di quelle che fungono da parametri

$x - y = 1$ ha ∞^{n-r} y in funzione di x

Sia $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{n-r}$ una base di $Ker(A)$

$A^{-1}(\vec{b}) = \vec{u}_0 + c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \ldots + c_n\vec{u}_n$

$y'' - 3y' + 2y = 0$ $D = \frac{d}{dx}$ $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$

$D^2 - 3D + 2Id$ $C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$

$f \longrightarrow D^2f - 3Df + f$ Risolvere $Ker(D^2 - 3D + 2Id)$

$\dim Ker(D^2 - 3D + 2Id) = 2$ $Ker(D^2 - 3D + 2Id) = [e^x, e^{2x}]$

Matrici ridotte

Def Una matrice $A \in K^{m \times n}$ si dice ridotta per righe o per colonne se ogni riga/colonna non nulla possiede un elemento non nullo al di sotto del quale / alla destra del quale vi siano solo zeri.

Esercizio Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $r(A)=3$

Discutere

Risolvere il sistema $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$r(A)$ è la dimensione dell'immagine quindi certamente possibile soluzioni

dobbiamo trovare dim(Ker)

$\dim Ker(A) = 4-3=1$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=1 \\ 2x_1 \quad +4x_3+x_4=2 \\ x_1 \quad -x_4=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1-3x_4 \\ 2x_1 \quad +4x_3=2-x_4 \\ x_1 \quad =x_4-1 \end{cases}$$

$2(x_4-1)+4x_3=2-x_4$ $\quad 4x_3=2-x_4-2x_4+2=4-3x_4$

$x_3=1-\frac{3}{4}x_4 \longrightarrow 2x_2=1-3x_4-x_1+x_3=1-3x_4+1-\frac{3}{4}x_4-(x_4-1)$

$=3-\frac{19}{4}x_4$

$$\begin{cases} x_1=\lambda-1 \\ x_2=\frac{3}{2}-\frac{19}{8}\lambda \\ x_3=1-\frac{3}{4}\lambda \\ x_4=\lambda \end{cases} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{soluzione particolare}} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -19/8 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}}_{Ker A}$$

Ker A $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+4x_3+x_4=0 \\ x_1 \quad -x_4=0 \end{cases}$

posso prendere altre soluz. $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=0 \\ x_3=1/4 \\ x_2=-\frac{11}{8} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_4=\lambda \\ x_1=\lambda \\ x_3=-\frac{3}{4}\lambda \\ x_2=-\frac{19}{8}\lambda \end{cases}$$

Notar diamo che ad ogni matrice $A \in \mathbb{K}^{n \times p}$ può associarsi una matrice $A^T \in \mathbb{K}^{p \times n}$ detta trasposta definita da:

$R_i(A^T) = C_i(A)^T$

Esempio $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ $A^T \mid R_1(A^T) = C_1(A)^T$

$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ Proprietà: se $A \in \mathbb{K}^{n \times p}$ e $B \in \mathbb{K}^{p \times m}$ allora $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$A^T \in \mathbb{K}^{p \times n}$ $B^T \in \mathbb{K}^{m \times p}$ Ricordiamo che $A^{n \times n}$ si dice

$R_i(A \cdot B)^T = C_i(A \cdot B)^T$ matrice quadrata

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Una matrice quadrata si dice simmetrica $\iff A^T = A$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ è simmetrica

A si dice antisimmetrica $\iff A^T = -A$ (In particolare $A(i,i) = 0 \ \forall 1 \le i \le n$)

Esempio: Scrivere la più generale matrice antisimmetrica 3x3

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ -a_2 & -b_2 & -c_2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & -c \\ b & 0 & -c_1 \\ c & c_1 & 0 \end{pmatrix}$ x cultura generale $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_2 & -\omega_2 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_3 \\ \omega_2 & \omega_3 & 0 \end{pmatrix}$ si dice matrice velocità angolare

Osservazione Sia $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ lo spazio vettoriale delle matrici 3x3 $Q^{3 \times 3} = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A^T = -A\}$ $S^{3 \times 3} = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A^T = A\}$

dim $\mathcal{A}^{n\times n} = \frac{1}{2}n(n-1)$

$\mathbb{K}^{n\times n}$ non è solo uno spazio vettoriale ma è anche una $\mathbb{K}$-algebra. Infatti se A, B sono matrici quadrate $\in A, B \in \mathbb{K}$ $A\cdot B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. È una $\mathbb{K}$ algebra associativa. Infatti $\forall A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $(A\cdot B)C = A\cdot(B\cdot C)$.

