NUMERO: 662 DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Boero

MATERIA: Analisi Matematica II Esercizi Svolti
Prof. Bacciotti

ESERCIZI SVOLTI E SPIEGAZIONE DETTAGLIATA

ANALISI MATEMATICA II

L'ANALISI II PER INESPERTI E NON APPASSIONATI

A cura di:
Federico Boero

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 263

INDICE:

Integrali

Serie

Sistemi di equazioni differenziali

$$\underline{J_T} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta & b\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -a\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & b\rho\cos\theta \end{pmatrix} \; -$$

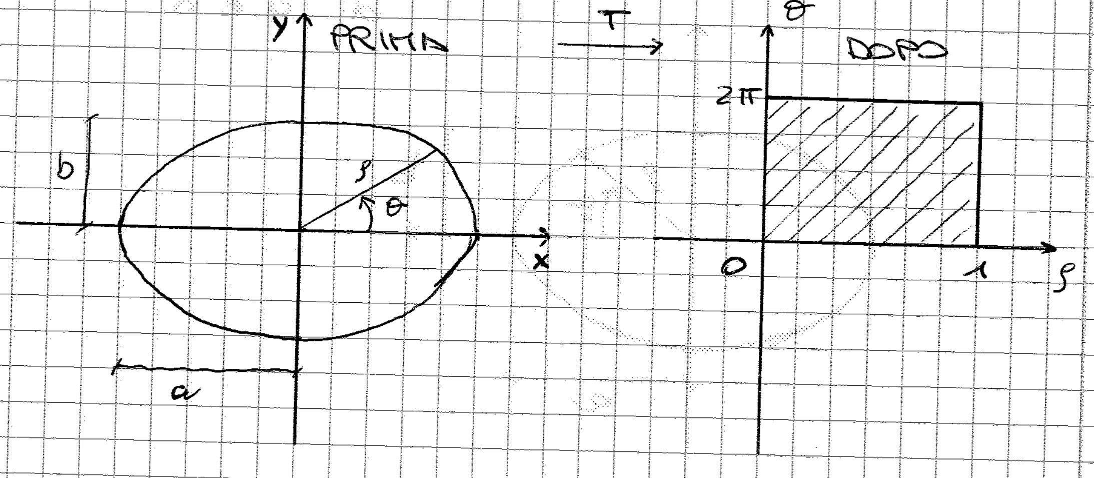
a questo punto DEVO calcolare il determinante della Jacobiana

$$\det J_T = |J_T| = (a\cos\theta \cdot b\rho\cos\theta) - (b\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot -a\rho\,\mathrm{sen}\,\theta) =$$

$$= ab\rho\cos^2\theta + ab\rho\,\mathrm{sen}^2\theta =$$

$$= ab\rho(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) = ab\rho$$

viene mi risultato così perché le coordinate sono ellittiche fossero semplicemente polari verrebbe solo ρ. La trasformazione mi ha portato nella seguente situazione di dominio:



ora calcolo l'area:

$$\text{Area} = \iint_D dx\,dy = \iint_{[0;2\pi]\times[0;1]} (\det J)\,d\rho\,d\theta = \iint_{[0;2\pi]\times[0;1]} ab\rho\,d\rho\,d\theta$$

Trasformazione con cambio coordinate

dunque ho:

$$1 - x^2 = x^2 - 1 \rightarrow -x^2 - x^2 = -1 - 1 \rightsquigarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x = \pm 1$$

ora devo trovare l'ordinata di questi punti di intersezione ed allora sostituisco le x trovate in una delle due equ in sistema

$$y = x^2 - 1 \rightsquigarrow y = 1^2 - 1 \rightsquigarrow y = 0$$

Ora siamo sicuri che il dominio su cui integrare è proprio la superficie evidenziata in rosso:

$$\iint_D (3y + e^x)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2-1}^{1-x^2} (3y + e^x)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \; 3\int_{x^2-1}^{1-x^2} y\,dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2-1}^{1-x^2} e^x\,dy = 3\int_{-1}^{1} dx \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2-1}^{1-x^2} + \int_{-1}^{1} dx\, e^x \cdot \left[y\right]_{x^2-1}^{1-x^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \left((1-x^2)^2 - (x^2-1)^2\right) dx + \int_{-1}^{1} e^x\,dx \cdot \left[(1-x^2) - x^2 + 1\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \left(\cancel{1} + \cancel{x^4} - \cancel{2x^2} - \cancel{x^4} - \cancel{1} + \cancel{2x^2}\right) dx + \int_{-1}^{1} e^x \cdot (-2x^2 + 2)\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} 0\,dx + \int_{-1}^{1} e^x \cdot (-2x+2)\,dx = \int_{-1}^{1} e^x (2x+2)\,dx$$

L'integrale ottenuto lo risolvo per parti ed lo tratto come se fosse un integrale indefinito

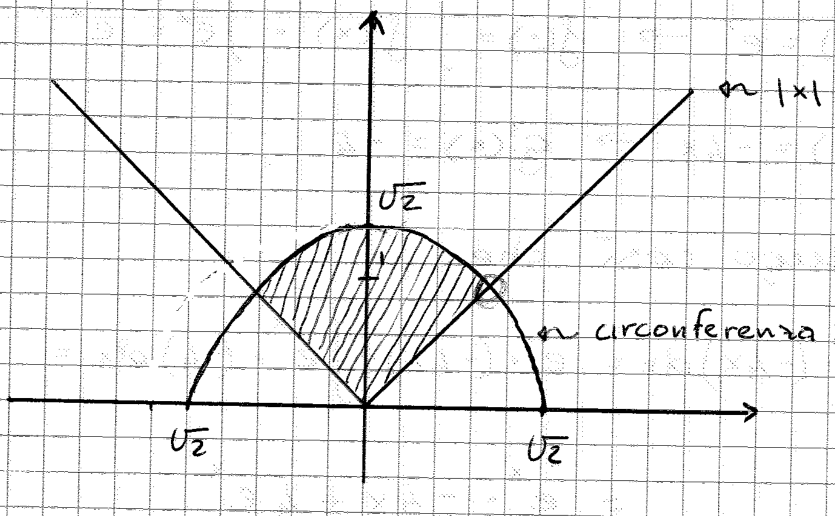
$$\int e^x (2x+2)\,dx$$

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

es 6 questo esercizio è un esercizio più teorico dove non viene richiesto un calcolo ma bensì viene richiesto di impostare il calcolo di un'area secondo orientamento orizzontale. La condizione iniziale ha orientamento verticale:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)\, dy$$

Inizio provando a disegnare il dominio di D. So che sulle ascisse sto tra -1 e 1 e sulle ordinate tra le funzioni $|x|$ e $\sqrt{2-x^2}$ quindi:



→ FORMULA DELLA CIRCONFERENZA: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

→ CENTRO DELLA CIRCONFERENZA: $(\alpha;\beta)$ nel nostro caso non avendo α e β il centro è $(0;0)$

$$\sqrt{2-x^2} = y \to 2-x^2 = y^2 \to 2 = x^2 + y^2$$

Il dominio è quello in rosso. Ora devo calcolare i nuovi estremi di integrazione che devono dunque essere in funzione di y dunque devo calcolare la y

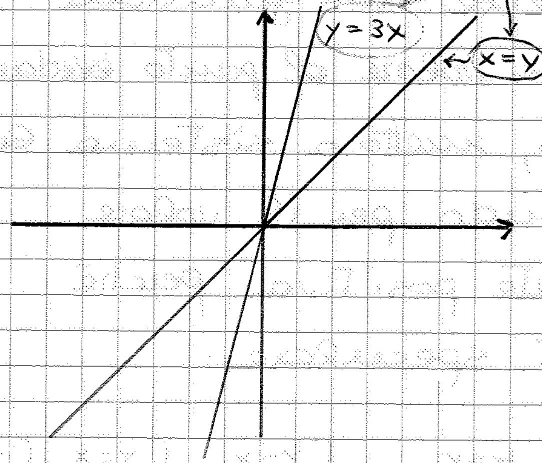
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 263

