NUMERO: 664

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Bruno

MATERIA: Fisica Tercnica
Prof. Asinari

FISICA TECNICA

NOMENCLATURA

$\underline{\nabla}(\rho\, \underbrace{\underline{v}\, \underline{v}}_{\text{prodotto}}) \in \mathbb{R}^D$ dove D : n° reale

Quantità:

- Scalari → puri: direttamente misurati
  → derivati: derivabili da grandezze nn scalari

  $a \in \mathbb{R}$
- Vettori → (si sottointendono vettori colonna)

  $\underline{a} \in \mathbb{R}^D$
- Tensori $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{D\times D}$

Prodotti:

Al crescere della dimensione della quantità aumenta il n° di modi possibili x fare i prodotti

PRODOTTO SCALARE

$$\underline{a} \odot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} b_j = \underline{b} \cdot \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^D$$

↳ è libero (si può scegliere la componente del vettore risultante)

è schiavo

la convenzione dice di prendere l'ultimo indice

Il doppio prodotto scalare o di saturazione è usato x studiare le strutture dissipative

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 48

di partenza non ne ha.

$$\underline{\nabla}\,\underline{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \in \mathbb{R}^{D\times D} \quad \text{con } \underline{a} \in \mathbb{R}^D$$

$\Rightarrow$ Se si lavora con "i" costante, ci si concentra solo su una riga del tensore risultante dal gradiente

$$\underline{\nabla}\,\underline{\nabla}\,\underline{a} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_k} \in \mathbb{R}^{D\times D\times D}$$

DIVERGENZA

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \in \mathbb{R} \qquad \underline{a} \in \mathbb{R}^D$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \in \mathbb{R}^D \quad \text{con } \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{D\times D}$$

La divergenza riduce l'ordine della grandezza, pertanto NON si può fare la divergenza di 1 scalare.

LAPLACIANO

Il laplaciano non cambia le dimensioni dell' oggetto a cui è applicato $\Rightarrow$ non servono altri indici oltre a quelli contenuti nella grandezza

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla(\ )$$

$$\nabla^2 \underline{a} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j^2}$$

OSSERVAZIONE: gli indici schiavi sono sempre presenti 2 volte nella espressione, mentre l' indice libero è

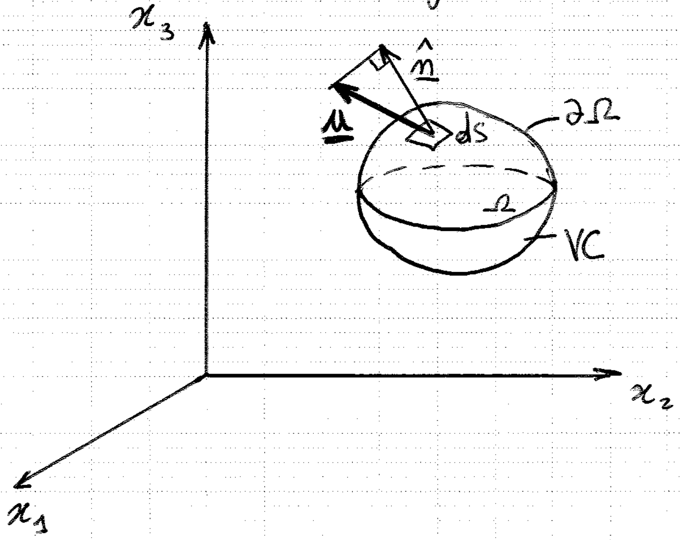
3

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 48

SISTEMA DI EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES-FOURIER (NSF)

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Ipotesi del continuo: per quanto il volume considerato sia piccolo, esso contiene sempre 1 gran n° di molecole



$\hat{\underline{n}}$ è uscente da dS

Si usa un approccio globale, integrale (cioè per tutto il VC) per arrivare ad ottenere equazioni valide a livello locale.

$$m_\Omega = \int_\Omega \rho \, dV$$

$$\frac{\partial m_\Omega}{\partial t} = -\int_{\partial\Omega} \rho \underline{u} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS$$

Ω è fisso nel tempo

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \rho \, dV = -\int_{\partial\Omega} \rho \underline{u} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS}$$

Si usa il teorema della divergenza per trasformare l'integrale di superficie in un integrale di volume.