Inoltre $\mathbb{1}_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definito da $\mathbb{1}_n(i,j) = \delta_{ij}$ è elemento neutro $\mathbb{1}_n = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n)$ $\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Infatti $\forall A \in \mathbb{K}^n$

$A\cdot \mathbb{1}_n = A\cdot(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = (A\cdot\vec{e}_1, \dots, A\cdot\vec{e}_n) = (C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A))$
$= A$ $\quad \mathbb{1}_n \cdot A = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}\cdot A = \begin{pmatrix} E_1\cdot A \\ E_2\cdot A \\ \vdots \\ E_n\cdot A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ R_n(A) \end{pmatrix} = A$

Valgono proprietà distributive $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $\forall A, A_1, A_2, B, B_1, B_2$

$(\lambda A_1 + \mu A_2)B = \lambda A_1 B + \mu A_2 B$

$A(\lambda B_1 + \mu B_2) = \lambda A\cdot B_1 + \mu A\cdot B_2$

<u>Definizione</u>: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ si dice invertibile $\Longleftrightarrow \exists B \in \mathbb{K}^{n\times n} /$ $A\cdot B = B\cdot A = \mathbb{1}_n$. In tal caso B si dice l'inversa di A e si scrive A^{-1}

In particolare se A è invertibile A^{-1} è invertibile e $(A^{-1})^{-1} = A$. Ancora se A, B invertibili $A\cdot B$ è invertibile e si ha $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$ infatti $A\cdot(B\cdot B^{-1})\cdot A^{-1} = (A\,\mathbb{1}_n)A^{-1} =$
$A\cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n$ $\quad B^{-1}A^{-1}A\cdot B = \dots = \mathbb{1}_n$

<u>Esempio</u> sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile. Infatti se fosse invertibile se $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = A^{-1}$ $\quad A\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Il commutatore verifica le seguenti proprietà

$[A,B] = -[B,A]$ (antisimmetria) $[\lambda A_1 + \mu A_2, B] = \lambda[A_1,B] + \mu[A_2,B]$

$[A, \lambda B_1 + \mu B_2] = \lambda[A, B_1] + \mu[A, B_2]$

Vale l'identità di Jacobi

$\forall A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$

$(\mathbb{K}^{n\times n}, [\,,\,])$ è un Algebra di Lie

Ricordiamo $(\mathbb{R}^3, \wedge)$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ è bilineare

$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ Per quanto detto $\mathbb{R}^{3\times 3}$ è algebra di Lie.

$a^{3\times 3}$ sono sottoalgebra di Lie

$A, B \in \underset{\text{antisimmetriche}}{a^{3\times 3}} \Rightarrow [A,B]^T = -[A,B]$

$(AB - BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = -B(-A) - (-A)(-B) = BA - AB$

$(\mathbb{R}^3, \wedge) \xrightarrow{\sim} (a^{3\times 3}, [\,,\,])$

Base prodotto vettore

$\vec{i} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\vec{j} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\vec{k} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Consideriamo $V = \mathbb{R}_{\leq 1}[x] = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ $\dim V = 2$

$\mathcal{B} = (2 - x,\ 1 + 3x)$, $\mathcal{C} = (1 + 2x,\ -1 + 4x)$

$S = (1, x) \to$ base standard $(1+5x) \to 1 + 5x$

Scrivere $P^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$

$P^{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \left((2-x)_{\mathcal{C}},\ (1+3x)_{\mathcal{C}} \right)$

$2 - x = \lambda(1 + 2x) + \mu(-1 + 4x) \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$

$2 - x = (\lambda - \mu) + 2(\lambda + 2\mu)x$ quindi $(\lambda - \mu) = 2$, $2\lambda + 4\mu = -1$

$\begin{cases} \lambda - \mu = 2 \\ 2\lambda + 4\mu = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\lambda - 2\mu = 4 \\ 2\lambda + 4\mu = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda - \mu = 2 \\ 6\mu = -5 \end{cases}$ $\mu = -5/6$, $\lambda = 2 + \mu = 2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$

