



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 670**

**DATA: 07/10/2013**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Mondino**

**MATERIA: Meccanica delle Macchine**

**Prof. Eula**

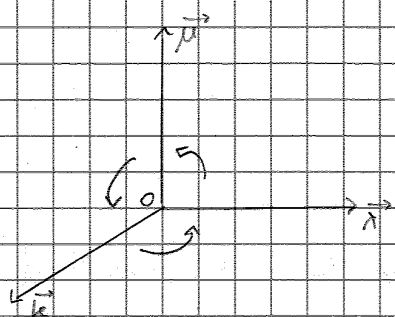
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# MECCANICA delle MACCHINE

fissiamo una terna destrorsa, cioè percorsa in senso antiorario:



$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$$

$$\vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x}$$

$$\vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y}$$

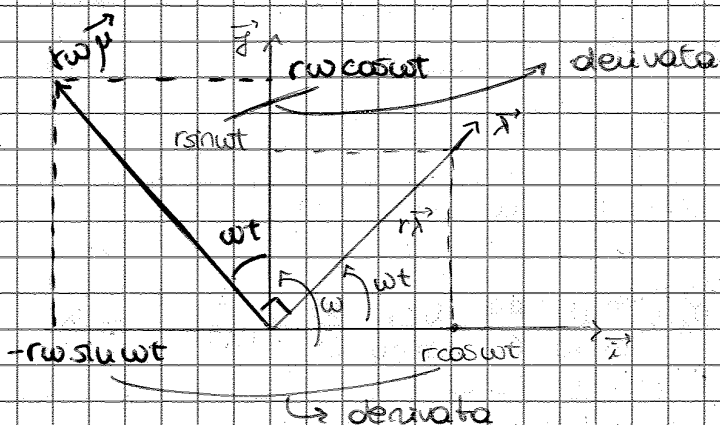
$$\vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{z}$$

$$\vec{x} \wedge \vec{z} = -\vec{y}$$

$$\vec{z} \wedge \vec{y} = -\vec{x}$$

$$\frac{d(\vec{r})}{dt} = \omega \vec{k} \wedge (r \vec{x})$$

→ VETTORE ROTANTE

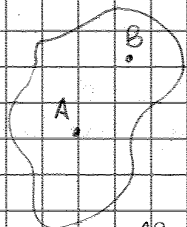


Il vettore originale viene spostato di 90° nel senso di  $\omega$ , con modulo moltiplicato per  $\omega$ .

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{r})}{dt} &= r \omega \vec{y} \\ &= r \omega [\vec{k} \wedge \vec{x}] \\ &= \omega \vec{k} \wedge (r \vec{x}) \end{aligned}$$

→ Se le proiezioni sono una la derivata dell'altra, lo saranno anche i vettori

## • Cinematica del corpo rigido:



Un corpo rigido è un corpo in cui la distanza tra 2 punti rimane costante.

es: la molla è un elemento deformabile  
 quindi non può essere considerato un corpo rigido

$$AB = \text{cost} \quad (\text{opp } \pi \omega t)$$

GdP = gradi di libertà

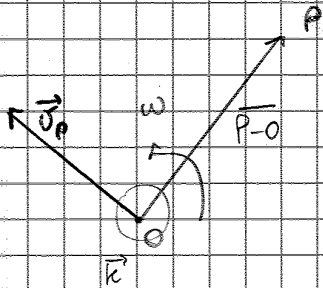
↳ minimo numero di parametri indipendenti necessari a descrivere il sistema

nel PIANO un corpo rigido ha 3 GdP.

$$\vec{v}_P = \omega \vec{k} \wedge (\vec{r}^P) = \omega \vec{k} \wedge (\vec{P}O)$$

}	M	$\omega P O$	(modulo)
	D	$\perp P O$	(direzione)
	V	$\omega$	(verso)

Rappresentazione grafica della relazione  $\vec{v}_P = \omega \vec{k} \wedge (\vec{P}O) =$



Dobbiamo moltiplicare vettorialmente  $(P O)$ , il vettore rotante  $\Rightarrow$  lo derivo, cioè lo ruoto di  $90^\circ$  nel senso di  $\omega$ .

$$\vec{v}_P = \omega \vec{k} \wedge (\vec{P}O) = \frac{d(\vec{P}O)}{dt}$$

$$\vec{v}_P = r \omega \vec{u} \quad (\text{supponendo la relazione precedente})$$

$$\vec{a}_P = \frac{d(r \omega \vec{u})}{dt} = \frac{dr}{dt} \omega \vec{u} + r \frac{d\omega}{dt} \vec{u} + r \omega \frac{d\vec{u}}{dt} \rightarrow \text{derivato del vettore rotante}$$

$$= r \dot{\omega} \vec{u} + r \omega [\omega \vec{k} \wedge \vec{u}]$$

$$= r \dot{\omega} [\vec{k} \wedge \vec{u}] + r \omega^2 [-\vec{u}]$$

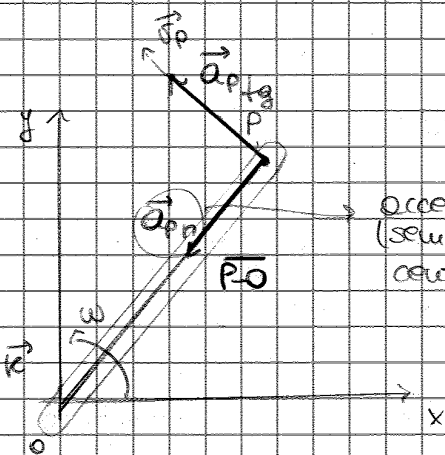
$$= \dot{\omega} \vec{k} \wedge (\vec{r}^P) - \omega^2 (\vec{r}^P)$$

$$\vec{a}_P = \dot{\omega} \vec{k} \wedge (\vec{P}O) - \omega^2 (\vec{P}O)$$

accelerazione tangenziale

accelerazione centripeta o normale (sempre negativa)

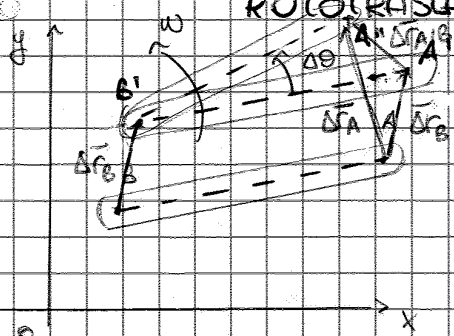
non è sempre verso opposto



accelerazione centripeta (sempre orientata verso il centro di curva)

$\rightarrow$  dipende da  $\omega^2$  pur essendo un'accelerazione (non dipende da  $\dot{\omega}$ )

### ROTAZIONE (moto piano generico)

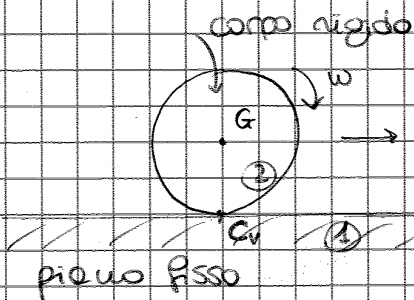


$$\Delta \vec{r}_A = \Delta \vec{r}_B + \Delta \vec{r}'_{A/B} \quad (\text{rotaz + trasl.})$$

$$\Delta \vec{r}'_{A/B} = \Delta \theta (AB)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \omega \vec{k} \wedge (\vec{B} - \vec{C}_v)$$

$$\vec{v}_B \perp (\vec{B} - \vec{C}_v)$$



- ① corpo fisso
- ② corpo mobile

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{rel}$$

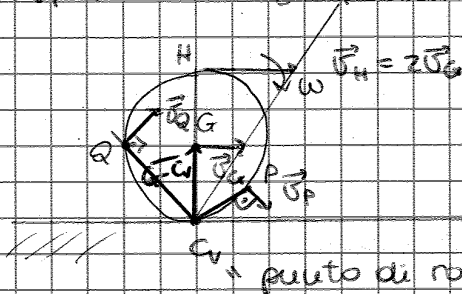
**POLARE FISSA:** luogo dei punti del piano fisso che successivamente diventano  $C_v$ .

**POLARE MOBILE:** luogo dei punti del piano mobile che successivamente diventano  $C_v$ .

Le polare mobile ruota senza strisciare sulla polare fissa  
 $\Rightarrow$  NO STRISCIAMENTO fra le 2 curve.

non esiste moto relativo fra i 2 corpi:  $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{rel}$

$$v_{rel} = 0 \Rightarrow v_2 = v_1 = 0 \quad (\text{puro rotolamento})$$



$$\vec{v}_G = \omega \vec{k} \wedge (\vec{G} - \vec{C}_v)$$

$$\vec{v}_H = \omega \vec{k} \wedge (\vec{H} - \vec{C}_v)$$

$$\vec{v}_Q = \omega \vec{k} \wedge (\vec{Q} - \vec{C}_v)$$

**CATENA CINEMATICA:** piu' corpi rigidi vincolati tra loro da coppie cinematiche (vincoli)

La catena cinematica può essere semplice, se i corpi rigidi hanno uno o piu' coppie cinematiche ciascuno, oppure composta, se esiste in essa almeno un corpo rigido con 3 coppie cinematiche.

La catena cinematica può essere chiusa, se ogni corpo rigido ha almeno 2 coppie cinematiche, oppure aperta, se esiste un corpo rigido con una sola coppia cinematica.

Il braccio umano è un esempio di catena cinematica aperta.

**MECCANISMI:** se esiste nella catena cinematica un corpo rigido fisso (TELAIO). Hanno almeno un grado di liberta'.

Se il meccanismo ha 0 G.d.L., cioè non è mobile, diventa una **STRUTTURA**.

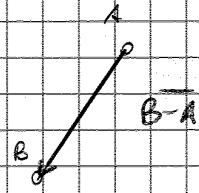
M |  $\omega_1(AO) = 32,98 \text{ rad/s}$

D |  $\perp AO$

V |  $\vec{\omega}$

2)  $AB = \text{cost} \Rightarrow$  MOTO SEMPLICE

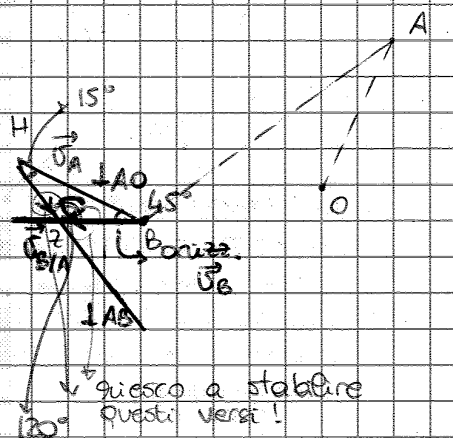
$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \omega_1 \cdot r_1(A-O) + \omega_2 \cdot r_2(B-A)$   
 ↳ incognito



	$\vec{v}_B$	$\vec{v}_A$	$\vec{v}_{B/A}$
M	?	NOTA	$\omega_2 \cdot AB$ ?
D	Orizz.	//	$\perp BA$
V	?	//	?

↓ quelle delle guide

Calcolo delle incognite: ( $\Rightarrow$  TRIANGOLO DELLE VELOCITÀ)

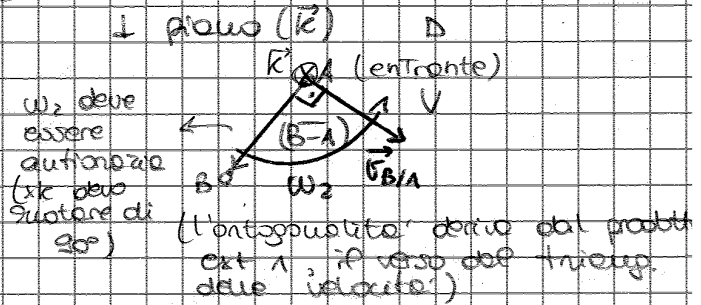


velocità su suo angolo opposto!

$\frac{v_B}{\sin(15^\circ)} = \frac{v_A}{\sin(20^\circ)} \Rightarrow v_B = 9,86 \text{ m/s}$   
 "RUCO"

$\frac{v_{B/A}}{\sin(45^\circ)} = \frac{v_A}{\sin(120^\circ)} \Rightarrow v_{B/A} = 26,93 \text{ m/s}$

$v_{B/A} = \omega_2 \cdot r_2(B-A) \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_{B/A}}{AB} = 14,15 \text{ rad/s}$  M



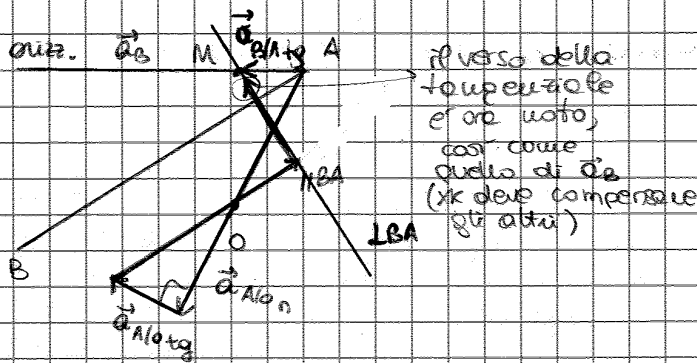
Metodo del  $C_v =$  (centro di istantanea rotazione)

$C_{v_1} \equiv O$

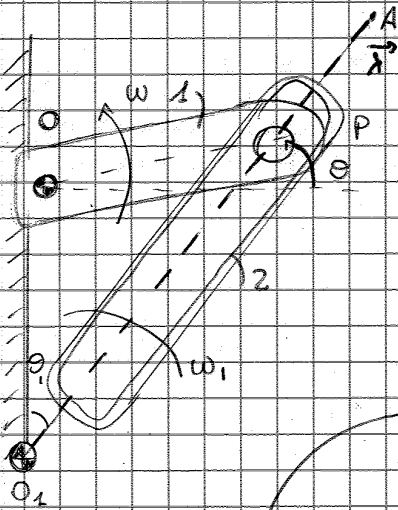
$C_{v_2} \Rightarrow ?$

$C_{v_3} \Rightarrow \infty$  ( $C_v$  in una traslazione da a  $\infty$ )

Devo sommare i 4 vettori per trovare la risultante  $\vec{a}_B =$   
 → costruisco il POLIGONO DELLE VELOCITA'



GUIDA DI FAIRBAIN:



- $\omega = 157 \text{ rad/s}$  (cost)
- $\dot{\omega} = 0$
- $OP = 0.3w$
- $OA = 0.87w$
- $AP = 0.6w$
- $O_1P = 0.4w$
- $\theta_1 = 26.38^\circ$
- $\theta = 27.27^\circ$

moto relativo: traslazione lungo  $\vec{x}$

- ②  $PO_1 \neq \text{cost}$  → una distanza varia nel tempo
- ①  $PO = \text{cost}$  → asta rigida che ruota intorno ad O fisso (MOTO SEMPLICE)

- moto di P nella guida (TRASLAZIONE)
- moto di P intorno  $O_1$  (ROTAZIONE)

MOTO COMPOSTO

$$\vec{v}_{pass} = \vec{v}_{ree} + \vec{v}_{traslazione}$$

$$\vec{a}_{pass} = \vec{a}_{ree} + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{\omega} \rightarrow \text{Coriolis}$$

$$\vec{a}_{co} = 2\omega \times \vec{r} \wedge \vec{v}_{ree}$$

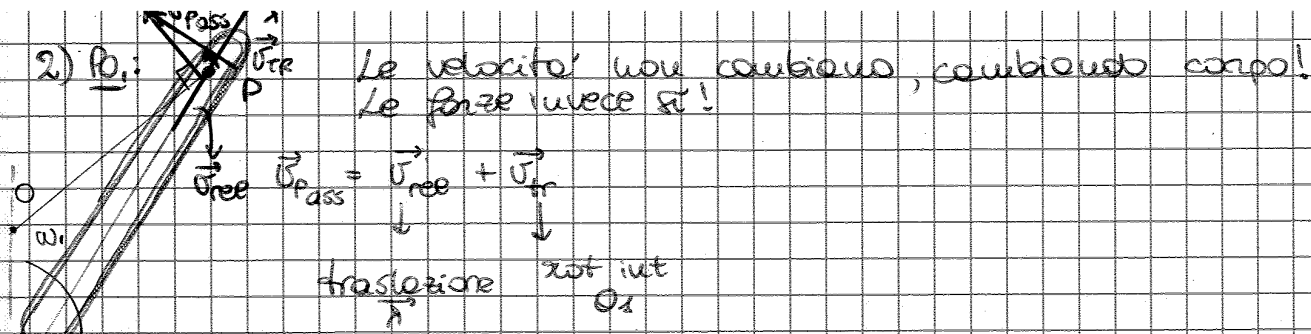
Formule di Grübler: (x determinare GdL)

$$x = 3(w-1) - 2C_1 - C_2$$

$$w = 3 \quad (2 \text{ corpi} + \text{telajo})$$

$$C_1 = 2 \quad (O, O_1) \rightarrow \text{cerniere}$$

$$C_2 = 1 \quad (P) \rightarrow \text{ha 2 possibili di mov.} \begin{matrix} \text{TRASLAZ.} \\ \text{ROTAZ.} \end{matrix} \rightarrow \text{camello}$$



$$\vec{v}_{pass} = \vec{v}_{ree} + \vec{v}_{tr}$$

traslazione      rot int  $O_1$

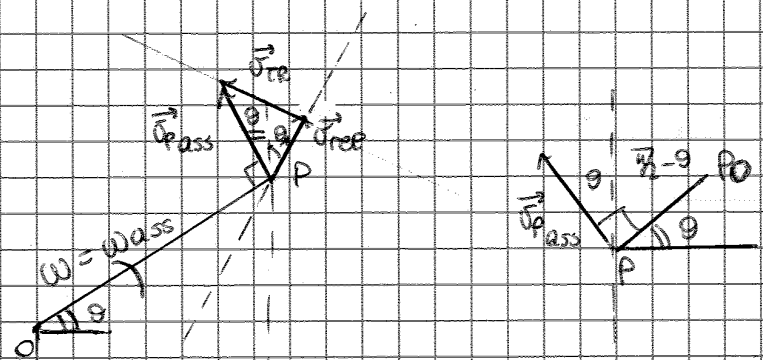
$$\vec{v}_{pass} = \pm \vec{v}_{rep} \cdot \vec{\lambda} + \left[ \vec{\omega}_1 + \omega_1 \vec{k} \wedge (\vec{P} - \vec{O}_1) \right]_{tr}$$

