NUMERO: 663

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Bruno

MATERIA: Modelli e Metodi Numerici Riassunto
Prof. Canuto

① ~~Filo~~ ELASTICO

CASO MONODIMENSIONALE

$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$ in $(0,1)$ $x\, t>0$, cn $u(0,t) = u(1,t) = 0$ D.O.

- Formulaz° variazionale discreta mediante elementi finiti lineari su griglia equispaziata cn nodi $x_j = jh$, $0<j<N$, $h = \frac{1}{N+1}$

Pongo $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, N+1$ se $h = \frac{1}{N} \Rightarrow j = 1 \dots N$

Insieme degli el. ammissibili discreti:

$V_h = \{ v_h : [0,1] \to \mathbb{R} \mid v_h$ è continua su $[0,1]$, $v_{h|I_j} \in \mathbb{P}_1 \; \forall j = 1, N+1$ $\underbrace{e\; v_h(0) = v_h(1) = 0}\}$

qui si impongono le sole cond di D.

La semidiscretizzaz° in spazio è data da:

$$\begin{cases} u_h(t) \in V_h \text{ e soddisfa} \\ \rho \int_0^1 \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} v_h\, dx + \mu \int_0^1 \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{d v_h}{dx}\, dx = \int_0^1 f v_h\, dx \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

Qst vale x D. omogeneo.

Se D. fosse nn omogeneo $\Rightarrow u(0,t) = g_0$, $u(1,t) = g_1$ D. nn O.

$V_h(g) = \{ v_h : [0,1] \to \mathbb{R} \mid v_h$ è continua su $[0,1]$, $v_{h|I_j} \in \mathbb{P}_1 \; \forall$ $j = 1, N+1$ e t.c. $v_h(0) = g_0$, $v_h(1) = g_1 \} \Rightarrow \begin{cases} u_h(t) \in V_h(g); (g(t)) : (g_0(t), g_1(t)) \dots \\ \dots \quad \forall v_h \in V_h(0) \text{ o } V_h(0,0) \end{cases}$

In generale, le cond. di D. sn uniformi nello spazio ma nn necessariamente cti. Lo spazio delle f° test $V_h(0)$ è invece qllo def. x D. omogeneo.

- Oltre alla cond. di D., sul bordo può essere espressa la cond di N., che compare nella formulaz° variazionale, ma nn direttamente nella def di V_0. $\longrightarrow \mu \frac{\partial u}{\partial x}(L) = \psi_L$ (cond. di N)

$\Rightarrow$ si riprende il termine che viene fuori dall'$\int$ x parti $\to -\left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} v\right]_0^1$, e gli si sostituisce il termine imposto dalle cond al bordo. Cm risultato si ottiene 1 termine che che si porta nella parte dx dei termini noti: $-\psi_L v_h(L)$

- Come caso + generale possibile, si può avere 1 cond di R. che ha 1 forma del tipo: $\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \psi$. Anche qst cond. deve essere incorporata nella formulaz° variazionale del problema

$$\Rightarrow \int_{\partial N} \mu \frac{\partial u}{\partial n} v\, dS = \int_{\Gamma_N} \mu \frac{\partial u}{\partial n} v\, dS = \int_{\Gamma_N} (-\alpha u + \psi)\, dS = \underbrace{-\int_{\Gamma_N} \alpha u v\, dS}_{\text{rimane nelle incognite (a dx)}} + \underbrace{\int_{\Gamma_N} \psi v\, dS}_{\text{va nel termine noto (as}}$$

② Una volta scritta la formulaz° variazionale discreta, si passa

* Altre cond al bordo (D nn omogeneo, K, N)

• **EFL**: si introducono le f° a cappello φ_j, cn 1 cond di D nn om. in ϕ ($u(0) = g_0$) ed 1 N. in 1 ($\mu \frac{\partial u}{\partial x}(1) = \psi_1$)

In qst caso, $v_h = \sum_{j=1}^{N} v_j \varphi_j$ e $u_h = \sum_{k=1}^{N} u_k \varphi_k + g_0 \varphi_0(x) \Rightarrow$ si deve aggiungere il termine di D.

Qd si opera la sommatoria sugli integrali, si ottiene:

$$\sum_{k=1}^{N+1} u_k \int_0^1 \mu \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_j dx - g_0 \int_0^1 \mu \frac{d\varphi_0}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx + \psi_1 \varphi_j(1)$$

Nella matrice a_{jk} va incorporato l'el $\neq 0$ relativo all'intervallo I_{N+1}: $a_{N+1,N+1} = \frac{\mu_{N+1/2}}{h_{N+1}}$ (influenza di N.)