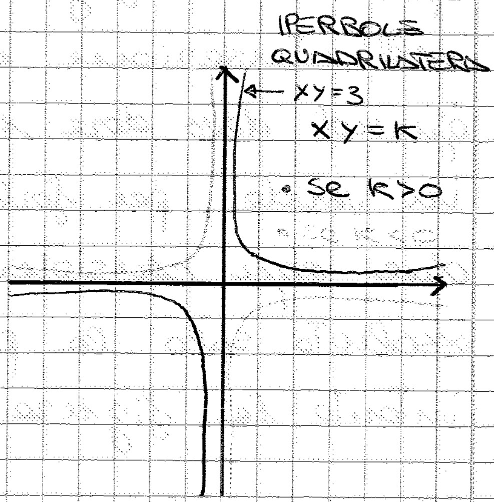
es 9

$$\iint_D x^2 e^{xy}\,dx\,dy$$

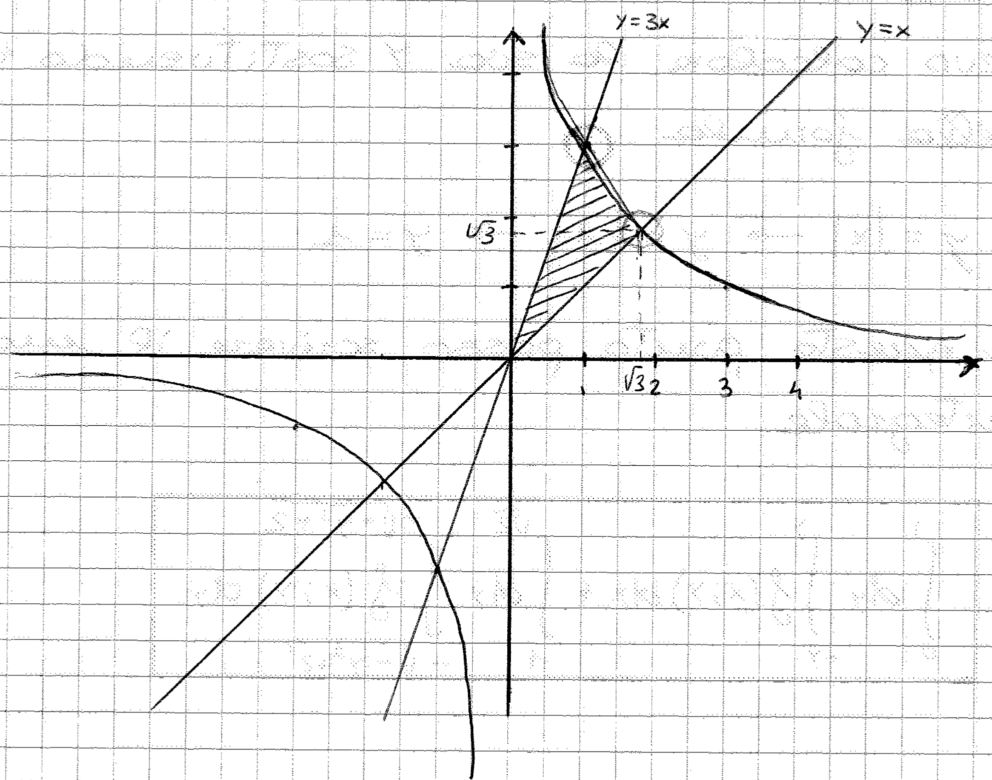
$$D = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 : x\le y\le 3x\ ;\ xy<3\}$$

Disegno il dominio





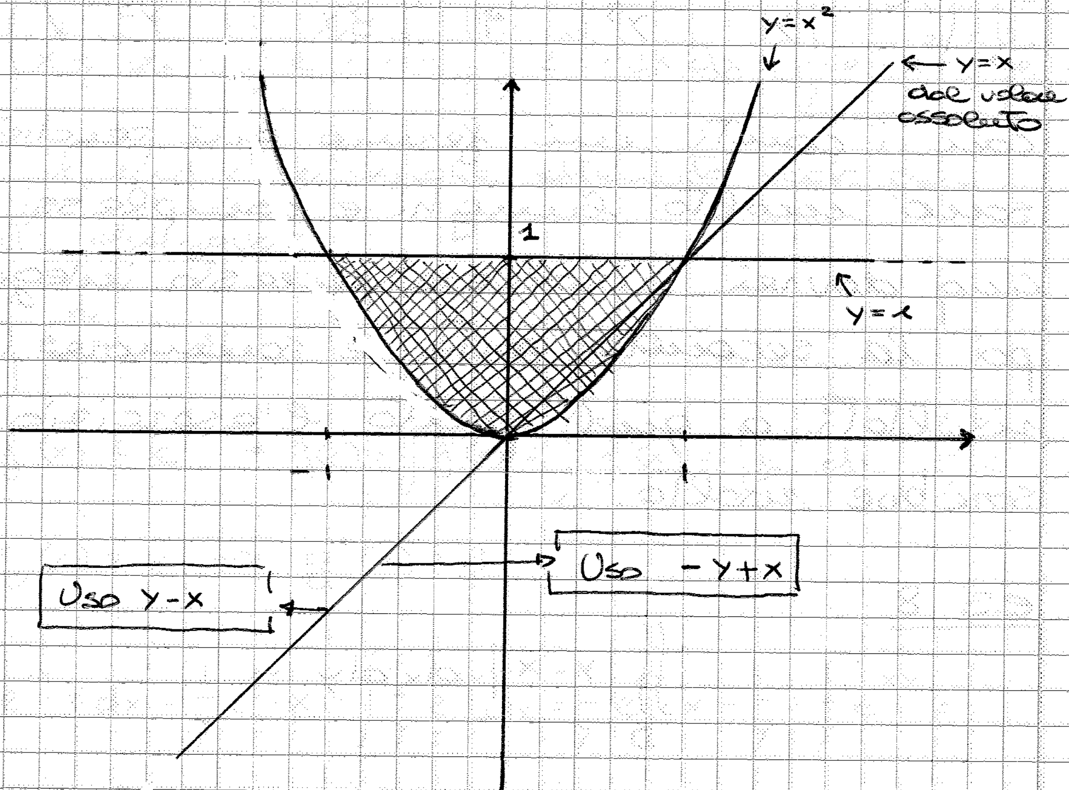
Il vertice dell'iperbole equilatera è $(\sqrt{k};\sqrt{k})$ quindi nel nostro caso sta sulla retta



Per calcolare l'area devo nuovamente spezzare la figura dunque calcolo i punti di intersezione della figura

$$|f(xy)| = |y-x| = \begin{cases} y-x & \underline{se}\ y-x \geq 0 \rightarrow y \geq x \\ -y+x & \underline{se}\ y-x < 0 \rightarrow y < x \end{cases}$$

Le due vie forniscono la retta a 45° e quindi scopro che al di sopra della retta dovrò usare la prima forma ed al di sotto della retta la seconda.
Ora per la comodità nei calcoli disegno il dominio della funzione:



Ora scrivo l'integrale:

$$\iint_D |y-x|\,dxdy = \underbrace{\int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{1} (y-x)\,dy}_{1} + \underbrace{\int_{0}^{1} dx \int_{x}^{1} (y-x)\,dy}_{2} + \underbrace{\int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{x} (-y+x)\,dy}_{3} =$$

Anche in questo caso lo risolvo per pezzi perché è più comodo da fare:

es 12:

$$\iint_D |xy| \, dx\,dy$$

Ho nuovamente il valore assoluto ma questa volta lo tratto applicando anche un cambio di variabile

$$D: \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 1 \right\}$$

dunque posso in coordinate polari e per farlo dovrò calcolare anche la matrice Jacobiana

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

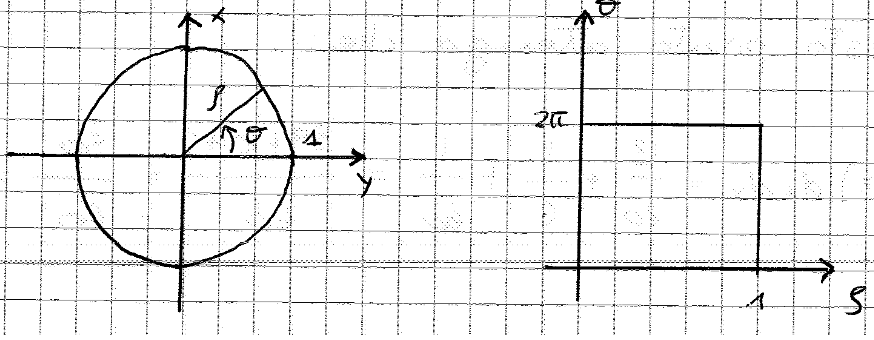
calcolo la matrice

$$J_T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\rho \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

ora ne calcolo il determinante

$$|J_T| = (\cos\theta \cdot \rho\cos\theta) - (-\rho\operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\theta) =$$
$$= \rho\cos^2\theta + \rho\operatorname{sen}^2\theta = \rho(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \rho$$

con la trasformazione mi rendo conto che cambiano anche i domini:



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 263

eqn di possaggio
$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

anche in questo caso devo calcolare attraverso la matrice Jacobiana la Jacobiano:

$$J_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix} =$$

calcolo il determinante con un metodo molto complesso come calcoli ed infine ottengo:

$$\det J_T = |J_T| = -\rho^2 \underline{\operatorname{sen} \varphi}$$

FIGURE IN 3D PER DOMINI

- SFERA:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = R^2$$

dove:

- $(x_c ; y_c ; z_c)$: coordinate del centro
- R = raggio della sfera

- PIANO: il piano nello spazio 3D è da considerare tridimensionale perché potrebbe non essere parallelo ad alcun piano principale:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

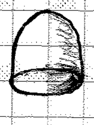
questo è una eqn di primo grado:

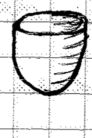
nel caso in cui il vertice del cono non si trovasse nell'origine allora avrei:

$$(z - z_c)^2 = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2$$

• PARABOLOIDE: ho due tipi di paraboloide

$$z = a - bx^2 - cy^2 \quad \text{oppure} \quad z = a + bx^2 + cy^2$$





ESERCIZI ESERCITAZIONE <u>TRE</u>:

<u>es 35</u>

Calcolare il volume di $S \subseteq \mathbb{R}^3$ definito dalle disuguaglianze:

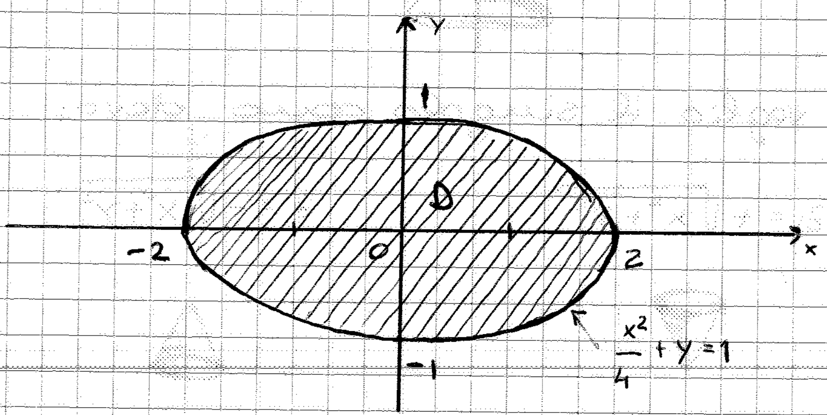
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \leftarrow \text{ELLISSE}$$

$$S: \left\{ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \; ; \; 1 \leq z \leq 12 - xy \right\}$$

il volume di un solido si calcola come:

$$V = \iiint_S 1 \, dx\,dy\,dz$$

devo capire come è fatto S per disegnarlo devo sezionare lungo un asse e in questo caso scelgo z



$$\iint_D \left(11 - 2\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta\right) 2\rho \, d\rho \, d\theta = \iint_D 22\rho - 4\rho^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} 22\rho - 4\rho^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \int_0^1 d\rho \, 22\rho \int_0^{2\pi} d\theta - \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} 4\rho^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta =$$

$$= 22 \int_0^1 \rho \, d\rho \left(\theta\right)_0^{2\pi} - \int_0^1 4\rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta =$$

$$= 22 \int_0^1 (2\pi\rho) \, d\rho - \left(4 \frac{\rho^4}{4}\right)_0^1 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right)_0^{2\pi} =$$

$$= 44\pi \int_0^1 \rho \, d\rho - 1 \cdot 0 = 44\pi \cdot \left(\frac{\rho^2}{2}\right)_0^1 - 0 =$$

$$= 44\pi \cdot \frac{1}{2} = 22\pi$$

N.B. in questo esercizio ho usato una formula importantissima per il calcolo degli integrali:

$$\int f'(x) \cdot \left[f(x)\right]^n dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1}$$

es:

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

ora dato la simmetria della figura posso in coordinate SFERICHE ed elimino così (effettuando il cambio di dominio) il problema di calcolare prima l'integrale singolo e poi il doppio

CIAO CICCO CHE CUCCIOLO CHE SEI!

$$\begin{cases} x = \rho \,\text{sen}\,\varphi \cos\theta \\ y = \rho \,\text{sen}\,\varphi \,\text{sen}\,\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$|J| = \rho^2 \,\text{sen}\,\varphi$ ← da calcoli precedenti

dunque l'integrale sarà:

$$\iiint_S x^2 \,dx\,dy\,dz = \iiint_{S'} (\rho \,\text{sen}\,\varphi \cos\theta)^2 \cdot \rho^2 \,\text{sen}\,\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \iiint_{S'} \rho^4 \,\text{sen}^3\varphi \cos^2\theta \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

ora mi rendo conto di avere tre integrali singoli devo solo scegliere gli estremi di integrazione:

$$= \int_0^1 \rho^4 \,d\rho \cdot \int_0^{\pi/4} \text{sen}^3\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

Il primo integrale è immediato e gli altri due vanno risolti con la formula:

$$\int f'(x) \cdot [f(x)]^n \,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$$

che dalla formula mi rendo conto non essere centrato nell'origine

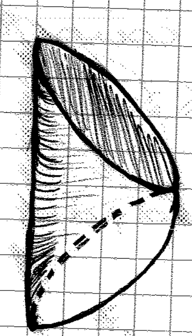
$$x^2+y^2 \leq 2x \Rightarrow x^2-2x+y^2 \leq 0 \Rightarrow x^2-2x+1+y \leq 1$$

$$(x-1)^2+y^2 \leq 1$$

quindi il centro della circonferenza generante il cilindro è $(1;0)$.

Facendo delle prove sulle equ del cono scopro che nell'esercizio ci si riferisce alla parte esterna del cono

Quindi il volume da calcolare è quello del cilindro esterno al cono (parte rossa del disegno).



Calcolando il volume risolvo l'integrale per pezzi

$$\iint_D \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) dx\,dy$$

$$D: \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2x \right\}$$

gli estremi di integrazione di dz arrivano dalla equ della metà superiore del cono

$$z^2 = x^2+y^2 \begin{cases} \nearrow +\sqrt{x^2+y^2} & \text{parte positiva} \quad \text{SUP.} \\ \searrow -\sqrt{x^2+y^2} & \text{parte negativa} \quad \text{INF.} \end{cases}$$

es 36:

$$\left\{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1;\ |y| \leq \sqrt{3};\ 0 \leq z \leq f(x;y) \right\}$$

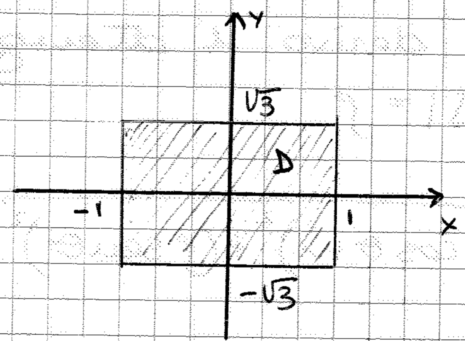
dove $f(x;y) = \text{MAX}\left[\frac{1}{2};\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$ calcolare il volume di S.

Svolgimento

Ora disegno il dominio e per farlo devo analizzare i valori assoluti

$$|x| \leq 1 \begin{cases} x \leq 1 & \text{se } x \geq 0 \\ x \geq -1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$|y| \leq \sqrt{3} \begin{cases} y \leq \sqrt{3} & \text{se } y \geq 0 \\ y \geq -\sqrt{3} & \text{se } y \leq 0 \end{cases} \quad -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$$



Per la seconda parte invece devo studiare la disuguaglianza

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \leq x \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leq 2x \rightarrow x^2+y^2 \leq 4x^2 \rightarrow y^2 \leq 3x^2$$

Per il disegno considero l'equ associata

$$y^2 = 3x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}\,x$$

capisco dove sta sostituendo dei numeri alla x

$$T=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{y}{\sqrt{3}} \leq x \leq 1 \ ;\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}\right\}$$

a questo punto l'integrale diventerà:

$$\iint_T \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{y/\sqrt{3}}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{y/\sqrt{3}}^{1} x\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} dy\, \frac{1}{2}\int_{y/\sqrt{3}}^{1} 2x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}\,dy \left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1/2}\right]_{y/\sqrt{3}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} dy \left[2\sqrt{x^2+y^2}\right]_{y/\sqrt{3}}^{1} = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left[2\sqrt{1+y^2} - 2\sqrt{\frac{y^2}{3}+y^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} 2\sqrt{1+y^2} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} 2\sqrt{\frac{4y^2}{3}} = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+y^2}\,dy - \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4y^2}{3}}\,dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+y^2}\,dy - \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} y\,dy = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+y^2}\,dy - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+y^2}\,dy - \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{\cancel{2}} = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+y^2}\,dy - \sqrt{3}$$

ora utilizzo un integrale fondamentale per risolvere l'ultimo integrale:

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c}$$

ottengo:

$$\int \sqrt{1+y^2}\,dy = \frac{y}{2}\sqrt{y^2+1} + \frac{1}{2}\log\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$$

ora lo valuto tra zero e $\sqrt{3}$:

- se metto zero va tutto a zero
- se metto $\sqrt{3}$.

SOLIDI DI ROTAZIONE

I solidi di rotazione sono solidi creati dalla rotazione attorno ad un asse di una regione di piano ciò che ottengo dovrà essere poi calcolato con integrali singoli, doppi o tripli.

es 41: esercitazione 4:

Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della regione D:

$$D: \left\{ (x; 0; z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq z \leq x \right\}$$

Svolgimento

Il fatto che ci sia zero come Y mi indica che la regione di piano su cui è disegnata la figura è compresa sul piano xz.

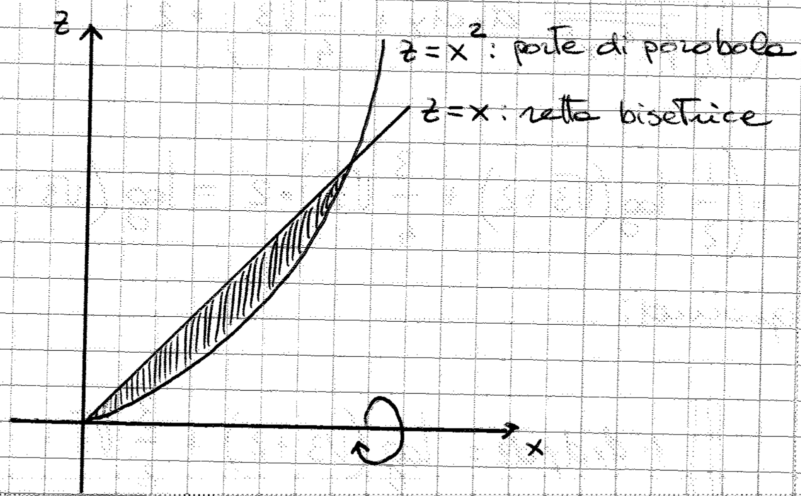
Le indicazioni fornitemi:

$$x^2 \leq z \leq x$$

indicano:

- $x^2 \leq z$ ⇝ omogenea associata ⇝ $x^2 = z$
- $z \leq x$ ⇝ omogenea associata ⇝ $z = x$

dunque il disegno sarà:



quindi la regione è quella rossa che ruotando piano yz e per prima cosa devo analizzare il valore assoluto:

$|f(x)|$

$$z+(y-2)^2 \leq 1 \text{ se } z \geq 0 \rightarrow z+y^2-4y+4 \leq 1$$
$$z \leq -y^2+4y-3$$

$$-z+(y-2)^2 \leq 1 \text{ se } z<0 \rightarrow -z+y^2-4y+4 \leq 1$$
$$z \geq y^2-4y+3$$

ora disegno la regione di piano ma prima devo calcolare i vertici delle due parabole:

$$V = \left(-\frac{b}{2a} ; \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

considero le due omogenee associate

1) $z = -y^2+4y-3 \rightarrow -\frac{4}{-2} = 2$

$\rightarrow \frac{+b^2-4ac}{4a} = \frac{16-12}{-4} = 1$

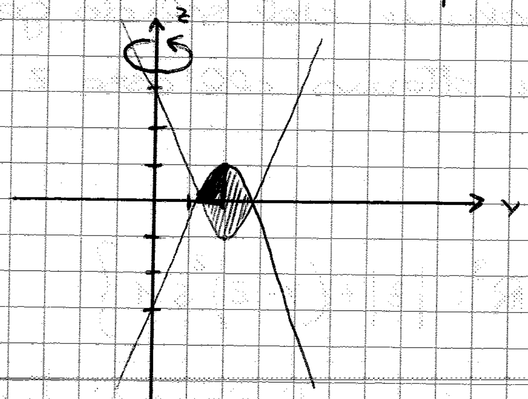
$V(2;-1)$

2) $z = y^2-4y+3 \rightarrow \frac{4}{2} = 2$

$\rightarrow \frac{+b^2-4ac}{4a} = \frac{16-12}{4} = -1$

$V(2;-1)$

il disegno sarà dunque:



che moltiplicato per quattro per ottenere il volume totale da:

$$V_{TOT} = \frac{11}{\cancel{6}_3}\pi \cdot \cancel{4}^2 = \frac{22}{3}\pi$$

Es 44: Calcolare l'integrale

$$\int_S e^{2z}\,dx\,dy\,dz$$

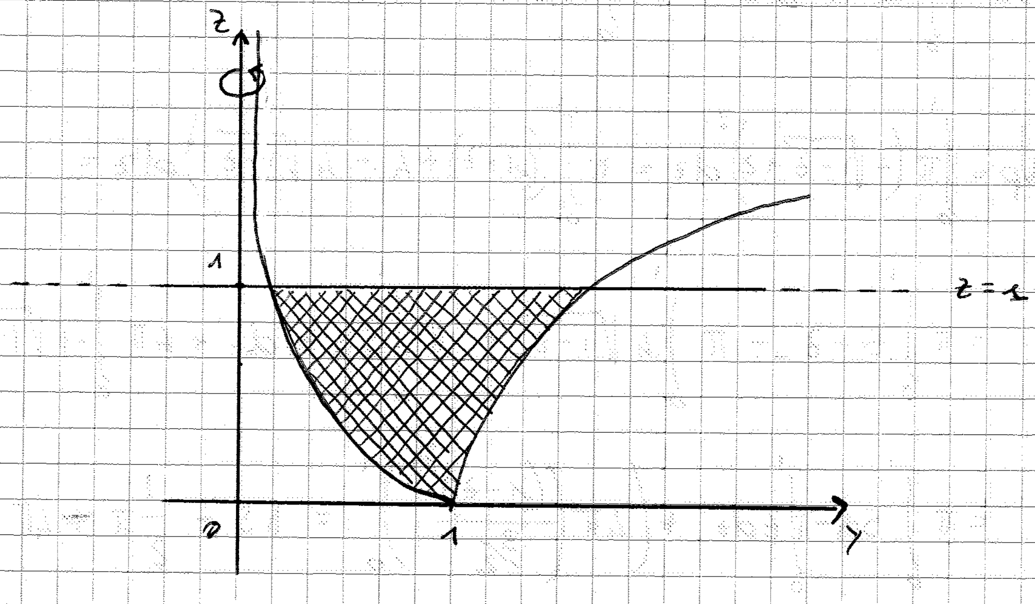
dove S è il solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse z della regione:

$$D = \left\{ (0; y; z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0 ; \ |\ln y| \leq z \leq 1 \right\}$$

Svolgimento

- Dalle coordinate $(0; y; z)$ capisco che la regione D si trova sul piano yz
- So che $y > 0$
- So che z è compreso tra $|\log y|$ e 1

Disegnando il dominio ottengo che:



Per verificare il disegno analizzo il valore assoluto del logaritmo:

i raggi dei cerchi che ottengo

Sapendo che:

- $z = -\log y$ — $-z = \log y$ — $y = e^{-z}$
- $\log y = z$ — $y = e^{z}$

per risolvere l'esercizio allora calcolo:

$$A_z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$A_z = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-2z} \leq \underbrace{x^2 + y^2}_{\text{CIRCONFERENZA}} \leq e^{2z} \right\}$$

dunque avrò:

$$\int_0^1 \left(\iint_{A_z} e^{2z} \, dx\,dy \right) dz = \int_0^1 e^{2z} \left(\iint_{A_z} dx\,dy \right) dz$$

integro per strati paralleli: e mi rendo conto che $\iint_{A_z} dx\,dy$ è l'area del cerchio ed allora la calcolo con la geometria elementare

$$\iint_{A_z} dx\,dy = \pi e^{2z} - \pi e^{-2z}$$

a questo punto inserisco il risultato nello integrale precedente ed ottengo:

$$= \pi \int_0^1 e^{2z} \left(e^{2z} - e^{-2z} \right) dz = \pi \int_0^1 \left(e^{4z} - 1 \right) dz = \pi \int_0^1 e^{4z} - \pi \int_0^1 dz =$$

$$= \pi \left(\frac{e^{z4}}{4} \right)_0^1 - \pi (z)_0^1 = \pi \left(\frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \right) - \pi = \pi \left(\frac{e^4 - 1}{4} \right) - \pi =$$

$$= \pi \left(\frac{e^4 - 1}{4} - 1 \right) = \pi \left(\frac{e^4 - 5}{4} \right)$$

Es 43: Calcolare il volume del solido generato da una rotazione completa intorno all'asse z dell'insieme D:

$$D = \left\{ (0; y; z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \min\left\{ \sqrt[3]{y} ; \frac{1}{y^2} \right\} ; 0 < y \leq e^{4/7} \right\}$$

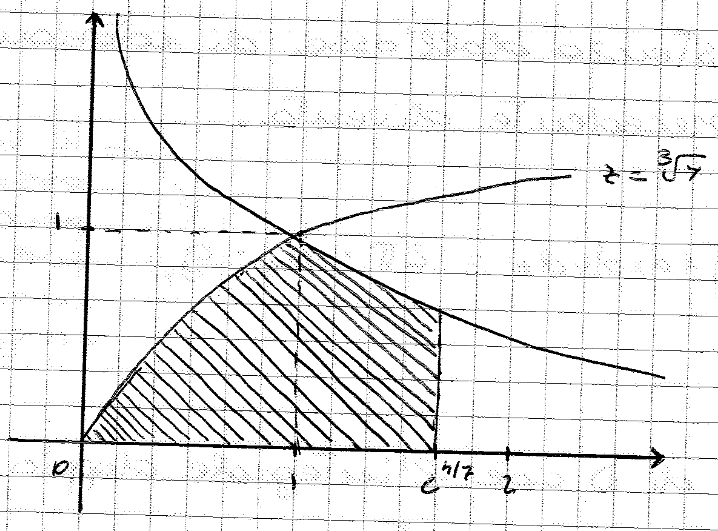
Svolgimento

- So che $y \Rightarrow 0 < y \leq e^{4/7}$
- Ora devo disegnarmi le due funzioni di z

$z \leq \sqrt[3]{y} \Rightarrow z = \sqrt[3]{y}$

$z \leq \frac{1}{y^2} \Rightarrow z = \frac{1}{y^2}$

e così ottengo:



devo calcolarmi alcuni punti per essere sicuro che le due passino proprio dove le ho disegnate

- $z = \sqrt[3]{y} \rightarrow$ Se $y = 0 \Rightarrow z = 0$

Se $y = 1 \Rightarrow z = 1$

Se $y = e^{4/7} \Rightarrow z = e^{4/21}$

- $z = \frac{1}{y^2} \rightarrow$ Se $y = 0 \rightarrow z = +\infty$

Se $y = 1 \rightarrow z = 1$

Se $y = e^{4/7} \rightarrow z = e^{-8/7}$

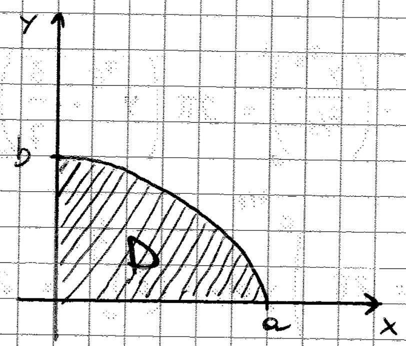
La prima cosa da sapere è la formula generale dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

Il dominio è il quarto dell'ellisse quindi solo la parte che sta in uno dei quattro quadranti e per comodità prendiamo il primo:

$$D : \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \; ; \; x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \right\}$$

Ora disegno il dominio:



a questo punto devo calcolare l'area dell'ellisse:

$$A = \iint_D dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^{?} dy$$

$? = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ma devo esplicitarlo rispetto ad y

$$\Rightarrow \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b \Rightarrow y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2} \cdot b^2} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{1}}$$