Secondo metodo: Osserva che $P^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$

$P^{S,\mathcal{B}} = \left((2-x)_S,\ (1+3x)_S \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$P^{\mathcal{C},\mathcal{B}} = P^{\mathcal{C},S} P^{S,\mathcal{B}} = (P^{S,\mathcal{C}})^{-1} P^{S,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{7}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$\vec{v} = 3\vec{b}_1 - 4\vec{b}_2$ $(\vec{v})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $(\vec{v})_{\mathcal{C}} = P^{\mathcal{C},\mathcal{B}} (\vec{v})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{7}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -7/6 \\ -\frac{19}{6} \end{pmatrix}$ $3\vec{b}_1 - 4\vec{b}_2 = 3(2 - x) - 4(1 + 3x) = 2 - 15x$

$-\frac{7}{6}(1 + 2x) - \frac{19}{6}(-1 + 4x) = 2 - 15x$

Esempio: Sia $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$

$$f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b-2c \\ a-b+3c \end{pmatrix}$$

base standard

$S = (1, x, x^2) \quad B = (1, 1-x, 1+x+x^2)$

$\beta = (\vec{b_1}, \vec{b_2}) \quad \vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad E_2 = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$

Qualsiasi provare che f è lineare

$$\varphi(a+bx+cx^2)_{E_2} = \begin{pmatrix} a+b-2c \\ a-b+3c \end{pmatrix}$$

$$\varphi(a+bx+cx^2)_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} (a+bx+cx^2)_S$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad M_f^{E_2, S}$$

$M_f^{B, C}$ spazio di partenza, spazio arrivo $= (\varphi(1), \varphi(1-x), \varphi(1+x+x^2)) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\beta}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\beta}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\beta} \right)$$

$(\vec{v})_C = P^{C, E_2} (\vec{v})_{E_2}$

$$P^{C, E_2} = (P^{E_2, \beta})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M_{\varphi}^{B, C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrici associate ad endomorfismi

Sia $\varphi: V \to V$ lineare sia $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ B, C sono basi di V arbitrarie. Posso associare a φ una matrice $\mathbb{K}^{n,n}$ $M_{\varphi}^{B,C} =$

$$= (\varphi(\vec{b_1})_C, \dots, \varphi(\vec{b_n})_C)$$

Ricordiamo che se $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ e $\dim_{\mathbb{K}} V = m$ e
$\varphi \in Hom_{\mathbb{K}}(U,V)$ e $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ e $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m)$
sono basi di U e V rispettivamente allora si ha una funzione
che va da $Hom_{\mathbb{K}}(U,V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{m \times n}$ (isomorfismo)

$$\varphi \longmapsto M_\varphi^{C,B}$$

dove $M_\varphi^{C,B} = \left(\varphi(\vec{b}_1)_C, \dots, \varphi(\vec{b}_n)_C \right)$

Ricordiamo che $Hom_{\mathbb{K}}(V,V) = End_{\mathbb{K}}(V)$

$End_{\mathbb{K}}(V) = \{\mathbb{K}$ algebra degli endomorfismi$\}$

se $\varphi, \psi \in End_{\mathbb{K}}(V)$ $\psi \circ \varphi \in End_{\mathbb{K}}(V)$

$\exists\, id_V : V \to V$
$\vec{v} \mapsto \vec{v}$

Esiste $\forall \varphi \in End_{\mathbb{K}}(V)$, $\varphi \circ id_V = id_V \circ \varphi = \varphi$

$End_{\mathbb{K}}(V) \longrightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$

isomorfismo non unico perché dipende dalla scelta di una base

B $End(V) \longrightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\varphi \longmapsto M_\varphi^{B,B} = (\varphi(b_1)_B, \varphi(b_2)_B)$$

D'ora in poi se $\varphi \in End_{\mathbb{K}}(V)$ e B base di V

$M_\varphi^B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ dove $M_\varphi^B = \left(\varphi(\vec{b}_1)_B, \dots, \varphi(\vec{b}_n)_B \right)$