Tutte le equazioni del sistema NSF si presentano nella forma:

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot f(\varphi) = \underbrace{S(\varphi)}_{\text{pozzo o sorgente}}}$$

- Se $S(\varphi) = 0$, la grandezza si dice conservata
- Se $S(\varphi) < 0$, si parla di "pozzo"
- Se $S(\varphi) > 0$, si parla di "sorgente"

Da un punto di vista teorico, la derivata euleriana non è molto corretta perché misura una variazione di una proprietà appartenente ad una particella in moto rispetto alla sonda, ma le particelle sono SEMPRE DIVERSE.

D'altra parte, la derivata elementare rispetto al tempo non considera la dipendenza delle proprietà anche dalla posizione oltre che dal tempo. Il vantaggio è che permette di qualificare sempre la stessa particella.

Derivata lagrangiana o materiale:
si ricorda che $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) = 0$

dove $\boxed{\underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u})} = \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho_i}{\partial x_i}$

$$= \boxed{\rho \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \rho}$$

quindi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \rho + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

7

EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\int_\Omega \rho \, dV = m_\Omega$$

$$\int_\Omega \rho \underline{u} \, dV = m_\Omega \underline{u}_\Omega$$

La derivata euleriana vale:

$$\frac{\partial (m_\Omega \underline{u}_\Omega)}{\partial t} = -\oint_{\partial\Omega} \underline{\underline{F}}(\rho \underline{u}) \cdot \underline{\hat{n}} \, dS \left[+ \int_\Omega \underline{S}(\rho \underline{u}) dV \right]$$

Si è applicato lo stesso procedimento utilizzato per l'equazione di continuità.

$(\rho \underline{u})$ = flusso di ρ, cioè della massa specifica

Ora si vuole determinare il flusso della quantità di moto, che sarà un tensore (il flusso di una grandezza aumenta sempre l'ordine della grandezza)

$\rho \rightarrow \text{flux}(\rho) = \rho \underline{u}$
$\rho \underline{u} \rightarrow \text{flux}(\rho \underline{u}) = \underline{\underline{F}} \in \mathbb{R}^{D \times D}$

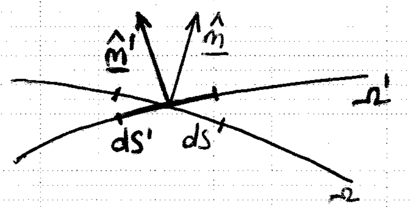
Analogamente al caso del flusso di densità, nel quale era la velocità "u" a "portare a spasso la densità", in questo caso è la velocità che "porta a spasso" la quantità di moto $\rho \underline{u}$ $\Rightarrow$ la velocità è presente 2 volte.

Il flusso può essere diviso in più componenti:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 48

Se il fluido non si muove si ha che $\underline{\underline{F}}_{stat} \cdot \underline{\hat{n}}$ è sempre // $\underline{\hat{n}}$.

La parte idrostatica del tensore degli sforzi è isotropica, perché anche se per quello stesso punto passa un altro bordo (con un altro $\underline{\hat{n}}'$) si produrrà sempre uno sforzo parallelo ad $\underline{\hat{n}}'$.