M	NO PA	?	$\omega_1 PO_1 = ?$
D		lungo $\vec{\lambda}$	$\perp PO_1$
V		$\odot \vec{\lambda}$	$\omega_1 ?$

→ minimo numero di informazioni che ci serve a costruire il triangolo delle velocità

Traccia le direzioni note:  $\vec{v}_{ree}, \vec{v}_{tr} (\perp PO_1)$   
 $\vec{v}_{ree} \perp \vec{v}_{tr}$  non è una regola! è in caso ma lo troveremo + volte negli esercizi

$\vec{v}_{pass}$  è il vettore risultante (quello rosso)



Moduli delle velocità:

$$v_{ree} = v_{pass} \cos(\theta + \theta_1) = 27,91 \text{ m/s}$$

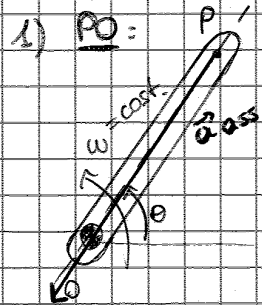
$$v_{tr} = v_{pass} \sin(\theta + \theta_1) = 37,93 \text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{v_{tr}}{PO_1} = 63,22 \text{ rad/s} \quad (\text{velocità angolare di trascinamento})$$

$$\vec{v}_{tr} = \omega \cdot \vec{k} \wedge (\vec{P} - \vec{O}_1)$$

$\vec{k}$  (uscete)

• Calcolo delle accelerazioni:



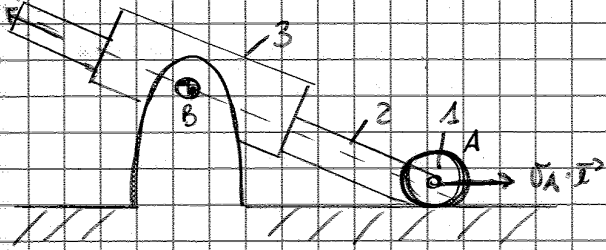
$\dot{\omega} = 0$  (la rotazione è uniforme)

Teorema di Rivals:

$$\vec{a}_{pass} = \vec{a}_O + \vec{a}_{P/O_n} + \vec{a}_{P/O_n}$$



### Esercizio 5: (ESERCITAZIONE 1)



facendo scorrere il disco orizzontalmente, cambiamo l'inclinazione del sistema, il corpo 2 scorre dentro il corpo 3 e quindi la distanza fra A e B varia  $\Rightarrow AB \neq \text{cost} \Rightarrow$  MOTO COMPOSTO (perché la variaz. di distanza produce un moto relativo).

- MOTO COMPOSTO
- TRASLAZIONE lungo  $\vec{\lambda}$  di ②  $\Rightarrow AB \neq \text{cost} \Rightarrow$  MOTO RELATIVO

In un giuoco di bloccare virtualmente il moto relativo (la traslazione lungo  $\vec{\lambda}$ )  $\Rightarrow$  ② può essere notato intacco a B (pto fisso).

#### MOTO DI TRASCINAMENTO

Un lungo  $\vec{\lambda}$  non è il moto relativo e nemmeno quello di trascinamento perché si vede a partire dal moto relativo. Il moto assoluto esiste in virtù degli altri 2.

$\Rightarrow$  Un lungo  $\vec{\lambda}$  è il MOTO ASSOLUTO (TRASLAZIONE)

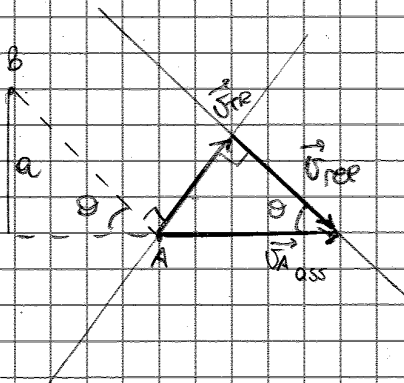
$$v_{A\vec{\lambda}} = v_{A \text{ ass}} = v_{\text{rel}} + v_{\text{tr}}$$

$$v_{A\vec{\lambda}} = v_{\text{rel}} + \left[ \frac{v_B}{0} + \omega \cdot \overline{KA(A-B)} \right]_{\text{tr}}$$

M	?	$\omega(AB) = ?$
D	NOTA	$\perp AB$ (xk prodotto est)
V	?	$\omega ?$

$\rightarrow$  condiz. minime di informazioni per costruire il triangolo delle velocità

Triangolo delle velocità:



$v_{\text{rel}}$  la traccia in modo di chiudere il triangolo.

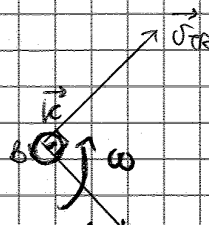
$$v_{\text{rel}} = v_{A \text{ ass}} \sin \theta = 0,50 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{rel}} = v_{A \text{ ass}} \cos \theta = 0,866 \text{ m/s}$$

$$AB = \frac{v}{\sin \theta} = 0,5 \text{ m}$$

$$v_{\text{rel}} = \omega \cdot \overline{KA(A-B)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \perp AB \\ \omega \end{array} \right. \rightarrow \omega = \frac{v_{\text{rel}}}{AB} = 1 \text{ rad/s}$$



### Esercizio 4: (ESERCITAZIONE 1)

$AO \neq \text{cost} \Rightarrow$  MOTO ASSOLUTO

Punto sempre da considerare per primo il MOTO RELATIVO!

In questo caso MOTO RELATIVO: traslazione  $\hat{x}$  (2)

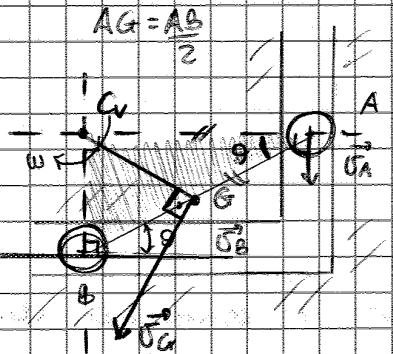
MOTO DI TRASLAMENTO: rotazione  $\omega$

MOTO ASSOLUTO: traslazione verticale

(simile a grifo)

} identificazione dei moti

### Esercizio 2: (ESERCITAZIONE 1) (pag 30)



Ci sono 2 guide ortogonali dentro cui scorrono i 2 estremi della stanghetta AB.

$AB = \text{cost} \Rightarrow$  MOTO SEMPLICE

Ci serve un'altra velocità nota in direzione  $\rightarrow v_B$  e orizzontale (x costruzione delle guide)

Traccio le perpendicolari alle 2 direzioni (in rosso) e determino  $C_v$  (centro di istantanea rotazione)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{C_v} + \vec{v}_{A/C_v} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{A} - \vec{C_v})$$

→ stessa  $\omega$   $\forall$  del corpo

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{C_v} + \vec{v}_{B/C_v} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{B} - \vec{C_v})$$

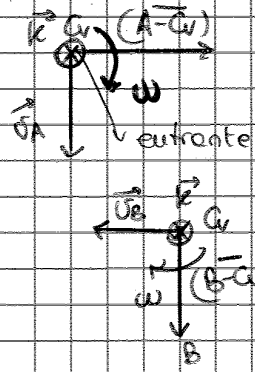
Considero il triangolo colorato:

$$AC_v = AB \cos \theta = 0,73 \text{ m}$$

$$BC_v = AB \sin \theta = 0,10 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{v_A}{AC_v} = 1,56 \text{ rad/s} \quad (\text{modulo})$$

Debiamo determinare il verso di  $\omega$ :



$$\vec{v}_B = \omega (BC_v) = 1,56 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Teorema di Carnot:

$$GC_v^2 = AC_v^2 + AG^2 - 2(AC_v)(AG)\cos \theta$$

$$GC_v = \sqrt{AC_v^2 + AG^2 - 2(AC_v)(AG)\cos \theta} = 0,099 \text{ m}$$

b) oltre retta d'azione di F

Occorre distinguere tra:

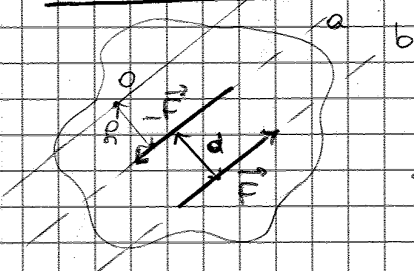
- a) SISTEMI EQUIVALENTI (identità')
- b) SISTEMI IN EQUILIBRIO

a) Un sistema è equivalente ad un altro se hanno uguale risultante e uguale momento risultante

b) I sistemi in equilibrio sono quelli che hanno risultante uguale a 0 e momento risultante uguale a 0.

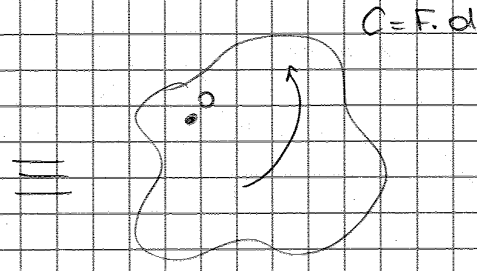
↳ EQUILIBRI STATICI O DINAMICI

COPPIA DI FORZE:



all b

$$\begin{cases} M = \\ \Delta // \\ V \text{ opposto} \end{cases}$$



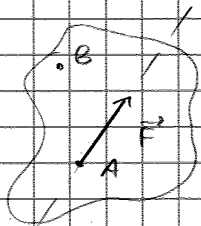
$M_o = F(d+R) - F(R) = F \cdot d$

• SOLA ROTAZIONE

identità'

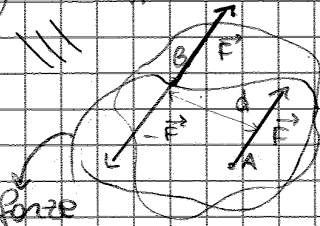
- $F \cdot d =$  coppia di forze (dipende da F e dalla distanza el tra le forze)
- non dipende da O  $\Rightarrow$  vettore libero

MOMENTO DI TRASPORTO:



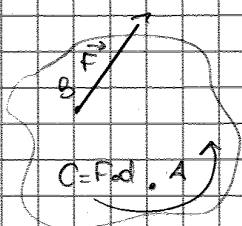
Voglio trasportare F in B, non posso però portare F fuori dalla sua retta d'azione!

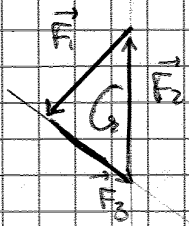
Applico e tolgo la stessa quantità in B:



$\rightarrow$  Il nostro scopo è quello di ottenere F in B.

coppia di forze





→ Questo significa avere risultante = 0

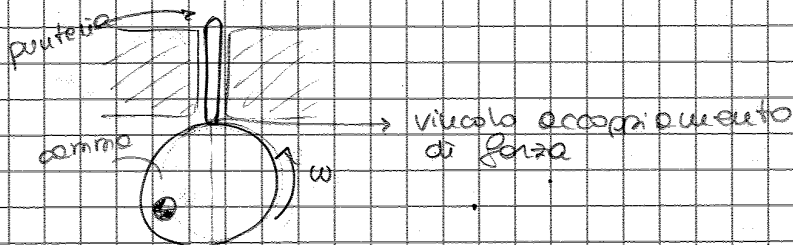
Dal triangolo determino i versi di  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_2$ , poi posso anche determinare i moduli.

### TIPICI DI FORZE:

- a) FORZE ESTERNE: si vedono anche sulla struttura assemblata (forze peso, inerzie)
- b) FORZE INTERNE: si vedono sulle parti del sistema (reazioni vincolari)

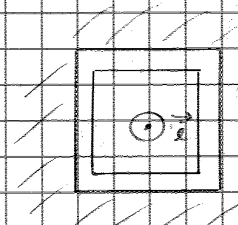
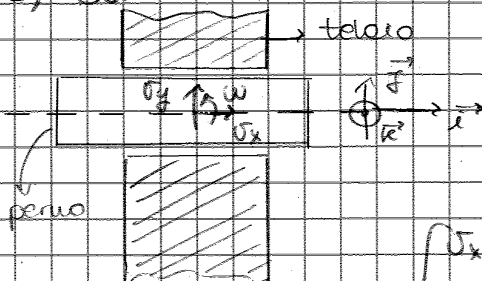
### Reazioni vincolari:

- 1) forze interne
- 2) forze incognite
- 3) forze che nascono nella direzione in cui il vincolo ostacola il moto
- 4) se il vincolo dipende dalla geometria del punto di contatto  $\Rightarrow$  COPPIA CINEMATICA
- 5) se il vincolo dipende dalle forze scambiate nel punto di contatto  $\Rightarrow$  ACCOPPIAMENTO DI FORZA  
 $\hookrightarrow$  SISTEMA CAMMA - PUNTERIA



### COPPIE CINEMATICHE:

#### 1) COPPIA PRISMATICA



$$\left. \begin{array}{l} F_x \neq 0 \\ F_y \neq 0 \\ \omega \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} 1 \text{ GdV} \\ 2 \text{ GdV} \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{l} R_x = 0 \\ R_y \neq 0 \\ M_x \neq 0 \end{array} \right]$$

→ reazioni vincolari tra guida e perno (senza attrito)

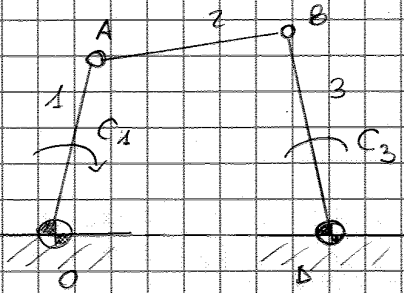
→ le azioni interne si elaborano nell'assemblaggio!

Corpo 3: 2° regola! (x le obliqui  $R_A, R_B$  e  $C_3$ )  
risultanti

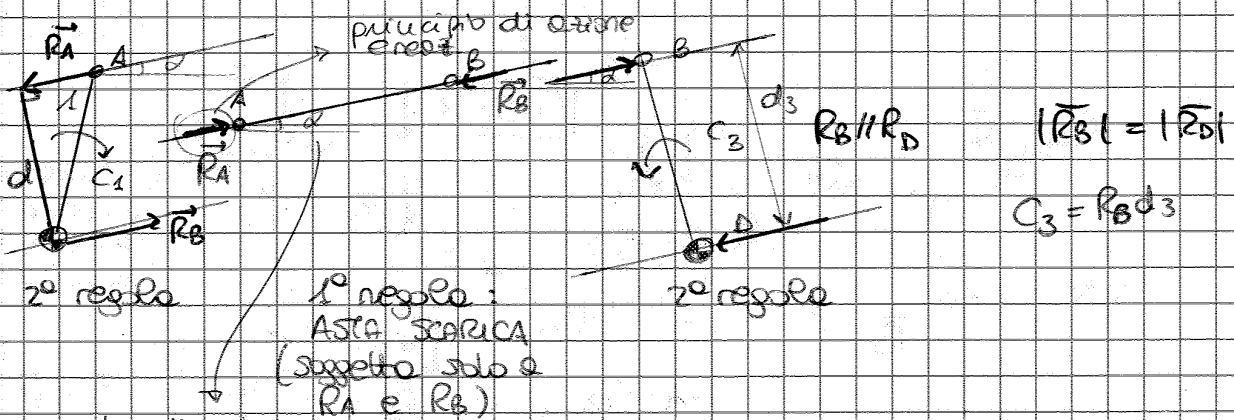
→ Su questo tipo di es, ne dovremo obbligatoriamente all'esame!!