Proposizione: Siano $\varphi, \psi \in$ endomorfismi $End_{\mathbb{K}}(V)$ $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
B, C basi di V $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ scalari

a) $M^B_{id_V} = \mathbb{1}_n = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$

b) $M^B_{(\lambda\varphi + \mu\psi)} = \lambda M_\varphi^B + \mu M_\psi^B$

Osservazione: Supponiamo che $\varphi \in End_n(V)$ possegga n autodirezioni indipendenti possiamo esibire $B = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n})$ / $[\vec{b_1}], [\vec{b_2}], \dots, [\vec{b_n}]$ sono autodirezioni

Esercizio determinare la matrice $M_\varphi^B = (\varphi(\vec{b_1}), \varphi(\vec{b_2}), \dots, \varphi(\vec{b_n}))$

per ipotesi $\varphi(\vec{b_j}) = \lambda_j \vec{b_j}$

$$M_\varphi^B = \left((\lambda_1 \vec{b_1})_B, (\lambda_2 \vec{b_2})_B, \dots, (\lambda_n \vec{b_n})_B \right)$$

$$M_\varphi^B = \left(\lambda_1 (\vec{b_1})_B, \lambda_2 (\vec{b_2})_B, \dots, \lambda_n (\vec{b_n})_B \right) = (\lambda_1 \vec{e_1}, \lambda_2 \vec{e_2}, \dots, \lambda_n \vec{e_n})$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Y_1' = 2Y_1 + 2Y_2 \\ Y_2' = 2Y_1 + 5Y_2 \end{cases} \qquad Y' = 3Y \quad Y = Ce^{3x}$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

Supponiamo che $P \in Gl_2(\mathbb{R})$ sia tale che $P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} P =$ matrice dell'endomorfismo $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in una base di autodirezioni

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}' = PP^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} PP^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}' = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} P \left(P^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}' = P^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}' \qquad \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \overset{\vec{b_1}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{matrix} 6 \\ 12 \end{matrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overset{\vec{b_2}}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Ricordiamo che $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ è diagonalizzabile $\iff \exists P \in GL(n)$ /
$P^{-1}AP$ è diagonale $\iff$ esiste una base di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori di $A \iff \forall \lambda \in Spec(A)$
$mg(\lambda) = ma(\lambda)$
$mg(\lambda) = \dim(Ker(A - \lambda \mathbb{1})) = n - rK(A - \lambda \mathbb{1})$
In generale vale la disuguaglianza $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$
Se $\lambda \in Spec(A)$ / $1 \leq mg(\lambda) < ma$ ~~allora~~ A non è diagonalizzabile. Se A è diagonalizzabile ogni $P \in GL(\mathbb{K})$ / $C_1(P), \dots, C_n(P)$ è una base di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori di A diagonalizza A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

Sicuramente 0 è autovalore perchè $rK(A)$ non è max quindi $rK(A) < 1$

18 è la somma degli autovalori 0 è autovalore almeno triplo $ma(0) = 3$ Perchè? Si sa che $1 \leq \underset{3}{mg}(0) \leq ma(0)$

$mg(0) = \dim Ker(A) = n - rK(A) = 3$

$0 + 0 + 0 + \lambda = 18 \Rightarrow \lambda = 18$

una forma diagonale è: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$

esibire P / $P^{-1}AP = (\vec{0}, \vec{0}, \vec{0}, 18\vec{e}_4)$
Se $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ è base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A
allora $P = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$
Siccome A è diagonalizzabile $\mathbb{R}^4 = Ker(A) \oplus Ker(A - 18\mathbb{1})$
Trovare $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ / $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

consideriamo $V = C^\infty(\mathbb{R})$ 80

$$\frac{d}{dx} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$$

$\frac{d}{dx} \in End_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathbb{R}))$ $\{e^{\lambda x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ è autovettore di $\frac{d}{dx}$

$Spec\left(\frac{d}{dx}\right) = \mathbb{R}$

Esempio esercizio: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ tutte le matrici simmetriche sono diagonalizzabili

$P_A(T) = T^2 - 9T + 14$
traccia det

Autovalori $= \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = $ 7, 2 è diagonalizzabile perché possiede due autovalori distinti