$\Rightarrow \underline{\underline{F}}_{stat} \cdot \underline{\hat{n}} \; // \; \underline{\hat{n}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{F}}_{stat} \cdot \underline{\hat{n}} = p\,\underline{\hat{n}}$

↳ pressione

$\underline{\underline{F}}_{stat} = p\,\underline{\underline{I}}$ perché $\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\hat{n}} = \underline{\hat{n}}$

Finché il fluido è fermo, con una sonda si misura la pressione e lo sforzo, che è solo quello statico.
Se $\underline{u} \neq 0$, ci si chiede come si può misurare la pressione e soprattutto come si può suddividere la pressione tra i due contributi di Π.
$\Rightarrow$ Si deve dare una definizione di p anche per $\underline{u} \neq 0$

$$\boxed{p = \frac{Tr\,(\underline{\underline{\Pi}})}{3}}$$

$Tr(\,)$ è la traccia che comporta la somma delle componenti sulla diagonale.

$$(\underline{\nabla}\,\underline{u})^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla}\,\underline{u} + (\underline{\nabla}\,\underline{u})^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ SIMMETRICA}$$

$$p = \frac{1}{3} \cdot Tr(\underline{\underline{\Pi}}) = \underbrace{\frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{F}}_{stat})}_{=p} + \frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{F}}_{dyn})$$

Pertanto $\frac{Tr}{3}(\underline{\underline{F}}_{dyn})$ deve essere nullo, ma $\frac{Tr}{3}(\underline{\nabla}\,\underline{u} + (\underline{\nabla}\,\underline{u})^T)$

non è nullo!

Bisogna dunque correggere il 2° Step.

$$Tr\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 2\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 2\,\underline{\nabla}\cdot\underline{u} \qquad (3° \text{ Step})$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F}}_{dyn} \sim \left[\underline{\nabla}\,\underline{u} + (\underline{\nabla}\,\underline{u})^T - \frac{2}{3}\underline{\nabla}\cdot\underline{u}\,\underline{\underline{I}}\right]$$

Infatti, $Tr(\underline{\nabla}\cdot\underline{u}\,\underline{\underline{I}}) = 3\,\underline{\nabla}\cdot\underline{u} \Rightarrow \underline{\underline{F}}_{dyn}$ è a traccia nulla

ν = viscosità cinematica $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

↳ è un coefficiente di trasporto della quantità di moto

Spesso si usa $\rho\nu = \mu$ = viscosità dinamica $\left[\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{m^2}{s}\right] = \left[\frac{kg}{ms}\right]$

13

SISTEMA N-S-F $\begin{cases} \left.\begin{array}{l}\text{equazione della massa}\\ \text{equazione della q.d.m.}\end{array}\right\} \text{Navier-Stokes} \\ \text{equazione dell'energia} \rightarrow \text{Fourier} \end{cases}$

EQUAZIONE DELL' ENERGIA

Per equazione dell' energia si intende l'equazione dell' energia totale, perché questa è l'unica grandezza energetica che si conserva.

GRANDEZZA CONSERVATA: grandezza tale che la sua equazione scritta in forma standard non presenti termini ~~pozzo~~ o sorgente.

EQUAZIONE IN FORMA STANDARD: equazione in cui compaiono solo la derivata euleriana e la divergenza del flusso

- L'equazione di continuità non conteneva termini sorgente o pozzo $\Rightarrow$ la massa è una quantità conservata.
- L'equazione della quantità di moto, invece, contiene il termine "$\rho \underline{a}$" $\Rightarrow$ la quantità di moto è conservata solo se $\underline{a} = 0$.