QUADRILATERO ARTICOLATO:

Trascuriamo i pesi e gli attriti!



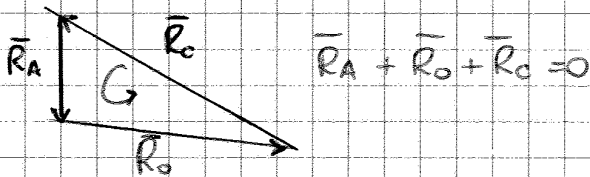
D.C.I. = diagramma del corpo libero



Nota, la direzione di  $R_A$  lo riparto con la stessa inclinazione sul 4° corpo!

Abbiamo la direzione di  $\vec{R}_c$  e  $\vec{R}_b$ ! → la direzione si mantiene inalterata passando da un corpo all'altro  
 Riesco così a trovare la direzione di  $\vec{R}_a$  (grazie al pto di stelle)

Equilibrio alla rotazione del corpo 3:



Stabilisco in questo modo i versi di  $\vec{R}_b$  e  $\vec{R}_c$  e calcolando gli angoli e' anche possibile determinare i moduli.

### 3 LEGGI DI NEWTON o DELLA DINAMICA

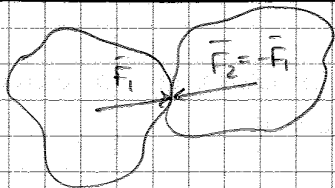
- 1) Una particella resta a riposo o in moto rettilineo uniforme se la risultante delle forze applicate ad essa e' uguale a 0.
- 2) L'accelerazione di una particella e' proporzionale alla  $\Sigma$  di tutte le forze esterne applicate.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ext_i} = m \vec{a}$$

→ coeff. di proporzionalità = massa particella [kg]

La massa della particella e' uno scalare e rappresenta la resistenza o l'inerzia della particella a modificare la sua  $\vec{v}$  [ $m/s$ ]

3) Principio di azione-reazione:



CORPO RIGIDO:

- $\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ext_i} = m \vec{a}_G$        $a_G = \text{acc. lineare} [\frac{m}{s^2}]$
- $\sum_{i=1}^n \vec{M}_{ext_i} = I_G \vec{\omega}$        $\omega = \text{acc. angolare} [\frac{rad}{s^2}]$

$I_G =$  momento d'inerzia baricentrico del C.R. [ $kgm^2$ ]

↓  
 inerzia del corpo rigido al valore di  $\omega$

1)  $Q_G = 0$

$R_{0x}$  e  $R_{0y}$  possono seguire un'arbitrarietà!

$x_i^+ - F \cos \alpha + R_{0x} = 0$  (azioni lungo x)

$x_j^+ \uparrow + R_{0y} - Mg - T - F \sin \alpha = 0$  (azioni lungo y)

Facciamo l'equazione di momento rispetto ad O:

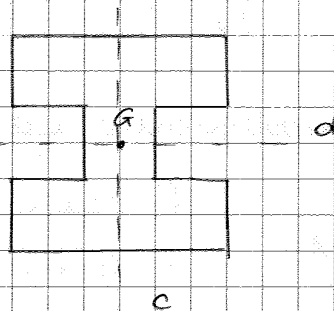
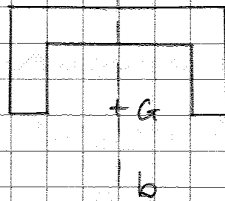
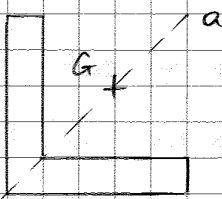
$\delta^+ - (TR_i) + (FR_i) - \underbrace{I_G \ddot{\omega}}_{\text{coppia d'inerzia}} = 0$

Nell'assemblato non vedo le reazioni vincolari e le tensioni T ma vedo i pesi Mg e mg!  
 → nel caso dovessimo studiare l'equilibrio della struttura globale

### BARICENTRO C.R. NEL PIANO

È un punto in cui si può concentrare tutta la massa del corpo senza alterare le leggi della fisica.

- Asse di simmetria
- 2 assi di simmetria ⇒ G = O



Sistemi discreti:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{M_{tot}}$$

$$= \boxed{\frac{S_y}{M_{tot}}}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{M_{tot}}$$

$$= \boxed{\frac{S_x}{M_{tot}}}$$

$S_x, S_y$  = momenti statici

Sistemi continui:  $\rho = \frac{dm}{dV}$  → massa infinitesimale

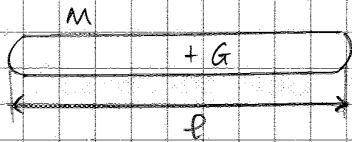
$$x_G = \frac{\int_M x dm}{M_{tot}} = \frac{\int_V x \rho dV}{M_{tot}}$$

$$y_G = \frac{\int_M y dm}{M_{tot}} = \frac{\int_V y \rho dV}{M_{tot}}$$

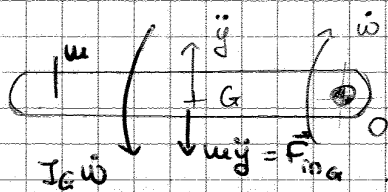
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad I_x + I_y = \int_M (x^2 + y^2) dm = \int_M r^2 dm = \underbrace{I_0}_{\substack{\text{mom. inerzia assiale} \\ \downarrow}} = \frac{MR^2}{2}$$

Il disco è un corpo assial-simmetrico, quindi  $I_x = I_y$

$$\Rightarrow I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \boxed{\frac{MR^2}{4}} \quad (\text{mom. d'inerzia diametrali del disco omogeneo})$$



$$I_G = \frac{MR^2}{12}$$



$$I_G = \frac{u\rho^2}{12}$$

(sbavetta uccenerata in  $O$ )

vettore libero

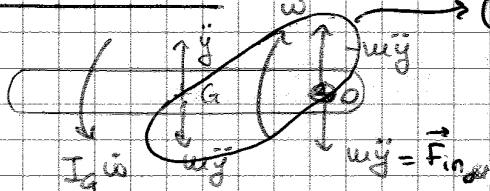
ok  $\hat{O}^+ + (u\ddot{y})(G_0) + \overline{I_G\ddot{\omega}} + \dots = 0$  (eq. di momento rispetto ad  $O$ )

no  $\hat{O}^+ + (u\ddot{y})(G_0) + \cancel{I_G\ddot{\omega}} + \dots = 0$   
 $\hookrightarrow$  errore!!

Ma si possono mescolare assi d'inerzia riferite a punti diversi!!

$\hookrightarrow$  conviene mantenere tutto in coordinate baricentriche

Alternativa: (trasporto tutto in  $O$ )  $\rightarrow (u\ddot{y})(G_0) = (u\ddot{y}G_0^2)\ddot{\omega}$



È necessario aggiungere la coppia di trasporto!

$$\vec{y} = \dot{\omega} \vec{k} \wedge (\vec{G}-\vec{O}) = \vec{a}_{tr,G} \quad \vec{y} = \dot{\omega} (G_0) \rightarrow \text{MODULO}$$

$$[I_G + u(G_0)^2] \ddot{\omega} = I_0$$

$\downarrow$  Teorema di Huyghens

Conclusione:

$$I_G = \frac{u\rho^2}{12}$$

$$I_0 = I_G + u(G_0)^2 \quad \text{Teorema di Huyghens}$$



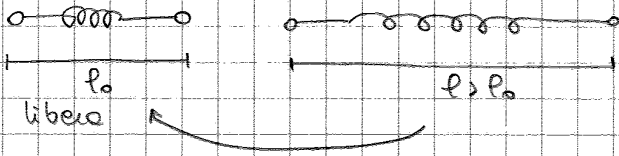
TRASPORTO DI UN MOM. D'INERZIA (PUNTI OGGI BENE)



$F_m = -kx$   $k = \text{rigidezza della molla [N/m]}$

↳ opposto a  $x$

$L_{F_m} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_m \cdot d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$  → LAVORO DOWTO ALLA FORZA ELASTICA [J]

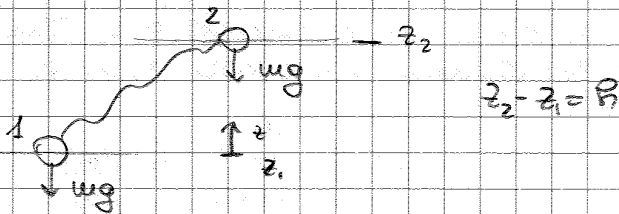


→ ENERGIA POTENZIALE ELASTICA: energia che la molla restituisce quando torna a riposo

$E_{pot\ el} = -L_{F_m} = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$

↳ uguale all'opposto del lavoro

LAVORO DELLA FORZA-PESO:



$L_{F_{peso}} = \int_{z_1}^{z_2} \vec{F}_p \cdot d\vec{z} = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = -mgh$

$E_{pot\ g} = -L_{F_{peso}} = mgh$  → ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

BILANCIO ENERGETICO:

$L_{ext} + L_i = \Delta E_c + \Delta E_{pot} + \Delta E_g$

↳ dip. del percorso      ↳ dip. dello stato iniziale e finale

- $L_{ext}$  = lavoro delle forze esterne che agiscono sul sistema

$\Delta E_c \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \dot{x}$   
 ↳ (lavoro delle azioni d'inerzia)      ↳ (tranne le azioni d'inerzia e del peso)

$\Delta E_{pot\ g} \Rightarrow L_{F_{peso}}$

- $L_i$  = lavoro delle forze interne (lavoro agli attriti)

## QUANTITÀ DI MOTO:

a) particelle  $m$  e  $\vec{v}$

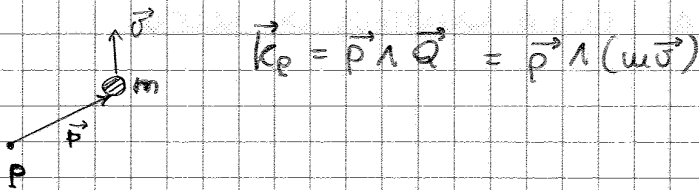
$$\vec{Q} = m\vec{v} \quad \left[ \frac{\text{kg m}}{\text{s}} \right]$$

quantità di moto

b) per più masse o per corpi estesi

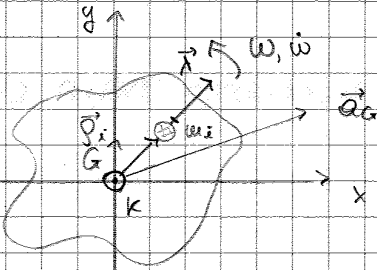
$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_G$$

## MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO:



$$\vec{K}_P = \vec{r} \wedge \vec{Q} = \vec{r} \wedge (m\vec{v})$$

## MOMENTO DELLA Q.D.M. PER I.C.R. NEL PIANO:



$$\vec{K}_G = \sum_{i=1}^n \rho_i \vec{r}_i \wedge (m_i \vec{v}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \rho_i \vec{r}_i \wedge m_i [\omega \vec{k} \wedge \rho_i \vec{r}_i]$$

$$= \sum_{i=1}^n (\rho_i^2 m_i) \omega [\vec{r}_i \wedge \underbrace{[\vec{k} \wedge \vec{r}_i]}_{\vec{u}}]$$

$$\Rightarrow \vec{K}_G = \underbrace{\sum_{i=1}^n (\rho_i^2 m_i)}_{I_G} \omega \vec{k} = I_G \omega \vec{k}$$

$$\rho_i = \frac{d(\rho_i \vec{r}_i)}{dt} = \omega \vec{k} \wedge (\rho_i \vec{r}_i)$$

NEL PIANO:

$$\vec{Q} = m\vec{v}_G$$

$$\vec{K}_G = I_G \omega \vec{k}$$

IC NELLO SPAZIO:

$\Rightarrow G$  o ad 1 pto fso

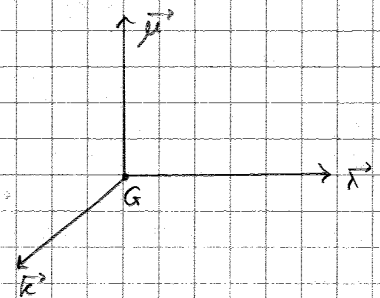
$\Rightarrow$  ASSE CENTRALI DI INERZIA

origine in G

assi di simmetria

assi principali di inerzia

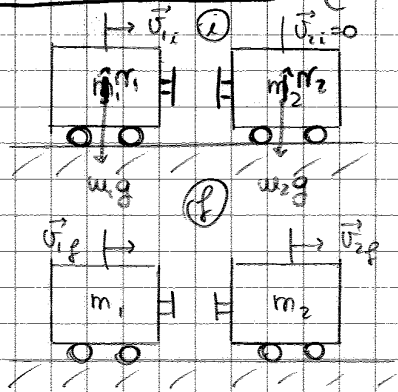
$[I_{max}; I_{min}]$



$$\vec{K}_G = I_x \rho \vec{\lambda} + I_y \rho \vec{\mu} + I_z \rho \vec{k}$$

$\vec{\omega}$  ass del corpo

URTO ELASTICO: (non esiste dissipazione di energia)  $\Delta E_c = 0$   
 $\Delta Q = 0$



prima dell'urto

(no attriti)

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ext,i} \stackrel{?}{=} 0$$

se così fosse la p.d.u si conserverebbe!

Eq orizzontale delle forze lungo x:

$$x_i \vec{\sum}_{i=1}^n \vec{F}_{ext,i,x} = 0$$

Eq verticale delle forze lungo y:

$$y_j \uparrow \underbrace{N_1 + N_2}_{\text{forze dei telai}} - w_1g - w_2g = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_i \vec{\sum}_{i=1}^n \vec{F}_{ext,i,x} = 0 \\ y_j \uparrow N_1 + N_2 - w_1g - w_2g = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ext,i} = 0$$

$$\vec{Q}_i = m_1 \vec{v}_{1,i}$$

$$\vec{Q}_p = m_1 \vec{v}_{1,f} + m_2 \vec{v}_{2,f}$$

$$\Rightarrow \vec{Q}_i = \vec{Q}_p \quad (\times \text{ caus. p.d.u})$$

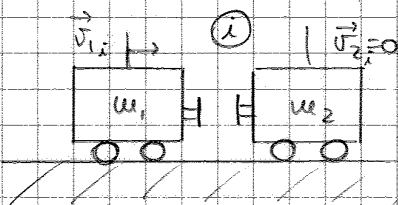
$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

$$L_{F_{ext}} = 0 \quad L_i = 0 \quad \Delta E_{p_g} = 0 \quad \Delta E_{p_{el}} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta E_c = 0$$

$$\left[ \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 \right]_f - \left[ \frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 \right]_i = 0$$

URTO ANELASTICO: (esiste dissipazione di energia)



prima dell'urto

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ext,i} = 0$$

$$\vec{Q} = \text{cost.}$$

dopo l'urto

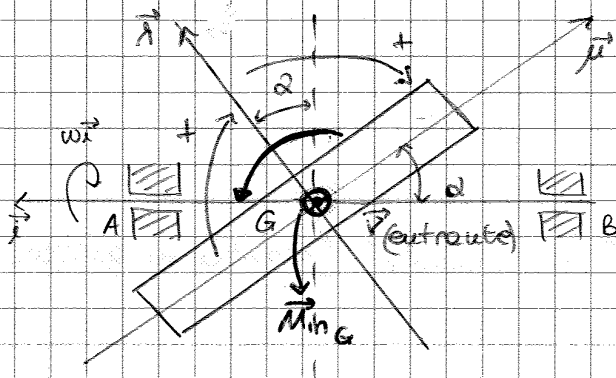
$$\vec{Q}_i = m_1 \vec{v}_{1,i}$$

$$\vec{Q}_p = (m_1 + m_2) \vec{v}_R$$

$$\vec{Q}_i = \vec{Q}_p \Rightarrow v_R = \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1,i}$$

# ROTORE INCLINATO:

28/03/2012

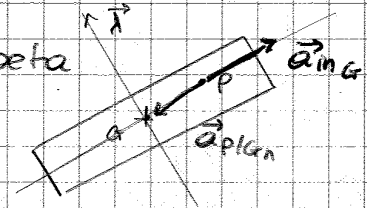


$\omega = \text{cost}$   
 $\alpha = \text{cost}$

$\omega = \text{cost}$ :

1)  $\vec{F}_{in G} =$  forza CENTRIFUGA

$a_{p/G} \Rightarrow$  centripeta



MASSA ROTORE in G:

$\vec{F}_{in G} = m(\omega^2)(G/G) = 0$

Il contributo della forza centrifuga si elimina quando la massa e' concentrata in G e  $\omega$  e' ruotata in G.