L'area dell'ellisse può essere anche calcolata geometricamente e la formula è:

Calcolo ora il secondo integrale:

$$\iint_D y\,dx\,dy = \iint_{D'} (\rho b \operatorname{sen}\theta \; ab\rho)\,d\rho\,d\theta = \iint_{D'} (ab^2\rho^2 \operatorname{sen}\theta)\,d\rho\,d\theta =$$

$$= ab^2 \iint_{D'} \rho^2 \operatorname{sen}\theta\,d\rho\,d\theta = ab^2 \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\,d\theta = ab^2 \int_0^1 \rho^2 d\rho \,(-\cos)_0^{\pi/2} =$$

$$= ab^2 \int_0^1 \rho^2 d\rho = ab^2 \frac{1}{3} = \frac{ab^2}{3}$$

a questo punto dividendo i due numeratori per l'area ottengo le coordinate del baricentro:

$$X_G = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{A_D} = \frac{\frac{a^2b}{3}}{\frac{\pi ab}{4}} = \frac{a^2b}{3} \cdot \frac{4}{\pi ab} = \frac{a4}{3\pi}$$

$$Y_G = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{A_D} = \frac{\frac{ab^2}{3}}{\frac{\pi ab}{4}} = \frac{ab^2}{3} \cdot \frac{4}{\pi ab} = \frac{b4}{3\pi}$$

ottengo quindi:

$$(X_G; Y_G) = \left(\frac{a4}{3\pi}; \frac{b4}{3\pi}\right)$$

Es 4 esercitazione 1 integrali doppi:

$$\iint_D xy\,dx\,dy$$

$$D: \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1;\; x^2 \leq y \leq 1+x\right\}$$

Inizio a capire come è fatto il dominio:

- So che la x è compresa tra zero e uno
- Ora disegno le altre due insieme.

Es 5 esercitazione 1:

$$\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$$

$$D: \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1 \right\}$$

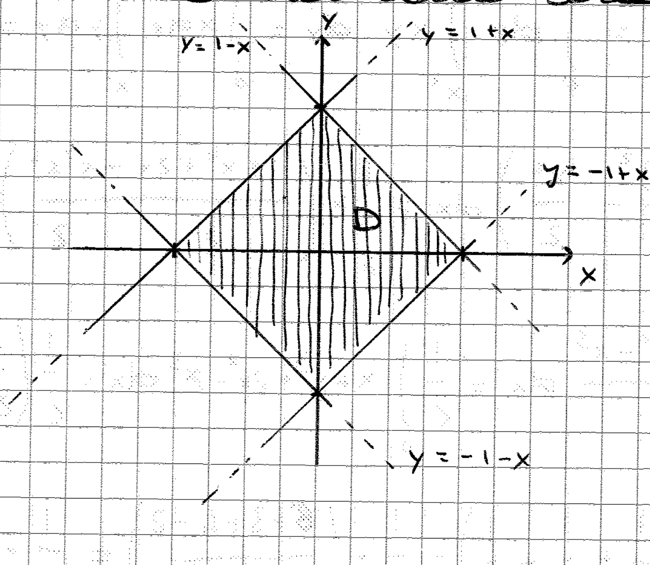
Svolgimento

In questo caso con i valori assoluti devo analizzare i vari casi ed andare per tentativi per costruire il disegno sostituendo dei valori alla x ed alla y

$$|y| \leq 1 - |x|$$

- Se x e $y > 0 \Rightarrow y \leq 1 - x \Rightarrow y = 1 - x$
- Se x e $y < 0 \Rightarrow -y \leq 1 + x \Rightarrow y = -1 - x$
- Se $x > 0$ e $y < 0 \Rightarrow -y \leq 1 - x \Rightarrow y = -1 + x$
- Se $x < 0$ e $y > 0 \Rightarrow y \leq 1 + x \Rightarrow y = 1 + x$

il disegno del dominio sarà dunque:



l'integrale sarà:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{1+x} e^{x+y}\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-1+x}^{1-x} e^{x+y}\,dy$$

Le risolvo a pezzi

es 11 esercitazione 2

$$\iint_D y^2 \, dx\, dy$$

$$D: \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \text{ e } y^2 \leq x \right\}$$

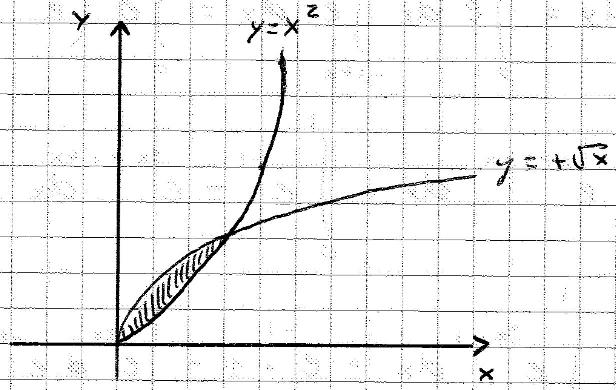
Svolgimento

Devo disegnare il dominio e per farlo devo esplicitare le funzioni

$$y \leq x^2 \Rightarrow y = x^2$$

$$y^2 \leq x \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

data la prima mi trovo nel primo quadrante quindi considero solo $y = +\sqrt{x}$. Dunque il grafico sarà



il dominio è quello in rosso quindi ~~ora~~ devo conoscere dove si intersecano le due figure:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = y^4 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$y = y^4 \Rightarrow y - y^4 = 0 \Rightarrow y(1-y^3) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ 1 - y^3 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Le due si incontrano in $(0;0)$ e $(1;1)$

L'integrale dunque diventerà:

$$\iiint_S (x^2+y^2+z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz$$

dove δ è la densità che nel nostro caso è:

$$\delta(x;y;z) = \delta(z)$$

questo perché x e y non danno contributo ma ho ancora bisogno di un coefficiente di proporzionalità:

$$\delta(x;y;z) = kz$$

dunque il mio integrale sarà:

$$\iiint_{S/2} (x^2+y^2+z^2)\,kz\,dx\,dy\,dz$$

perché sono su metà sfera

Ora essendo su di una sfera posso in coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{S'}{2} = \left\{(\rho;\varphi;\theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq R;\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

ottengo:

$$\iiint_{S/2} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{S'/2} \left[(\rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta)^2 + (\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta)^2 + (\rho\cos\varphi)^2\right] \cdot k\rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \cdot d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \frac{kR^6\pi}{24} + \frac{kR^6\pi}{24} + \frac{kR^6\pi}{12} = \frac{kR^6\pi + kR^6\pi + 2(kR^6\pi)}{24} =$$

$$= \frac{4k\pi R^6}{24} = \frac{k\pi R^6}{6}$$

Il risultato ottenuto va moltiplicato per due perché ho la simmetria della sfera:

$$\iiint (x^2+y^2+z^2)\,\delta\, dx\,dy\,dz = \frac{k\pi R^6}{6} \cdot 2 = \frac{k\pi R^6}{3}$$

CAMPO SCALARE:

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x;y;z) \longmapsto \overbrace{F(x;y;z)}^{\text{NUMERO}} \in \mathbb{R}$$

quindi questo significa

(vettore a n componenti) $\mapsto$ (Scalare)

esempio:

$$(x;y) \mapsto 3y + e^x$$

$$(2;1) \to 3\cdot 1 + e^2 = 3 + e^2$$

CAMPO VETTORIALE

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$(x;y;z) \to (F_1(x;y;z);\ F_2(x;y;z))$$

questo significa:

(vettore ad n componenti) $\to$ (vettore a m componenti)

esempio:

$$(x;y;z) \longmapsto (3x-4z\ ;\ 5y+2)$$

$$(2;1;0) \longmapsto (6;7)$$

i parametri dati sono di una circonferenza con centro nella origine e raggio unitario
questo si può dimostrare perché

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad r = 1$$

quindi si otterrà proprio:

$$\gamma(t) = (\mathrm{sen}\,t\,;\,\cos t)$$

• 2) a questo punto devo calcolare $\gamma'(t)$:

$$\gamma(t) = (\mathrm{sen}\,t\,;\,\cos t)$$

$$\gamma'(t) = (\cos t\,;\,-\mathrm{sen}\,t)$$

questo si fa semplicemente derivando membro a membro

• 3) ora scrivo la norma di γ

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 + (\gamma_3'(t))^2}$$

che nel nostro caso sarà:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t} = \sqrt{1} = 1$$

• 4) ora scrivo $f(\gamma(t))$ questo passaggio consiste nel guardare l'integrale e sostituire al posto della x e della y i parametri ottenuti della curva γ, nel nostro caso:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\, dt$$

PONGO $\sin t = x \qquad dx = \cos x\, dt$

$$dt = \frac{dx}{\cos x}$$

ottengo dunque

$$\int \frac{\cos x}{1+x^2} \cdot \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \left(\operatorname{arctg} x\right)_0^{\pi/2} =$$

$$= \left(\operatorname{arctg} \sin t\right)_0^{\pi/2} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$$