L'equazione dell' energia totale non contiene termini sorgenti, in quanto nessun campo esterno può creare energia totale (I PTD)

$\left[\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{J}{kg} \cdot \frac{m}{s}\right] = \left[\frac{W}{m^2}\right]$ → è una potenza specifica (moltiplicata per dS darà una potenza)

Per quanto riguarda il termine meccanico:

$\boxed{\underline{f}_{mecc} = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{u}}$ ⟶ si usa il prodotto scalare per ottenere anche a destra un vettore

$\left[\frac{W}{m^2}\right]$ $\quad$ $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

Il termine termico si può esprimere in 2 modi:

$\boxed{\underline{f}_{term} = \underline{q}_\alpha = -\lambda \underline{\nabla} T = -\rho c_p \alpha \underline{\nabla} T}$

$\underline{q}_\alpha$: vettore flusso termico

$-\lambda \underline{\nabla} T$: legge fenomenologica di Fourier

λ: conducibilità termica $\left[\frac{W}{mK}\right]$

α: diffusività termica → $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} = \left[\frac{m^2}{s}\right]$

Analogia di Reynolds: analogia tra il trasporto dell' e_t e della q.d.m.; infatti α è un coefficiente di trasporto come lo era la viscosità cinematica per la q.d.m. (essi si misurano entrambi in $\left[\frac{m^2}{s}\right]$)

$$\underline{f}_{mecc} = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{u} = p \underline{\underline{I}} \cdot \underline{u} + \underline{\underline{F}}_{dyn} \cdot \underline{u}$$

Sostituendo si ha:

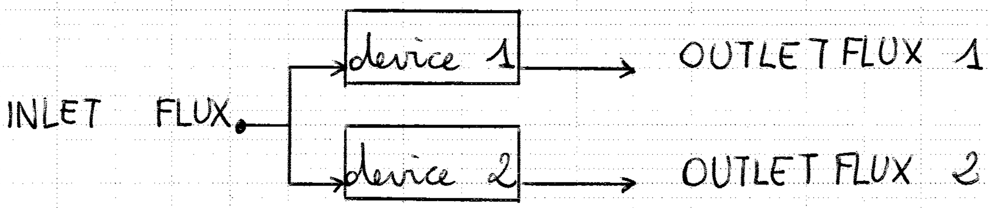
$$\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho e_t \underline{u} + p \underline{u}) = \underline{\nabla} \cdot (-\underline{q}_\alpha + \underline{\underline{\Pi}}_\nu \cdot \underline{u})$$

$\underline{q}_\alpha$ e $\underline{\underline{\Pi}}_\nu \cdot \underline{u}$ dipendono entrambi da 2 coefficienti

Quando il fenomeno di trasporto delle particelle è evidente (ad esempio nei "granular flows"), le 3 equazioni si scrivono tutte in forma lagrangiana.

NB: $e_k + e_i$ = energia interna di stagnazione

GRANDEZZE NON CONSERVATIVE



Ai fini delle grandezze conservate, tutte le macchine fanno la stessa cosa, quindi non possiamo distinguerle l'una dall'altra usando solo le grandezze conservate, perché il flusso è lo stesso.

Si introducono quindi le grandezze non conservate.

L'obiettivo è quello di migliorare la non conservazione di queste grandezze per migliorare le prestazioni della macchina.

Moltiplicando scalarmente per $\underline{u}$ l'equazione della q.d.m., si ha:

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \cdot \underline{u} + (\rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) \cdot \underline{u} = -(\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u} + \rho \underline{a} \cdot \underline{u}$$

dove $\underline{\underline{\Pi}} = p \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Pi}}_\nu$

Ora si vuole cercare di ridurre il termine non conservativo:

$$\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j} u_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\pi_{ij} u_i\right) - \pi_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\pi_{ji}^T u_i\right) +$$

$$- \underline{\underline{\pi}} : \underline{\nabla}\,\underline{u} =$$

$$= \underline{\nabla} \cdot \left(\underline{\underline{\pi}} \cdot \underline{u}\right) - \underline{\underline{\pi}} : \underline{\nabla}\,\underline{u}$$ (perché $\underline{\underline{\pi}}$ è simmetrica)

Se φ è una generica variabile:

$$\rho\frac{D\varphi}{Dt} = \rho\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho\underline{u}\cdot\underline{\nabla}\varphi + \varphi\frac{\partial \rho}{\partial t} + \varphi\underline{\nabla}\cdot\left(\rho\underline{u}\right)$$

$$= \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot\left(\rho\varphi\underline{u}\right)$$

