NUMERO: 671

DATA: 07/10/2013

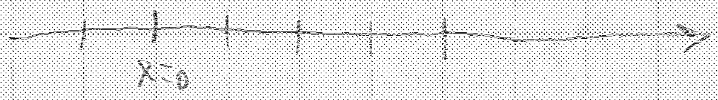
A P P U N T I

STUDENTE: Mottola

MATERIA: Fisica Esercizi + temi d'esame
Prof. Dolcini_Sparavigna

Cinematica in una dimensione

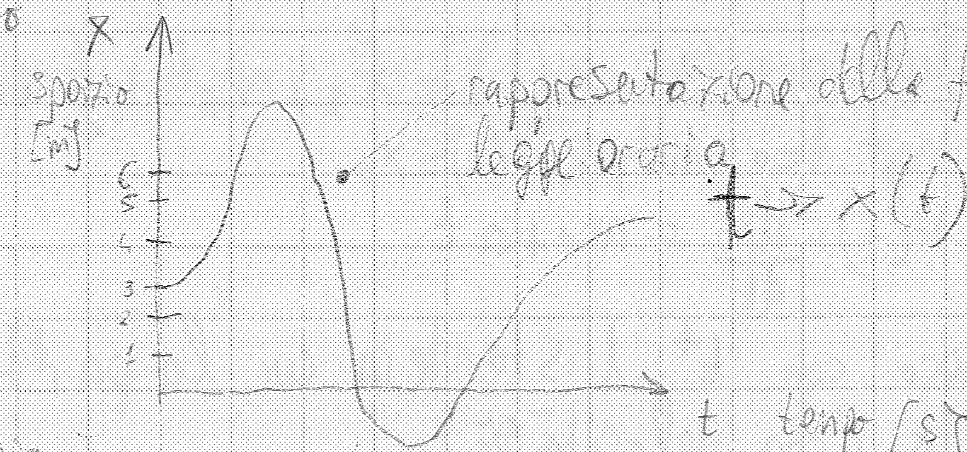
(spazio reale: linea)



$t \to x(t)$ legge oraria è una funzione del tempo

$t>0$ futuro

$t<0$ passato



quando la derivata è positiva (crescente) si va verso destra, quando è decrescente si va verso sinistra, il quadrante positivo mi dice che sono a destra dell'origine il quadrante negativo mi dice che sono a sinistra dell'origine. Quando la derivata è nulla la particella è ferma. $v(t) = \frac{dx}{dt}$

In analisi $x \to f(x) = y$

input: tempo output: posizione

$t \to x(t)$

Es. Un punto materiale si muove con moto uniformemente accelerato (con moto solo 1D) lungo l'asse x passa per la posizione x_1 con velocità $v_1 = 1,0$ m/s e per la posizione $x_2 = x_1 + \Delta x$ con velocità $v_2 = 8,2$ m/s. Supponendo $\Delta x = 10$ m, calcolare 1) l'accelerazione 2) il tempo che il punto materiale impiega a percorrere il tratto Δx

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 68

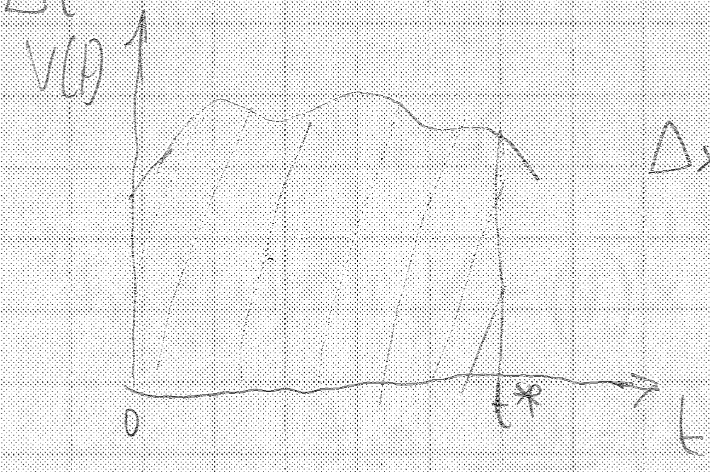
Sostituisco ora i dati (3)

$$t^* = \frac{2\Delta x}{v_1+v_2} = \frac{2\cdot 10\,m}{1{,}9\frac{m}{s}+8{,}2\frac{m}{s}} = \frac{20}{\frac{10{,}1}{s}} = 1{,}98\,s$$

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta x} = \frac{\left(8{,}2\frac{m}{s}\right)^2 - \left(1{,}9\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 10\,m} = \frac{\left(8{,}2^2-(1{,}9)^2\right)\frac{m^2}{s^2}}{20\,m} = 3{,}18\frac{m}{s^2}$$

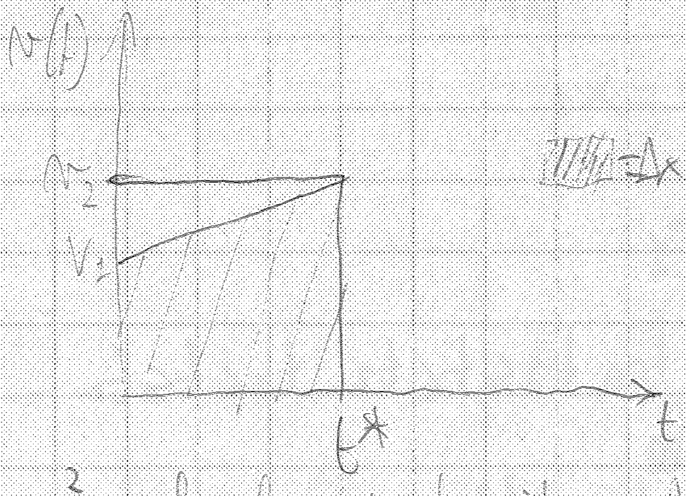
potevo usare questo

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$ se la velocità era costante



$$\Delta x = \int_0^{t^*} v(t)\,dt$$

spazio percorso tra 0 e t^*



$= \Delta x$ $\quad v(t) = v_1 + at$

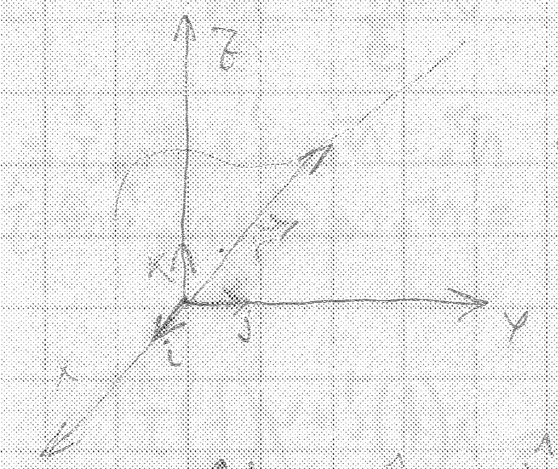
$$\Delta x = t^* \frac{v_1+v_2}{2} \Rightarrow$$

$$t^* = \frac{2\Delta x}{v_1+v_2}$$

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta x}$$ vale solo per moti uniformemente accelerati!

Moto nello spazio 5

Lo spazio reale in cui la particella si muove è:



La posizione della particella è caratterizzata da un vettore $\vec{r}$, ad ogni istante (vedi traiettoria) hanno posizione diverso

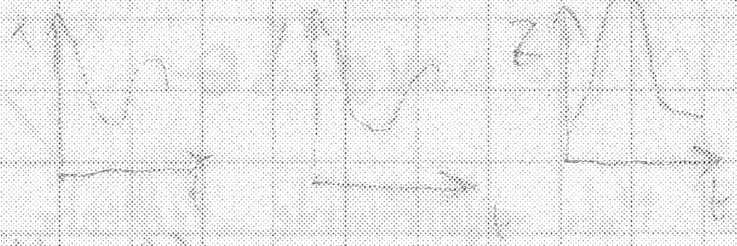
$t \rightarrow \vec{r}(t) \Rightarrow t \rightarrow \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

input output per ogni t configurazione 3 leggi orarie

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ — versori fissi nel tempo

3 leggi orarie



velocità (vettoriale)

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} =$

$= v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$

Un oggetto viene lanciato dal balcone di una finestra con velocità iniziale di modulo $v_0 = 15 m/s$ ad un angolo θ di 60° gradi rispetto all'orizzontale. La finestra si trova ad un'altezza di 8 m dal suolo. Determinare:

1) l'altezza massima h_{max} a cui giunge l'oggetto
2) quanto tempo impiega per cadere al suolo
3) a quale distanza d l'oggetto cade rispetto alla posizione orizzontale del punto di lancio
4) l'equazione cartesiana della traiettoria

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 68

$$h_{max} = h + v_0 \sin\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2 =$$

$$= h + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} = h + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

trovare un altro modo per l h_{max}

Sostituisco i valori

$$h_{max} = 8m + \frac{225 \frac{m^2}{s^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}} = 8[m] + 8{,}6[m] = 16{,}6\,m$$

Per determinare l'istante t^* di caduta impongo

$$y(t^*) = h + v_0 \sin\theta\, t^* - \frac{1}{2} g (t^*)^2 = 0$$

$$\hookrightarrow t^* = \frac{-v_0 \sin\theta \pm \sqrt{(v_0 \sin\theta)^2 + 2gh}}{-g} =$$

$$= \frac{v_0 \sin\theta \mp \sqrt{(v_0 \sin\theta)^2 + 2gh}}{g} = 3{,}16\,s$$

Scarto la soluzione a $t^* < 0$

per la 3 richiesta si fa riferimento a $x(t)$ mettendo al posto di t, t^*

$$d = x(t^*) = v_0 \cos\theta\, t^*$$

Sostituendo

$$d = 15\frac{m}{s} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3{,}16\,s = 23{,}7\,m$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\theta\, t \\ y(t) = h + v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

si deve trovare $y(x)$, quindi eliminiamo il parametro tempo

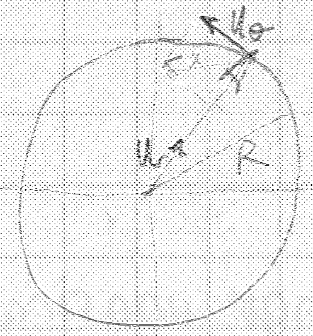
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 68

accelerazione

$$a(t) = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\vec{u}_\theta$$

Moto circolare

Se una particella si muove lungo una circonferenza si parla di moto circolare



$r(t) = \text{cost} = R$

→ solo θ varia nel tempo

$\theta = \theta(t)$

$r(t) = R = \text{cost}$

$\vec{r}(t) = R\,\vec{u}_r(t)$

$\vec{v}(t) = R\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_\theta$ → rappresenta il vettore velocità

→ la velocità è tangente alla circonferenza

$$\vec{a}(t) = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\vec{u}_\theta$$

componente radiale proporzionale a v^2 ma verso il centro (centripeta) — componente tangenziale

Nel moto circolare spesso si denotano

$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$ velocità angolare

$\alpha(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ accelerazione angolare

perciò $\vec{v}(t) = R\omega(t)\,\vec{u}_\theta$ $\quad \vec{a}(t) = -R\omega^2(t)\,\vec{u}_r + R\alpha(t)\,\vec{u}_\theta$

Dati iniziali

$R = 0,5\,m$

$\alpha = 2s^{-2}$

$\theta_A = 0$

$\omega_A = 0$

$\theta_B = \frac{3}{2}\pi$

Tratto $A \to B$ (11)

legge oraria $\theta(t) = \theta_A + \omega_A t + \frac{1}{2}\alpha t^2 =$

$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2$, questo è vero $\forall (0 \le t \le t_B)$ istante in cui raggiunge B

Trovo t_B imponendo $\theta(t = T_B) = \frac{1}{2}\alpha t_B^2 = \theta_B$

$t_B = \sqrt{\frac{2\theta_B}{\alpha}}$, sostituendo i valori $t_B = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{3}{2}\pi}{\frac{2}{s^{+2}}}} =$

$= \sqrt{\frac{3}{2}\pi s^2} = \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\,s = 2,17\,s$

Dalla formula del moto circolare

se voglio quella centrifuga tolgo il meno

$$\vec{a} = \underbrace{-R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \vec{u}_r}_{a_r \text{ radiale}} + \underbrace{R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta}_{a_\theta}$$

$a_r(t) = -R\,\omega^2(t)$

legge oraria $\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \alpha t$

$\omega_B = \omega(t = t_B) = \alpha t_B = \alpha\sqrt{\frac{2\theta_B}{\alpha}} = \sqrt{2\alpha\theta_B}$

sostituendo $\omega(B) = \sqrt{2\alpha\theta_B} = \sqrt{2 \cdot \frac{2}{s^2} \cdot \frac{3}{2}\pi} = \sqrt{6\pi}\,s^{-1}$

L'accelerazione radiale in B vale $a_r(t_B) = -R(\omega^2(t_B)) = -R\omega_B^2$

$a_r = -0,5\,m \cdot 6\pi\,s^{-2} = -3\pi \frac{m}{s^2} = -9,42 \frac{m}{s^2}$

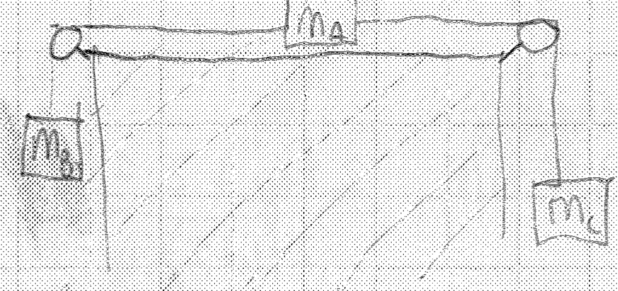
TRATTO $B \to A$ MOTO CIRC. UNIFORMEMENTE DECELERATO $t_B \le t \le t_f$ ovvio

$a_\theta = R\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t - t_0 + \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2\ \theta_B + \omega_B(t-t_B) - \frac{1}{2}\alpha(t-t_B)^2$

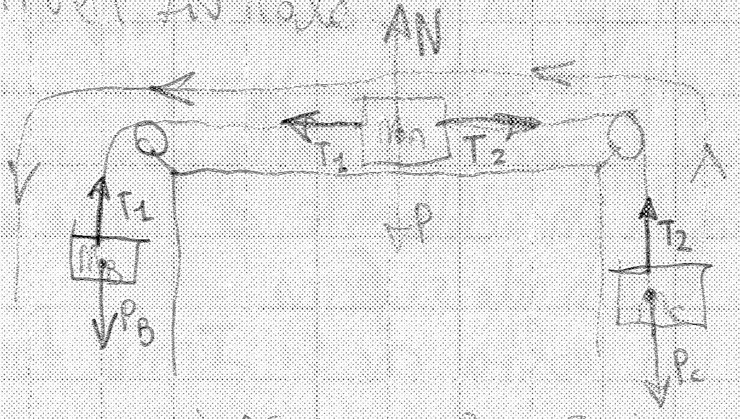
$\theta(t) = \theta_B + \omega_B(t - t_B) - \frac{1}{2}\alpha'(t - t_B)^2$

08/04/2023 (13)

Un corpo di massa $m = 2$ Kg è posto su un piano orizzontale liscio. Il corpo è collegato tramite due fili a due corpi di massa $m_B = 4$ kg e $m_C = 1$ Kg. Inizialmente il sistema è mantenuto in quiete. Calcolare
l'accelerazione del sistema
2) la tensione dei due fili



massa dei fili trascurabile
fili inestensibile (no elastici) l'accelerazione del sistema è uguale per tutti i corpi
Siccome non so in che direzione si muovono, suppongo un verso convenzionale



P e N si annullano

Lo scrivo per ciascun corpo scrivo le equazioni

$$\sum F = m \cdot a$$

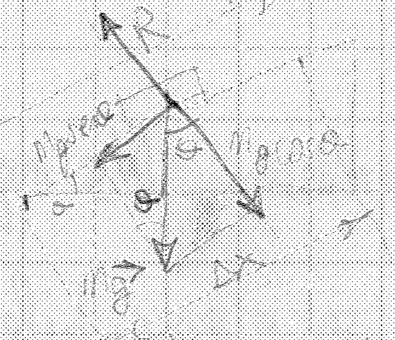
$$\begin{cases} T_1 - T_2 = m_A \cdot a \\ m_B \cdot g - T_1 = m_B \cdot a \\ -m_C \cdot g + T_2 = m_C \cdot a \end{cases}$$

Sommando le 3 equazioni

$$T_1 - T_2 + m_B \cdot g - T_1 - m_C \cdot g + T_2 = (m_A + m_B + m_C) a$$

$$a = \frac{(m_B - m_C)}{m_A + m_B + m_C} \cdot g$$

[illegible] di [illegible] e muove la massa 35
la resistenza c'è comunque la resistenza nel movimento è
l'attrito dinamico, a differenza di quello statico, l'attrito
dinamico è costante, dipende dalla massa.



