NUMERO: 661

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Boero

MATERIA: Analisi Matematica II
Prof. Bacciotti

Corso di Laurea in INGEGNERIA EDILE

Prof. Andrea Bacciotti

Corso 19ACIFB

APPUNTI DI ANALISI MATEMATICA II

A cura di:
Federico Boero

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 254

FIGURE 3D
- SFERA $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=R^2$
- PIANO $Ax+By+Cz+D=0$
- CILINDRO $x^2+y^2\leq 1$ una cordinata non c'è perché è quella parallela
- CONO : $z^2=x^2+y^2$
- PARABOLOIDE: $(z-z_c)^2=(x-x_c)^2+(y-y_c)^2$
  - $z=a-bx^2-cy^2 \leftarrow \theta$
  - $z=a+bx^2+cy^2 \leftarrow \theta$

CORDINATE
- POLARI $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $|J|=\rho$
- ELLISSOIDICHE $\begin{cases} x=a\rho\cos\theta \\ y=b\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $|J|=ab\rho$
- SFERICHE $\begin{cases} x=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$ $|J|=\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$
- CILINDRICHE $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z=z \end{cases}$ $|J|=\rho$

PARABOLA $\Delta=b^2-4ac$
COORDINATE VERTICE
$\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

$\boxed{\text{Area ellisse : } \pi\cdot a\cdot b}$

INTEGRALI TRIPLI : o per fili o per strati devo arrivare ad avere prima 1 integrale doppio e poi risolvo il triplo

TEOREMA DI GULDINO: $\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz = 2\pi\iint_D y\,dy\,dz$

INTEGRALI CURVILINEI : $\int_\gamma f(xyz)\,ds = \int_a^b f(\gamma_1(t);\gamma_2(t);\gamma_3(t))\cdot\|\gamma'(t)\|\,dt$ I SPECIE

devo parametrizzare la curva

$$\int_\gamma F\cdot t = \int_a^b F(\gamma(t)) \underset{\uparrow}{\bullet} \gamma'(t)$$

PRODOTTO SCALARE

TEOREMA DI GAUSS $\oint F\cdot t = \iint_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy$ si usa se la curva è chiusa e si integra sul bordo dell'area quindi sull'area

CONSERVATIVITÀ : devo fare le derivate parziali come per green e confrontarle due a due se è conservativo posso scrivere il potenziale

POTENZIALE = $\mathrm{grad}\,f\left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y};\frac{\partial f}{\partial z}\right) \leftarrow$ è una funzione che derivata parzialmente mi da $F(x;y;z)$ cioè il vettore di partenza

SERIE

GEOMETRICA $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$
- CONVERGE a: $\frac{a_0}{1-q}$ se $|q|<1$
- DIVERGE a $+\infty$ se $q \geq 1$
- È INDETERMINATA se $q \leq -1$

ARMONICA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$
- CONVERGE se $p>1$
- DIVERGE a $+\infty$ se $p \leq 1$

- $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$
- $n^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{n^k} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^k} = 1$
- $n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$
- $n! = n((n-1)!)$

$\lim \sqrt[n]{n!} = \infty$

TEOREMI:

- Condizione necessaria: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ forse converge se $\neq 0$ DIVERGE
- CONFRONTO: $0 \leq a_n \leq b_n$: Se $\sum b_n$ CONVERGE allora $\sum a_n$ CONVERGE
  Se $\sum a_n$ DIVERGE allora $\sum b_n$ DIVERGE
- CONFRONTO ASINTOTICO: Siano a_n e b_n due successioni ≥ 0 per ogni n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in [0;+\infty)$$
- $\ell \neq 0$ le due serie hanno lo stesso carattere
- $\ell = 0$ se b_n CONVERGE a_n CONVERGE
- $\ell = 0$ se a_n DIVERGE b_n DIVERGE

- CRITERIO DELLA RADICE: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$
  - se $\ell > 1$ DIVERGE
  - se $\ell < 1$ CONVERGE
  - se $\ell = 1$ NON SO
- CRITERIO DEL RAPPORTO: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ come sopra

PROGRESSIONE GEOMETRICA con $q=2$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i = \frac{2^{n+1}-1}{2-1}$$

- CRITERIO DELL'INTEGRALE: f funzione non negativa e decrescente la serie converge se e solo se converge l'integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)\,dx = \begin{cases} \ell \text{ converge} \\ +\infty \text{ DIVERGE} \end{cases}$$

- LEIBNIZ: $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ e b_n sia decrescente cioè $b_{n+1} \leq b_n$, se è vero converge
  posso farlo in due modi: o con b_n' (derivata non crescente) oppure come b_{n+1} come per il rapporto

SUCCESSIONI DI FUNZIONI: $f_n(x)$
- CONVERGENZA PUNTUALE: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
- CONVERGENZA UNIFORME: $\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{\infty} = 0$

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \sup |f_n(x) - f(x)|$$

cioè l'estremo superiore devo fare la derivata prima e studiarla se trovo un SUP. ne prendo la x e sostituisco in $|f_n(x) - f(x)|$ e poi faccio il limite. Se non trovo il sup. faccio i limiti agli estremi e risultato mi da già la y quindi ne faccio il limite

SERIE DI FUNZIONI: Le studio come le serie numeriche

- CRITERIO DI WEISTRASS:
  1) $|f_n(x)| \leq M_n$ maggiorante senza x
  2) Se $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ se converge allora la serie iniziale converge TOTALMENTE