Il vett dei termini noti si modifica cm segue: $f_j = \begin{cases} f_1^* + \frac{1}{h_1} \cdot \mu_{\frac{1}{2}} g_0 \\ f_j^* \\ f_{N+1}^* + \psi_1 \end{cases}$

$f_j^* = f(x_j) \frac{h_j + h_{j+1}}{2}$

• **DF**: $u(0) = g_0 \rightarrow$ si sostituisce nell'eq che richiama $j=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} \left((\mu_{\frac{1}{3}} + \mu_{\frac{3}{2}}) u_1 - \mu_{\frac{3}{2}} u_2 \right) = f_1 + \frac{1}{h^2} g_0 \mu_{\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ <u>D nn omogeneo influisce sl sul vett termine noto alla corrispondente riga.</u>

Si passa ad analizzare N, cn l'introduz° di 1 nuova incognita: si impone 1 nodo fittizio introducendo u_{N+2} (supponendo che le incognite siano N+1) $\Rightarrow \frac{1}{h^2}\left(-\mu_{N+\frac{1}{2}} u_N + (\mu_{N+\frac{1}{2}} + \mu_{N+\frac{3}{2}}) u_{N+1} - \mu_{N+\frac{3}{2}} u_{N+2}\right) = f_{N+1}$

L'incognita u_{N+2} si elimina imponendo e sostituendo la cond di N ottenuta cn 1 rapporto incrementale centrato:

$$\mu_{N+1} \frac{u_{N+1} - u_N}{2h} = \psi_L$$

$$\Rightarrow f = \begin{cases} f_1 + \frac{1}{h} \mu_{\frac{1}{2}} g_0 & \text{da D. nnom.} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \\ \frac{1}{2} f_{N+1} + \frac{1}{h} \frac{\mu_{N+1/2}}{\mu_{N+1}} \psi_L & \text{da N} \end{cases} \qquad a_{jk} = \begin{cases} -\mu_{j-\frac{1}{2}} & k = N-1 \\ \mu_{j-\frac{1}{2}} + \mu_{j+\frac{1}{2}} & k = j \neq N \\ -\mu_{j-\frac{1}{2}} & k = j+1 \\ \mu_{N+\frac{1}{2}} & k = j = N \end{cases}$$

Cn μ = cte $\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \frac{\mu}{h^2}$ tridiag $[-1 \;\; 2; \; -1 \;\; 2 \;\; -1; \; -1 \;\; 1]$

<u>MODELLO DI RICHIAMO</u> (introduz° alla matrice di massa)

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) + \gamma u = f & \text{in } (0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

Ci si riconduce, mediante discretizzaz° al sist algebrico $\underline{\underline{A}}\underline{u} = \underline{f}$

In qst caso, però $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^{(\mu)} + \underline{\underline{A}}^{(\gamma)}$

$\underline{\underline{A}}^{(\mu)}$ (effetto di taglio) si calcola cm indicato x DF ed EF.

$$\begin{cases} 0 < r < N \rightarrow l = r,\ m = q+1 \\ r = 0 \rightarrow l = N,\ m = q \end{cases}$$

La generica notaz° x 1 nodo interno forte, diventa:

$\frac{\mu}{h^2}\left(-u_{j-N} - u_{j-1} + 4u_j - u_{j+1} - u_{j+N}\right) \Rightarrow$ la riga j-esima della matrice $\underline{\underline{A}}$ è definita da: $a_{jk} = \frac{\mu}{h^2}\begin{cases} 4 & k = j \\ -1 & k = j \pm 1 \text{ oppure } k = j \pm N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

X i nodi interni deboli, si suppone di avere 1 nodo sull'ultima riga $(x_N, y_m) \Rightarrow \frac{\mu}{h^2}\left(-u_{N,m-1} - u_{N-1,m} + 4u_{N,m} - u_{N+1,m} - u_{N,m+1}\right) = f_{Nm}$

$\rightarrow$ cond. di D. $\Rightarrow$ qst nodo deve essere eliminato xché nullo

$j = l + (m-1)N \rightarrow$
$N + (m-2)N = mN - N = j - N$
$N - 1 + (m-1)N = mN - 1 = j - 1$

l diventa N, m-N " j $\Big\} \rightarrow$
$N + (m-1)N = mN = j$
$N + 1 + (m-1)N = mN + 1 = j + 1$
$N + (mN) = mN + N = j + N$