R (reazione vincolare) controbilancia [illegible]
esattamente la componente ortogonale
$R = mg\cos\theta$ $\quad R - mg\cos\theta = m \cdot a_\perp = 0$ (componente ortogonale)
$-mg\sin\theta = m \cdot a_{\parallel} \quad a_{\parallel} = -g\sin\theta$
lungo il piano ho un moto uniformemente decelerato
con $a_{\parallel} = -g\sin\theta$ $\qquad a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x} \Rightarrow \begin{matrix} v_f = 0 \\ v_i = v_0 \end{matrix}$

$$a = \frac{0^2 - v_0^2}{2\Delta x} = -g\sin\theta$$

$$\Delta x = \frac{v_0^2}{2g\sin\theta}$$

Sostituendo i valori:

$$\Delta s = \frac{\left(10\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\sin\frac{\pi}{10}} = \frac{100}{2 \cdot 9{,}81\sin\frac{\pi}{10}} = 16{,}49\,m$$

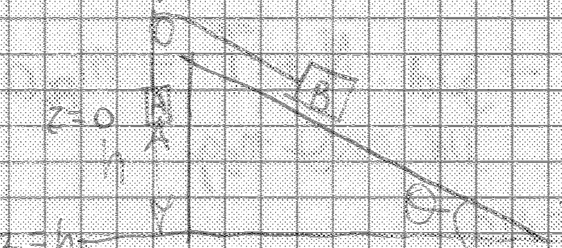
$v_{\parallel}(t) = v_0 + a_{\parallel}t = v_0 - g\sin\theta t$
Indico con t^* l'istante in cui si ferma
$v_{\parallel}(t^*) = v_0 + a_{\parallel}t^* = 0 \qquad t^* = \frac{-v_0}{a} = \frac{v_0}{g\sin\theta} = 3{,}3s$

M.

17

15/04/13

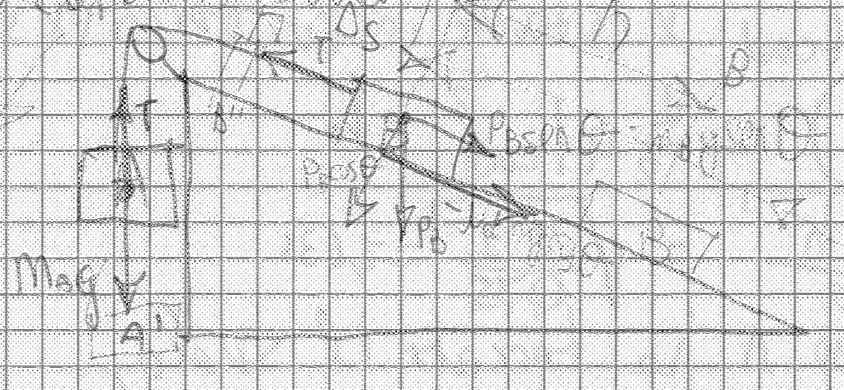
Due masse uguali collegate da un filo, sono disposte come in figura



L'angolo θ vale 30°, l'altezza h = 1m
il coefficiente di attrito dinamico tra massa e piano inclinato è $\mu_d = 0,4$. All'istante t=0 il sistema viene lasciato libero di muoversi e si osserva che la massa sospesa scende. Calcolare:

1) l'accelerazione del sistema a
2) il tempo impiegato dalla massa sospesa per giungere al suolo;
3) la distanza totale di percorsa della massa che si trova sul piano inclinato

(N.B. prosegue il moto anche dopo che l'altra ha toccato il suolo)



B prosegue lungo il piano sotto

$F = m a$

$-mg \sin\theta - \mu_d mg \cos\theta = m a$

$a' = -g(\sin\theta + \mu_d \cos\theta)$

accelerazione che ho dopo che il corpo ha toccato per ...

All'istante t_{acc} il corpo B ha percorso una distanza h lungo il piano e arriva con velocità

$v_B = a\, t_{acc} = 0{,}5 \cdot 1{,}3 = a\sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{2ah}$

Dopo che A tocca il suolo B prosegue lungo il piano con acc $a' = -g(\sin\theta + \mu_d \cos\theta)$

$\frac{v_{fin}^2 - v_{in}^2}{2\Delta s} = a'$ $v_{fin} = 0$ $v_{in} = v_B = \sqrt{2ah}$

$\frac{0 - 2ah}{2\Delta s} = a'$ $\Delta s = -\frac{a}{a'}h = \frac{(1 - \mu_d\cos\theta - \sin\theta)}{-g(\mu_d\cos\theta + \sin\theta)}$

$= 0{,}09\, m$

Spazio totale percorso da B vale:

$\Delta s_{tot} = h + \Delta s = 1 + 0{,}09 = 1{,}09\, m$

Caso b) $m_1 g - K_2 \Delta l_2 = 0$

$$K_2 = \frac{m_1 g}{\Delta l_2}$$

Caso c) la somma delle forze che agiscono su B e C è nulla

$$-K_1 \Delta l_{AB} + K_2 \Delta l_{CD} = 0$$

Anche la forza totale che agisce su m_2 è nulla

$$m_2 g - K_2 \Delta l_{CD} = m_2 a = 0$$

$$\begin{cases} K_1 \Delta l_{AB} = K_2 \Delta l_{CD} \\ K_2 \Delta l_{CD} = m_2 g \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} K_1 \Delta l_{AB} = m_2 g \Rightarrow \Delta l_{AB} = \frac{m_2 g}{K_1} \\ K_2 \Delta l_{CD} = m_2 g \Rightarrow \Delta l_{CD} = \frac{m_2 g}{K_2} \end{cases}$$

L'allungamento totale del sistema delle molle

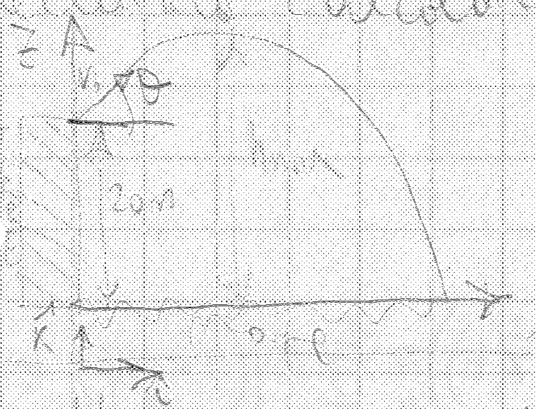
$$\Delta l_{TOT} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{CD} = \frac{m_2 g}{K_1} + \frac{m_2 g}{K_2} = m_2 g \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) =$$

$$= m_2 g \left(\frac{\Delta l_1}{m_1 g} + \frac{\Delta l_2}{m_1 g}\right) = \frac{m_2}{m_1}(\Delta l_1 + \Delta l_2) = \frac{0,45 kg}{1,5 kg}(0,12 + 0,{\ldots})$$

$$= 0,36 \cdot 0,257 m = 0,093 M$$

Un sasso di massa $m = 0,5\ Kg$ viene lanciato dalla cima di una torre alta $h = 20m$ con velocità iniziale di modulo $v_0 = 12\ m/s$, ad un angolo $\theta = 60°$ rispetto all'orizzontale. La torre si trova in prossimità del mare ed il sasso cade in acqua.