) DUE AUTOVALORI REALI COINCIDENTI: trovo il Δ = 0 quindi considero che vale lo stesso autovalore (es $\lambda = -1$) a questo punto calcolo l'autospazio generato es $\mathcal{L}(1;-1) = u$. L'integrale generale sarà:

$$x = \varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} \cdot u + c_2 e^{\lambda t} \cdot (ut + v) \leftarrow$$ FORMULA INT GEN

mi manca v per trovarlo uso la formula

$$\lambda v + u = Av \Rightarrow \text{dove}$$

A: matrice associata
λ: autovalore
u: autospazi
v: incognita

$$\rightarrow \text{es: } -1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

Prodotto righe colonne

$$\begin{pmatrix}-\alpha\\ -\beta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha-2\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-\alpha+1=\beta\\ -\beta-1=-\alpha-2\beta\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha=-\beta+1\\ -\beta-1=\beta-1-2\beta\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha=-\beta+1\\ -\beta-1=-\beta-1\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha=-\beta+1\\ -1=-1\end{cases}$$

devo assegnare dei valori ad α e β tali che $\alpha = -\beta+1$ sia verificato ad esempio $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ $(0 = -1+1 \Rightarrow 0 = 0)$

A questo punto il mio integrale generale sarà

$$\varphi(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\left[\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right] \qquad v = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

Se voglio l'int. particolare $\varphi(0) = (1,-1)$

$$\tilde{\varphi}(0) = c_1 e^0\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} + c_2 e^0\left[\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}0 + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}c_1 = 1\\ -c_1+c_2=-1\end{cases} \quad \begin{cases}c_1 = 1\\ c_2 = 0\end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(t) = 1 \cdot e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} + 0 \cdot [\ldots] = 1 \cdot e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

---

2 AUTOVALORI IMMAGINARI

$$\text{es: } \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} \nearrow \begin{matrix}\alpha & \beta\\ \downarrow & \downarrow\\ 1 + & i\end{matrix} \searrow 1 - i\beta$$

$\alpha = 1$ e $\beta = 1$

$$\varphi(t) = c_1 e^{\alpha t}\Big((\cos\beta t)u - (\operatorname{sen}\beta t)v\Big) + c_2 e^{\alpha t}\Big((\cos\beta t)v + (\operatorname{sen}\beta t)u\Big)$$

devo trovare u e v

$$\alpha u - \beta v = Au \qquad\qquad \alpha v - \beta u = Av$$

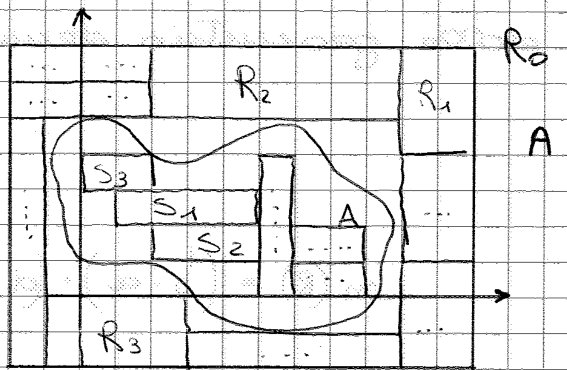
$$1\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a-c=-2b\\ b-d=a+2b\end{cases}$$

vado avanti così e lo faccio anche x l'altro

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 254

Considero una successione di plurirettangoli ciascuno contenuto nel precedente ma tutti contenuti in A cioè:



$$A \subseteq \underbrace{\cdots \subseteq R_3 \subseteq R_2 \subseteq R_1 \subseteq R_0}$$

PLURIRETTANGOLI DI CUI CONOSCO LA MISURA

Ora faccio la stessa cosa dentro ad A

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \cdots \subseteq A$$

È facile a questo punto intuire che la successione con R è quella per eccesso e quella con S è quella per difetto.

Supponendo ora di riuscire ad approssimare passo dal geometrico al numerico cioè introduco le misure:

$$0 \leq \cdots \leq m(R_3) \leq m(R_2) \leq m(R_1) \leq m(R_0)$$

questa successione è MONOTONA e LIMITATA quindi ammette LIMITE

$$\lim_{k \to \infty} m(R_k) = l_R$$

questo limite esiste finito ed è maggiore di zero.

Ora faccio la stessa cosa su S

$$m(S_1) \leq m(S_2) \leq m(S_3) \leq \cdots \leq m(R_0)$$

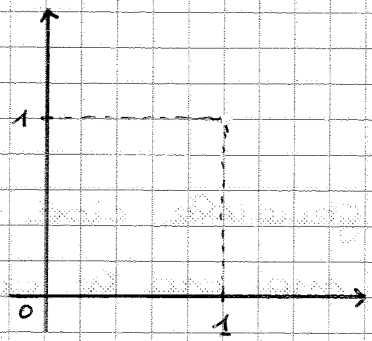
anche questa successione è limitata e più

$$\lim \tilde{R}_k = \lim \tilde{S}_k = m(A)$$

Questa misura DEVE rispettare certi assiomi ed essa li RISPETTA.