Togliendo il termine nullo perché sul bordo, si ha:

$$\frac{\mu}{h^2}\left(-u_{j-N} - u_{j-1} + 4u_j - u_{j+N}\right) = f_j$$

La matrice $\underline{\underline{A}}$ è simmetrica e pentadiagonale. Ricordando che bisogna annullare le componenti di tale matrice corrispondenti ai valori al bordo noti, si ha che:

$$a_{jk} = \frac{\mu}{h^2}\begin{cases} 4 & k = j \\ -1 & k = j+1,\ j \neq \mu N,\ \mu = 2, N-1 \\ -1 & k = j \pm N \\ 0 & \text{altrimenti} \\ -1 & k = j-1 \end{cases}$$

Volendo si può raggruppare la matrice $\underline{\underline{A}}$ a blocchi corrispondenti a m fissati $\Rightarrow$

$$A_{mn} = \begin{cases} D = \frac{\mu}{h^2}\ \text{tridiag}\left[-1 \quad 4 \quad -1\right],\ m = n \\ C = -\frac{\mu}{h^2}\ \underline{\underline{I}} \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\underline{\underline{A}} = \text{tridiag}\left[C \quad D \quad C\right]$

Supponendo di avere 1 cond. di D. nn om., ovvero $u = g$ su $\partial\Omega$ $\Rightarrow u_{lm} = g_{lm}$ x $l \in \{0, N+1\}$ oppure $m \in \{0, N+1\}$. Qsti valori si sostituiscono in maniera opportuna nelle corrispondenti eq. x i nodi deboli, poi si porta a 2 membro tt qllo che è noto.

$\Rightarrow \underline{\underline{A}}$ è la stessa di prima, mentre cambia il vett termine noto.

Se si ha 1 cond di N, si prende in considerazione la cond sul bordo

Si può scrivere nella classica forma $\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \underline{f}$

$\underline{\underline{A}} = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\underline{u} = (u_k) \in \mathbb{R}^N$, $\underline{f} = (f_j) \in \mathbb{R}^N$

Cn $a_{jk} = \int_\Omega \mu \nabla\varphi_k \nabla\varphi_j \, dx$ e $f_j = \int_\Omega f \varphi_j \, dx$

Qst lavoro di assemblaggio si può operare sia x il singolo triangolo che x l'intera triangolaz°, x la quale si Σ i contributi $\neq$ dei vari triangoli. Si esaminano il caso del singolo triangolo: in qst caso si introduce la numeraz° locale dei nodi.

X calcolare la μ sul triangolo, se $\mu \neq$ cte x i vertici, si fa la media tra i 3 valori calcolati sugli stessi. X il vett dei termini noti, si ragiona nel modo seguente, sapendo che $\int_T g\,dx \simeq \frac{1}{3}\left(g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)\right)$

Cn $g = f\varphi_\alpha \rightarrow f_\alpha = \frac{1}{3} f(x_\alpha)\,\text{area}(T)$

qd si Σ sui triangoli, si ha: $f_j = \frac{1}{3} f(x_j) \sum_{T\in\tau(j)} \text{area}(T) = \frac{1}{3} f(x_j)\,\text{area}(\text{supp}\,\varphi$

- Altre cond al bordo: D. nn omogeneo e N.

Si supponga di rientrare nella seguente situaz°

$$\begin{cases} -\nabla(\mu\nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \Gamma_D \\ \mu \dfrac{\partial u}{\partial n} = \psi & \text{su } \Gamma_N \end{cases}$$

Si costruisce l'insieme $V(g)$ degli spostamenti ammissibili (cioè delle f° di forma)

L'insieme delle variaz° ammissibili è $V(0) \Rightarrow u \in V(g)$
$v \in V(0)$

Inoltre $\int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial u}{\partial n} v\,dx = \int_{\Gamma_D} \mu\frac{\partial u}{\partial n} v\,dx + \int_{\Gamma_N} \mu \frac{\partial u}{\partial n} v\,dx$

$$\begin{cases} u(t) \in V(g) \text{ e soddisfa} \\ \int_\Omega \mu \nabla u \nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx + \int_\Omega \psi v\,ds \quad \forall v \in V(0) \end{cases}$$

Si può passare dunque alla discretizzaz°. L'insieme degli spostamenti ammissibili discreti è fornito da:

$V_h(g) = \{ v_h \in V_h : v_h(x_j) = g(x_j) \ \forall x_j \in \Gamma_D \}$

con V_h = vett $\{\varphi_j : 1 \le j \le N_h\}$

Inoltre $V_h(0)$ = vett $\{\varphi_j : 1 \le j \le N\}$

$\Rightarrow u_h(x) = \sum_{k=1}^{N} u_k \varphi_k(x) + \sum_{k=N+1}^{N_h} g_k \varphi_k \rightarrow$ D. nn omogeneo

La formulaz° variazionale corrispondente è

$$\begin{cases} u_h(t) \in V_h(g) \text{ e soddisfa} \\ \int_\Omega \mu \nabla u_h \nabla v_h\,dx = \int_\Omega f v\,dx + \int_{\Gamma_N} \psi v_h\,ds \ \forall v_h \in V_h(0) \end{cases}$$

- Se si ha una cond. al bordo di R del tipo $\mu\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \psi$

$$B^{(T)} = \rho_T \, \text{area}(T) \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Volendo si può sommare gli el. $\forall$ riga e mettere il corrispettivo valore sulla diagonale. Nel caso monodimensionale, si ha:

$\underline{\underline{B}} = \rho h \text{ tridiag}\left[\frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6}\right]$

$\underline{\underline{\tilde{B}}} = \rho h \text{ tridiag}\left[\frac{5}{6}, 1 \dots 1, \frac{5}{6}\right]$

Con N. su entrambi gli estremi si ha:

$\underline{\underline{\tilde{B}}} = \rho h \text{ tridiag}\left[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6}; \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3}\right]$

Si può qdi passare allo studio dei problemi evolutivi.

In qst caso si impiega il metodo delle linee, cn 1 1ª semidiscretizzaz° in spazio ed 1 successiva semidiscretizzaz° in tempo, cn i metodi di avanzamento:

$$\begin{cases} u(t) \in V \text{ e soddisfa} \\ \int_\Omega \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v \, dx + \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Le f° v sn indip dal tempo

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0) = v_0 \end{cases} \quad \text{Cond. iniziali}$$

A qst pt si realizza la semidiscretizzaz° in spazio $\rightarrow$ formulaz° variazionale discreta:

$$\begin{cases} u_h(t) \in V_h \text{ e soddisfa} \\ \int_\Omega \rho \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} v_h \, dx + \int_\Omega \mu \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_\Omega f \, v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

cn $u_h(x,t) = \sum_{k=1}^{N} u_k(t) \varphi_k(x) \rightarrow$ separaz° variabili

$$\int_\Omega \rho \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} \varphi_j \, dx = \sum_{k=1}^{N} b_{jk} u_k'' \varphi_j$$

Le matrici di massa e rigidezza sn dunque qlle precedentemente indicate.

Si trova così 1 problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} \underline{\underline{B}} \, \underline{u}'' + \underline{\underline{A}} \, \underline{u} = f & 0 < t \leq T \\ \underline{u}(0) = \underline{u}_0 \\ \underline{u}'(0) = v_0 \end{cases}$$

A qst pto si procede cn la discretizzaz° in tempo di Newmark (adatto x i sist del 2° ordine)

(a) $u'' = F(\underline{u}, t) = -\underline{B}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{u} + \underline{B}^{-1} \underline{f}$

* Metodo di Eulero Implicito:

$(B+\Delta t A)u^{k+1} = Bu^k + \Delta t\, f(t_{k+1})$ 1° ordine $C = B+\Delta t A$

E' 1 metodo incondizionatamente, asintoticamente stabile

* Metodo dei trapezi (Crank Nicholson): $\widehat{g^{k+1} + g^k}$

$(B+\frac{\Delta t}{2}A)u^{k+1} = (B-\frac{\Delta t}{2}A)u^k + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_{k+1})+f(t_k)\right)$ 2° ordine $C = B+\frac{\Delta t}{2}A$

E' 1 metodo incondizionatamente, asintoticamente stabile

Si torna alle semidiscretizzaz° in spazio: qst si può fare anche mediante DFC del 2° ordine. Supponiamo di avere 1 μ = cte