1) Scrivere le leggi orarie $x(t)$ e $z(t)$ del moto del sasso
2) calcolare l'energia cinetica e tracciare il suo andamento nel tempo
3) Calcolare l'energia potenziale del sasso e tracciarne il suo andamento nel tempo
4) assumendo che l'energia meccanica si conserva
5) utilizzando la conservazione dell'energia meccanica calcolare l'altezza massima del sasso



DATI INIZIALI

$v_0 = 12\ m/s$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$m = 0,5\ Kg$

Il vettore posizione iniziale $(t=0)$ $h = 20m$

$\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 = x_0 \hat{i} + z_0 \hat{k}$ dove $\begin{cases} x(t=0) = x_0 = 0 \\ z(t=0) = z_0 = h \end{cases}$

Il vettore velocità iniziale

$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = v_{0x} \hat{i} + v_{0z} \hat{k}$

$$\begin{cases} v_x(t=0) = v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_z(t=0) = v_{0z} = v_0 \sin\theta \end{cases}$$

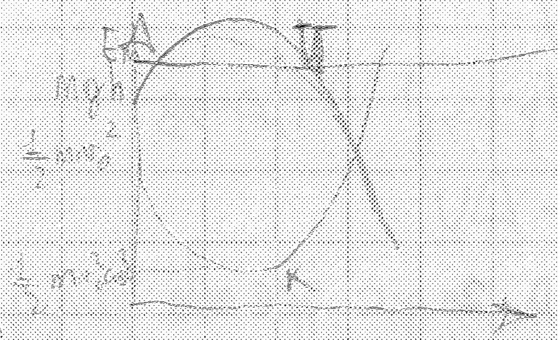
Energia potenziale del corpo \[illegible\]

$U = mg\,z(t) = mg\left(h + (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2\right)$

L'energia potenziale varia nel tempo

$$U(t) = mg\left(h + v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

$$K(t) = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + g^2t^2 - 2gv_0 \sin\theta\, t\right)$$



Il massimo di energia potenziale è raggiunto all'istante t tale che $\frac{dU}{dt} = 0 \quad mg\,(\underbrace{v_0 \sin\theta - gt}_{\dot z(t)}) = 0$

Il massimo di energia potenziale corrisponde al minimo di energia cinetica $K = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_z^2\right)$ $v_z = 0$

L'energia meccanica vale $E_m = K + U(t) = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + g^2t^2 - 2gv_0 \cancel{\sin\theta\, t}\right) + mg\left(h + v_0 \cancel{\sin\theta\, t} - \frac{1}{2}gt^2\right) =$

$= \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$ non dipende dal tempo!

↳ si conserva

Sfrutto la conservazione dell'energia per calcolare l'altezza massima del corpo. Indico con t_{max} l'istante in cui il corpo raggiunge l'altezza massima h_{max}

$E_m(t=0) = E_m(t_{max}) \quad E_m(t=0) = K(t=0) + U(t=0) =$

$= \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$

$E_{meccanica}(t = t_{max}) = K(t_{max}) + U(t_{max}) = \frac{1}{2}m\left(v_x^2(t_{max}) + v_z^2\right) + mgh_{max}$

DATI INIZIALI — 1) moto del corpo lungo il piano inclinato

27

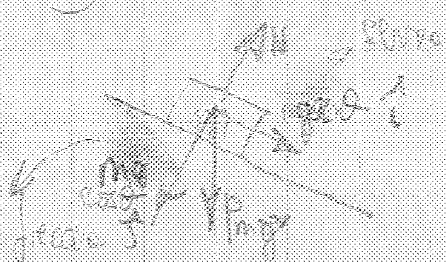
$m = 0,02\ Kg$

$v_0 = 0$

$l_0 = 0,1\ m$

$d = 0,4\ m$

$K = 2\ \frac{N}{m}$



Agiscono — forza peso (conservativa)
— reazione vincolare

Dal teorema dell'energia cinetica $\Delta K = W = W_{peso} + W_{reazione\ vincolare}$

$\Delta K = W_{peso} = -\Delta U$ perché forza peso è conservativa

$= 0$ poiché $\vec{R}$ è ortogonale al moto

$\int \vec{R} \cdot d\vec{r} = 0$

$\Delta (K + U) = 0 \quad \Delta E_m = 0 \Rightarrow$ l'energia meccanica si conserva

$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \Delta K = W$

$\vec{F} \cdot \vec{v} = m \vec{a} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$

$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v})$

$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K$

L'energia meccanica si conserva nella parte liscia

$\Delta E_m = 0 \quad E_m^{in} = E_m^{fin}$

$\underbrace{\frac{1}{2} m v_{in}^2}_{=0} + \underbrace{mg z_{in}}_{mgh} = \frac{1}{2} m v_f^2 + \underbrace{mg z_f}_{=0}$

$mgh = \frac{1}{2} m v_{fin}^2 \Rightarrow v_{fin} = \sqrt{2gh}$

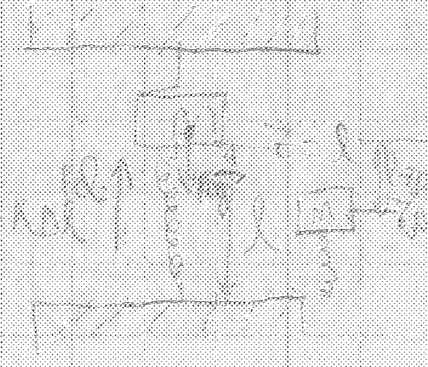
2) moto lungo il piano orizzontale

Agiscono forza d'attrito dinamico (non conservativa)
dopo c'è la forza elastica (conservativa)

Non possiamo applicare il teorema di conservazione energia ($\Delta E_m \neq 0$)

Un punto materiale di massa m è sospeso tramite un filo verticale ed è collegato al suolo da una molla di cost. elastica $K = 70 \frac{N}{m}$ che è a riposo. La tensione del filo è $T = 49\,N$. Il filo viene tagliato. Calcolare:

1) la massima distanza percorsa dal punto
2) la posizione in cui la velocità è massima
3) il valore massimo della velocità



$F_{el} = -K\Delta l$

Dopo aver tagliato il filo, su m agiscono:
a) forza peso (conservativa)
b) forza elastica (conservativa)

ΔE_{mecc} $\quad E_m^{fin} - E_m^{in} = 0$

$$mgl + \frac{1}{2}K\underbrace{\Delta l_0}_{=0}{}^2 + \frac{1}{2}m\underbrace{v_0^2}_{=0}$$

$$E_m^{fin} = \frac{1}{2}m\underbrace{v_{fin}^2}_{=0} + mg z_{fin} + \frac{1}{2}K(l - z_{fin})^2$$

Dalla conservazione di E_m

$$mgl = mg z_{fin} + \frac{1}{2}K(l - z_{fin})^2$$

$$mg(l - z_{fin}) = \frac{1}{2}K(l - z_{fin})^2 \quad \text{si calcola } (l - z_{fin})^2 \text{ quadrato}$$

$$\vec{E} = (E_x, E_y) = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1} q_i \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\right)\right)$$

31

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{3} q_i \left(-\frac{1}{2}\frac{2(x-x_i)}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^{3/2}}, -\frac{1}{2}\frac{2(y-y_i)}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{\frac{3}{2}}}(x-x_i, y-y_i)$$

Valore $\vec{E}$ nell'origine $(x,y)=(0,0)$

$$\vec{E}(0,0) = (E_x(0,0), E_y(0,0)) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{\underbrace{(x_i^2+y_i^2)^{\frac{3}{2}}}_{d^3}}(-x_i, -y_i)$$

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2} = \sqrt{x_2^2+y_2^2} = \sqrt{x_3^2+y_3^2} = d$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^3}\sum_{i=1}^{3} q_i(x_i, y_i) \Rightarrow \vec{E}_0 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\left[q_1(x_1,y_1)+q_2(x_2,y_2)+q_3(x_3,y_3)\right]$$

$q_1 = 2Q$ $\quad q_3 = -4Q$

$q_2 = -2Q$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[2Q\left(-d\cos\frac{\pi}{6}, d\sin\frac{\pi}{6}\right) - 2Q\left(d\cos\frac{\pi}{6}, d\sin\frac{\pi}{6}\right) - 4Q\left(d\cos\frac{\pi}{6}, d\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(-8Qd\cos\frac{\pi}{6}, 0\right)\right] = \frac{2Q}{\pi\varepsilon_0 d^3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$= q\int_0^a E_x dx = q\int_0^a \frac{A}{4\pi\varepsilon_0}\left(2x-3\underset{0}{\underset{\shortparallel}{y}}\right)dx =$$

in questo caso, ma dopo sarà uguale a b!

$$= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_0^a 2x\,dx}_{=a^2} = \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}a^2$$

$B \to C$

$$W_{B\to C} = \int_B^C \vec{F}\,d\vec{r} = q\int_B^C \vec{E}\,d\vec{r} =$$

$$= q\int_B^C \Big(\underbrace{E_x dx}_{=0} + E_y dy\Big) =$$

$$= q\int_0^b E_y\,dy =$$

$$= q\int_0^b \frac{A}{4\pi\varepsilon_0}(-3x)dy =$$

$$= q\frac{A}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^b(-3a)dy = q\frac{A}{4\pi\varepsilon_0}(-3ab)$$

$$\int_A^C \vec{F}\,d\vec{r} = -q\big(V(C)-V(A)\big)$$

Siccome la forza elastica è conservativa possiamo usare la conserv. dell'energia meccanica