→ INSIEMI NON MISURABILI essi possono essere ad esempio:

$$Q \subseteq [0;1] \times [0;1]$$



$$Q = \{(x;y) : x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}\}$$

È un insieme non disegnabile e non immaginabile possiamo vederlo come un insieme di punti, esso dunque non è misurabile perché la figura non ha un contorno definibile al massimo posso arrivare al contorno 1;1 e quindi:

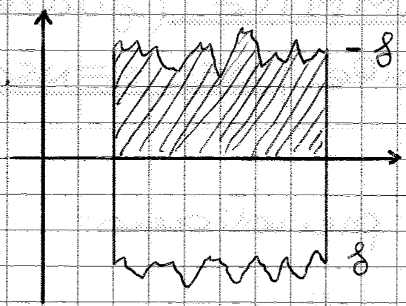
$$1 \leq m[R_k]$$

e la medesima cosa succede per gli S

$$0 = m(S_k)$$

$$\lim_{k \to \infty} m\{S_k\} = 0 \qquad 1 \leq \lim \{R_k\}$$

$$l_S \neq l_R$$



in questo caso non viene rappresentata un'area

→ Se non ho più nessuna restrizione sul segno cioè ho una $f(x)$ qualsiasi:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$ PARTE POSITIVA DI f

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$ PARTE NEGATIVA DI f

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

e se non cambio il segno ottengo il valore assoluto

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

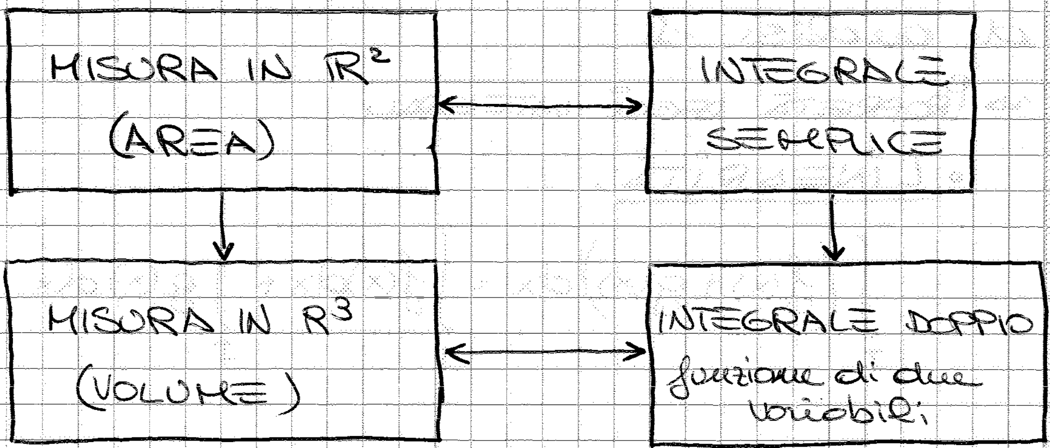
DEFINIZIONE DEFINITIVA:

Data $f(x)$ $I \subset \operatorname{dom} f$ limitato

dirò che f è integrabile su I se entrambe $f^+(x)$ e $f^-(x)$ sono integrabili e definirò:

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f^+(x)\,dx - \int_I f^-(x)\,dx = m(T_{f^+_I}) - m(T_{f^-_I})$$

gli INTEGRALI DOPPI:



Abbiamo visto che le prime due sono ben definite da un vincolo. Proviamo ora a dimostrare che lo sono anche le seconde due

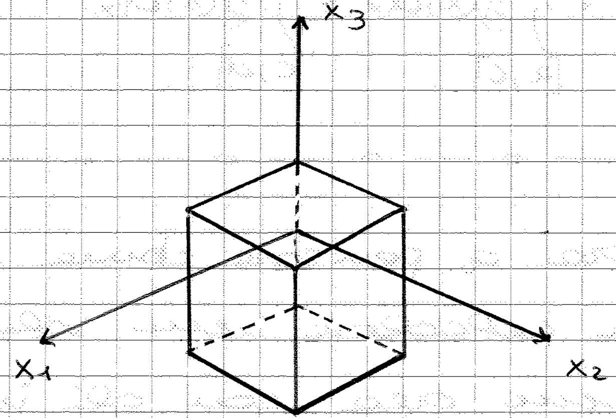
MISURA IN $\mathbb{R}^3$

Cominciamo dalle figure più semplici cioè il PARALLELEPIPEDO

$$R^3 \; (x_1 ; x_2 ; x_3)$$

di cui chiamerò così il prodotto cartesiano di tre misure

$$[a_1 b_1] \times [a_2 b_2] \times [a_3 b_3] = Q$$



Definirò la misura di Q come:

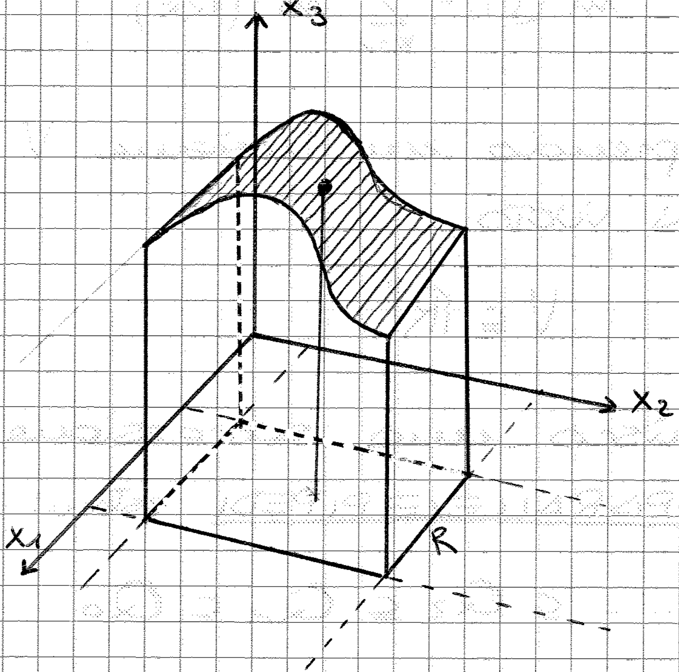
INTEGRALE DEFINITO DOPPIO NEL SENSO DI RIEMANN