Considerando $\varphi = e_m$:

$$\boxed{\frac{\partial(e_m\rho)}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot\left(\rho e_m\underline{u} + \underline{\underline{\pi}}\cdot\underline{u}\right) = \underbrace{\underline{\underline{\pi}} : \underline{\nabla}\,\underline{u}}_{\text{termine irriducibile}}}$$

Per basse velocità, $\underline{\underline{\pi}} : \underline{\nabla}\,\underline{u} \leq 0 \rightarrow$ pozzo

Questa grandezza discrimina le due macchine inizialmente considerate:

$$\int_\Omega \left|\underline{\underline{\pi}} : \underline{\nabla}\,\underline{u}\right| dV \begin{cases} \text{piccolo} \Rightarrow \text{buone prestazioni} \\ \text{grande} \Rightarrow \text{basse prestazioni} \end{cases}$$

Questo termine è puntuale, pertanto esso può essere

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 48

Si vuole dimostrare che il termine non conservativo è minore di zero:

$$\boxed{\underline{\underline{\Pi}} : \underline{\nabla}\, \underline{u} \leq 0}$$

Questo vale per deflussi lenti (< 100 m/s per l'aria), cioè all'interno di un certo limite, detto LIMITE INCOMPRIMIBILE, che è legato alla velocità del suono.

<u>Onde sonore</u>: piccole perturbazioni di pressione in un mezzo.

Anche le onde sonore possono essere descritte mediante le equazioni di termomeccanica già viste.

<u>Ipotesi semplificative</u>:

1. Sia il tensore degli sforzi $\underline{\underline{\Pi}}_\nu$ (termini dovuti alla viscosità), che i termini di diffusività q_α possono essere trascurati.
   $\Rightarrow$ si ottengono quindi le equazioni di Eulero

2. Si trascura anche l'effetto della gravità

3. Si trascurano i termini non lineari

Si ottengono quindi delle equazioni semplificate, che originano dall'applicazione delle suddette semplificazioni alla 1^a e 2^a equazione del sistema N-S-F:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 48

$$\nabla^2 p = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{s=cte} \nabla^2 \rho$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial \rho}\right] = \left[\frac{N/m^2}{kg/m^3}\right] = \left[\frac{Nm}{kg}\right] = \left[\frac{m^2}{s^2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{s=cte} = c_s^2}$$ velocità del suono

L'equazione finale che si ottiene è l'EQUAZIONE DELLE ONDE:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \rho}$$

Questa è un'equazione che propaga nello spazio qualsiasi perturbazione con velocità c_s.

Dal punto di vista matematico, si tratta di un'equazione alle derivate parziali di tipo iperbolico, perché le due soluzioni variano in tutte le direzioni.

OSSERVAZIONI:

Moltissimi fenomeni (come l'acustica applicata) possono essere studiati e descritti con il sistema N-S-F.

Esistono 3 comportamenti fondamentali nelle equazioni N-S-F:

1) Comportamento avvettivo:

qualsiasi equazione viene propagata in ogni

Nelle nostre applicazioni, normalmente si hanno velocità di deflusso molto più basse.

Come distinguere i casi in cui quest' effetto va preso in considerazione da quelli in cui lo si può trascurare?

NUMERO DI MACH:

$$\boxed{M = \frac{\|u\|_{max}}{C_s}}$$

per $M < 0.2 \div 0.3$ si possono semplificare le equazioni del sistema N-S-F.