35

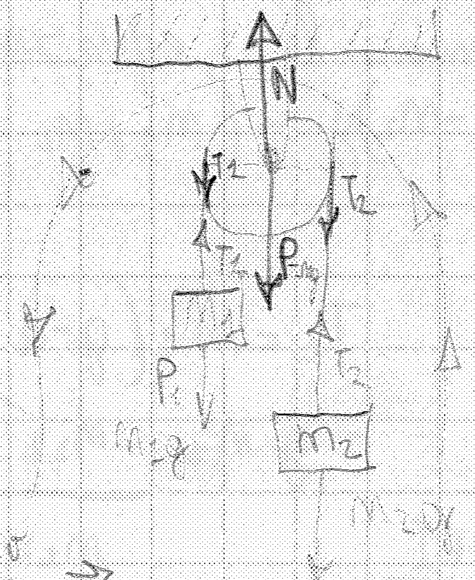
$$\frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{1}{2} K x^2$$

0,3 m

$$M\left(\frac{m}{M} v\right)^2 = K(\Delta l)^2 \quad K = \frac{m^2 v^2}{M} \frac{1}{(\Delta l)^2} = 10^4 \frac{N}{m}$$

Ad una carrucola di raggio R, massa m sono sospese due masse m_1 e m_2 ($m_1 > m_2$). Il momento d'inerzia della carrucola rispetto all'asse passante per il suo centro e ortogonale al piano verticale in cui giace vale I. Il filo è inestensibile e che non ci sia attrito calcolare:

1) l'accelerazione delle due masse
2) la tensione del filo
3) la reazione sull'asse della carrucola



equazione per m_1:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$

equazione per m_2:

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

equazioni per la carrucola:

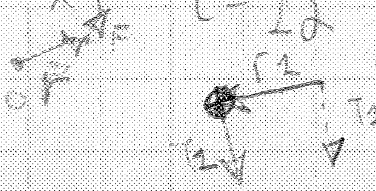
$$\begin{cases} -T_1 - T_2 - mg + N = m \cdot a_{cm} \\ (R T_1 - R T_2)\hat{k} = I \alpha \hat{k} \end{cases}$$

(calcolo rispetto al centro di massa)

il centro di massa è fermo

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \tau = I \alpha$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{T}_1$$

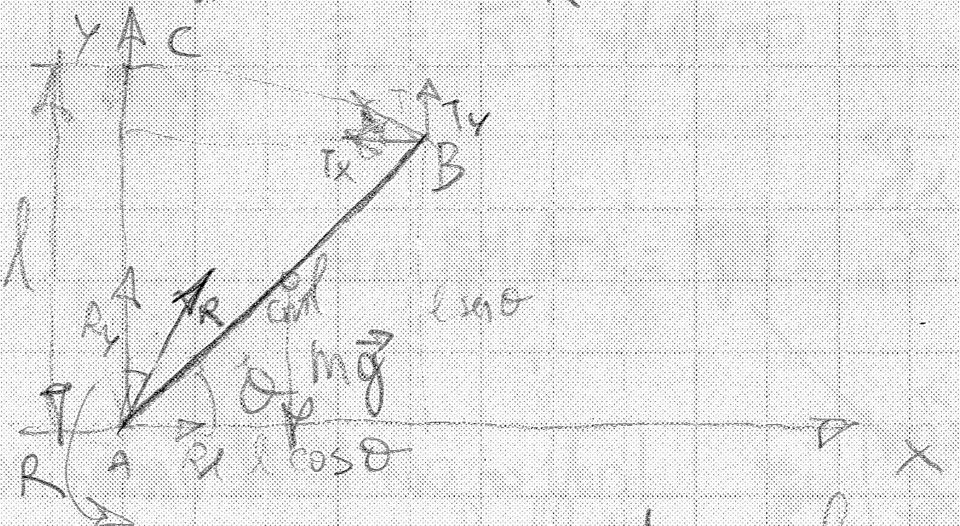


traslo nell'asse T_1

→ dunque usa forza ...

Un ponte levatoio è costituito da una tavola AB di massa $M = 600\,Kg$ lunga $l = 4m$. Questa tavola è incernierata sul lato A e può essere alzata agendo su B con una fune tirata dal punto C posto sulla verticale passante per A e distante l da A. Calcolare:

1) il valore della tensione della fune quando il ponte è in equilibrio ad un angolo $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale
2) la reazione vincolare $\vec{R}$ in A



37

Il ponte è un corpo rigido. Le condizioni di statica sono:

equazione forze $\sum \vec{F} = 0 \xrightarrow{ma}$ → CM non si trasla
equazione momenti $\sum \vec{\tau}_i = 0 \xrightarrow{I\alpha}$ → no rotazione

Equazione delle forze

$M\vec{g} + \vec{R} + \vec{T} = 0$ $\quad$ ↑: $-mg\hat{j} + R_y\hat{j} + T_y\hat{j} = 0$

$\quad$ →: $R_x\hat{i} - T_x\hat{i} = 0$

Scelgo $\hat{i}, \hat{j}$ lungo x, y $\quad T_x = T\cos\theta_2\,\hat{i}$

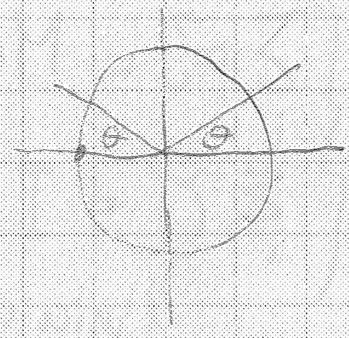
$T_y = T\sin\theta_2\,\hat{j}$

Sostituendo: $(R_x - T\cos\theta_2)\hat{i} + (-Mg + R_y + T\sin\theta_2)\hat{j} = 0$

$$\begin{cases} R_x - T\cos\theta_2 = 0 \\ -Mg + R_y + T\sin\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$-\frac{l}{2} Mg\cos\theta + l\,T\underbrace{\sin 2\theta}_{2\sin\theta\cos\theta} = 0$ $\quad \sin \pi - 2\theta$

$-\frac{Mg}{2} + 2T\sin\theta = 0 \quad T = \frac{Mg}{4\sin\theta}$



Sostituisco i dati

$T = \frac{600\,Kg \cdot 9{,}81\,m/s^2}{4 \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{=\frac{1}{2}}} = 2940\,N$

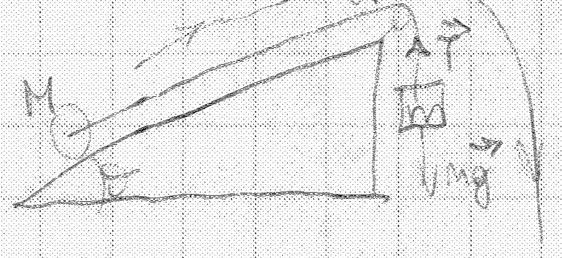
(39)

$\begin{cases} R_x - T\cos\theta = 0 \\ R_y + T\sin\theta - Mg = 0 \end{cases} \quad R_x = T\cos\theta = \quad R_y = Mg - T\sin\theta =$

Sostituendo i dati: $R_x = 2546\,N$ $\quad R_y = 4410\,N$

Un disco di massa $M = 8\,Kg$ e raggio R è posto su un piano inclinato di $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale. All'asse del disco è collegato un filo che sostiene la massa $m = 6\,Kg$. Il filo è teso con la massa m bloccata ad altezza $h = 1{,}5\,m$ dal suolo. All'istante $t = 0$ si lascia libera la massa che inizia a scendere, facendo contemporaneamente salire il disco lungo il piano. Il moto del disco è di puro rotolamento.