Affrontiamo la spiegazione andando per passaggi:

1. funzioni definite su rettangoli

1. A. $f(x_1; x_2) \geq 0$

$$T_{f_R} = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1; x_2) \in R \quad 0 \leq x_3 \leq f(x_1, x_2)\}$$



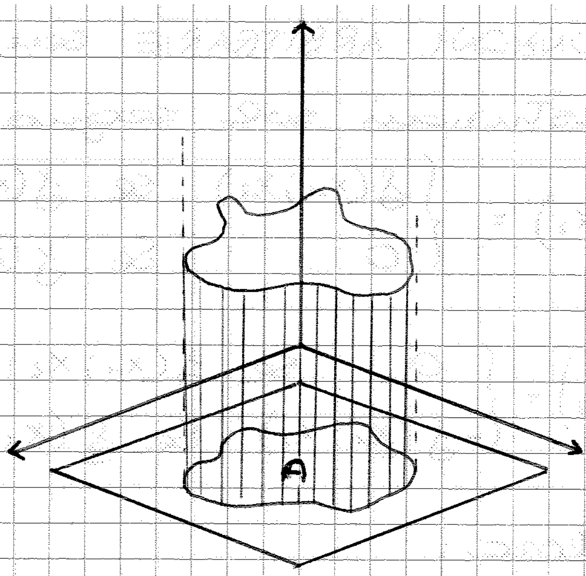
Se T_{f_R} è misurabile dirò che f è integrabile su R

$$\rightsquigarrow \iint_R f(x_1; x_2)\, dx_1, dx_2 = m\, T_{f_R} \leftarrow$$

1. B. $f(x_1; x_2) \leq 0 \quad \forall (x_1; x_2) \in R$

f è integrabile se risulta misurabile T_{-f_R} e definisco:

$$\iint_R f(x_1; x_2)\, dx_1 dx_2 = -m\,(T_{-f_R})$$



Idealmente questo è un cilindro di altezza 1

2. Estensione del concetto di integrale doppio ai domini di integrazione che sono insiemi misurabili

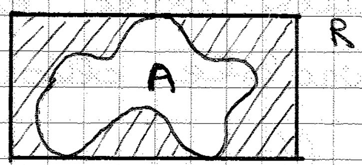
$$f(x_1; x_2): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{LIMITATA}$$

$$A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \text{MISURABILE} \quad A \subseteq \operatorname{dom} f$$

DEFINIZIONE: dico che f è integrabile su A se la nuova funzione:

$$\tilde{f}(x_1; x_2) = \begin{cases} f(x_1; x_2) & \text{se } (x_1; x_2) \in A \\ 0 & \text{se } (x_1; x_2) \notin A \end{cases}$$

è integrabile su ogni rettangolo $R \subseteq A$



$$\iint_A f(x_1; x_2)\, dx_1; dx_2 = \iint_R \tilde{f}(x_1; x_2)\, dx_1\, dx_2$$

CALCOLO DEGLI INTEGRALI DOPPI

$f(x_1; x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA

Sia R un rettangolo

$$[a,b] \times [c;d] \subseteq \text{dom } f$$

Consideriamo la funzione data e blocchiamo una delle due variabili:

$$\int_c^d f(x_1; x_2)\, dx_2$$

ho deciso di considerare x_1 come una costante così ho un integrale semplice quindi so calcolarlo però x_1 c'è ancora allora quello che trovo è

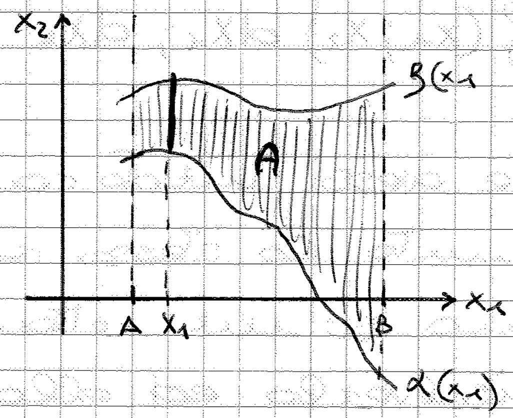
$$F(x_1) = \int_c^d f(x_1; x_2)\, dx_2$$

$\Rightarrow$ <u>TEOREMA</u> $F(x_1)$ È CONTINUA !!
ma allora $F(x_1)$ è integrabile ed allora integro la seconda volta una rispetto a x_1

$$\int_a^b F(x_1)\, dx_1 = C$$

sono sparite entrambe le variabili e quindi ho finito.