Il numero di Mach si trova in quest'intervallo per flussi incomprimilibili.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 48

EQUAZIONE DELL'ENTROPIA

N.B.: il differenziale è lagrangiano perché si stanno trattando flussi e non fluido. Inoltre si necessita di una derivata che non cambi al variare di sistemi di riferimento inerziali.

$$T\frac{Ds}{Dt} = \frac{De_i}{Dt} + p\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{D\rho}{Dt}$$

$$\rho T\frac{Ds}{Dt} = \rho\frac{De_i}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

$$\boxed{\rho T\frac{Ds}{Dt} = \underline{\underline{\Pi}}_v : \underline{\nabla}\,\underline{u} - \underline{\nabla}\cdot \underline{q}_\lambda}$$

L'entropia ha sempre un termine sorgente (positivo).

Per trattare le irreversibilità conviene lavorare sull'entropia perché:

① I termini a destra nell'equazione dell'entropia sono solo di natura diffusiva.

② I termini a destra dovrebbero essere positivi per il 2° PTD.

Per ora si è dimostrato solo che uno dei due termini ($\underline{\underline{\Pi}}_v : \underline{\nabla}\,\underline{u}$) è positivo, manca l'altro.

$$T\rho\frac{Ds}{Dt} = \underbrace{2\rho\nu\,(\underline{\nabla}^s u)^2}_{\geq 0} + \lambda\,\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}T$$

l'obiettivo diventa minimizzare la produzione di entropia, cioè minimizzare la perdita di energia meccanica e quella di energia termica.

L'ottimo di progetto consiste nel minimizzare la somma delle due funzioni di dissipazione (in quanto la somma di queste due funzioni, oltre che le due funzioni stesse, visto che sono positive, è nulla nelle macchine ideali).

Non potendo cambiare il fluido termovettore, non si può agire sui coefficienti, ma solo sui gradienti $(\underline{\nabla}^s \underline{u})$ e $(\underline{\nabla} T)$.

Ci si può chiedere se in un problema di ottimo, si deve ridurre di più $\underline{\nabla} T$ o $\underline{\nabla}^s \underline{u}$.
L'equazione ricavata fornisce i pesi dei due effetti, mediante i coefficienti.

$$q_\lambda = -\lambda \underline{\nabla} T$$

$$\rho \frac{DS}{Dt} + \underline{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{T} q_\lambda \right) = \underbrace{\frac{2\rho\nu}{T} (\underline{\nabla}^s \underline{u})^2}_{\sigma_\nu} + \underbrace{\frac{\lambda}{T^2} (\underline{\nabla} T)^2}_{\sigma_\lambda} \geq 0$$

Ricordando che:

$$\begin{cases} dS - \dfrac{\delta Q}{T} = \Sigma_{IRR} > 0 & (2° \text{ PTD}) \\ \rho \dfrac{D\varphi}{Dt} = \dfrac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \varphi \underline{u}) \end{cases}$$

di tutte le porte i-esime:

$$\sum_i \int_{\partial\Omega_i} \rho s \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS = \sum_i G_i s_i$$

Per il primo termine, si applica ancora il teorema della divergenza, usando come $\partial\Omega_j$ le parti di $\partial\Omega$ isoterme, cioè con uguale T_j: così si può portare fuori dall'integrale $\left(\frac{1}{T}\right)$

$$\sum_j \int_{\partial\Omega_j} \frac{1}{T_j} \underline{q}_2 \cdot \underline{n} \, dS = \sum_j \frac{1}{T_j} \int_{\partial\Omega_j} \underline{q}_2 \cdot \underline{n} \, dS = \sum_j \frac{\varphi_j}{T_j}$$

Ricordando i vari termini:

$$\boxed{\sum_j \frac{\varphi_j}{T_j} + \Sigma_{IRR} = \left.\frac{dS}{dt}\right|_{VC=\Omega} + \sum_i G_i s_i} \qquad \underline{2^\circ PSA}$$

Questo ragionamento si può fare anche per il 1°PTD.

$$\underline{\nabla} \cdot \left(-\underline{q}_2 + \underline{\underline{\pi}}_\nu \cdot \underline{u}\right) = \underbrace{\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t}}_{} + \underline{\nabla} \cdot \left(\rho e_t \underline{u} + \rho p v \underline{u}\right)$$

questo termine si può trattare come l'entropia

$$\boxed{\int_\Omega \rho e_t \, dV = E_t}$$

dall'equazione dell'energia totale

Tutti gli altri termini si trattano con il teorema della divergenza.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 48

EQUAZIONE DELLA CONDUZIONE

Si deve immaginare Ω come formato da 3 sotto-domini con diverse conducibilità termiche, accoppiati da condizioni al contorno opportune.