$\Rightarrow \rho u'_{lm} + \frac{\mu}{h^2}\left(-u_{l,m-1} - u_{l-1,m} + 4u_{l,m} - u_{l+1,m} - u_{l,m+1}\right) = f_{lm}$

x $u_{lm} = 0$ se $l \in \{0, N+1\}$ oppure $m \in \{0, N+1\}$

$u_{lm}(0) = u_{lm,0}$

$\Rightarrow \begin{cases} \underline{B}\,\underline{u}' + \underline{A}\,\underline{u} = f \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

Poi si applica l'avanzamento in tempo:

$\begin{cases} EE: Bu^{k+1} = (B-\Delta t A)u^k + \Delta t\, f(t_k) & \Delta t < \frac{2}{\max|\lambda_i|} \\ EI: (B+\Delta t A)u^{k+1} = Bu^k + \Delta t\, f(t_{k+1}) & I.A.S. \\ CR: (B+\Delta t A)u^{k+1} = (B-\Delta t A)u^k + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_{k+1}) + f(t_k)\right) & IAS. \end{cases}$

• Modello di convez°-diffusione termica

La derivata lagrangiana è def cn $\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{a}\cdot\nabla u$ (vel.)

Lavorando su qst def si arriva all'eq. di convez°-diffusione:

$\frac{\partial u}{\partial t} + a\nabla u - \nu\Delta u = f$

n° di Peclet: $P_e = \frac{AL}{2\nu} \geq 0$ dv L: lunghezza caratteristica del dominio

A: modulo vel max

Se $\nu = 0 \Rightarrow P_e \to \infty \to$ eq. del trasporto

$P_e \leq 1 \to$ diffusione dominante

X 1ª cosa si scrive alle DF. Il termine convettivo si scrive cn rapporti incrementali centrati:

$a\cdot\nabla u \simeq a_1(x_{lm})\,\frac{u_{l+1,m} - u_{l-1,m}}{2h} + a_2(x_{lm})\,\frac{u_{l,m+1} - u_{l,m-1}}{2h}$

Semidiscretizzaz° in spazio:

$u'_{lm} + \frac{a_1(x_{lm})}{2h}\left(u_{l+1,m} - u_{l-1,m}\right) + \frac{a_2(x_{lm})}{2h}\left(u_{l,m+1} - u_{l,m-1}\right) + \frac{\nu}{h^2}\left(-u_{l,m-1} - u_{l-1,m} + 4u_{lm} - u_{l+1,m} - u_{l,m+1}\right) = f_{lm}$

Cn il metodo degli EF si ha:

$u_h(t) \in V_h$ e soddisfa

(1) $\int \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h\,dx + \int (a\cdot\nabla u_h)\,v_h\,dx + \int \nu\nabla u_h\cdot\nabla v_h\,dx = \int f v_h\,dx \quad \forall v_h \in V_h$

$\Delta x\, u_j^{n+1} = \Delta x\, u_j^n - (\Delta t\, F_{j+\frac{1}{2}}^n - \Delta t\, F_{j-\frac{1}{2}}^n) \rightarrow$ schema generale dei vol finiti

Gli schemi notevoli numerici di risoluz° sono 4:

Si def. $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $Cour = \lambda|a| \leq 1$ x la stabilità (cond. CFL)

- Metodo di Eulero in avanti/indietro (ordine (2; 1)):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\lambda a(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

- Metodo di Lax-Friendrichs (ordine (1; 1)):

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}\lambda a(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(1-\lambda a)u_{j+1}^n + \frac{1}{2}(1+\lambda a)u_{j-1}^n$$

- Metodo Upwind (ordine (1; 1)):

$u_j^{n+1} \nearrow u_j^n - \lambda a(u_j^n - u_{j-1}^n)$ $\quad a>0 \rightarrow u_j^{n+1} = (1-\lambda a)u_j^n + \lambda a\, u_{j-1}^n$

$\searrow u_j^n - \lambda a(u_{j+1}^n - u_j^n)$ $\quad a<0 \rightarrow u_j^{n+1} = (1+\lambda a)u_j^n - \lambda a\, u_{j+1}^n$

- Metodo di Lax-Wendroff — metodo del 3° ordine

$$u_j^{n+1} = \underbrace{u_j^n - \frac{1}{2}\lambda a(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}_{\text{cm E. centrato}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\lambda a)^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)}_{\text{termine aggiuntivo}}$$

$$= u_{j-1}^n\left(\frac{1}{2}\lambda a + \frac{1}{2}(\lambda a)^2\right) + u_j^n(1-(\lambda a)^2) + u_{j+1}^n\left(-\frac{1}{2}\lambda a + \frac{1}{2}(\lambda a)^2\right)$$