- VERTICALMENTE CONVESSE



$\alpha(x_1) \leq \beta(x_1)$

$\forall x_1 \in$

esattamente come prima faccio:

$$F(x_1) = \int_{\alpha(x_1)}^{\beta(x_1)} f(x_1; x_2)\, dx_2$$

Si può dimostrare che se f_1 è continua allora anche F è continua:

$$\int_a^b \left(\int_{\alpha(x_1)}^{\beta(x_1)} f(x_1; x_2)\, dx_2 \right) dx_1 = \iint_A \left(f(x_1; x_2)\, dx_1 \right) dx_2$$

- ORIZZONTALMENTE CONVESSE

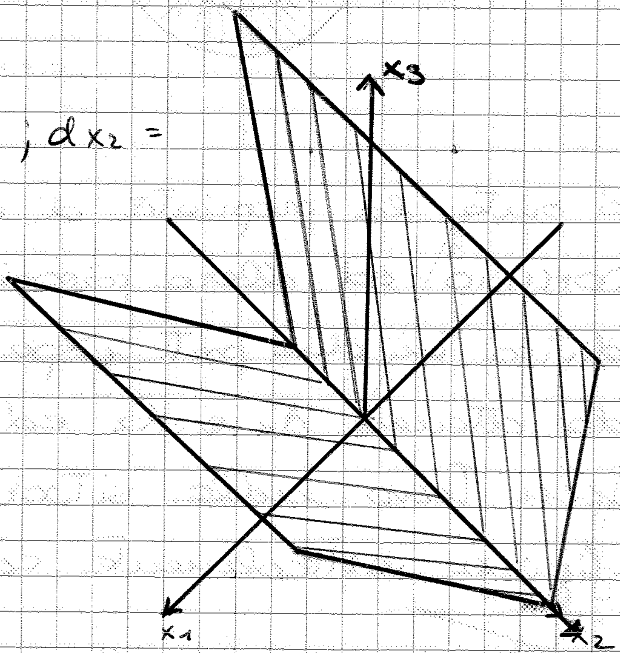
manca un pezzo

funzione definita a tratti:

$$\iint_A \ldots = \iint_{A_1} \ldots + \iint_{A_2} \ldots = \iint_{B_1} \ldots + \iint_{B_2} \ldots + \iint_{B_3} \ldots$$

N.B. Sommando le parti posso estendere la STRATEGIA ed arrivare ad applicare le formule di decomposizione. Questa formula è molto utile anche per domini semplici come ad esempio:

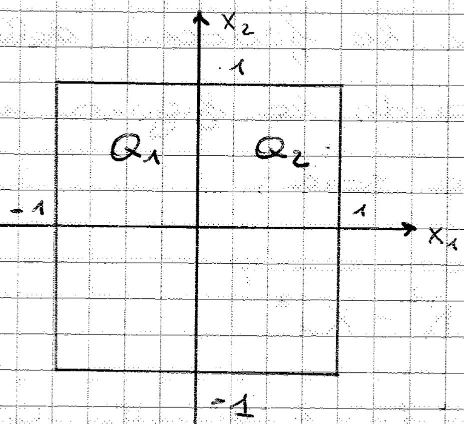
$$\iint_Q |x_1| \, dx_1 ; dx_2 =$$



$$Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

$$|x_1| = \begin{cases} x_1 & \text{se } x_1 > 0 \\ -x_1 & \text{se } x_1 < 0 \end{cases}$$

Il segno cambia lungo x_2 quindi mi conviene considerare separatamente Q_1 e Q_2



E dunque ottengo che:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 254

QUINDI conviene SEMPRE vedere com'è fatto il dominio f e la funzione in modo che sia possibile visualizzare delle SEMPLIFICAZIONI.

CAMBIAMENTI DI PARAMETRO o DI COORDINATE PER INTEGRALI DOPPI

La scelta di un opportuno cambio di variabile o di coordinate può portare a calcolare un integrale doppio con due integrali semplici. Esse sono sostanzialmente le stesse regole valide per integrali semplici con alcune differenze:

→ Rivediamo la sostituzione per integrali semplici:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

→ PASSAGGI:

$x = \varphi(t) \quad : \quad [c;d] \to [a;b]$

$dx = \varphi'(t) \cdot dt$

ed infine sistemo gli estremi di integrazione

Dal punto di vista geometrico il sistema compensa i cambiamenti.

→ Le sostituzioni per gli integrali doppi non si fanno per rendere più facile la funzione ma bensì per ottenere una geometria più facile del dominio in questo caso l'area cambia cioè la T mi ha dilatato la figura

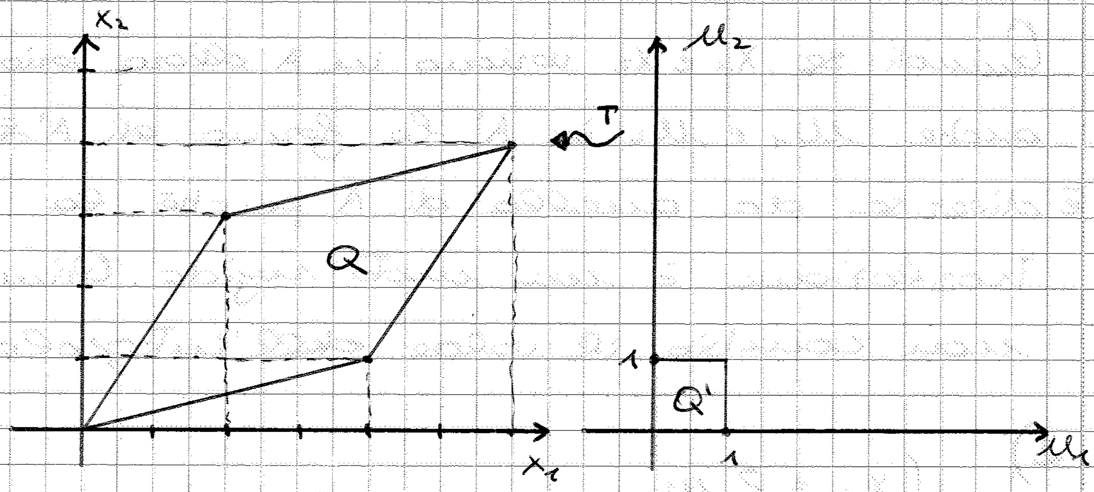
$$f = 1$$

$$\iint_Q 1 \, dx_1 \, dx_2 \neq \iint_{Q'} 1 \, dx_1 \, dx_2$$

Perché una trasformazione sia lecita devo fare in modo di avere UN FATTORE CORRETTIVO altrimenti il cambiamento non è VALIDO.