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$$

$$\underline{u}=0 \xrightarrow[\text{eq. di continuità}]{} \rho = \text{cte} \xrightarrow[\text{eq. q.d.m.}]{} p = \text{cte}$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{q}_\lambda = 0$$

con $\underline{q}_\lambda = -\lambda \underline{\nabla} T$

$\lambda \left[\frac{W}{m^2 K}\right]$ = coefficiente di conducibilità termica

Su ciascun Ω_i, $\lambda = \text{cte}$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} - \lambda \nabla^2 T = 0$$

Bisogna ricondurre l'equazione ad un'unica incognita:

$$Dh = c_p DT$$

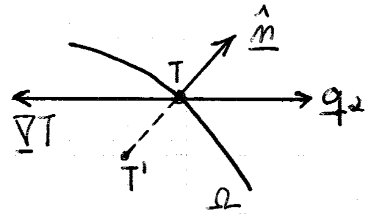
$$c_p = \text{cte} \rightarrow \frac{Dh}{Dt} = c_p \frac{DT}{Dt}$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \lambda \nabla^2 T = 0$$

$$\underline{u} = 0 \Rightarrow \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 48

Condizioni al contorno:



- DIRICHLET

$$T \in \partial\Omega_D, \qquad T = T_D(t, \underline{x})$$

- NEUMANN

$$T \in \partial\Omega_N, \qquad \frac{\partial T}{\partial n} = \underline{\hat{n}} \cdot \underline{\nabla} T = \frac{-\underline{q}_d \cdot \underline{\hat{n}}}{\lambda} = \frac{-q_n(t, \underline{x})}{\lambda}$$

- ROBIN

$$T \in \partial\Omega_R, \qquad \frac{\partial T}{\partial n} = \underline{\hat{n}} \cdot \underline{\nabla} T = \frac{-\underline{q}_d \cdot \underline{\hat{n}}}{\lambda} = \frac{h_c[T_\infty - T(t, \underline{x})]}{\lambda}$$

dove h_c = coefficiente di scambio termico convettivo $[W/m^2K]$.

Si può osservare che nelle condizioni di Neumann e di Robin interviene λ, come preannunciato, perché le condizioni al contorno devono valere sempre, non dipendono da termini capacitivi.

*Neumann :

$$\frac{\partial T}{\partial n} \rightarrow \frac{T - T'}{n - n'} = \frac{T - T'}{\Delta n} = \frac{T(\underline{x}_N) - T(\underline{x}_N - \Delta n\, \underline{\hat{n}})}{\Delta n}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{T(\underline{x}_N) - T(\underline{x}_N - \Delta n\, \underline{\hat{n}})}{\Delta n}$$

$\frac{\partial T}{\partial n} = \underline{\hat{n}} \cdot \underline{\nabla} T$ → a livello pratico conviene usare quest'espressione, in funzione del $\underline{\nabla} T$ piuttosto

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 48

esterni.

$h_c \left[\frac{W}{m^2K}\right]$ = coefficiente di scambio termico convettivo

T_∞ = temperatura di mixelamento adiabatico della sezione.

METODO ε-NTU

Questo metodo ha il vantaggio di coinvolgere grandezze note sia in fase di progetto che in fase di verifica.