3)

$$\int_\gamma (x+z) \qquad \text{(integrale)}$$

$$\gamma = \left(t\,;\ \frac{3\sqrt{2}}{2}t^2;\ t^3\right) \quad \text{(curva parametrizzata)}$$

$$t \in [0;1] \quad \text{(intervallo)}$$

Svolgimento

- 1) $\gamma = \left(t\,;\ \frac{3\sqrt{2}}{2}t^2;\ t^3\right)$
- 2) $\gamma' = \left(1\,;\ \frac{6\sqrt{2}}{2}t\,;\ 3t^2\right)$
- 3) NORMA

$$\|(\gamma'(t))\| = \sqrt{1+9t^4+18t^2}$$

- 4) Scrivo $f(\gamma(t))$:

$$f(\gamma(t)) = t + t^3$$

osservando il grafico

$$\gamma(t) \begin{cases} x = t \\ y = \cosh t \end{cases}$$

$$\gamma(t) = (t \,;\, \cosh t)$$

- devo calcolare $\gamma'(t)$:

$$\gamma'(t) = (1 \,;\, \operatorname{senh} t)$$

- devo calcolare la norma:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1^2 + (\operatorname{senh} t)^2}$$

- $f(\gamma(t))$ è 1 perché l'esercizio mi chiede di calcolare la lunghezza della curva
- Risolvo l'integrale:

$$\int_a^b 1 \cdot \|\gamma'(x)\| = \int_{-1}^{1} \sqrt{1^2 + \operatorname{senh}^2 t} = \int_{-1}^{1} 1 - 1 + \cosh^2 t \, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \cosh t \, dt = (\operatorname{senh} t)_{-1}^{1} = \operatorname{senh} 1 - \operatorname{senh}(-1) =$$

$$= \frac{e^1 - e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1} - e^{1}}{2} = \frac{2e^1 - 2e^{-1}}{2} = e^1 - e^{-1}$$

FORMULE IMPORTANTI

- $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

- $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\gamma_1(t) = (t;0) \qquad t \in [0;1]$$

γ_1 deriva dal segmento $\overline{OA}$ muovendomi solo su x sarà $x=t$ ed y non dando contributo sarà zero.

$$\gamma_2(t) = (\cos t; \operatorname{sen} t) \qquad t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

γ_2 deriva dall'arco di circonferenza $\widehat{AB}$ (essa è la circonferenza goniometrica di $r=1$) quindi la sua parametrizzazione sarà:

$$x = r\cos t$$
$$y = r \operatorname{sen} t$$

l'intervallo sarà $(0; \pi/4)$ perché la circonferenza la considero fino a $\pi/4$.

$$\gamma_3(t) = (t;t) \qquad t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$$

γ_3 deriva dalla informazione sul punto B $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ che indica la retta $x=y$ a $45°$ cioè la bisettrice del quadrante quindi. L'intervallo è fatto così perché percorrendolo in senso antiorario trovo prima $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e poi arrivo a zero.

- Ora calcolo le $\gamma'(t)$:

$$\gamma_1'(t) = (1;0)$$
$$\gamma_2'(t) = (-\operatorname{sen} t; \cos t)$$
$$\gamma_3'(t) = (1;1)$$

- Ora calcolo le norme:

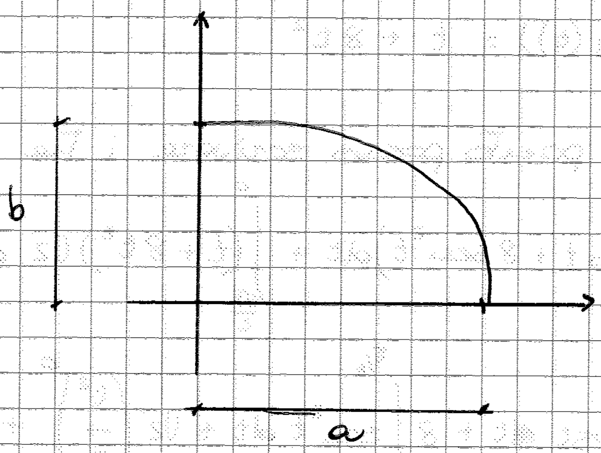
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}$$

$$\|\gamma_1'(t)\| = \sqrt{1^2+0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1} = 1$$

Svolgimento

- So che sono nel primo quadrante dalla informazione $x \geq 0$ e $y \geq 0$
- Disegno la funzione



- Per parametrizzare l'ellisse mi devo ricordare:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \operatorname{sen} t \end{cases}$$

dunque la curva parametrizzata sarà:

$$\gamma(t) = (a \cos t \,;\, b \operatorname{sen} t) \quad t \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$$

- Ora calcolo $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = (-a \operatorname{sen} t \,;\, b \cos t)$$

- Ora calcolo la norma:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(a \operatorname{sen} t)^2 + (b \cos t)^2} = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)(\cos^2 t)}$$

- Ora scrivo $f(\gamma(t))$

$$f(\gamma(t)) = a \cos t \cdot b \operatorname{sen} t$$

- Ora scrivo l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos t \cdot b \operatorname{sen} t) \cdot \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)(\cos^2 t)}\, dt =$$

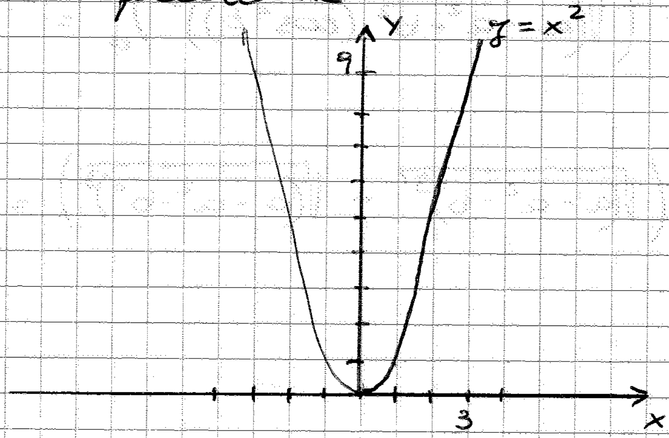
Es 54 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \sqrt{1+x^2+3y}\, dS$$

dove γ è l'arco di parabola x^2 per $0 \leq x \leq 3$

Svolgimento

- Disegno la curva che questa curva deve essere dalla informazione $0 \leq x \leq 3$ solo considerata la sua parte di destra cioè il primo quadrante



- Parametrizzo la parabola sapendo che la equ della parabola è $y=x^2$ dunque:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$

dunque:

$$\gamma(t) = (t;\, t^2) \quad t \in [0;3]$$

- Calcolo $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = (1;\, 2t)$$

- Calcolo la NORMA:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1^2+(2t)^2} = \sqrt{1+4t^2}$$

$$\overset{x}{(a};\overset{y}{b)}\cdot\overset{x}{(c};\overset{y}{d)} = ac + bd$$

quindi è il prodotto delle componenti analoghe sommate.

N.B. Se la curva γ è chiusa cioè $\gamma(a)=\gamma(b)$ si parla di CIRCUITAZIONE.

ESERCIZI CHIARIFICATORI

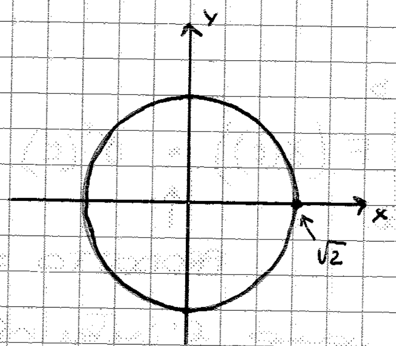
<u>ES 59</u>: Sia $F(x;y)$

$$F(x;y) = \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\,;\, -\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)$$ ← È il campo vettoriale da integrare

calcolare $\int_\gamma F\cdot t$ dove γ è la circonferenza di equ $x^2+y^2=2$ (centrata nell'origine) percorsa in senso antiorario.

Svolgimento

• Devo disegnare la circonferenza:



• Ora parametrizzo la curva ma so che ho la circonferenza e quindi:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$$

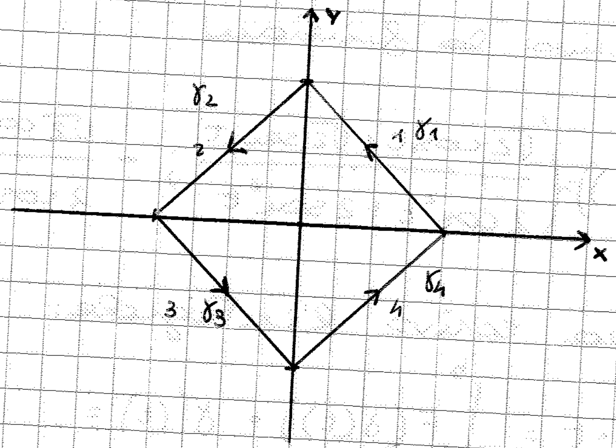
dunque:

$$\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t\,;\,\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t) \qquad t\in(0;2\pi)$$

• ora calcolo $\gamma'(t)$

orsorgimento

- Disegno il quadrato



- devo parametrizzare il quadrato e per farlo scrivo le quattro equ dei quattro lati del quadrato:

$$\text{equ retta}: \quad y = mx + q$$

- retta 1: $y = -x + 1$ ⇝ Se $x = t$ allora $y = -t + 1$
- retta 2: $y = x + 1$
- retta 3: $y = -x - 1$
- retta 4: $y = x - 1$

le parametrizzazioni dunque sarà:

$\gamma_1 : (t \,;\, -t+1) \qquad t \in [1;0)$

$\gamma_2 : (t \,;\, t+1) \qquad t \in (0;-1]$

$\gamma_3 : (t \,;\, -t-1) \qquad t \in [-1;0)$

$\gamma_4 : (t \,;\, t-1) \qquad t \in [0;1]$

ora faccio le derivate $\gamma'(t)$:

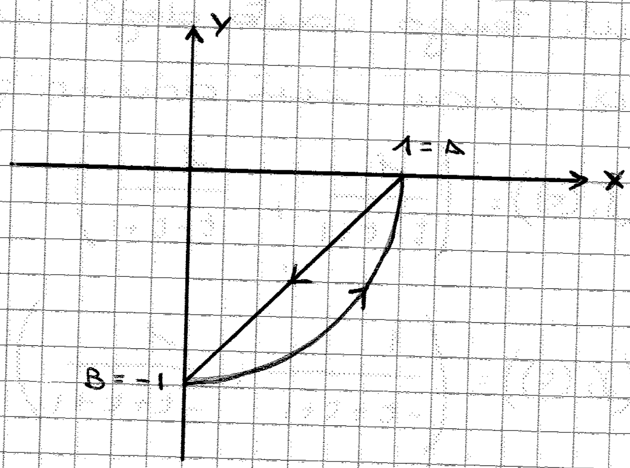
$\gamma_1' = (1;-1)$

$\gamma_2' = (1;1)$

$\gamma_3' = (1;-1)$

$\gamma_4' = (1;1)$

- Inizio disegnando il grafico:



- Parametrizzo la curva.
  - Prima parte circonferenza:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\text{sen}\,t \end{cases}$$

$$\gamma_1(t) = (\cos t; \text{sen}\,t) \qquad t \in \left[\tfrac{3}{2}\pi; 2\pi\right]$$

- La seconda parte si parametrizza esattamente come γ_4 dell'esercizio precedente.

$$\gamma_2(t) = (t; t-1) \qquad t \in [1; 0]$$

- Ora calcolo la $\gamma'(t)$

$$\gamma_1'(t) = (-\text{sen}\,t; \cos t)$$

$$\gamma_2'(t) = (1; 1)$$

- Ora scrivo le $F(\gamma(t))$

$$F(\gamma_1(t)) = (-\text{sen}\,t; \cos t)$$

$$F(\gamma_2(t)) = (-t+1; t)$$

- Ora scrivo gli integrali:

$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} (-\text{sen}\,t; \cos t)(-\text{sen}\,t; \cos t)\,dt + \int_1^0 (-t+1; t)(1; 1)\,dt =$$

∂A: frontiera

A: regione aperta racchiusa da ∂A

$\oint$: integrale circuitale cioè di una curva chiusa

N.B. Molti esercizi risolvibili con questo teorema possono essere risolti anche con gli integrali curvilinei di seconda specie ma avrò dei calcoli molto più lunghi.

ESERCIZI CHIARIFICATORI:

ES 68: Siano dati il campo piano (cioè che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$) $F(x;y) = (2xy)\,i + x\,j = (2xy; x)$ e la regione D:

$$D: \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \;,\; x \leq y \leq 2x\right\}$$

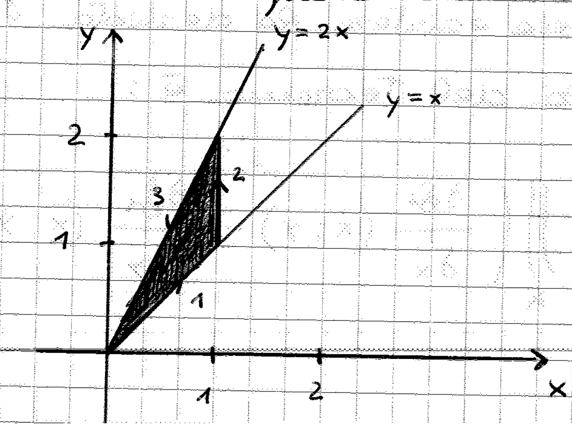
1) Indicato con ∂D il bordo (= frontiera) di D percorso in senso antiorario calcola

$$\int_{\partial D} F \cdot t$$

2) Si calcoli lo stesso integrale utilizzando il Teorema di Green

Svolgimento

- Prima cosa è disegnare il dominio D



$$= \left(2\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)_0^1 + (t)_1^2 + \left(4\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^2}{2}\right)_1^0 =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 2 - 1 - \frac{4}{3} - 1 = \frac{4+3-8}{6} = -\frac{1}{6}$$

- PUNTO 2: Rifaccio l'esercizio utilizzando il teorema di Green
  - CALCOLO LE DERIVATE PARZIALI:

$$F(x;y) = (\underbrace{2xy}_{f_1} ; \underbrace{x}_{f_2})$$

- $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1$
- $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2x$

  - INSERISCO NELLA FORMULA:

$$\oint_{\partial D} F \cdot t = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D (1-2x)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} (1-2x)\,dy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy - \int_0^1 dx \int_x^{2x} 2x\,dy =$$

$$= \int_0^1 2x - x\,dx - \int_0^1 2x(2x-x)\,dx = \left(+\frac{x^2}{2}\right)_0^1 - \int_0^1 2x^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \left(2\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3-4}{6} = -\frac{1}{6}$$

C.V.V. i due risultati sono uguali quindi i due metodi sono equivalenti ma nel secondo caso lo svolgimento dell'esercizio è molto più veloce.

• Scrivo il dominio di Q

$$Q = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \ ; \ 0 \leq y \leq 2 \right\}$$

l'integrale sarà:

$$\iint_Q \left(-2y + 3xy^2\right) dx\, dy = \int_0^2 dx \int_0^2 \left(-2y + 3xy^2\right) dy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^2 -2y\, dy + \int_0^2 dx \int_0^2 3xy^2\, dy = \int_0^2 -2dx \left(\frac{y^2}{2}\right)_0^2 + \int_0^2 3x \left(\frac{y^3}{3}\right)_0^2 dx =$$

$$= -\int_0^2 4\, dx + \int_0^2 8x\, dx = -4(x)_0^2 + 8\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^2 = -8 + 16 = 8$$

CONSERVATIVITÀ DEI CAMPI VETTORIALI

Un campo vettoriale (F) si dice conservativo se esiste un campo scalare (f) (= funzione in più variabili es $f(x;y;z)$) tale che grad f (= si può anche scrivere come ∇f) è uguale ad F cioè le derivate parziali di f coincidono con le componenti di F.

<u>N.B.</u> f si chiama POTENZIALE di F

$$\boxed{\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} ; \frac{\partial f}{\partial y} ; \frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

esempio: il campo vettoriale $F(x;y;z) = (2x; \text{sen}\, y; e^z)$ è conservativo?

• esiste un potenziale $f: (e^z + x^2 - \cos y)$ di cui se ne calcolo il gradiente:

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} ; \frac{\partial f}{\partial y} ; \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{e^z + x^2 - \cos y}{\partial x} ; \frac{e^z + x^2 - \cos y}{\partial y} ; \frac{e^z + x^2 - \cos y}{\partial z}\right) =$$

questo ultima considerazione è molto utile per calcolare gli integrali di linea se conosco già il potenziale oppure l'ho già ricavato

ESERCIZI CHIARIFICATORI:

ES 72: Si dica che i campi vettoriali

a: $F_1(x;y;z) = x^2 i + yj + zk$

b: $F_2(x;y;z) = (x - xe^z) i - yj + e^z k$

i due sono conservativi in $\mathbb{R}^3$. Si determini il potenziale se esso esiste.

Svolgimento

- Partiamo da "a" la prima:

$$F_1(x;y;z) = \overset{f_1}{x^2} i + \overset{f_2}{y} j + \overset{f_3}{z} k$$

il dominio di F_1 è tutto $\mathbb{R}^3$ perché $x;y;z$ non hanno alcuna restrizione e quindi sapendo che $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso posso applicare il teorema 3.

Ora quindi calcolo le derivate parziali in modo da vedere se sono uguali 2 a 2

- caso di $i=1$ e $j=2$:

$$= \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial x^2}{\partial y} = 0 \qquad = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

- caso di $i=3$ e $j=1$:

$$= \frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad = \frac{f_1}{\partial z} = \frac{\partial x^2}{\partial z} = 0$$

- caso di $i=2$ e $j=3$

$$= \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial z} = 0 \qquad = \frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ES 76:

$$\int_\gamma e^y dx + \left(xe^y - \frac{1}{y}\right) dy$$

le scrittura equivalente sarebbe $F(x;y) = \left(e^y; xe^y - \frac{1}{y}\right)$
Dove $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) = \left(te^t ; \log(t^2+2)\right) \qquad t \in [0;1]$$

Svolgimento

Questo è un integrale di linea di seconda specie dove la parametrizzazione è già data. Il dominio di F e semplicemente connesso infatti: $\Omega \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ quindi posso usare il teorema 3 e fare le derivate parziali:

- $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial e^y}{\partial y} = e^y$

- $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial \left(xe^y - \frac{1}{y}\right)}{\partial x} = e^y$

le due sono uguali quindi il CAMPO È CONSERVATIVO quindi posso trovare un potenziale per poi calcolare l'integrale

$$f(x;y) = \left(xe^y - \log y\right)$$

per controllo calcoliamo il gradiente di $f(x;y)$

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} ; \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\right) = \left(e^y ; xe^y - \frac{1}{y}\right)$$

che coincide proprio con F quindi a questo

$$-\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{2x}{z} = x$$

- caso di $i = 3$ e $j = 1$

$$-\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right)}{\partial x} = -\cos z$$

$$-\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial(xy - \operatorname{sen} z)}{\partial z} = -\cos z$$

- caso di $i = 2$ e $j = 3$

$$-\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{x^2}{z} - \frac{e^y}{z}\right)}{\partial z} = \frac{e^y}{z^2}$$

$$-\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right)}{\partial y} = \frac{e^y}{z^2}$$

Il campo è dunque conservativo perché i risultati delle derivate parziali sono a 2 a 2 uguali. I potenziali saranno:

$$f(x;y;z) = \frac{x^2 y}{z} - x\operatorname{sen} z - \frac{e^y}{z} + k$$

Il potenziale lo costruisco studio facendo ricordandomi che esso è uno scalare quindi non avrò diverse componenti ed ancora esso derivato rispetto le variabili di $\mathbb{R}^n$ mi fornirà proprio (facendo il grad f) $F(x;y;z)$ (se $n=3$; se $n=2$ $F(x;y)$).