3)

$$X = Tu = \begin{cases} x_1 = u_1 + 4u_2 \\ x_2 = 3u_1 + u_2 \end{cases}$$



Per ottenere il secondo grafico ho messo le coordinate dei punti sulle equazioni

$$\iint_Q f(x_1; x_2) \, dx_1 \, dx_2 = \iint_{Q'} f(u_1 + 4u_2 ; 3u_1 + u_2) \; ?$$

deve esserci il fattore correttivo

$$f = 1$$

$$m(Q) = 11 = |-11|$$

se poi trovo il determinante della iacobiana:

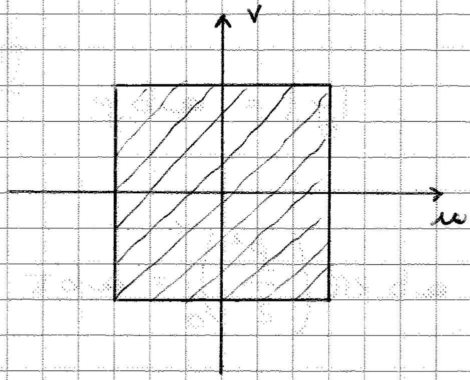
$$\det J_T = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

e dunque ρ è proprio il COEFFICIENTE DI CORREZIONE.

a questo punto per risolvere l'esercizio faccio:

$$2y - x = u \qquad \text{ottengo quindi} \qquad |u| \leq 2$$
$$2y + x = v \qquad\qquad\qquad\qquad |v| \leq 2$$

quindi il nostro dominio diviene:



ora ricavo x e y in funzione di u e v

$$\begin{array}{l} 2y - x = u \\ 2y + x = v \\ \hline 4y + 0 = u + v \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} -2y + x = -u \\ 2y + x = v \\ \hline 2x = v - u \end{array}$$

$$y = \frac{u+v}{4} \qquad\qquad x = \frac{v-u}{2}$$

ora è necessario ricavare lo Jacobiano:

$$dx\,dy = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| du \cdot dv =$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right| du\,dv = \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$$

ora tornando all'integrale mi è possibile risolverlo:

- La parte dell'integrale di D_2 è una semplicissima area e posso calcolarla senza utilizzare gli integrali:

$$\text{Area} = \pi R^2 \rightarrow \frac{\pi}{4} R^2$$

e quindi applicato al nostro caso

$$\frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^2 - \frac{\pi}{4}(1)^2 = \frac{\pi}{4}(2-1) = \frac{\pi}{4}$$

- La parte dell'integrale di D_1 la risolvo cambiando le coordinate

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho\rho \, d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \; \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}$$

→ L'integrale totale sarà dunque:

$$\iint_D f(xy)\,dx\,dy = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}\pi$$

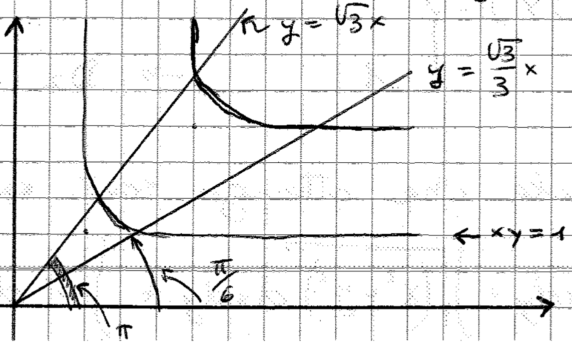
4) $$\int_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$D = \left\{ (x\,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}\,x \;;\; 1 \leq xy \leq 4 \right\}$$

disegnando il dominio ottengo che:

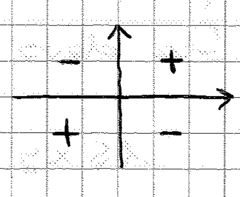
$xy = 4$

$y = \frac{4}{x}$



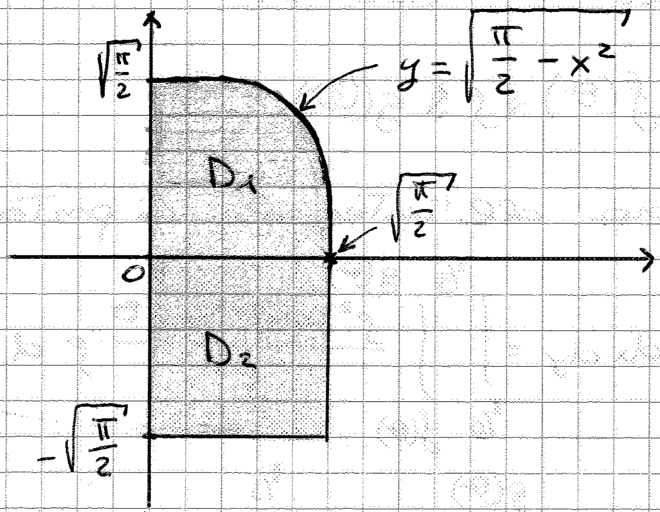
$$D = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \; ; \; -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2} - x^2} \right\}$$

$$|xy| = \begin{cases} xy & xy \geq 0 \quad \text{I e III quad} \\ -xy & xy < 0 \quad \text{II e IV quad} \end{cases}$$



$$y = \sqrt{\frac{\pi}{2} - x^2} \Rightarrow y^2 = \frac{\pi}{2} - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow x^2 + y^2 = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2$$