## TERZA CENTRALE DI INERZIA:

- G
- assi principali di inerzia ( $I_{max}, I_{min}$ )
- assi di simmetria

ASSE ROTORE:  $\vec{\lambda}$

ASSE DIAMETRALE:  $\vec{\mu}$  e  $\vec{\nu}$

$I_{\lambda} = \frac{mR^2}{2}$  R = raggio rotore

$I_{\mu} = I_{\nu} = \frac{I_{\lambda}}{2} = \frac{mR^2}{4}$

→ Identifichiamo gli assi di simmetria, cerchiamo  $I_{max}, I_{min}$ :

$(\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu}) \Rightarrow$  TERZA CENTRALE DI INERZIA

Asse di rotazione  $\vec{\lambda}$ :  $\Rightarrow \vec{M}_{in G} = - \frac{d\vec{K}_G}{dt}$

$\vec{K}_G = I_{\lambda} \omega \vec{\lambda} + I_{\mu} \dot{\alpha} \vec{\mu} + I_{\nu} r \dot{\nu}$

$\begin{cases} p = \omega \vec{\lambda} \times \vec{\lambda} = 0 \\ q = \omega \vec{\lambda} \times \vec{\mu} = -\omega \text{cost} \vec{\nu} \\ r = \omega \vec{\lambda} \times \vec{\nu} = 0 \end{cases}$  (non esistono contributi lungo il 3° asse)

$\vec{M}_{in G} = (\omega \text{cost}) \vec{\mu} - (\omega \text{cost}) \vec{\nu}$

$$\vec{K}_G = I_\lambda [\omega_1 \sin \alpha - \omega_2] \vec{\lambda} + I_\mu [\omega_1 \cos \alpha] \vec{\mu} \quad I_\lambda = 2I_\mu$$

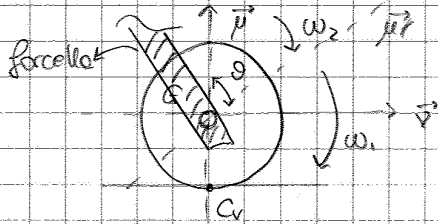
$$\frac{d\vec{K}_G}{dt} = I_\lambda [\omega_1 \sin \alpha - \omega_2] \frac{d\vec{\lambda}}{dt} + I_\mu [\omega_1 \cos \alpha] \frac{d\vec{\mu}}{dt}$$

↳ x determinare la coppia d'inerzia devo derivare  $K_G$ !

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \vec{\omega}_{\text{terno}} \wedge \vec{\lambda} = \overset{\text{forcella}}{\omega_1 \vec{r} \wedge \vec{\lambda}} = [\omega_1 \sin \alpha \vec{\lambda}] \wedge \vec{\lambda} + [\omega_1 \cos \alpha \vec{\mu}] \wedge \vec{\lambda} \quad \text{①} \\ \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\omega}_{\text{terno}} \wedge \vec{\mu} = \overset{\text{forcella}}{\omega_1 \vec{r} \wedge \vec{\mu}} = [\omega_1 \sin \alpha \vec{\lambda}] \wedge \vec{\mu} + [\omega_1 \cos \alpha \vec{\mu}] \wedge \vec{\mu} \quad \text{②} \end{cases}$$

sono adottata ad utilizzare solo  $\omega_1$  se mi riferisco alla forcella)

ma e' detto che coincide con la  $\vec{\omega}$  assoluta!



$$1 \rightarrow = -\omega_1 \cos \alpha (\vec{v})$$

$$2 \rightarrow = +\omega_1 \sin \alpha (\vec{v})$$

$$\frac{d\vec{K}_G}{dt} = I_\lambda [\omega_1 \sin \alpha - \omega_2] [-\omega_1 \cos \alpha \vec{v}] + \left(\frac{I_\lambda}{2}\right) [\omega_1 \cos \alpha] [+ \omega_1 \sin \alpha \vec{v}]$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_G}{dt} &= -I_\lambda \omega_1^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{v} + I_\lambda \omega_2 \omega_1 \cos \alpha \vec{v} + \frac{I_\lambda}{2} \omega_1^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{v} \\ &= -\frac{I_\lambda}{2} (\omega_1^2 \sin \alpha \cos \alpha) \vec{v} + I_\lambda \omega_1 \omega_2 \cos \alpha \vec{v} \end{aligned}$$

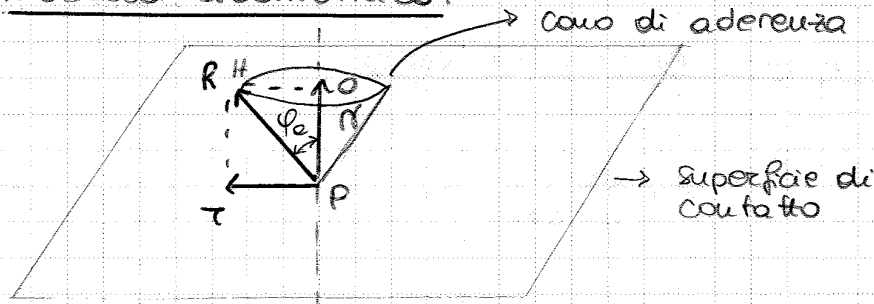
$$\vec{M}_{in_G} = -\frac{d\vec{K}_G}{dt}$$

$$\vec{F}_{in_G} = m(\omega^2 R) \vec{i} \quad (\text{forza d'inerzia centrifuga})$$

ruota

riporto sul disegno

MODELLO GEOMETRICO:



$\varphi_a =$  angolo di attrito di aderenza

$T = f_a R$   
 $\stackrel{=} T_{lim}$

$T_{lim} =$  forza di aderenza limite

$T' = \operatorname{tg} \varphi_a' R$

$T = \operatorname{tg} \varphi_a R$

$\operatorname{tg} \varphi_a = f_a$

→ legame tra modello matematico e modello geometrico

2) Attrito nascente: (o di strisciamento)

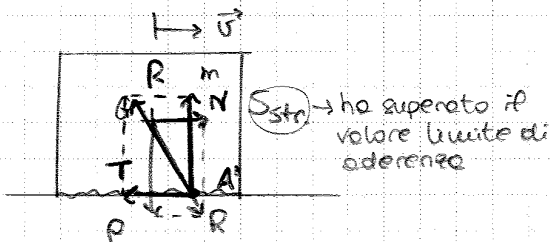
$T > f_a R$  si vince l'aderenza

⇓

$\sigma \neq 0$

⇓

strisciamento



$R$  non passa per il baricentro!  
 $T$  opposta a  $\sigma$ !

+↑  $n = P$

+→  $S_{str} = T$

Aumento l'azione di trazione:  $S' > S$  ( $\sigma \neq \cos t$ )

⇒ cambia la risultante  $R$  (come nel caso precedente)

+↑  $n = P$  (l'eq. verticale non viene influenzata)

+→  $T = \cos t = f n$  legge di attrito di strisciamento

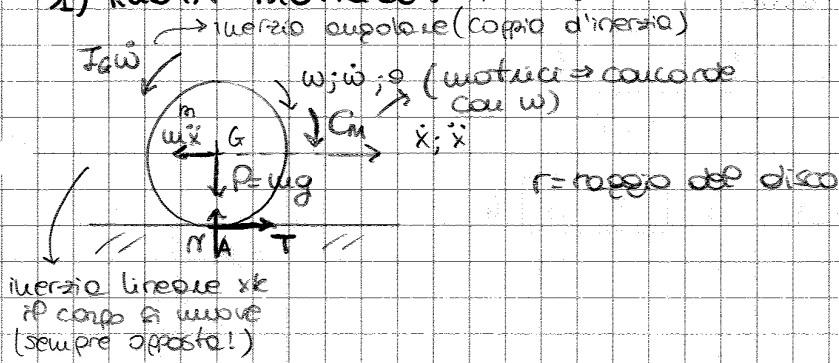
$f =$  coeff. di attrito di strisciamento

$S'_{str} > S_{str}$

~~$S'_{str} = T$~~  → non posso scrivere così perché  $T$  non cambia!

+→  $S'_{str} = T \pm u \ddot{x}$  → nascono delle forze d'inerzia che mi compensano l'equilibrio

### 1) RUOTA MOTTRICE: (pgs. 89)



L'azione T di attrito è concordata con  $\dot{x}$  ma dipende dal fatto che è opposta alle coppie motrici e a 0.

$r$  = raggio del disco

$$\begin{cases} \uparrow N=P & 1 \\ \rightarrow T=uv\dot{x} & 2 \\ \text{G} \downarrow C_M - I_G \ddot{w} - Tr = 0 & 3 \end{cases}$$

→ coppia motrice

In questa forma il problema non è risolvibile perché ci sono troppe incognite!

Se il problema non ha un specifico vincolo parte sempre dal caso di ADERENZA:

Se in A c'è aderenza ⇒ Puro ROTOLAMENTO ⇒ 1GdL

$$v_A = 0 \Rightarrow v_{Cv} = 0$$

$C_v \equiv A$  (A rappresenta il centro di istantanea rotazione del corpo)

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = r\ddot{\theta} = r\ddot{w}} \quad \curvearrowright \quad 4$$



questa è la 4ª equazione che ci permette di risolvere il sistema (relazione tra  $\ddot{x}$  e  $\ddot{w}$ )

$$\begin{aligned} x &= r\theta \\ \dot{x} &= r\dot{\theta} \\ \ddot{x} &= r\ddot{\theta} \end{aligned}$$

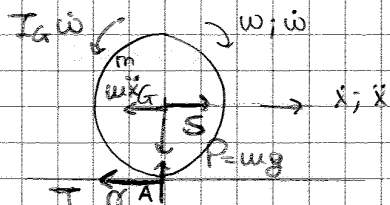
Non dimentichiamo di verificare  $\boxed{T \leq f_{att}}$

Se non è verificata, significa che non c'è aderenza, quindi non c'è puro rotolamento

$$\Rightarrow \ddot{x} \neq r\ddot{\theta} \quad !! \quad (\ddot{x} \text{ e } \ddot{\theta} \text{ sono indipendenti}) \Rightarrow 2GdL$$

$$\Rightarrow \text{STRISCIAMENTO} \Rightarrow \boxed{T = f_{att}} \quad 4$$

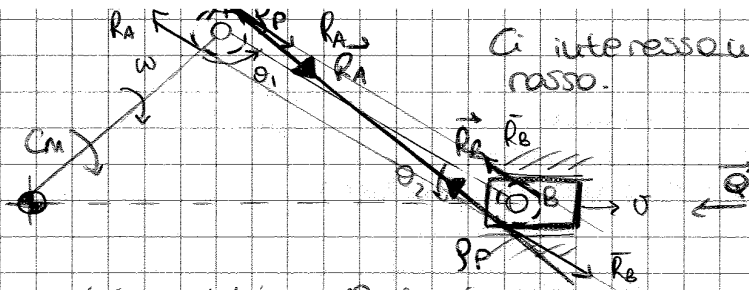
### 2) RUOTA CONDotta:



S = forza di trascinamento (non esclude il moto di puro rotolamento)

T è opposta all'azione motrice che è indicata da S.

$$\begin{cases} \uparrow N=P & 1 \\ \rightarrow S - T - uv\dot{x} = 0 & 2 \\ \text{G} \downarrow I_G \ddot{w} - Tr = 0 & 3 \end{cases}$$



$\theta_1 \uparrow$  (aumenta)

$\theta_2 \downarrow$  (diminuisce)

AB: asta scorice  
(corpo soggetto a 2 forze risultanti)  $\parallel$

3° condizione (di attrito al perno)

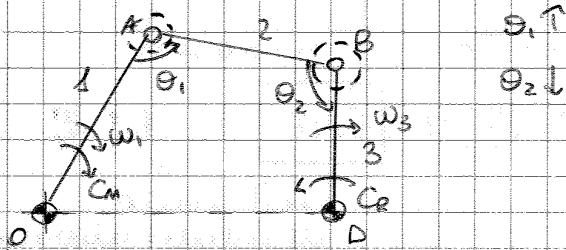
In un'asta ce' la 1° ipotesi:  
in  $R_B$  non sono però rispettate tutte le condizioni perché il verso è concorde con  $\theta_2$ .

Considero la tg sotto:

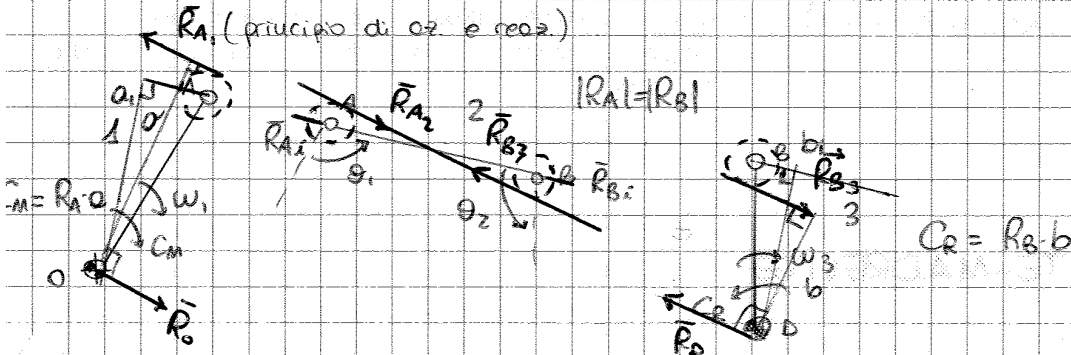
$R_B$  non va di nuovo bene perché concorde con  $\theta_2$ .

L'unica tg che rispetta tutte e 3 le condizioni è quella chiamata a e disegnata in rosa.

QUADRILATERO ARTICOLATO:



$\theta_1 \uparrow$   
 $\theta_2 \downarrow$



Corpo 2: asta scorice (corpo rigido soggetto a 2 forze risultanti)

$\bar{R}_A$  e  $\bar{R}_B$  devono formare una coppia opposta a  $C_M$ , così come  $\bar{R}_{B_3}$  e  $\bar{R}_D$  devono formare una coppia opposta a  $C_D$ .

$R_{A_2}$  e  $R_{B_2}$  sono le reazioni ideali, passanti per le cerniere e con direzioni coincidenti con l'asta.

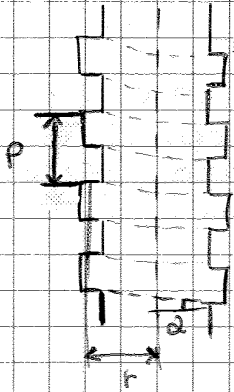
Nel caso ideale, senza attrito:

$$C'_M = R_{A_2} \cdot a_i \quad a_i < a$$

$$C'_D = R_{B_2} \cdot b_i \quad b_i > b$$



### 1) VITI RETTANGOLARI



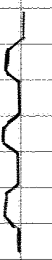
$d$  = diametro medio della vite

$d$  = angolo di inclinazione del filetto

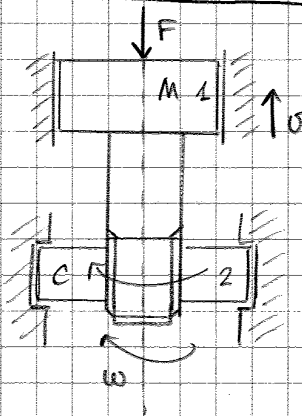
$p$  = passo

$\eta$  > precisione  
"rendimento"

### 2) VITI TRAPEZIE

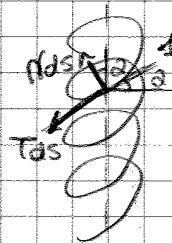


### VITI RETTANGOLARI:



1: vite

2: madrevite

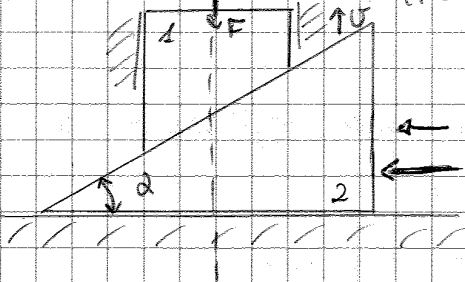


→ elica del filetto

### Metodo dei cunei equivalenti:

04/04/2012

Si basa sullo sviluppo dell'elica del filetto sul piano



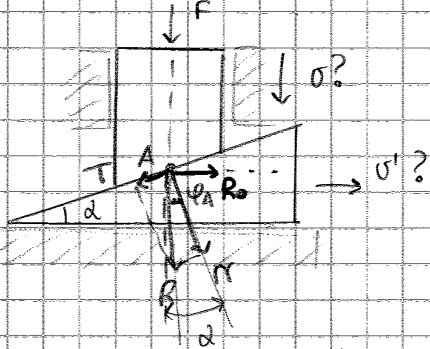
$$v = \omega r$$

$$S = \frac{c}{r}$$

Se muovono verso sinistra il cuneo 2, spostato verso l'alto il cuneo 1 (vincolato al solo moto verticale)

Se  $\varphi_n > \alpha$  il cuneo non si muove anche se togliamo la forza motrice esterna!