Efficienza : $\varepsilon = \frac{\varphi}{\varphi_{max}}$

$\varphi_{max} = C_{min} \, (T_1 - t_1)$

$C_{min} = \min\left((G c_p)_F \, , \, (G c_p)_f\right) \qquad \left[\frac{W}{K}\right]$

$G \cdot c_p$ = capacità termica in flusso

Numero di unità di trasporto :

$NTU = \frac{U \cdot S}{C_{min}}$

$r = \frac{C_{min}}{C_{max}}$

In zona bifasica il calore scambiato è usato in maniera latente, per far evaporare il fluido, in uno scambiatore bifase $r = 0$;

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 48

A volte si vuole fare in modo che la temperatura di uscita del fluido caldo sia superiore a quella del fluido freddo ⇒ si usano gli scambiatori in equicorrente.

I diagrammi riportati si usano quasi soltanto per gli scambiatori turbo in turbo; per le altre tipologie esistono diagrammi più specifici.

LA TURBOLENZA

Il primo a studiare i moti turbolenti fu Leonardo da Vinci, il quale, dopo lunghe osservazioni, affermò:

« I vortici più piccoli sono praticamente infiniti, quelli più grandi governati dall'energia meccanica sono governati solo da altrettanti vortici e non si accorgono di quelli più piccoli, mentre quest'ultimi si accorgono dei più grandi. »

È una cascata diretta dove il grande è alimentato solo dai grandi vortici, mentre quelli più piccoli sono alimentati dal grande e da quelli più piccoli.

La cascata inversa non è ancora stata spiegata. In questo caso i vortici piccoli si uniscono

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 48

$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$

$\underline{u} = \underbrace{\underline{\overline{u}}}_{\text{medio}} + \underline{u}' \rightarrow$ differenza tra il valore istantaneo e la media (è lo scarto che ha un andamento caotico)

$$\frac{\partial(\rho\underline{u})}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\Pi}}_v) - \underline{\nabla} p$$

$$\frac{\partial(\rho\underline{u})}{\partial t} + \underline{\nabla} (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) = \mu \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla}\,\underline{u} + \underline{\nabla}\,\underline{u}^T) - \underline{\nabla} p$$

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla}\,\underline{u} + \underline{\nabla}\,\underline{u}^T) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{\underline{\nabla}\underline{u} = 0}}$$

$$= \nabla^2 \underline{u}$$

$$\frac{\partial(\rho\underline{u})}{\partial t} + \underbrace{\underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u})}_{1} = \underbrace{\mu \nabla^2 \underline{u}}_{2} - \underline{\nabla} p$$

1 Instabilizzatore
2 Il laplaciano è lo stabilizzatore, che cerca di abbassare i picchi ed alzare le valli)

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \\ \langle \underline{\nabla} \cdot (\underline{\overline{u}} + \underline{u}') \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{\overline{u}} = 0$$

facendo la differenza, si osserva che anche la fluttuazione ha divergenza nulla : $\underline{\nabla} \cdot \underline{u}' = 0$

$\langle \rho \underline{u}' \otimes \underline{u}' \rangle$

è un tensore simmetrico

$f(q_1, q_2, q_3, \dots) \rightarrow$ è il modello di turbolenza: è la ricetta dettagliata di come calcolare tutte le equazioni RANS.

PDE (q_1)
PDE (q_2)
PDE (q_3)

$$\langle \underline{u}' \otimes \underline{u}' \rangle = -2 \nu_t \nabla^S \underline{\bar{u}} = -\nu_t \left(\nabla \underline{\bar{u}} + \nabla \underline{\bar{u}}^T \right)$$

I piccoli vortici sono la fonte del rumore ed essendo gli unici stabili, tendono a dissipare.
$\underline{u}'$ assorbe gli sforzi.
L'unico tensore che dissipa è quello degli sforzi.

I gradi di libertà si riducono da 6 a 1: la viscosità aggiuntiva. Questo modello aggiunge un po' di viscosità dove serve (aumenta la viscosità lineare del fluido).