La funzione dunque ci dice che:



andiamo ora ad impostare il nostro integrale

$$\int_D f(xy)\,dx\,dy = \int_{D_1} xy \,\text{sen}(x^2)\cos(y^2)\,dx\,dy + \int_{D_2} -xy\,\text{sen}(x^2)\cos(y^2)\,dx\,dy =$$

• Analizzo D_1

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\,\text{sen}(x^2) \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2} - x^2}} 2y\cos(y^2)\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\,\text{sen}(x^2)\Big[\text{sen}(y^2)\Big]^{\sqrt{\frac{\pi}{2} - x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\,\text{sen}(x^2)\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\,\text{sen}(x^2)\cos(x^2)\,dx =$$

CALCOLO DEGLI INTEGRALI TRIPLI

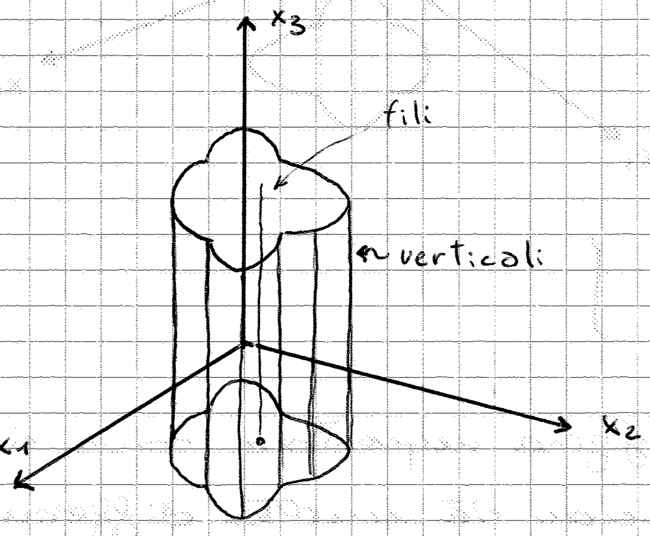
Gli integrali tripli si riducono in tre integrali semplici e questa riduzione avviene secondo due metodi:

- riduzione per fili
- riduzione per strati

i due metodi sono equivalenti usarne uno o l'altro dipende dal tipo di integrale che devo risolvere

→ riduzione per fili:

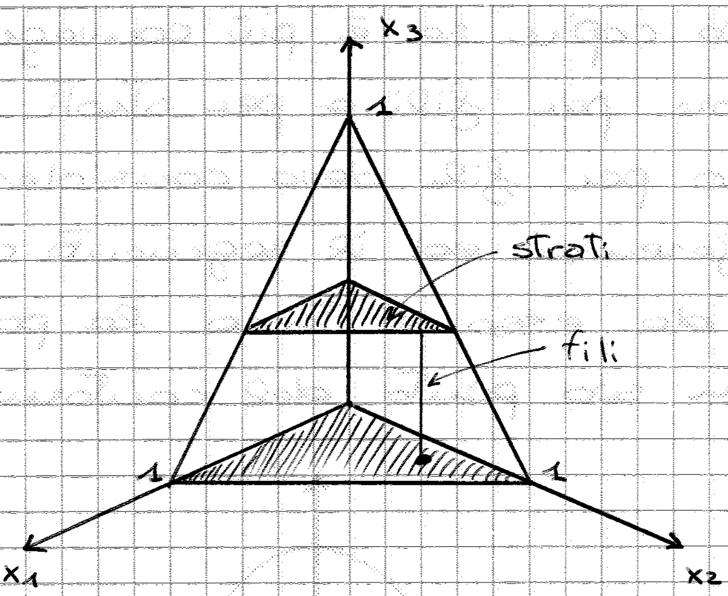
viene utilizzata tipicamente quando la figura da integrare ha una direzione parallela ad uno degli assi (tipicamente x_3) e la figura è facilmente descrivibile per le sue verticali:



l'integrale triplo viene scritto dall'interno:

$$\int_{\alpha(x_1;x_2)}^{\beta(x_1;x_2)} f(x_1;x_2;x_3)\,dx_3$$

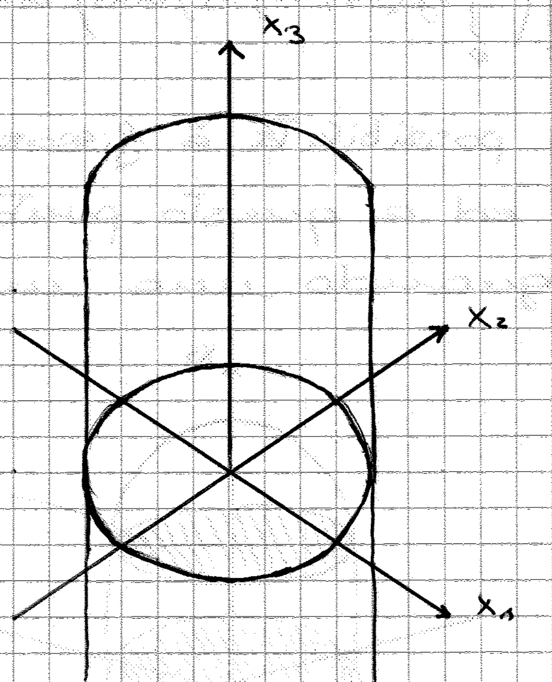
In questo modo viene sottratta l'x_3



Un'altra figura che permette l'utilizzo del metodo sia per fili che per strati è:

$$x_3 = f(x_1; x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$$

la formula mi suggerisce che esso è un paraboloide con la convessità rivolta verso il basso se vedo cosa succede sul piano $x_1; x_2$ mi accorgo che trovo una circonferenza