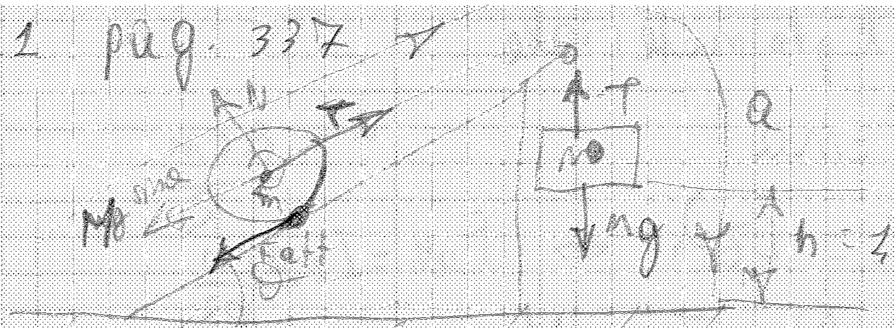
Calcolare
1) accelerazione con cui scende la massa m
2) la velocità con cui tocca il suolo
3) la quota max raggiunta dal disco



Punto materiale:

$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$
$\hookrightarrow mg$

es. 6.21 pag. 337



per rotolamento quindi attrito ~~statico~~

Quando si tocca più terra T non influisce più sul disco

$\Sigma F = I_z \alpha \quad \frac{1}{2} m R^2$

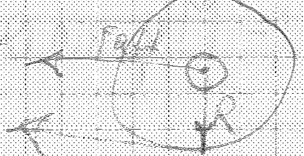
2 tratto da questo punto.

nel 1 tratto il moto del centro di massa è legato al punto materiale quindi $\forall t < t^*$ $v_{CM} = v_m$

$a_{cm} = a_m$

$$\begin{cases} -Mg\sin\theta - F_{att} + T = M a_{cm} \\ \frac{dL}{dt} = M^e = \bar{r} \times \bar{F}_{att} = |r||F_{att}|\sin\alpha = \end{cases}$$

$r \cdot F_{att}\, \hat{k}$ verso entrante nel foglio



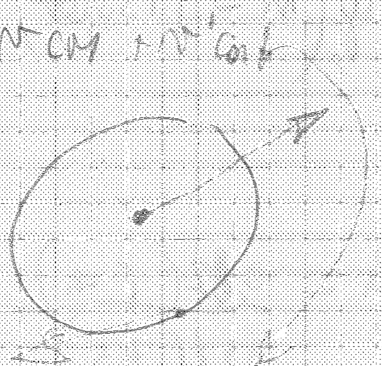
$$\begin{cases} -Mg\sin\theta - F_{att} + T = M a_{CM} \\ |r||F_{att}| = I\alpha \end{cases}$$

$F_{att} \times R = L$

$\bar{R} \times \bar{F}_{att} = \tau$

$v_{cont} = v_{CM} + v'_{cont}$

moto puro rotolamento:
la velocità traslatoria del centro di massa è uguale e opposta a quella del punto di contatto



$v'_{cont} = \bar{w} \times \bar{r}_{cont}$

$$\begin{cases} v_{CM} = w \cdot R \\ a_{cm} = \alpha \cdot r \end{cases}$$

$\alpha = \frac{a_{cm}}{R}$

$\frac{I a_{cm}}{R^2} = F_{att}$

Un gas ideale biatomico ($n = 0{,}42$ mol) descrive il seguente ciclo reversibile 43

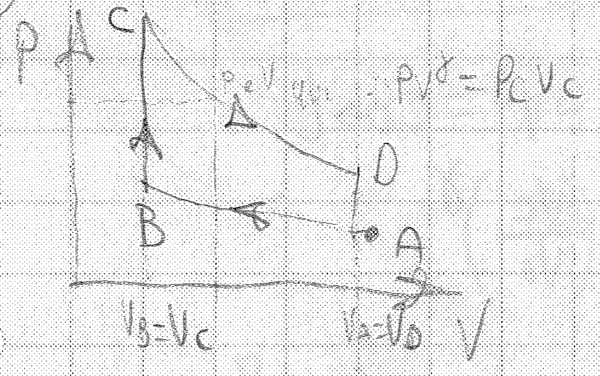
1) dallo stato A ($V_A = V_1 = 10^{-2}\,m^3$, $p_A = 1$ bar) a B ($V_B = 2\cdot 10^{-3}\,m^3$) con compressione isoterma

2) $B \to C$ ($V_C = V_B$, $p_C = 10$ bar) riscaldamento isocoro

3) $C \to D$ ($V_D = V_A$) espansione adiabatica

4) $D \to A$ raffreddamento isocoro

Calcolare 1) le coordinate termodinamiche p, T e V dei 4 stati
2) i lavori e i calori scambiati nel ciclo.



$pV = nRT$

DATI INIZIALI
$V_A = 10^{-2}\,m^3$
$p_A = 101325\,Pa \simeq 10^5\,Pa$
$n = 0{,}42$ mol

$V_B = 2\cdot 10^{-3}\,m^3$ $\quad V_D = V_A = 10^{-2}\,m^3$
$V_C = 2\cdot 10^{-3}\,m^3$
$p_C = 10^6\,Pa$

Stato A

$p_A V_A = nRT_A \quad T_A = \dfrac{p_A V_A}{nR} = \dfrac{10^5\,Pa \cdot 10^{-2}\,m^3}{0{,}42\,mol \cdot 8{,}314\,J/mol\,K} =$

$= 286{,}3\,K \quad \dfrac{Pa\,m^3}{J} = \dfrac{N\cdot m^3}{m^2\cdot N\cdot m}$

1 principio $\Delta U = Q - L$ 45

$A \to B$ (isoterma)

$$W_{A\to B} = \int_A^B p\, dV = \int_A^B \frac{nRT}{V}\, dV = nRT \int_A^B \frac{dV}{V} =$$

perché $A\to B$ è isoterma

$$= \underbrace{nRT_A}_{P_A V_A} \cdot \ln\frac{V_B}{V_A} = p_A V_A \ln\frac{V_B}{V_A} =$$

$$= 10^5\,Pa\; 10^{-2}\,m^3 \ln\left(\frac{2\cdot 10^{-3}\,m^3}{10^{-2}\,m^3}\right) = 10^3\,Pa\,m^3 \ln 0{,}2 =$$

$= -1{,}61\cdot 10^3\,J$ (lavoro subito dall'ambiente) $= W$

Dal primo principio

$$\Delta U_{A\to B} = Q_{A\to B} - W_{A\to B}$$

$$0 = \Delta U = n\cdot c_v \cdot \Delta T = U(B) - U(A) = n\cdot c_v (T_B - T_A)$$

$Q_{A\to B} = -1{,}61\cdot 10^3\,J$ (calore ceduto all'ambiente)

$B \to C$ (isocora)

$$W_{B\to C} = \int_B^C p\, dV = 0$$

$$Q_{B\to C} = \Delta U_{B\to C} = \Delta U = n\cdot c_v \cdot \Delta T = n\cdot\frac{5}{2}R\cdot(T_C - T_B) =$$

$$= n\, c_v\left(\frac{p_C V_C}{nR} - \frac{p_B V_B}{nR}\right) = Q_{B\to C} = \frac{5}{2}\left(p_C V_C - p_B V_B\right) =$$

$= 2{,}5\cdot 10^3\,J$ (calore assorbito)

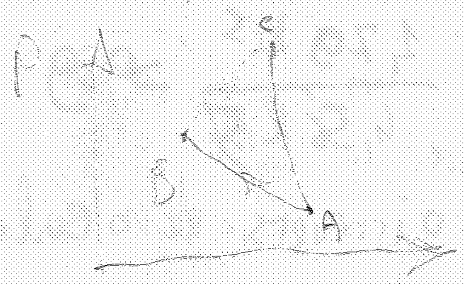
$R = \left(\frac{\text{calore assorbito}}{\text{calore ceduto}}\right) =$

$$R\quad \eta = 1 - \frac{|Q_{A\to B} + Q_{D\to A}|}{Q_{B\to C}}$$

Un gas ideale biatomico si trova in equilibrio nello stato A ($p_A = 1$ bar ; $V_A = 20 \cdot 10^{-3}\ m^3$, $T_A = 238K$) Con una trasformazione isoterma reversibile il volume viene ridotto a $V_B = 5 \cdot 10^{-3} m^3$. Dallo stato B il gas passa allo stato C e infine ritorna ad A con un espansione adiabatica reversibile. Il gas assorbe nella trasformazione B→C il calore $Q_{B\to C} = 456\ kJ$. La variazione d'entropia dell ambiente nella stessa trasf. è $\Delta S_{amb\ B\to C} = -963\ J/K$.

(47)

1) Calcolare il lavoro scambiato in un ciclo
2) " Calc. il rendimento
3) Stabilire se B→C è reversibile o irreversibile.



Dall'eq. di stato applicata ad A $p_A V_A = nRT_A$

$$n = \frac{p_A V_A}{RT_A}$$

Dallo stato B sappiamo che $T_B = T_A$.