$\mathbb{R}^2 = Ker(A - 2\mathbb{1}) \oplus Ker(A - 7\mathbb{1})$

$A - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $Ker(A) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle/ x+2y=0\right\} = \left\{\lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$Ker(A-2\mathbb{1}) = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ $Ker(A-7\mathbb{1}) =$

$(A-7\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2x - y = 0$

$Ker A = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle/ 2x - y = 0\right\} = \left\{\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

matrice che diagonalizza
$\tilde{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sono ortogonali

Esercizio
diagonalizzare
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c'è 0 di sicuro
$Spec(A) = \{0, 3\}$ $Ma(0)=2$ $Ma(3)=1$

$Ker(A) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle/ x+y+z=0\right\}$ $Ker(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$

$Ker(A-3\mathbb{1}) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

Gruppo detto "gruppo ortogonale"

$SO(n) = \{A \in O(n) / \det A = 1\}$ Gruppo ortogonale speciale

Ricordiamo che dentro $Gl_n(\mathbb{R})$ si può selezionare il sottogruppo $O(n)$ delle matrici ortogonali $n \times n$ ossia

$A \in O(n) \iff A A^T = A^T A = \mathbb{1}_n$

Se $A \in O(n)$ $A^T \cdot A = \mathbb{1}$ $\det(A^T \cdot A) = 1$

$\det(A^T) \cdot \det(A) = 1$ $\det(A^T) = \det A$

$\det(A)^2 = 1$

$A \in O_n \Rightarrow \det(A) = \pm 1$

$SO(n) = \{A \in O(n) / \det(A) = 1$

$SO(n)$ è un gruppo $A \in O(n) \iff (C_1(A), \dots, C_n(A))$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ $\iff \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$\langle A\vec{u}, A\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \Rightarrow |A\vec{u}| = |\vec{u}|$

Es $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $T^2+1=0$

Matrice simmetrica: si può diagonalizzare con una matrice ortogonale

<u>Teorema spettrale</u>: Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ / $A^T = A$ allora

a) $Spec(A) \subset \mathbb{R}$ [tutti gli autovalori reali]

b) $\forall \lambda \in Spec(A)$ $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ ossia ogni matrice simmetrica è diagonalizzabile ossia $\exists P / P^{-1}AP =$ <u>diagonale</u>

c) A può essere diagonalizzata per mezzo di una matrice ortogonale (posso scegliere P ortogonale)

c) $\exists P \in SO(2) \,/\, P^{-1}AP =$ diagonale
$P^T A P$

Si è già visto che la proprietà è vera se

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ → due autovalori coincidenti

Supponiamo ora che $Spec(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Autospazio relativo all'autovalore $\lambda_i \; (i = 1, 2)$

$$V_{\lambda_i}(A) = Ker(A - \lambda_i \mathbb{1}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{pmatrix} a-\lambda_i & b \\ b & c-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \right.$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, (a-\lambda_i)x + by = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} b \\ \lambda_i - a \end{pmatrix} \right]$$

Pertanto una matrice che diagonalizza A è

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{pmatrix} \,/\, \tilde{P}^{-1} A \tilde{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$< C_1(\tilde{P}), C(\tilde{P}) > = < \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix} > = (\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a) + b^2$$

$$= a^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)a + \lambda_1 \lambda_2 + b^2 = 0$$

Ricordiamo che λ_1, λ_2 sono radici del polinomio di 2° grado $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c$ $\quad \lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2$

Sia $P = \left(\dfrac{C_1(\tilde{P})}{|C_1(\tilde{P})|}, \dfrac{C_2(\tilde{P})}{|C_2(\tilde{P})|} \right)$ $\quad P = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{\sqrt{b^2 + (\lambda_1 - a)^2}} & \dfrac{b}{\sqrt{b^2 + (\lambda_2 - a)^2}} \\ \dfrac{\lambda_1 - a}{\sqrt{b^2 + (\lambda_1 - a)^2}} & \dfrac{\lambda_2 - a}{\sqrt{b^2 + (\lambda_2 - a)^2}} \end{pmatrix}$

Forme quadratiche e diagonalizzazioni

Ricordiamo che $f: V \to \mathbb{R}$ si dice lineare se

$$f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2)$$

Sia B base di V $\left(f(\vec{v})\right)_{E_1} = M_f^{E_1,B} \cdot (\vec{v})_B =$

$$= f(\vec{b_1}), f(\vec{b_2}), \dots, f(\vec{b_n}) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

forma lineare si esprime per mezzo di un polinomio omogeneo di primo grado nelle componenti di $\vec{v}$ rispetto a qualche base.