Faccio le prove:

$$\text{grad } f : \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) =$$

il teorema di Green

d) Determinare a in modo che F sia conservativo su $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento

- Faccio il disegno di γ:
  - Per farlo addrizzo l'ultima parte del dominio che è una iperbole equilatera ma essa è traslata:

$xy = k$ centrata nell'origine

$(x - x_c)(y - y_c) = k$ centrata in $(x_c ; y_c)$

dunque:

$$(2y+1)(2x+1) \leq 4$$

$$2\left(y - \tfrac{1}{2}\right)2\left(x + \tfrac{1}{2}\right) \leq 4$$

$$\left(y + \tfrac{1}{2}\right)\left(x + \tfrac{1}{2}\right) \leq 1 \qquad C\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$$

inoltre so che mi trovo nel primo quadrante perché $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Devo ora trovare i punti di intersezione con gli assi x e y dell'iperbole:

- Se $x = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \left(y + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{2}y = 1 - \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{2}y = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{4} \cdot 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

- Se $y = 0$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

l'iperbole interseca gli assi nei punti $A(0; \frac{3}{...})$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \log 4 = \log 4 - \frac{3}{4}$$

- **PUNTO B**: devo parametrizzare γ ed essa può essere spezzata in 3 tratti: quindi avrò 3 parametri:
  - γ_1: parametrizzo la parte di iperbole è il pezzo più laborioso del punto b perché devo isolare una variabile:

    PONGO $x = t$

    allora (vedi passaggi per esplicitare la y)

    $$y = \frac{-t + 3/2}{2t + 2}$$

    dunque:

    $$\gamma_1 : \left(t ; \frac{-t + 3/2}{2t+2} \right) \quad t \in \left[\frac{3}{2} ; 0 \right]$$

  - γ_2: $(0 ; t) \quad t \in \left[\frac{3}{2} ; 0 \right]$ dalla retta $x = 0$
  - γ_3: $(t ; 0) \quad t \in \left[0 ; \frac{3}{2} \right]$ dalla retta $y = 0$

- **PUNTO C**: Calcolo l'integrale di $F(x;y)$ lungo γ ponendo $a = 3$

$$F(x;y) = (x + y ; ax)$$

$$F(x;y) = (\underbrace{x+y}_{f_1} ; \underbrace{3x}_{2})$$

Ora vado a calcolare le derivate parziali

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$$

$$a - 1 = 0$$

$$\boxed{a = 1}$$

Se $a=1$ il campo è CONSERVATIVO

ES 55: Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma z^2 \, dS$, dove γ è l'arco di equ parametriche

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = e^t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Svolgimento

Risistemo i dati:

$$f(x;y;z) = (\cos t, \sin t, e^t) \quad t \in [0;2\pi]$$

Questo è un integrale curvilineo di prima specie e quindi lo risolvo come tale:

- calcolo $\gamma'(t)$ =

$$\gamma'(t) = (-\sin t; \cos t; e^t)$$

- calcolo la norma:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + e^{2t}} = \sqrt{1+e^{2t}}$$

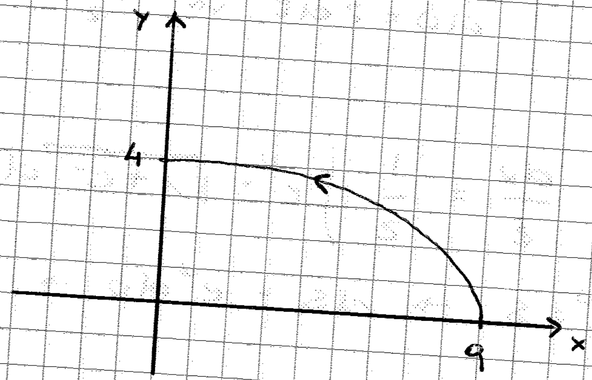
- La $f(\gamma(t))$:

$$f(\gamma(t)) = e^{2t}$$

- L'integrale sarà dunque:

... di prima specie e come tale va trattato.

- disegno l'ellisse:



- parametrizzo la curva conoscendo l'equaz della ellisse:

$$x = a\cos t = 3\cos t$$
$$y = b\,\text{sen}\,t = 2\,\text{sen}\,t$$

dunque $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) = (3\cos t,\ 2\,\text{sen}\,t) \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

- calcolo $\gamma'(t)$:

$$\gamma'(t) = (-3\,\text{sen}\,t;\ 2\cos t)$$

- calcolo la NORMA

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-3\,\text{sen}\,t)^2 + (2\cos t)^2} = \sqrt{9\,\text{sen}^2 t + 4\cos^2 t} =$$
$$= \sqrt{9\,\text{sen}^2 t + 4(1 - \text{sen}^2 t)} = \sqrt{9\,\text{sen}^2 t + 4 - 4\,\text{sen}^2 t} =$$
$$= \sqrt{4 + 5\,\text{sen}^2 t}$$

- scrivo $f(\gamma(t))$

$$f(\gamma(t)) = 9\cos^2 t \cdot 2\,\text{sen}\,t$$

ES 64: Sia $F(x;y) = \left(3y - e^{\operatorname{sen} x}; 7x + \sqrt{y^4+1}\right)$
si calcoli $\int_\gamma F \cdot t$, dove γ è la circonferenza di raggio 3 orientata positivamente
$x^2 + y^2 = 9$

Svolgimento

Questo esercizio può essere risolto in due modi:

1) Con Green:

$$\int_\gamma F \cdot t = \iint_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

dove K è la circonferenza intera quindi va da 0 a 2π

$$= \iint_K \left(\frac{\partial(7x + \sqrt{y^4+1})}{\partial x} - \frac{\partial(3y - e^{\operatorname{sen} x})}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_K (7-3)\, dx\,dy = \iint_K 4\, dx\,dy = 4\iint_K dx\,dy$$

Ora mi si aprono 2 strade:

a) mi rendo conto che $\iint_K dx\,dy$ è proprio l'area del cerchio in questione e quindi la calcolo geometricamente e la moltiplico per 4.

$$4\iint_K dx\,dy = 4 \cdot \pi r^2 = 4\pi \cdot 9 = 36\pi$$

b) non mi rendo conto di quanto sopra spiegato ed allora integro sul

ES 58: Sia $F(x;y;z) = (x; xy; xyz)$ calcolare $\int_\gamma F \cdot t$ dove γ è l'arco di curva definito dalle equ parametriche $\gamma(t) = (t; t^2; t^3)$ con $0 \leq t \leq 1$ orientato nel senso delle t crescenti

Svolgimento

$$\gamma(t) = (t; t^2; t^3) \quad t \in [0;1]$$

Questo è un integrale curvilineo di seconda specie e lo risolvo come tale anche perché non posso usare Green perché sono in tre dimensioni

- Calcolo $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = (1; 2t; 3t^2)$$

- Trovo $F(\gamma(t))$

$$F(\gamma(t)) = (t; t \cdot t^2; t \cdot t^2 \cdot t^3) = (t; t^3; t^6)$$

- Scrivo l'integrale

$$\int_\gamma F \cdot t = \int_0^1 (t; t^3; t^6) \cdot (1; 2t; 3t^2) = \int_0^1 t + 2t^4 + 3t^8 \, dt =$$

$$= \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 2t^4 + \int_0^1 3t^8 = \int_0^1 t\,dt + 2\int_0^1 t^4\,dt + 3\int_0^1 t^8\,dt =$$

$$= \left(\frac{t^2}{2}\right)_0^1 + 2\left(\frac{t^5}{5}\right)_0^1 + 3\left(\frac{t^9}{9}\right)_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{9} =$$

$$= \frac{15+12+10}{30} = \frac{37}{30}$$

$$= \int_0^1 x - x^2 - x^3 + x \, dx = \int_0^1 2x - \int_0^1 x^2 - \int_0^1 x^3 =$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)_0^1 = \frac{12-4-3}{12} = \frac{5}{12}$$

<u>ES 74</u>: Verificare che il campo vettoriale

$$F(x;y) = \left(e^{-y^2} ; 1 - 2xye^{-y^2} \right)$$

sia conservativo e determinarne un potenziale

Svolgimento

Questo è un esercizio sul potenziale allora verifico che le ipotesi per cui possa essere conservativo siano verificate.
Il dominio di F è $\mathbb{R}^2$ infatti x e y non hanno restrizioni in $\mathbb{R}^2$ ~~dunque~~ ed esso è semplicemente connesso allora calcolo le derivate parziali:

- $$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial\left(e^{-y^2}\right)}{\partial y} = -2e^{-y^2} \cdot y$$

- $$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial\left(1 - 2xye^{-y^2}\right)}{\partial x} = -2e^{-y^2} \cdot y$$

le due sono uguali quindi per il Teo. 2 il campo è CONSERVATIVO. Ora trovo il potenziale e lo faccio passo a passo provando a derivare parzialmente F(x;y) in modo che il grad f mi dia F(x;y)