Dall'equazione di stato $p_B V_B = nRT_B$ $\quad p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{p_A V_A}{V_B}$

Calcolare il lavoro A→B è reversibile, stato A e stato B noti → possiamo calcolare sia W_{AB} che $Q_{A\to B}$

B→C non sappiamo se rev. o irrev. ma $Q_{B\to C}$ lo sappiamo

$W_{B\to C} = ?$

C→A reversibile e adiabatica

$$\Delta S_{A\to B} = n c_v \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A} = \frac{p_A V_A}{T_A} \ln \frac{V_B}{V_A} =$$

$$= \frac{10^5\,Pa \cdot 20 \cdot 10^{-3}\,m^3}{288\,K} \ln \left|\frac{5 \cdot 10^{-3}\,m^3}{20 \cdot 10^{-3}\,m^3}\right| = \frac{10^3}{144} \frac{Pa\,m^3}{K} \cdot \ln \frac{1}{4} =$$

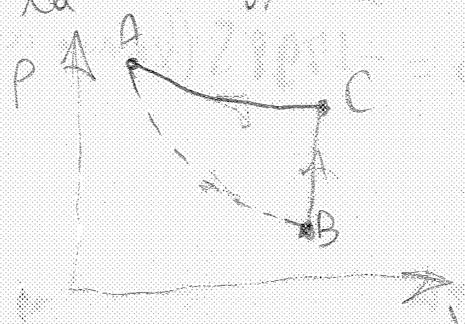
$= -9{,}63\,J/K$

$\Delta S_{B\to C} = -\Delta S_{A,B} = +9{,}63\,J/K$ Quindi $\Delta S_{u\,B\to C} = 0$

$B\to C$ è reversibile

0,? moli di un gas biatomico sono chiuse dentro un contenitore di volume V_A alla pressione $p_A = 1{,}013$ bar e alla temp. $T_A = 293{,}2\,K$. Il volume viene rapidamente portato al valore $V_B = 3V_A$ adiabaticamente. Raggiunto lo equilibrio si riporta il gas a volume costante, alla temperatura T_A assorbendo il calore $Q = 355{,}9\,J$ dall ambiente. Infine con un isoterma reversibile alla temp T_A il gas ritorna allo stato iniziale. Calcolare:

1) la variazione d'entropia del gas alla trasf. $A\to B$
2) il lavoro compiuto o assorbito complessivo
3) la variazione di entropia nell'universo nel ciclo.



Stato A applichiamo l'equazione di stato $p_A V_A = nRT_A \to V_A = \frac{nRT_A}{p_A}$

Stato $V_C = V_B = 3V_A$

$T_C = T_A$ perché $C\to A$ è isoterma

$\frac{p_C V_C}{nR} = \frac{p_A V_A}{nR}$ $\quad p_C V_C = p_A V_A \quad p_C = p_A \cdot \frac{V_A}{V_C} = \frac{p_A}{3}$

$\Delta S_{amb\, C\to A} = -\Delta S_{gas,\, C\to A} = -nR\ln\frac{V_A}{V_C} = -nR\ln\frac{1}{3} =$

$nR\ln 3 =$

$\Delta S_{U} = 0 - \frac{Q_{B\to C}}{T_A} + nR\ln 3 = 0{,}61\ J/K$

Quindi il momento angolare all'istante t_i è pari a $I_O w_i$
/ / / / / t_f è pari a $I_O w_f$

$L_{Oz}(t_i) = L_{Oz}(t_f)$

$L_{Oz}(t_i) = I_D w_i$

$L_{Oz}(t_f) = I_O w_f$ $\qquad w_f = \frac{I_D}{I_O} w_i \cong 0{,}22\ rad/s$

$I_O = \frac{mR^2}{2} + md^2 + \frac{MR^2}{2}$

$\Delta E_K = E_K(t_f) - E_K(t_i) = \frac{I_O w_f^2}{2} - \frac{I_D w_i^2}{2} =$

$= \frac{w_i^2}{2}\left(\frac{I_D^2}{I_O} - I_D\right) = -138{,}9\ J$

è negativo infatti ci sono forze dissipative (l'attrito)

MODULO FORZA ATTRITO

$$F_s = \frac{I_z}{mR^2} \frac{F_0 \cos\theta - mg\sin\theta}{1 + \frac{I_z}{mR^2}} = \frac{1}{3}\left(F_0\cos\theta - mg\sin\theta\right)$$

CONDIZIONI PURO ROTOLAMENTO

$$0 < F_s \leq \mu_s N$$

$$\Downarrow$$

$$0 < \frac{1}{3}\left(F_0\cos\theta - mg\sin\theta\right) \leq \mu_s\left(F_0\sin\theta + mg\cos\theta\right)$$

$$F_0\left(\frac{1}{3}\cos\theta - \mu_s\sin\theta\right) \leq \frac{1}{3}mg\sin\theta + \mu_s mg\cos\theta$$

$$F_0 \leq \frac{\frac{1}{3}\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\frac{1}{3}\cos\theta - \mu_s\sin\theta}\, mg$$

Facendo somma e differenza si ottiene:
(~~la~~ prima equazione la ottengo sottraendo le due equazioni, la seconda sommandole)

$$\begin{cases} -mg - 2F_{att} = m\left(1 - \frac{I}{mR^2}\right) a_{cm} \\ 2F - mg = m\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right) a_{cm} \end{cases}$$

per un anello di massa m e raggio R $I = mR^2$
otteniamo, sostituendo $I = mR^2$:

$$\begin{cases} 2F - mg = 2m a_{cm} \\ -mg - 2F_{att} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{cm} = \frac{F}{m} - \frac{g}{2} = 1{,}1\, m/s^2 \\ F_{att} = \frac{-mg}{2} = -19{,}6\, N \end{cases}$$

la forza di attrito ha un valore negativo, non vuol dire che è sbagliata, ma è diretta in verso opposto, quindi verso l'alto, noi avevamo supposto che si muoveva verso il basso

2. Nel moto di puro rotolamento il punto di contatto è fermo. Pertanto la forza di attrito è di tipo statico. Ciò è possibile se: $\boxed{|F_{att}| \leq \mu_s N}$ dove N è la forza normale alla superficie, pertanto deve valere la relazione $N \geq \frac{|F_{att}|}{\mu_s}$, il valore minimo di N è: $N_{min} = \frac{|F_{att}|}{\mu_s}$

$$N_{min} = \frac{|F_{att}|}{\mu_s} = \frac{19{,}6\,N}{0{,}4} = 49\, N$$

Simulazione esame (continuazione)

Energia istante in cui la molla è compressa: vi è solo energia potenziale della molla, ricordiamo che $E_{pel} = -W_{el}$ $W_{el} = \int -F_{el} \cdot dx = \int -Kx dx = -\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow E_{pel} = \frac{1}{2}x^2$ dove x è l'allungamento della molla

Energia finale (in cui la molla cessa di agire):

energia cinetica: si usa il 2° teorema di König $E_{cin} = \frac{1}{2}mV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

dove $\omega = v_{cm}/r$

Energia potenziale: $E_p = mg\, 0{,}6 \operatorname{sen}\theta$

$$\frac{1}{2}K(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\Delta x \operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow v_{cm} = 1{,}44 \ m/s$$

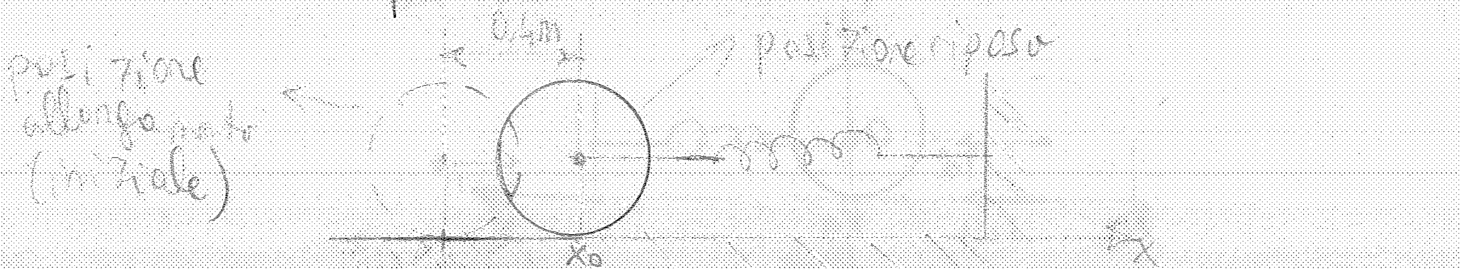
Esercizio

Una molla di costante elastica $K = 30 N/m$ è disposta orizzontalmente e ha un estremo fissato a una parete verticale. L'altro estremo è attaccato all'asse di un cilindro di raggio r e massa $m = 15 kg$ che può rotolare senza strisciare su una superficie orizzontale. Il sistema viene lasciato libero quando la molla è allungata di una quantità $x_0 = 0{,}4 m$ rispetto alla lunghezza a riposo e il cilindro è fermo. Calcolare:

1) La velocità del cilindro nell'istante in cui la molla ha la lunghezza di riposo.