2)  $\varphi_n < \alpha \rightarrow$  MOTO REVERSIBILE  $\Rightarrow \sigma \neq 0, \sigma' \neq 0$

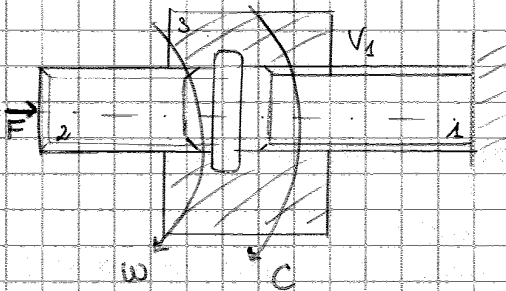


$T = fR$

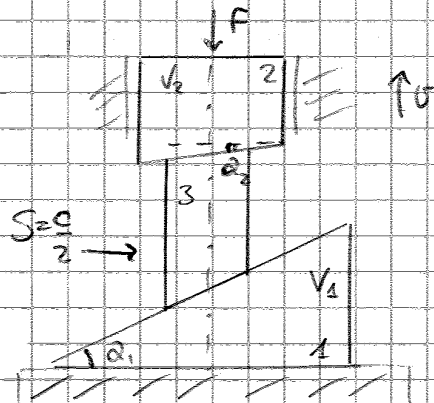
$S = 0$

R si porta verso dx rispetto all'asse  $\rightarrow$  la sua proiezione sull'orizzontale di una componente  $R_0$  che produce lo sfaldamento del cuneo.

**VITI DIFFERENZIALI:**



- 1, 2: viti
- 3: madrente



**ATTRITI SU CONTATTI ESTESI:**

$N \Rightarrow p dA$        $p =$  pressione di contatto

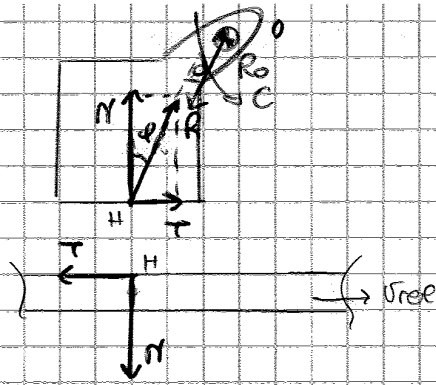
- 1) PRESSIONE UNIFORME (1° ipotesi)
- 2) IPOTESI DELL'USURA O DI REYE (2° ipotesi)

**Ipotesi dell'usura:**

Il volume di materiale asportato per attrito nell'unità di tempo è proporzionale al lavoro fatto dalle forze di attrito nelle stesse unità di tempo.

$dV = \delta dA = k \frac{dL_{attrito}}{dt}$  ;       $\delta dA = k \left( \frac{dT \cos \alpha}{dt} \right) \vec{v}_{rec}$   
 $\frac{dT}{dt}$  spessore

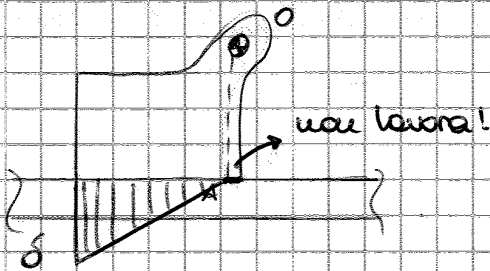
$\delta dA = k [F \cos \alpha] \vec{v}_{rec}$



$$C = R_0 d$$

$$|R| = |R_0|$$

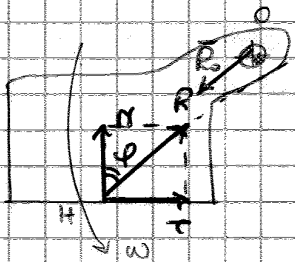
$$\vec{R} \parallel \vec{R}_0$$



A code dentro la superficie di contatto, quindi la distribuzione è triangolare e il pattino lavora solo parzialmente:

PATTINO PARZIALIZZATO

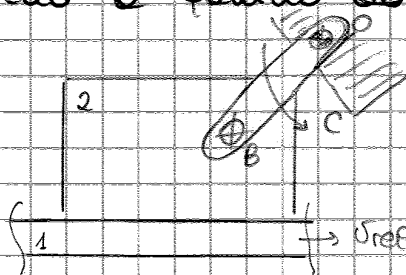
FENOMENO DELL'AUTOIMPURTEAMENTO: (es. acceleratore → deve (usc. anche senza elettricità)



$$\vec{R}_0 \parallel \vec{R}$$

$$|R_0| = |R|$$

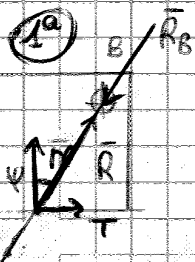
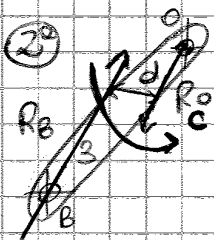
Freno a pattino ad accostamento libero:



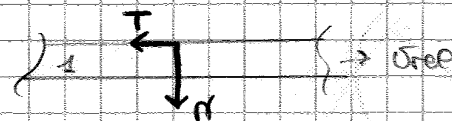
z: pattino → zGDL

Nei casi dell'accostamento libero: a priori il tipo di accostamento è incognito!

⇒ si comincia da equilibrio di forze

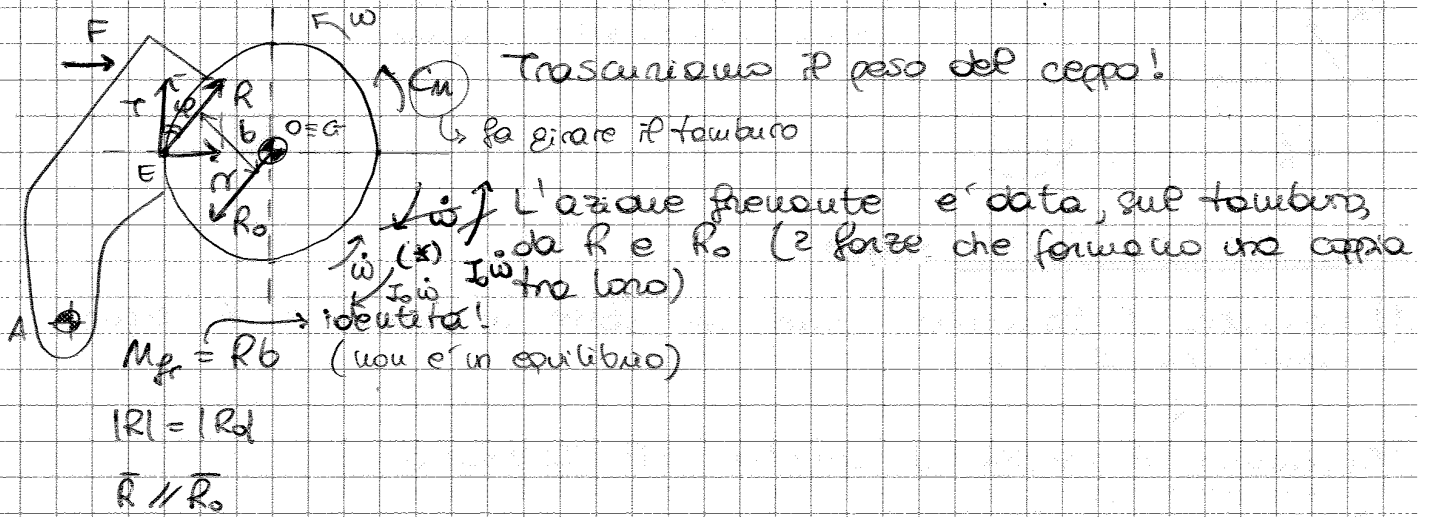


(Ma causato il pto di applicazione H)



Nei freni iniziamo sempre dal corpo che si muove, perché ci dà il verso della forza T!

Ceppo singolo esterno: (a)



(\*) Nasce una decelerazione, che mette opposta a  $\omega$ .  
 La coppia d'inerzia è opposta a  $\dot{\omega}$ .

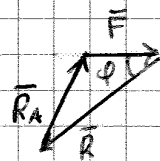
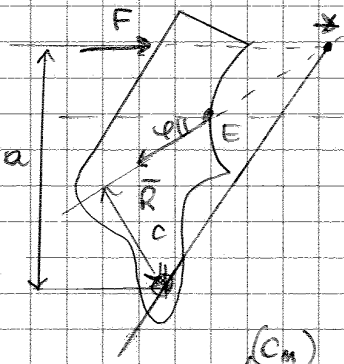
$\dot{\omega}$  è però sempre meglio metterlo concorde a  $\omega$  quindi inverti i versi.

↳ coppia frenante

$$\sum \tau = C_M - I_G \dot{\omega} - R \cdot b = 0$$

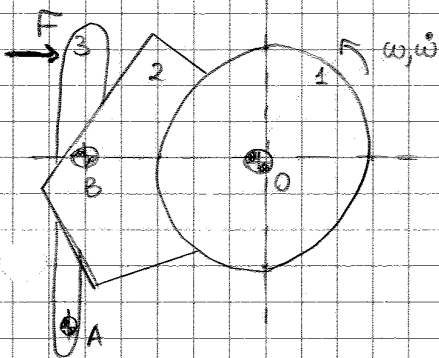
↳ equilibrio!

↓            ↓  
 coppia    coppia  
 motore   d'inerzia



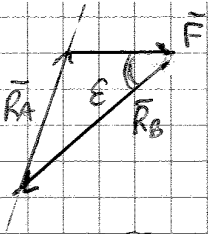
A)  $F \cdot a - R \cdot c = 0$

Freni a tamburo ad accostamento libero: (da fare!!)



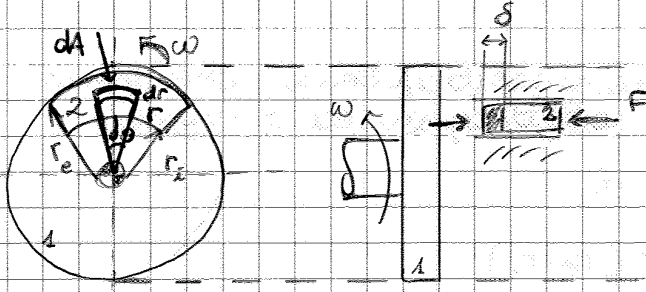
- 1: tamburo
- 2: ceppo
- 3: leva

no H<sub>p</sub> usural



→ sono i + utilizzati in ambito automobilistico

Freni a disco ad accostamento rigido:



1: disco  
2: pastiglia

Hp. usura:

$$dV = \underbrace{\delta}_{\text{cost}} dA = k' \underbrace{(f p dA)}_{\text{cost}} \underbrace{\delta_{rel}}_{= \omega r} = \text{cost Istantaneamente su TUTTA LA SUR. DI CONTATTO}$$

$$p = \frac{k}{r}$$

$$r_i \leq r \leq r_e$$

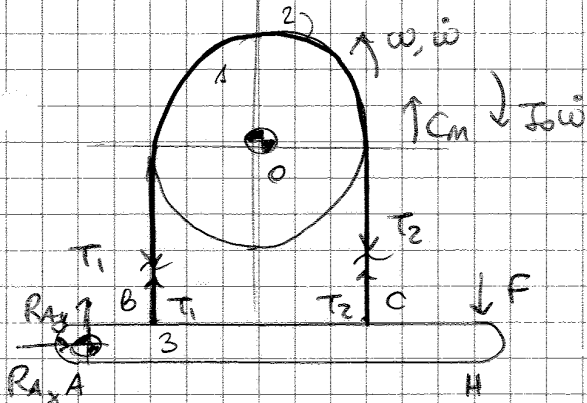
$$\begin{aligned} \rightarrow F &= \int_A dY = \int_A p dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_i}^{r_e} \left(\frac{k}{r}\right) (r d\theta) dr \\ F &= (\theta_2 - \theta_1) k (r_e - r_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_F &= \int_A (dT) r = \int_A (f dY) r = \int_A (f p dA) r = \int_A f \left(\frac{k}{r}\right) r \cdot [r d\theta dr] \\ &= f k \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_i}^{r_e} r dr = f k (\theta_2 - \theta_1) \frac{(r_e^2 - r_i^2)}{2} \end{aligned}$$

$$M_F = \underbrace{f k (\theta_2 - \theta_1) (r_e - r_i)}_F \cdot \frac{(r_e + r_i)}{2}$$

$$M_F = F F \left(\frac{r_i + r_e}{2}\right)$$

## Freno a nastro.



- 1: tamburo
- 2: nastro ( $\sigma=0$ )
- 3: leva

Trascuro tutti i pesi!

Toglio idealmente il nastro e noto che nascono 2 tensioni:  $T_1$  e  $T_2$ .

Ma indico il man. frenante sul tamburo, perché esso è dato da  $T_1 - T_2$ .

$$\circlearrowleft^+ C_m - I_0 \ddot{\omega} - T_2 r + T_1 r = 0$$

$$C_m - I_0 \ddot{\omega} - \underbrace{(T_2 - T_1) r}_{M g r} = 0$$

$$A \downarrow + F(HA) - T_2(AC) - T_1(BA) = 0$$

$\Rightarrow$  definisce l'equazione dei flessibili (legame fra le 2 tensioni)

(la tensione maggiore è sempre quella opposta a  $\omega$ )  $\rightarrow T_2$

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{f \theta^*} \quad \theta = \text{angolo di strisciamento}$$

$$\theta^* = \theta_{\text{aw}} (\text{ovoloimento})$$

1) FLESSIBILE FERMO ( $v=0$ ): (freno a nastro)

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{f\theta^*} \quad \theta = \theta_{aw}$$

2) FLESSIBILE IN MOTO ( $v \neq 0$ ):

$$\frac{T_1 - \rho v^2}{T_2 - \rho v^2} = e^{f\theta^*} \quad \theta^* \neq \theta_{aw}$$

$\rho \Rightarrow$  kg/m flessibile

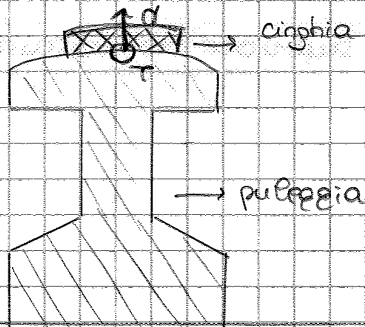
$v \Rightarrow$  velocità del flessibile

## CINGHIE

- trasmissione moto anche su grandi distanze
- smorza le vibrazioni
- rapporto di trasmissione  $\neq$  costante (costante nelle ruote dentate)

- CINGHIE PIANE
- CINGHIE TRAPEZIE
- CINGHIE DENTATE

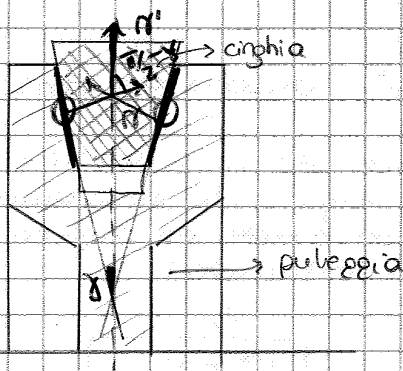
a) CINGHIA PIANA:



$T = fR$  (dove  $f$  è strisciamento)

$T$  è ortogonale

b) CINGHIA TRAPEZIA:



$$R' = 2R \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \delta\right) = 2R \sin \delta$$

$$T_{TOT} = 2fR' = kf \frac{R'}{\sin \delta}$$

$$T_{TOT} = \frac{f}{\sin \delta} R'$$

$\delta =$  angolo di semi apertura della cinghia trapezia

A regime:  $\dot{\omega}_1 = 0, \dot{\omega}_2 = 0$

$$\eta = \frac{P_u}{P_e} = \frac{C_m \omega_2}{C_m \omega_1} = \frac{(T_1 - T_2) R_2 \omega_2}{(T_1 - T_2) R_1 \omega_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

$\sigma_1 = \sigma_2$  (NO DISSIP)  $\Rightarrow \eta = 1$

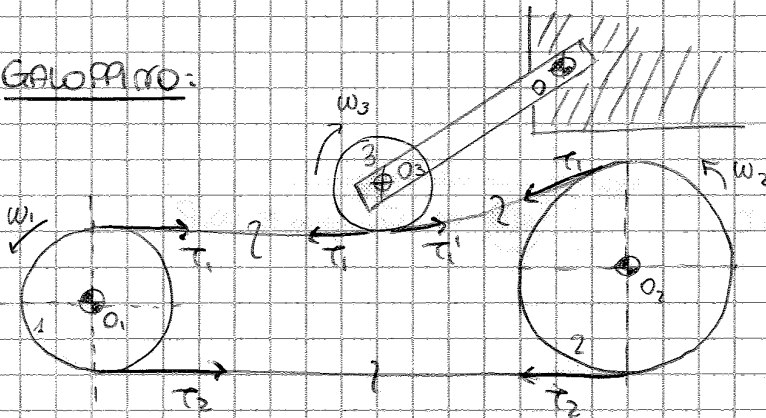
$\sigma_1 = \sigma_0 (1 + T_1/ES)$   $\rightarrow$  modulo di Young  
 $\sigma_2 = \sigma_0 (1 + T_2/ES)$   $\rightarrow$  sez. trasversale

$$\eta = \frac{\sigma_0 (1 + T_2/ES)}{\sigma_0 (1 + T_1/ES)} < 1 \quad (T_2 < T_1)$$