Quindi per esempio $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x - 2y$ è forma lineare su $\mathbb{R}$

$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x - 3y + 5z + 1$ è lineare ma non è più forma

invece $2x - 3y + 5z$ è forma lineare

Esempio $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x^2 + 2xy - xz - 5yz + y^2 - 4z^2$

(di forma quadratica).

Forme quadratiche su $\mathbb{R}^n$. Una forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ è un polinomio omogeneo di II grado a coefficienti reali. $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è forma quadratica se q si esprime come polinomio omogeneo di II grado nelle componenti di $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Esempio $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5x^2 - 3xy + 2y^2 + 5xz + 6yz - z^2$

$$Q_f = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & -3/2 & 5/2 \\ -3/2 & 2 & 3 \\ 5/2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z)\, Q_f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T = \left[P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right]^T$$

$$(x, y) = (X, Y)P^T \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (X, Y) \cdot P^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (X, Y) \cdot \left[\begin{pmatrix} 1/3 & -\frac{1}{3} \\ 2/3 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & - \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PRODOTTO DI MATRICI

$$A \cdot B, \ \forall (A, B) \in \mathbb{K}^{m \times p} \times \mathbb{K}^{p \times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{m \times n}$$

$$(AB)(i, s) = R_i(A)\, C_s(B)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1\ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & (1\ -1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & (1\ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ (2\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & (2\ 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & (2\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Metodo per prevedere facilmente quante righe e quante colonne avrà la matrice prodotto

Supponiamo il prodotto della matrice A e B

Esempio $x^2+4xy+6xz-8yz+3y^2+5z^2$

$$(x,y,z)\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 1 & 2 & 3 \\ y & 2 & 3 & -4 \\ z & 3 & -4 & 5 \end{array}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

avendo una matrice simmetrica si moltiplica a sinistra per una riga e a destra per una colonna

$$q\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\, x_i x_j$$

a) q è semidefinita positiva $\Leftrightarrow q(\vec{u}) \geq 0 \ \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ per ogni vettore

b) // // // negativa $\Leftrightarrow -q$ è semidefinita positiva

($q(\vec{u}) \leq 0 \ \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$)

c) q è definita positiva se è semidefinita positiva e $q(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$

è zero solo nel vettore nullo

d) q è definita negativa $\Leftrightarrow -q$ è ~~semidef~~ definita positiva

e) q è indefinita se non è definita (cioè $\exists \vec{u} \neq \vec{0} /$ $q(\vec{u}) > 0$ $\exists \vec{v} \neq 0$ $q(\vec{v}) < 0$ (o viceversa))

$\exists \vec{w} \neq 0 / q(\vec{w}) = 0$

q si dice degenere $\Leftrightarrow \det Q = 0$

f si dice in forma canonica se Q_f è diagonale
Mettre f in forma canonica significa trovare un cambiamento di variabile $\vec{x} = P\vec{y}$ tale che $P^T Q P$ è diagonale

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T Q \vec{x} = (P\vec{y})^T \cdot Q \cdot P\vec{y}$$

$$\vec{y}^T P^T Q P \vec{y}$$

<u>Oss</u> $\forall P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, Q simmetrica, $P^T Q P$ è diagonale

$$(P^T Q P)^T = P^T Q^T (P^T)^T = P^T Q P$$

Supponiamo P_1, P_2 sono tali che $P_1^T Q P_1$ sia diagonale e $P_2^T Q P_2$ sia diagonale

Teorema di Sylvester (teorema di forme quadratiche)
Se Q è simmetrica e P_1, P_2 sono tali che $P_1^T Q P_1$ e $P_2^T Q P_2$ sono diagonali il numero di elementi diagonale positivi, il n di elementi diagonali negativi e il n di elementi diagonali nulli non cambia

$$Q \in \mathbb{R}^{3\times3} \quad P_1^T Q P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$P_2^T Q P = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

Per il teorema di S è sufficiente trovare una P tale che $P^T Q P$ sia diagonale
Ma Q è simmetrica e per il teorema spettrale