2) il periodo di oscillazione, dimostrare che il moto è armonico.

3) il minimo valore del coefficiente di attrito statico affinché il moto sia di puro rotolamento



Tema esame n 3 Prof. Montorsi

Due gusci cilindrici omogenei di raggio $R = 1m$ e massa $M = 1Kg$ $(I_{asse} = MR^2)$ sono in contatto appoggiati su un piano scabro come in figura. Una forza $F = 1N$ viene applicata orizzontalmente all'altezza del centro di massa del cilindro a sinistra. Assumendo che tra le superfici dei due cilindri ci sia attrito puramente dinamico μ, e che i cilindri compiano un moto di puro rotolamento grazie all'attrito statico col piano, trovare:

1. Quali forze compiono lavoro sul cilindro di sinistra?
2. Come funzione di μ, calcolare l'accelerazione dei cilindri.
3. Posto il coefficiente d'attrito dinamico $\mu_0 = 0{,}4$ calcolare il valore dell'accelerazione del sistema in figura.

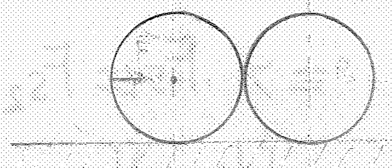
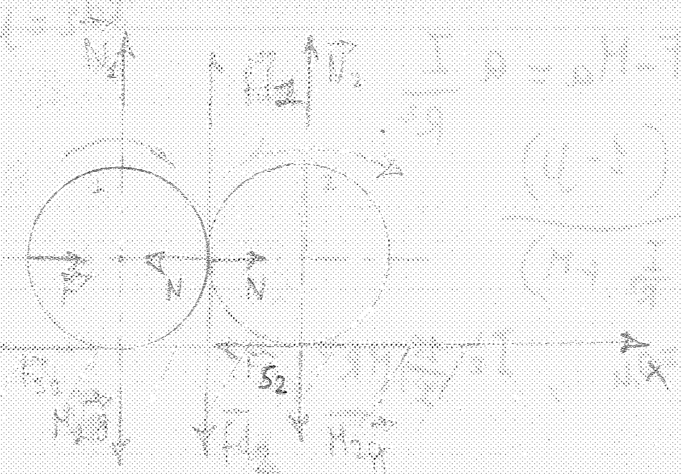


Diagramma forze

$\vec{N}$: forza vincolare tra i due gusci

$\vec{N}_1, \vec{N}_2$: reazione normale al piano



Simulazione esame

Un disco di massa $m = 4\,Kg$ è munito di una staffa fissa di massa trascurabile solidale all'asse orizzontale passante per il centro di massa. Il sistema è inizialmente tenuto fermo su di un piano scabro, inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto alla orizzontale, con l'estremità della staffa appoggiata ad una molla di costante elastica $K = 100\,N/m$, compressa di un tratto $\Delta x = 0{,}6\,m$ rispetto alla sua posizione di riposo. Lasciando libero il sistema si osserva che il disco si mette in movimento rotolando senza strisciare sul piano inclinato.

Calcolare 1) l'accelerazione del disco nell'istante iniziale in cui viene lasciato libero

2) il valore minimo del coefficiente di attrito statico perchè alla partenza il moto possa essere di puro rotolamento

3) Supponendo che la molla cessi di agire nell'istante in cui raggiunge la lunghezza di riposo calcolare la velocità del cm del disco in tale istante.

Molla Posizione di riposo

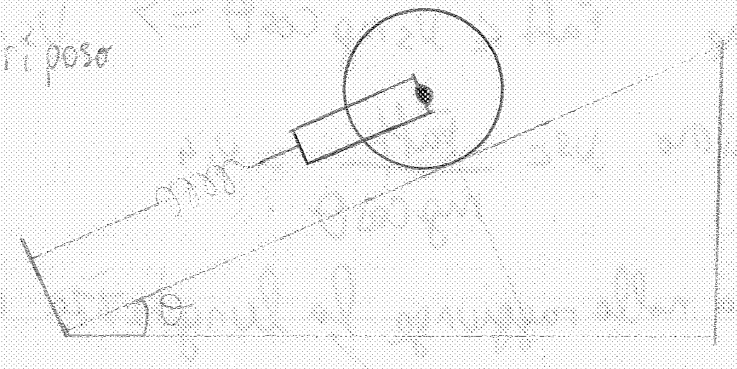
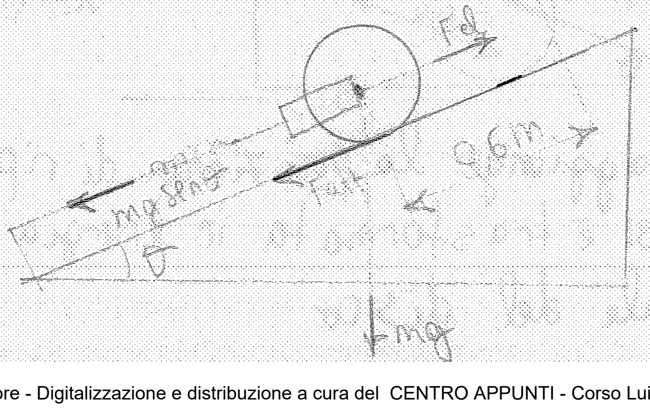


Diagramma forze

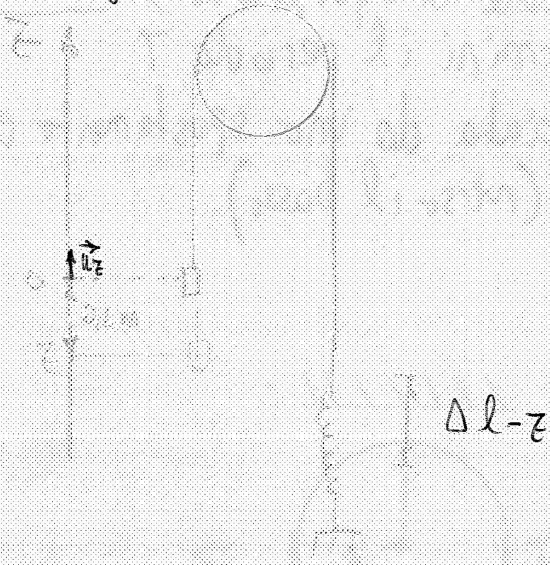
Istante in cui la molla è compressa



$$\vec{F_e} = -K_e \Delta l \vec{u_z} \quad \vec{T_2} = -\vec{F_e} \Rightarrow T_2 = K_e \Delta l$$

$$mg = T_1 = T_2 = K_e \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{K_e}$$

2) Fissiamo l'asse z, fissiamo la sua origine nella posizione di equilibrio

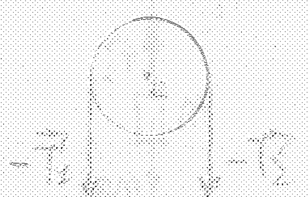


$z<0$

$\Delta l - z > \Delta l$

l'allungamento $\Delta l - z$ è $> \Delta l$ se la massa è sotto l'origine $< \Delta l$ se è sopra

$ma = T_1 - mg$



$I_c \alpha = R(T_1 - T_2)$

Da qui si osserva che se $\alpha \neq 0$ (se non è all'equilibrio) $\Rightarrow T_1 \neq T_2$

All'inizio del corso, si vedeva che $T_1 = T_2$ (nel caso la massa della carrucola fosse stata trascurabile) infatti $I_c \to 0$ per cui anche se il sistema si muoveva comunque $T_1 = T_2$

$\vec{T_2} = -\vec{F_e} \quad \vec{F_e} = -K_e(\Delta l - z)\vec{u_z}$

$\vec{T_2}$

$\vec{F_e}$ giunzione fune-molla (massa nulla)

$T_2 = K_e(\Delta l - z)$