### Metodi per tensione una cinghia:

- 1) GALOPPIO
- 2) TENDITORE
- 3) FORZAMENTO INIZIALE

#### 1) GALOPPIO:

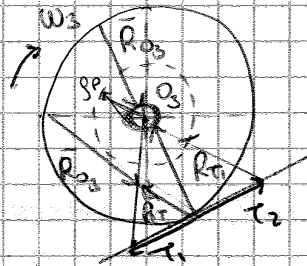


3: galoppio  $\Rightarrow$  PULEGGIA FOLE

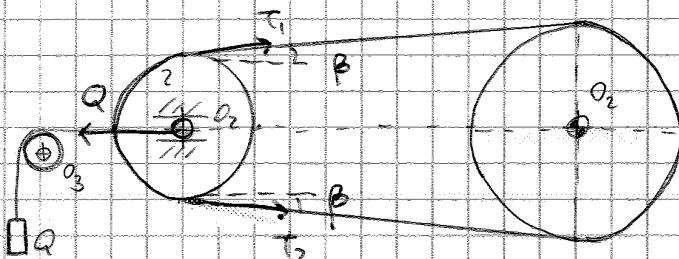
Per avere  $P_c \Rightarrow$  galoppio sul ramo cedente

- No  $C_m$
- No attrito  $O_3$
- No inerzie

$$T_1 = T_1'$$




#### 2) TENDITORE:

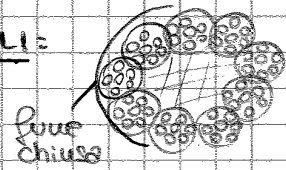


$$Q = (T_1 + T_2) \cos \beta$$

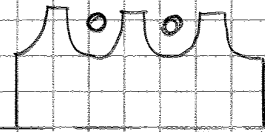


# Furfi

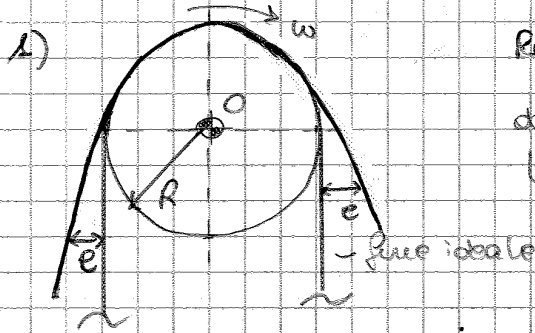
1) TREFOLI: insieme di fili avvolti ad elica (aumento del modulo di Young)   
 elica  $\Rightarrow E_{fune} > E_{fio}$    
↳ modulo di Young   
↳ di Young   


2) A TREFOLI:   


I tamburi Rouss degli incani specifici per evitare che la fune esca dalla sede:



## RIGIDEZZA DELLA FUNE:



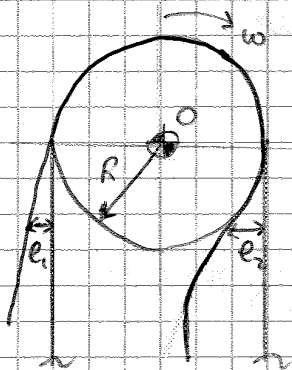
Rigidezza elastica:  $(e)$   $\rightarrow$  sist. simmetrico   
 ↓   
 dovuto all'incomplete flessibilità   
 ↳ CINGHIE e FURFI   
 ↓   
 NO DISSIPAZIONE

2) Causa scivolamento tra i fili  $\Rightarrow$  genera attrito interno

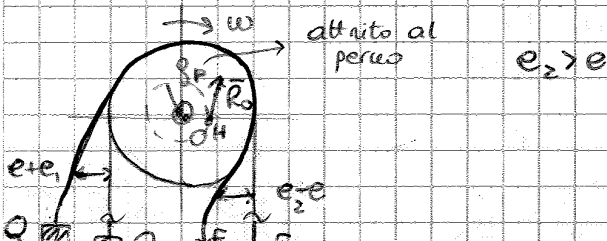
$\Rightarrow$  RIGIDEZZA ANELASTICA  $\Rightarrow e_1, e_2$    
 $\Rightarrow$  SIST. NON SIMMETRICO

DISSIPAZIONE

↳ CINGHIE, FURFI e CARRE



## Rendimento carucola:



Il nostro scopo era quello di legare  $\sigma_A$  a  $\sigma_0 \rightarrow \sigma_A = 4\sigma_0$

↳ Il numero 4 rappresenta il numero di travi di fune sul bozzello (rimuovendo le sezioni di fune collegate al bozzello).

**FORMULE GENERALI:**

1)  $\sigma_A = n\sigma_0$

2)  $T_n = \eta_c^n F$

3)  $\eta_{tot} = \frac{P}{nF} = \frac{\eta_c + \eta_c^2 + \eta_c^3 + \eta_c^4}{n}$

4)  $P = F(\eta_c + \eta_c^2 + \dots + \eta_c^n)$

**b) ANALISI TENSIONI:**

$T_D = T_E$

$T_G = T_H$

$T_B = T_C$

①  $\eta_c = \eta_c = \frac{P_u}{P_e} = \frac{T_B(\cancel{4\sigma_0})}{F(\cancel{4\sigma_0})}$

(ipotizzo che tutti i rendimenti sono uguali tra loro)

$T_B = \eta_c F$

②  $T_D = \eta_c T_C = T_B = \eta_c^2 F$

③  $T_G = T_D \eta_c = \eta_c^3 F$

④  $T_I = T_G \eta_c = \eta_c^4 F$

**c) RENDIMENTO TOTALE:**

$\eta_{tot \text{ paranco}} = \frac{P_u}{P_e}$

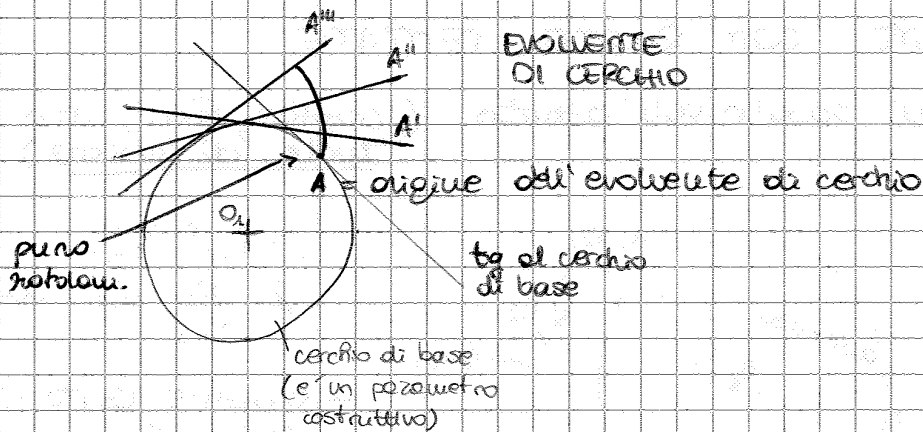
$\eta_{tot} = \frac{\overset{\text{carico}}{P \sigma_0}}{\underset{\text{forza motrice}}{F \sigma_A}} = \frac{P \cancel{\sigma_0}}{F(\cancel{4\sigma_0})} = \frac{P}{4F}$

## PROFILO DEI DENTI:

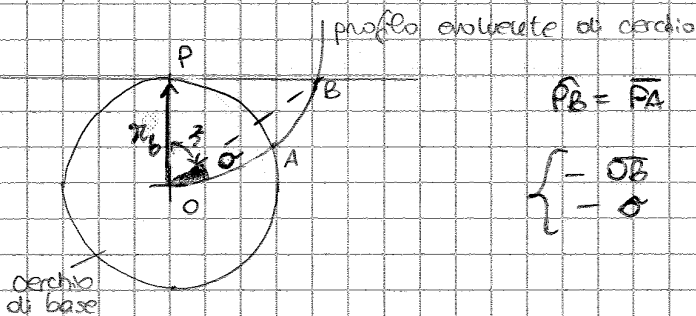
Il profilo più adottato è il profilo AD EVOLVENTE DI CERCHIO.

Una curva evolvente è una curva generata da una seconda detta EVOLUTA, ove stanno tutti i centri di curvatura dell'evolvente stessa.

EVOLVENTE DI CERCHIO: è una curva i cui centri di curvatura stanno su una circonferenza detta CERCHIO DI BASE.



## Parametri dell'evolvente di cerchio:



$$PB = PA$$

$$\begin{cases} - OB \\ - \sigma \end{cases}$$

2 parametri dell'evolvente di cerchio

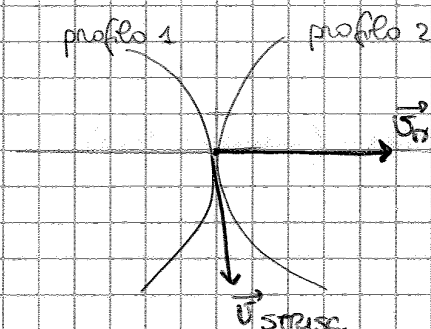
$r_b$  = raggio del cerchio di base

$$\begin{cases} PA = r_b \cdot \tan \gamma \\ PB = r_b \cdot \gamma \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} PA \\ PB \end{cases}} \right\} \tan \gamma = \gamma + \sigma$$

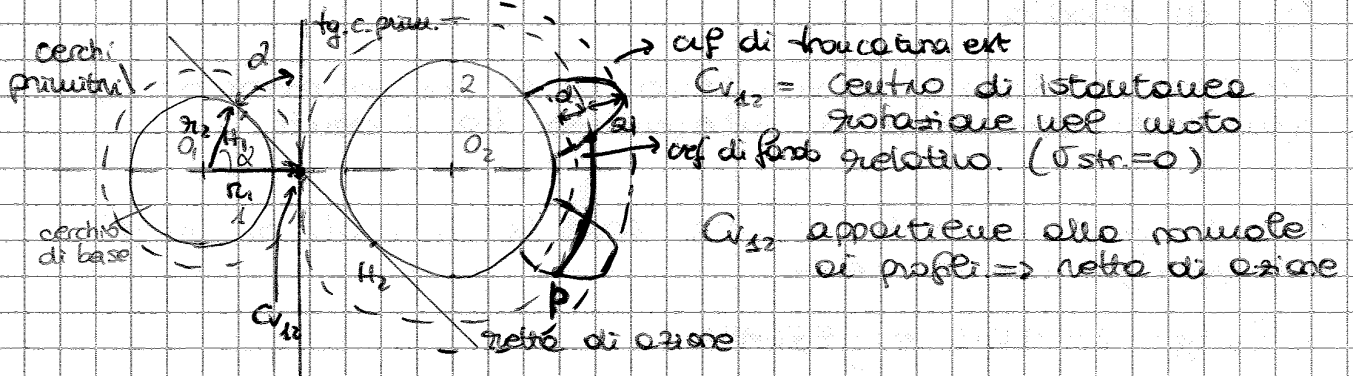
$$PA = r_b (\gamma + \sigma)$$

$$\boxed{OB = \frac{r_b}{\cos \gamma} \quad \sigma = \tan \gamma - \gamma}$$

## PROFILI AD EVOLVENTE DI CERCHIO => PROFILI CONIUGATI:



## Parametri identificativi delle ruote cilindriche a denti dritti:



I cerchi primitivi rotolano senza strisciare gli uni sugli altri.

$d$ : angolo di pressione

$H_1, H_2$ : lung. dei carichi

$a$ : addendum

$d$ : dedendum

$$d > a$$

### PARAMETRI COSTRUTTIVI:

- cf di fr. esterna
- cf di fondo
- cerchio di base
- modulo

$p$  = passo della ruota (sulle cf primitive - nominali)

### PROPORZIONAMENTO MODULARE:

$$m = \text{modulo} = \frac{p}{\pi} \quad [mm]$$

$$a = m$$

$$b = 1,25m$$

$$p z_1 = 2\pi r_1$$

$\downarrow$   
 n° denti  
 ruota 1  $\hookrightarrow$  raggio primitivo ruota 1

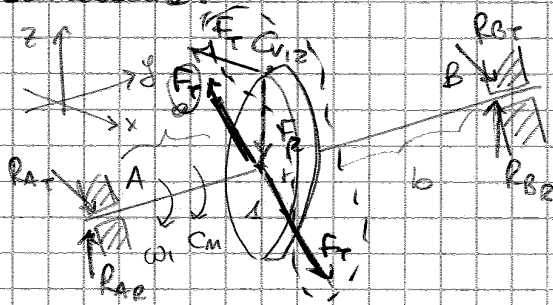
$$m = \frac{2\pi r_1}{z_1 \pi} = \frac{2r_1}{z_1}$$

$$O_1 H_1 C_{1,2} = r_b = r_1 \cos d$$

$\hookrightarrow$  legame fra raggi base e raggi primitivi

$$C_m = F_z r_1 \cos \alpha = F_z r_1$$

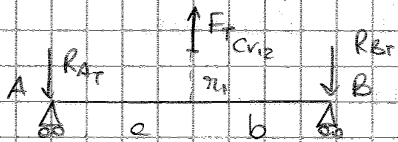
Lo caratteristico delle ruote esterne e' quello di avere un cambiamento di velocità.



$F_r$  = componente tangenziale  
 $F_z$  = componente radiale

$R$  (reazioni vincolari)

Analizziamo il piano xy (vista dall'alto):



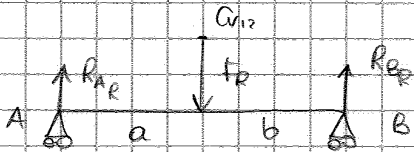
$$A) F_r(a) - R_{Bx}(a+b) = 0$$

$$B) R_{Ax}(a+b) - F_r b = 0$$

Riparto sul disegno in 3D  $R_{Ax}$  e  $R_{Bx}$

I supporti non hanno componenti tangenziali, ma solo radiali! (per questo abbiamo semplificato con dei cordoli)

Analizziamo il piano zy:



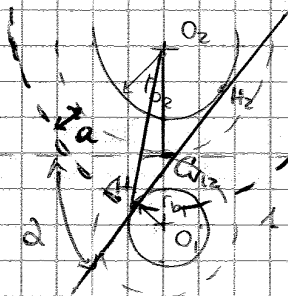
$$A) -F_r(a) + R_{Bz}(a+b) = 0$$

$$B) F_r(b) - R_{Az}(a+b) = 0$$

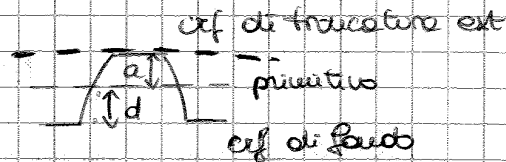
Riparto i contributi radiali dovuti ai supporti.

- La ruota motrice di solito e' sempre la più piccola
- Il numero di denti si approssima sempre all'intero superiore.

### RUOTE CILINDRICHE DENTI DIRTI : MINIMO N° DENTI



cf di troncatura ext



$$\frac{O_2 C_{1,2} H_1}{O_2 H_1} = a \text{ (addendum)}$$

$$O_2 H_1 = r_2 + u$$

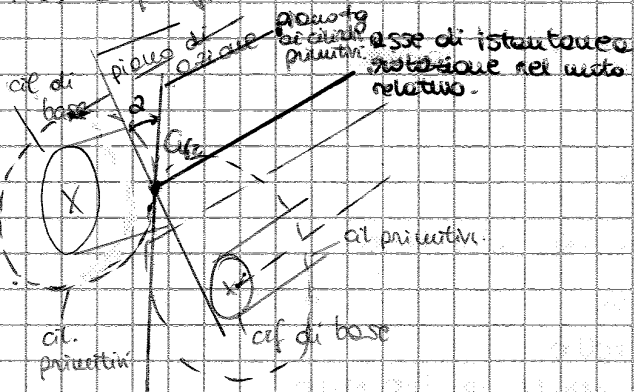
$$O_2 C_{1,2} = r_2$$

$$\frac{H_1 C_{1,2} O_1}{H_1 C_{1,2}} = r_1 = \frac{C_{1,2} O_1}{\sin \alpha}$$

a) Sezioni con piano  $\perp$  asse rotaz.: otteno profili ed evolvente di cilindro

b) Sezioni con cilindri coassiali e quello di base: otteno le eliche del dente.

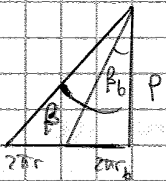
a) + b) Superficie del dente ed elicoidi



Nel piano di azione e' scambiato lo  $F_{cor}$  del dente

$\beta_b$  = angolo elica sul cilindro di base

$\beta$  = angolo elica sul cilindro primitivo.