- Dato $T = \frac{1}{30}$, x det il + grande valore di Δt che soddisfi la cond. CFL e t.c. T sia multiplo di Δt, si deve imporre $T = N\Delta T \Rightarrow$ $\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{1}{30N} < \frac{1}{40} = \Delta t^* \rightarrow$ il + piccolo valore intero x cui accade è $N = 2$

- Posto $T = \frac{1}{4}$, calcolare l'approssimaz° delle medie di cella della sol al tempo T eseguendo 1 o + passi temporali cn $\Delta t = \Delta t_{max}$, e poi eseguire l'ultimo passo temporale cn $\Delta t \leq \Delta t_{max}$ tale da giungere al tempo desiderato T. $\Rightarrow N = \frac{T}{\Delta t} = \frac{1/4}{1/5} = \frac{5}{4} \Rightarrow 2$

$\Delta t + \Delta t_{max} = T \Rightarrow \Delta t = T - \Delta t_{max}$ x il 2° passo temporale.

- $$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{su } \Gamma_D \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{su } \Gamma_N \end{cases}$$

$V_h = \{v_h : \bar\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : v_h$ è continuo su $\bar\Omega$, $v_{h|_T} \in \mathbb{P}_1(T)\ \forall T \in \mathcal{T}, v_h = 0$ su $\Gamma_D\}$

$$\begin{cases} w_h(t) \in V_h \\ \int_\Omega \nabla w_h \cdot \nabla v_h\, dx\, dy = \lambda \int_\Omega w_h v_h\, dx\, dy \end{cases}$$

Cn $a_{27,27}w_{27} + a_{27,33}w_{33} + a_{27,36}w_{36} = \lambda(b_{27,27}w_{27} + b_{27,33}w_{33} + b_{27,36}w_{36})$

dv $b_{jj} = \frac{1}{6}\sum \rho\, area(T)$ e $b_{jk} = \frac{1}{12}\sum \rho\, area(T) = \frac{1}{12}(\rho_{T_1}|T_1| + \rho_{T_2}|T_2| + \dots)$

dv $\rho_{T_1} = \frac{1}{3}(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)$

- $$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 \text{ su } \Gamma_D, & \frac{\partial u}{\partial n} = 2 \text{ su } \Gamma_N \end{cases}$$

si incontrano $\Rightarrow$ i pti di salto coincidono si deve:

$u(x,t) = u_0(x-4t)$ e $v(x,t) = v_0(x-2t)$

$\Rightarrow \begin{cases} x^* - 4t^* = 1 \\ x^* - 2t^* = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* = 5 \\ t^* = 1 \end{cases}$

- Introdurre la discretizzaz° spaziale cn celle $V_j = (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$ cn $x_{j\pm\frac{1}{2}} = (j \pm \frac{1}{2})\Delta x$ e $\Delta x = 2 \Rightarrow V_j = [(j-\frac{1}{2})\Delta x; (j+\frac{1}{2})\Delta x]$

$V_j = [(2j-1); (2j+1)]$

$\Rightarrow V_0 = (-1;1)$ e $V_1 = (1;3) \Rightarrow u_j^0 = \begin{cases} 8 & \text{se } j \le 0 \\ 2 & \text{se } j \ge 1 \end{cases}$ $\quad v_j^0 = \begin{cases} 4 & \text{x } j \le 1 \\ 2 & \text{se } j \ge 2 \end{cases}$

- $\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

Discretizzaz° mediante $\neq$ finite nel nodo (x_e, y_m)

$\frac{1}{h^2}\left(\cancel{\mu} u_{e-1,m} - u_{e,m-1} + (2\mu+2)u_{e,m} - u_{e+1,m} \cancel{\mu} u_{e,m+1}\right) = f_{e,m}$

- Posto $T = \frac{1}{4}$, usare il metodo Upwind x calcolare l'approssimaz delle medie di cella della sol al tempo T, adottando la strategia: eseguire 1o + passi temporali cn il valore $\Delta t = \Delta t_{max}$ e poi eseguire l' ultimo passo temporale cn 1 $\Delta t \le \Delta t_{max}$ tale da giungere al tempo desiderato T.

$\Delta t = T - \Delta t_{max} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \ldots$ $\quad$ cn $T = N\Delta T \Rightarrow N = \frac{T}{\Delta t} = \frac{1/4}{\Delta t} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}$

calcolato in precedenza che rispetta CFL

(15)