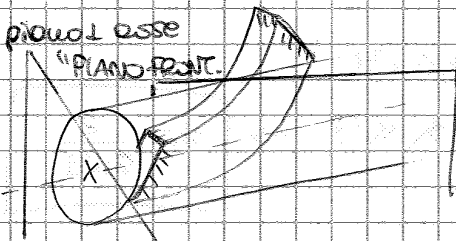


$$2\pi r_b = p \cdot \tan \beta_b$$

$$2\pi r = p \cdot \tan \beta$$

$$r_b = r \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{2\pi r_b}{2\pi r} \cdot \frac{p \cdot \cos \alpha}{p} = \frac{p \cdot \tan \beta_b}{p \cdot \tan \beta} \rightarrow \tan \beta_b = \tan \beta \cdot \cos \alpha$$



piano  $\perp$  dente = PIANO NORMALE

$$p_n = p \cdot \cos \beta$$

$$u_n = u \cdot \cos \beta$$

$$\tan \alpha_n = \tan \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\begin{cases} F_A r_1 = R_A a (a+b) \\ |R_A a| = |R_B a| \end{cases}$$

$$|R_A a| = |R_B a| = \frac{F_A r_1}{(a+b)}$$

A = supporto RADIALE-ASSIALE

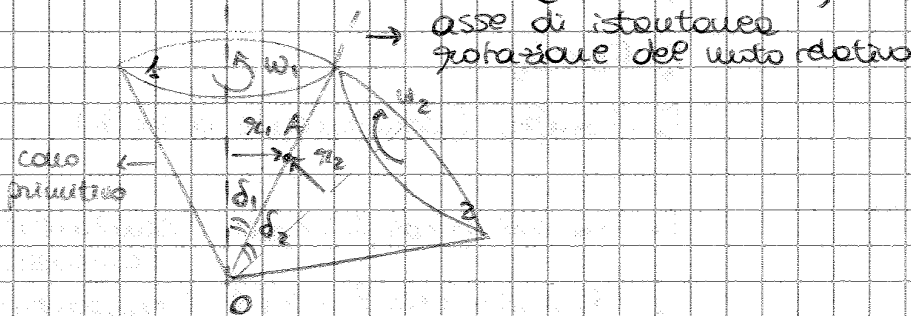
B = supporto SOLO RADIALE

ESAME: → di sicuro in es. sugli equilibri

- es. numerici
- dom. teoria (PFC, n° denti,  $\nu_v$ , ...)

### RUOTE CONICHE: (denti diritti)

16/05/2012

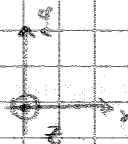
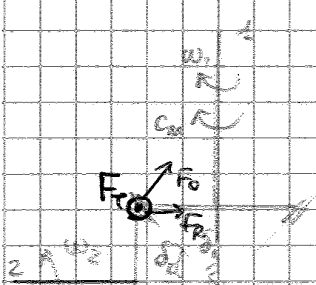


Rapporto di trasmissione:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad u = \frac{z_2}{z_1}$$

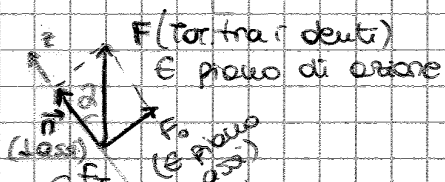
$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}$$

FORZE SCAMBIATE:



$F_r$  = vettore che esce

$$C_M = F_r \cdot r_1$$



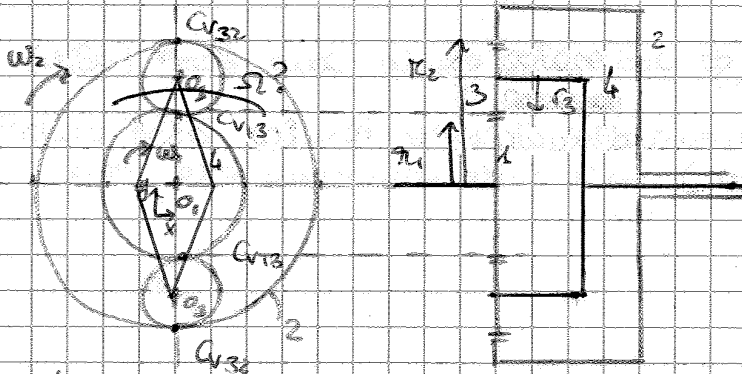
componente tangenziale di  $F$  perché ortogonale a zeta

2) Se  $C_{v_{ij}}$  e' esterno all'intervallo  $0,0_f \Rightarrow$  RUOTE INTERNE  
 ( $\omega$  concordi)  
 ( $i_f > 0$ )

- 1-2  $\Rightarrow$  ESTERNE
- 3-4  $\Rightarrow$  ESTERNE
- 5-6  $\Rightarrow$  ESTERNE
- 7-8  $\Rightarrow$  INTERNE

$$i_{1,8} = \frac{\omega_1}{\omega_8} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \left(\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) \left(\frac{\omega_5}{\omega_6}\right) \left(\frac{\omega_7}{\omega_8}\right) = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) \left(-\frac{z_6}{z_5}\right) \left(\frac{z_8}{z_7}\right) = -\frac{z_2 z_4 z_6 z_8}{z_1 z_3 z_5 z_7}$$

**ROTISMI EPICICLOIDALI:**



Per determinare n° denti:

$$r_2 = r_1 + 2r_3$$

$$z_2 = z_1 + 2z_3$$

$$\omega = \frac{z_1}{z_2}$$

- 1: solare
- 2: corona
- 3: planetari o satelliti
- 4: portaplanetario o portatreno (braccio)

Calcolo rapporto di trasmissione:

$$i_{1,4} = \frac{\omega_1}{\Omega} \rightarrow \text{calcolo come rapporto di velocità}$$

(se il portatreno non e' un braccio ma una ruota.)

Prendo un sistema di riferimento solidale con il portatreno:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = \left(\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_3 - \Omega}\right) \left(\frac{\omega_3 - \Omega}{\omega_2 - \Omega}\right)$$

$\rightarrow$  FORMULA DI WILLIS

$\Downarrow$   
 prendo ORDINARIO di ROTISMO

velocita' relative al portatreno!

$$i_{1,2} = \left(-\frac{z_3}{z_1}\right) \left(\frac{z_2}{z_3}\right) = -\frac{z_2}{z_1}$$

$\rightarrow$  le velocità sono discordi!

$$= \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = -\frac{z_2}{z_1}$$



$$\omega_1 z_1 - \Omega z_1 = -\omega_2 z_2 + \Omega z_2$$

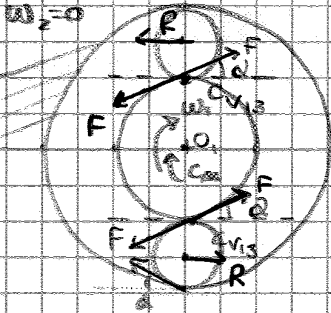
$$\Omega = \frac{\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2}{z_1 + z_2}$$



$$m_{ind} \cong 1 \Rightarrow C_r = C_{ind}$$



calcolo  $C_r$  delle F scambiate nel riduttore ( $\omega_2 = 0$ )



$$O_1 \downarrow + C_m = 2F \cos \alpha r_1$$

$$2F \cos \alpha = \frac{C_m}{r_1}$$

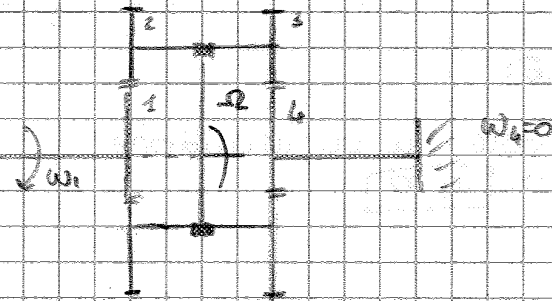
Restano solo le componenti tangenziali  $\Rightarrow 2F \cos \alpha = \frac{C_m}{r_1} = R$

$C_r = 2R(r_1 + r_3) \rightarrow$  coppia resistente sul portatreno

$$\begin{cases} r_2 = r_1 + 2r_3 \\ r_3 = \frac{r_2 - r_1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R \left[ \frac{r_1 + r_2}{r_1} \right] = \frac{C_m}{r_1} [r_1 + r_2] = C_m \left[ \frac{r_1 + r_2}{r_1} \right] = C_{ind}$$

### RIDUTTORE EPICICLOIDALE MULTIPLIO:



Tutte Ruote ESTERNE

- 1-4: solari
- 2-3: satelliti
- 5: portatreno

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4$$

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4$$

$$i_{1,5} = i_{ind} = \frac{\omega_1}{\omega_5}$$

$$i_{1,6} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_5 - \omega_2} = \left( \frac{-z_2}{z_1} \right) \left( \frac{-z_4}{z_3} \right)$$

portatreno

$$\omega_1 z_1 z_3 - \omega_2 z_1 z_3 = -\omega_2 (z_2 z_4)$$

$$\omega_1 z_1 z_3 = \omega_2 [z_2 z_4 - z_1 z_3]$$

$$i_{ind} = i_{1,5} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2 z_4 - z_1 z_3}{z_1 z_3} = 1 - i_{1,6}$$

$$\omega_{orto} = \frac{v_1}{R + a/2} = \frac{v}{R} = \frac{v_2}{R - a/2}$$

$$v_1 = \frac{v}{R} (R + a/2) = \omega_1 r$$

$$v_2 = \frac{v}{R} (R - a/2) = \omega_2 r$$

$$\omega_1 = \frac{\frac{v}{R} (R + a/2)}{r}$$

$$\omega_2 = \frac{\frac{v}{R} (R - a/2)}{r}$$

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\frac{v}{2R} (R + a/2) + \frac{v}{2R} (R - a/2)}{2r} = \frac{2v}{4r} = \frac{v}{r}$$

**PARTITORE DI COPPIA:**

$$\begin{cases} \Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ C_1 + C_2 + C_{ptreno} = 0 & \text{eq. coppie} \\ C_1 \omega_1 + C_2 \omega_2 + C \Omega = 0 & \text{eq. potenze} \end{cases}$$

$$C = -C_1 - C_2$$

$$C_1 \omega_1 + C_2 \omega_2 - C_1 \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) - C_2 \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) = 0$$

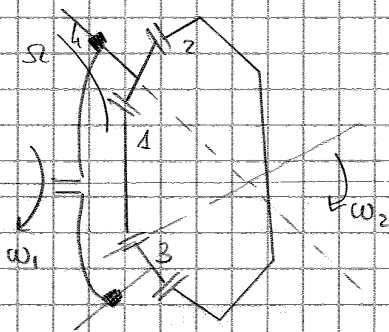
$$C_1 \omega_1 + C_2 \omega_2 - \frac{C_1 \omega_1}{2} - \frac{C_1 \omega_2}{2} - \frac{C_2 \omega_1}{2} - \frac{C_2 \omega_2}{2} = 0$$

$$\frac{C_1 \omega_1}{2} + \frac{C_2 \omega_2}{2} - \frac{C_1 \omega_2}{2} - \frac{C_2 \omega_1}{2} = 0$$

$$C_1 (\omega_1 - \omega_2) - C_2 (\omega_1 - \omega_2) = 0$$

$$\boxed{C_1 = C_2 = \frac{C}{2}} = F_{tg} \cdot r_1 = F_{tg} \cdot r_2 \quad r_1 = r_2$$

**DIFFERENZIALE ASIMMETRICO:**



1, 2 = solari ( $r_1 \neq r_2$ ) ( $z_1 \neq z_2$ )

3 = satelliti o planetari

4 = portafreno

$$i_{12} = \frac{\omega_1 r_1}{\omega_2 r_2} = -\frac{z_2}{z_1} \Rightarrow \Omega = \frac{\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2}{z_1 + z_2}$$

$$C = -C_1 - C_2$$

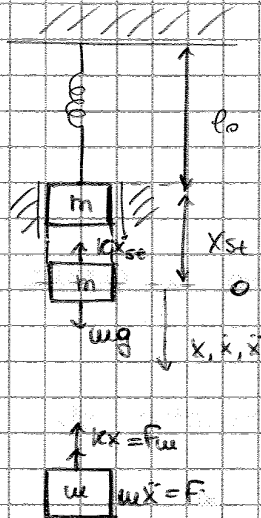
$$C \omega_1 + C_2 \omega_2 - C_1 \left[ \frac{\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2}{z_1 + z_2} \right] - C_2 \left[ \frac{\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2}{z_1 + z_2} \right] = 0$$

$$C_1 \omega_1 + C_2 \omega_2 - \frac{C_1 \omega_1 z_1}{z_1 + z_2} - \frac{C_1 \omega_2 z_2}{z_1 + z_2} - \frac{C_2 \omega_1 z_1}{z_1 + z_2} - \frac{C_2 \omega_2 z_2}{z_1 + z_2} = 0$$

# VIBRAZIONI:

- 1) 1 GdL
- 2) Sistemi a parametri concentrati
- 3) LINEARI (piccole oscillazioni)
- 4) LIBERE o FORZATE

## SISTEMA A MASSA-MOLLA:



$k \Rightarrow \left[ \frac{F}{\Delta x} \right] \Rightarrow$  rigidità della molla

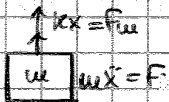
$$F_k = -k \Delta x$$

$l_0 =$  lunghezza libera della molla

$m =$  massa [kg]

$$x_{st} = \frac{mg}{k} \quad (\text{assetto})$$

$$\uparrow \quad kx_{st} = mg$$



$$\uparrow \quad m\ddot{x} + kx = 0$$

① equazione STANDARD

$$\uparrow \quad \ddot{x} + \left( \frac{k}{m} \right) x = 0$$

② equazione CANONICA

$$\uparrow \quad \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

③ equazione GENERALIZZATA

$$\text{② ③} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [\text{rad/s}]$$

↓  
 pulsazione naturale del sistema non smorzato

?  $x(t)$

$$x(t) \rightarrow e^{\lambda t}$$

$$\text{③} \quad \lambda^2 e^{\lambda t} + (\omega_n^2) e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + \omega_n^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_n$$

$$x(t) = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t} = \underbrace{a}_{+i\omega_n t} e^{+i\omega_n t} + \underbrace{b}_{-i\omega_n t} e^{-i\omega_n t}$$

Costanti dipendenti dalle condizioni iniziali

## Formule di Eulero:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$$

$$x(t) = a [\cos \omega t + i \sin \omega t] + b [\cos \omega t - i \sin \omega t]$$

$$1 \ddot{x} + \left(\frac{\beta}{m}\right) \dot{x} + \left(\frac{k}{m}\right) x = 0 \quad (2)$$

$$1 \ddot{x} + (2\zeta\omega_n) \dot{x} + (\omega_n^2) x = 0 \quad (3)$$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  [rad/s] pulsazione naturale del sistema non smorzato

$$\frac{\beta}{m} = 2\zeta\omega_n$$

$\zeta = \frac{\beta}{2m\omega_n}$  fattore di smorzamento

$\omega_s = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$  [rad/s] pulsazione naturale del sistema smorzato

- $\zeta > 1 \Rightarrow$  SIST. SOVRASMOZZATO (no oscill.)
- $\zeta < 1 \Rightarrow$  SIST. SOTTO-SMOZZATO (oscillazione libera smorzata)
- $\zeta = 1 \Rightarrow$  SIST. con smorzamento critico (no oscill.)

$$x(t) \Rightarrow e^{\lambda t} \Rightarrow (3)$$

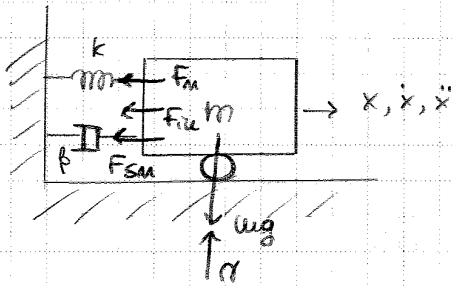
$$1^2 e^{\lambda t} + (2\zeta\omega_n) \lambda e^{\lambda t} + (\omega_n^2) e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + (2\zeta\omega_n) \lambda + (\omega_n^2) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$x(t) = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t} = a e^{[-\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}] t} + b e^{[-\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}] t}$$

30/05/2012



$$\leftarrow F_{iu} + F_{sm} + F_m = 0$$

$$1) m \ddot{x} + \beta \dot{x} + kx = 0$$

$$2) 1 \ddot{x} + \left(\frac{\beta}{m}\right) \dot{x} + \left(\frac{k}{m}\right) x = 0$$

$$3) 1 \ddot{x} + (2\zeta\omega_n) \dot{x} + (\omega_n^2) x = 0$$

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + (2\zeta\omega_n) \lambda + \omega_n^2 = 0$$

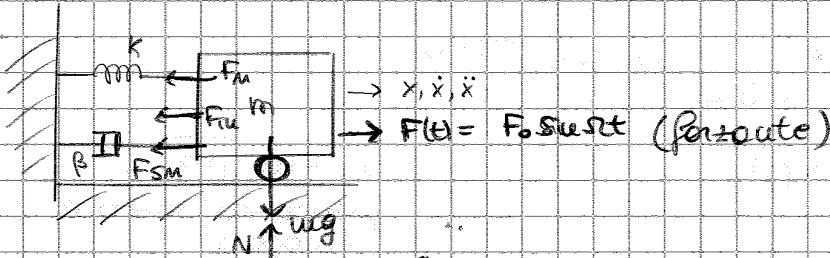
$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- $\zeta > 1$   $\lambda_{1,2}$  Re distinte 1)
- $\zeta < 1$   $\lambda_{1,2}$  C coniugati 2)
- $\zeta = 1$   $\lambda_{1,2}$  Re coincidenti 3)

$$1) x(t) = a e^{(-\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}) t} + b e^{(-\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}) t}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

### OSCILLAZIONI FORZATE:

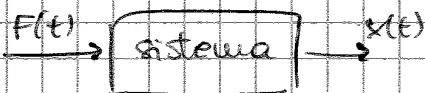


In questo caso la forzante e' di tipo armonico:

$$F(t) = F_0 \sin pt$$

$$x_p(t) = X_0 \sin(pt - \varphi) \quad (\text{risposta a regime})$$

- $X_0$  = ampiezza di oscillazione a regime
- $\varphi$  = sfasamento dell'oscillazione a regime



$$F_{in} + F_{SM} + F_m = F_0 \sin pt$$

$$1) \quad m \ddot{x} + \beta \dot{x} + kx = F_0 \sin pt$$

$$2) \quad \ddot{x} + \left(\frac{\beta}{m}\right) \dot{x} + \left(\frac{k}{m}\right) x = \frac{F_0}{m} \sin pt$$

$$3) \quad \ddot{x} + (2z\omega_n) \dot{x} + (\omega_n^2) x = \frac{F_0}{m} \sin pt$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \leftrightarrow \quad \omega \quad \rightarrow \text{pulsazione della forzante}$$

$$z = \frac{\beta}{2\omega_n m}$$

$$x_p(t) = X_0 \sin(pt - \varphi)$$

M.V.R. (metodo vettori rotanti)

### Soluzioni per oscillazione forzata:

- Trasformata di Laplace
- Metodo del bilanciamento armonico
- Metodo dei vettori rotanti.



Il metodo dei vettori rotanti puo' essere applicato se:

- il sistema e' lineare
- la soluzione e' a regime
- la forzante e' armonica

$$x_{tot} = x_g(t) + x_p(t)$$

$\rightarrow$  dipende dalla forzante  
 $\rightarrow$  particolare  
 $\rightarrow$  generale

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_g(t) = 0$$

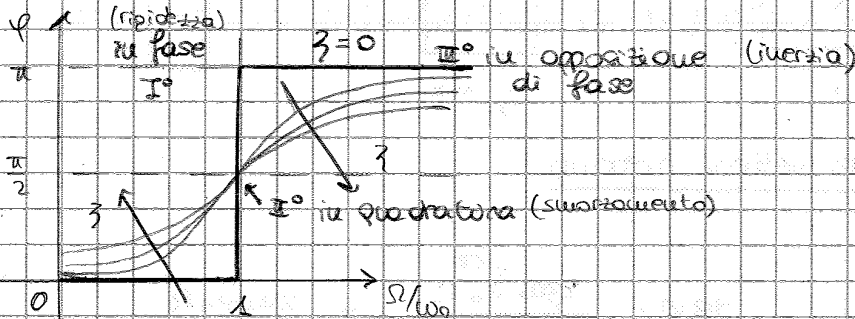
TRANSITORIO (si estingue nel tempo)

$\Omega$  = pulsazione della forzante

$\omega_n$  = pulsazione naturale del sistema non smorzato

$\frac{\Omega}{\omega_n} = 1 \Rightarrow$  FENOMENO DELLA RISONANZA

grande amplificazione dell'ampiezza di oscillazione



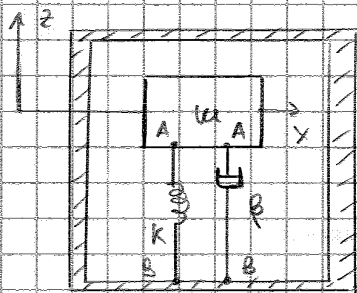
$\frac{\Omega}{\omega_n} \rightarrow 0 \quad \text{tg } \varphi \rightarrow 0 \quad \varphi \rightarrow 0$

$\frac{\Omega}{\omega_n} \rightarrow 1 \quad \text{tg } \varphi \rightarrow \infty \quad \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$\frac{\Omega}{\omega_n} \rightarrow +\infty \quad \text{tg } \varphi \rightarrow 0^- \quad \varphi \rightarrow \pi$

Diagrammi  $\Rightarrow$  risposte in frequenza di un'oscillazione forzata con forzante di ampiezza costante ( $F_0 = \text{cost}$ )

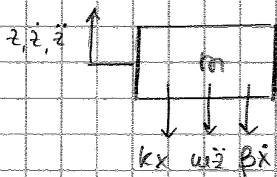
OSCILLAZIONI FORZATE CON FORZANTE DI AMPIEZZA NON COSTANTE:



z = assoluta  
x = relativa  
y = assoluta

$z = x + y$

$g(t) = y_0 \sin(\omega t)$



$m \ddot{z} + \beta \dot{x} + kx = 0$

$m (\ddot{y} + \ddot{x}) + \beta \dot{x} + kx = 0$

$m \ddot{x} + \beta \dot{x} + kx = (m \ddot{y}) \rightarrow$  forzante che nasce dentro la forza d'inerzia  
 $m y_0 \omega^2 \sin \omega t$

forzante che nasce dentro la forza d'inerzia

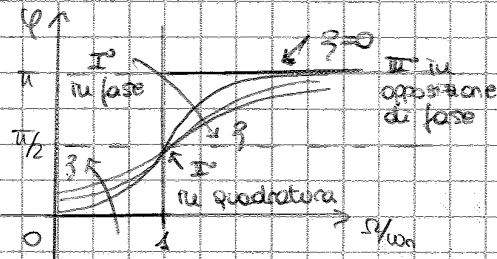
$m \ddot{z} + \beta (\dot{z} - \dot{y}) + k(z - y) = 0$

$m \ddot{z} + \beta \dot{z} + kz = (\beta \dot{y} + ky)$

La risultante e' l'ingresso del sistema, mentre l'uscita del sistema e' data dal primo lettore a unita' ( $\omega_0^2 x_0$ )

→ siamo sempre in ritardo di fase!

$$\tan \varphi = \frac{CD \approx AB}{OD - AC} = \frac{23 \Omega / \omega_0}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2} \cdot \frac{x_0}{x_0}$$



La fase non viene intaccata dal fatto che l'ampiezza non e' costante!

$\Delta OAB$ :  $AO^2 = AB^2 + OB^2$  (teorema di Pitagora)

$$AO^2 = OD^2 + (CD - AC)^2 \Rightarrow \left[ y_0 \Omega^2 \right]^2 = \left[ 23 \omega_0 \Omega x_0 \right]^2 + \left[ \omega_0^2 x_0 - \Omega^2 x_0 \right]^2$$

$$y_0 \Omega^2 = x_0 \sqrt{(23 \omega_0 \Omega)^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}$$

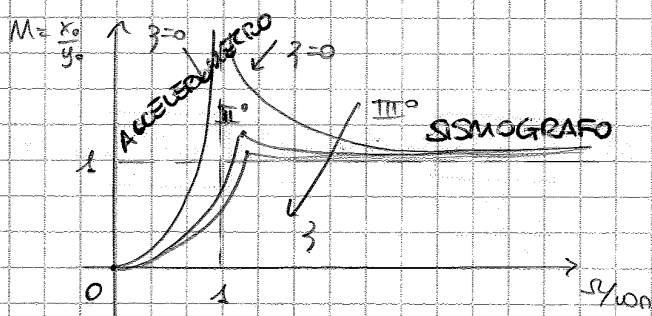
M = fattore di amplificazione

$$M = \frac{x_0}{y_0} = \frac{\Omega^2}{\sqrt{(23 \omega_0 \Omega)^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}}$$

Raccolgo  $\sqrt{(\omega_0^2)}$ :

$$M = \frac{x_0}{y_0} = \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left(23 \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2}}$$

- I°:  $\frac{\Omega}{\omega_0} \rightarrow 0$       $M \rightarrow 0$
- II°:  $\frac{\Omega}{\omega_0} \rightarrow 1$       $M \rightarrow \frac{1}{23}$
- III°:  $\frac{\Omega}{\omega_0} \rightarrow \infty$       $M \rightarrow \frac{(\frac{\Omega}{\omega_0})^2}{(\frac{\Omega}{\omega_0})^2} \rightarrow 1$



Il grafico del fattore di amplificazione, in questo caso, parte da 0!

$$I_a \ddot{\theta} + (u_0 G a^2) \dot{\theta} + \beta b^2 \theta + k a^2 \theta = F_0 a \sin \omega t$$

$$1) [I_a + u_0 G a^2] \ddot{\theta} + (\beta b^2) \dot{\theta} + (k a^2) \theta = F_0 a \sin \omega t$$

$$2) 1 \ddot{\theta} + \left[ \frac{\beta b^2}{I_a + u_0 G a^2} \right] \dot{\theta} + \left[ \frac{k a^2}{I_a + u_0 G a^2} \right] \theta = \frac{F_0 a}{I_a + u_0 G a^2} \sin \omega t$$

$$3) 1 \ddot{\theta} + (2 \zeta \omega_n) \dot{\theta} + (\omega_n)^2 \theta = \frac{F_0 a}{I_a + u_0 G a^2} \sin \omega t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k a^2}{I_a + u_0 G a^2}} = 12,10 \text{ rad/s} \quad \zeta = \frac{\beta b^2}{2 \omega_n [I_a + u_0 G a^2]} = 0,5 < 1 \rightarrow \text{SOTTOSMORZATO}$$

$$\frac{\Omega}{\omega_n} > 1 \Rightarrow \pi^\circ \quad \varphi > 90^\circ$$

$$\Omega = 8,68 \text{ rad/s} > \omega_n$$

$$F(t) = F_0 \sin \Omega t$$

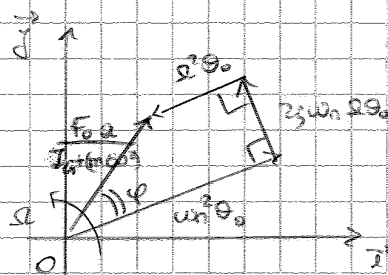
$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\Omega t - \varphi)$$

$$\dot{\theta}(t) = \theta_0 \Omega \cos(\Omega t - \varphi)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\theta_0 \Omega^2 \sin(\Omega t - \varphi)$$

$$3) -\theta_0 \Omega^2 \sin(\Omega t - \varphi) + (2 \zeta \omega_n \Omega \theta_0) \cos(\Omega t - \varphi) + (\theta_0 \omega_n^2) \sin(\Omega t - \varphi) = \frac{F_0 a}{I_a + u_0 G a^2} \sin \Omega t$$

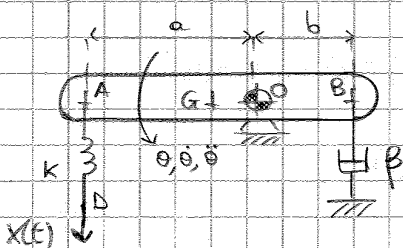
Prendo i coefficienti senza segno e costruisco il poligono dei vettori rotanti:



$$\theta_0 = 0,00137 \text{ rad}$$

$$\begin{cases} \tan \varphi' = -0,94 \Rightarrow \varphi' = -43,23^\circ \\ \frac{\Omega}{\omega_n} > 1 \Rightarrow \varphi = 180^\circ - |\varphi'| = 136,73^\circ \end{cases}$$

### Esercizio 2:

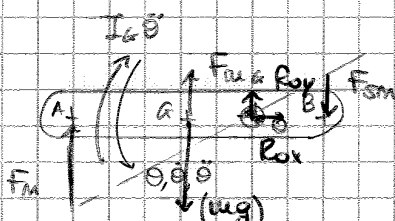


Stessi dati di prima +:

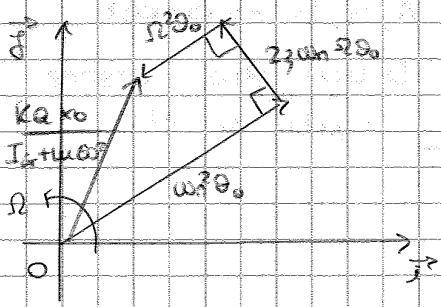
$$x_0 = 10 \text{ mm}$$

$$f = 7 \text{ Hz}$$

$$\Omega = 2\pi f = 43,98 \text{ rad/s}$$



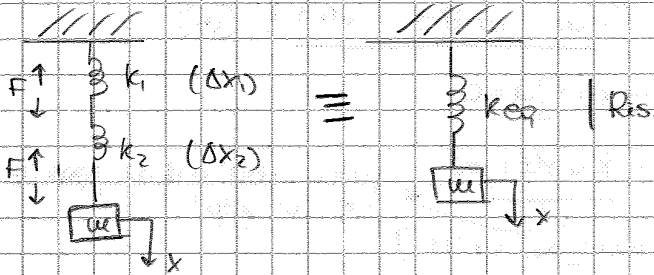




$$\begin{cases} \tan \varphi = 4,52 \Rightarrow \varphi = 77,96^\circ \\ \frac{\sigma}{\omega n} < 1 \end{cases}$$

$$\theta_0 = 0,0091 \text{ rad}$$

1) MOLLE IN SERIE :

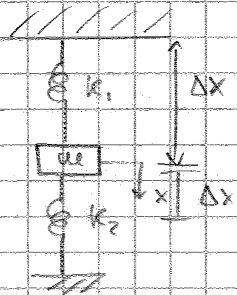


$$R_{is} = F_1 + F_2 \Rightarrow \textcircled{F}$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = F \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] = \frac{1}{k_{eq}} \cdot F$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

2) MOLLE IN PARALLELO :



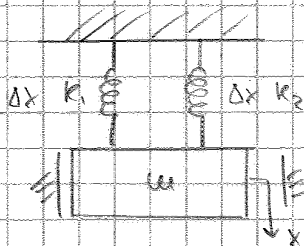
$$F_1 = k_1 \Delta x$$

$$F_2 = k_2 \Delta x$$

$$F_1 + F_2 = (k_1 + k_2) \Delta x = k_{eq} \Delta x$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

3) MOLLE IN PARALLELO :

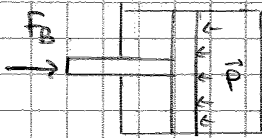


$$F_1 = k_1 \Delta x$$

$$F_2 = k_2 \Delta x$$

$$F_1 + F_2 = (k_1 + k_2) \Delta x = k_{eq} \Delta x$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

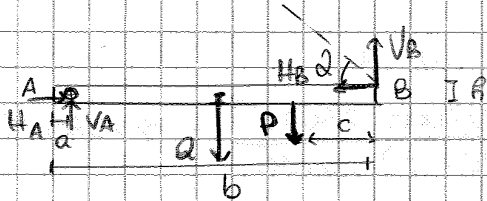


$$F_B = A_1 p_1$$

$$A_1 = \frac{\pi \phi_1^2}{4} = 0,0201 \text{ m}^2$$

$$P_1 = \frac{F_B}{A_1} = 11747,977 \text{ Pa} = 117,5 \text{ bar}$$

②  
OK



$P = 10 \text{ kN}$   
 $Q = 0,12 \text{ m}$   
 $b = 5 \text{ m}$   
 $c = 1,5 \text{ m}$   
 $R = 0,5 \text{ m}$   
 $w = 95 \text{ kg/m}$

$R_B?$   $R_A?$

$$Q = w \cdot b \cdot g = 4660 \text{ N} \quad (\text{forza peso})$$

$$\bar{A} \quad Q \left( \frac{b}{2} - a \right) + P(b - c - a) = V_B(b - a) + H_B \cdot \frac{b}{2}$$

$$\rightarrow \quad H_A = H_B$$

$$\uparrow \quad V_B + V_A = Q + P$$

$$\frac{V_B}{H_B} = \tan \alpha \quad (\text{abbiamo l'indicazione della forza applicata su B})$$

$$\bar{A} \quad Q \left( \frac{b}{2} - a \right) + P(b - c - a) = H_B(b - a) \tan \alpha + H_B \cdot \frac{b}{2}$$

$$H_B = \frac{Q \left( \frac{b}{2} - a \right) + P(b - c - a)}{(b - a) \tan \alpha + \frac{b}{2}} = 17776 \text{ N}$$

$$V_B = H_B \tan \alpha = 8238 \text{ N}$$

$$R_B = \sqrt{H_B^2 + V_B^2} = 19611 \text{ N} = T$$

$$H_A = H_B = 17776 \text{ N}$$

$$V_A = Q + P - V_B = 6372 \text{ N}$$

$$R_A = \sqrt{H_A^2 + V_A^2} = 18882 \text{ N}$$