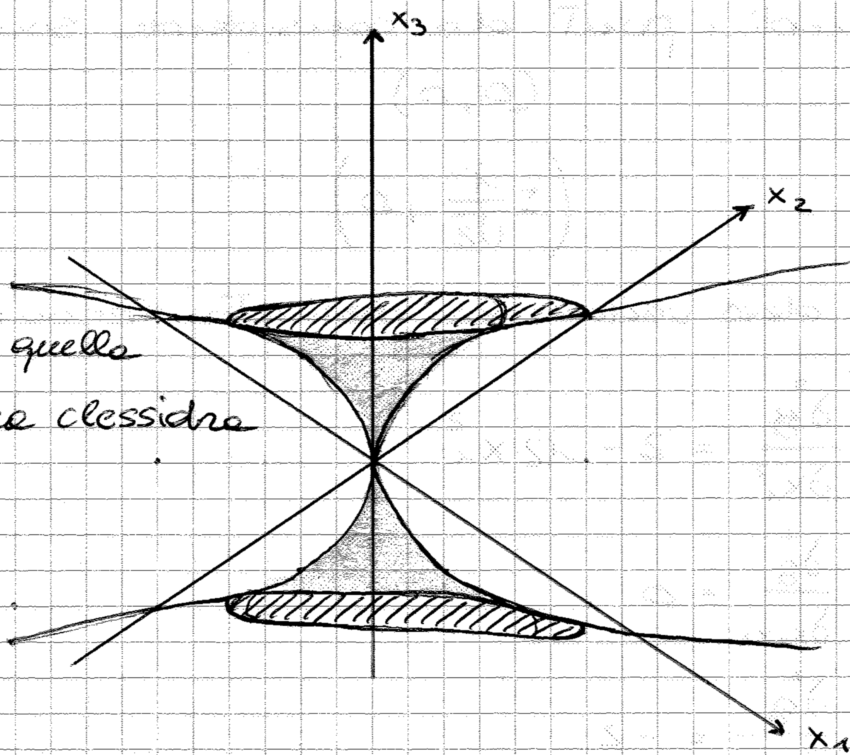
Ora devo capire come è fatto il dominio e

Con $x_1^2 - x_2^2 = 1 - x_3$ Trovo il raggio della nuova circonferenza

$$\int_0^1 \left(\iint_C \left(f(x_1; x_2; x_3) \right) dx_1 dx_2 \right) dx_3$$

Ora analizziamo delle figure per cui scegliere il metodo è importante un esempio di queste è:

$$x_1 = x_3^2$$



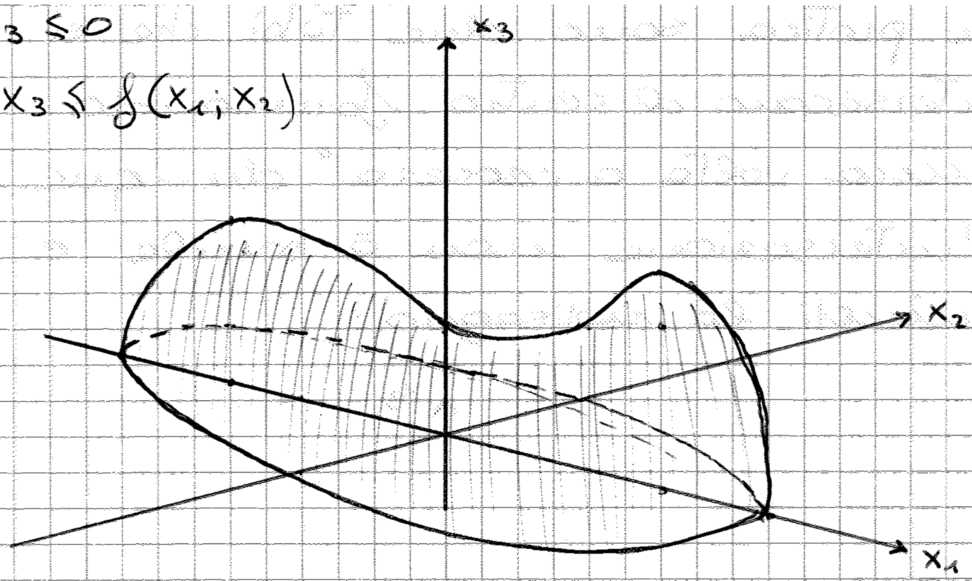
L'idea è quella di una clessidra

La figura è ciò che crea una parabola ruotando intorno a x_3 ovviamente in questo caso è più comodo procedere per STRATI perché ottengo sempre delle circonferenze se andassi per fili mi complicherei moltissimo la vita.

Vediamo ora una figura per cui è molto più comodo procedere per fili:

$x_3 \leq 0$

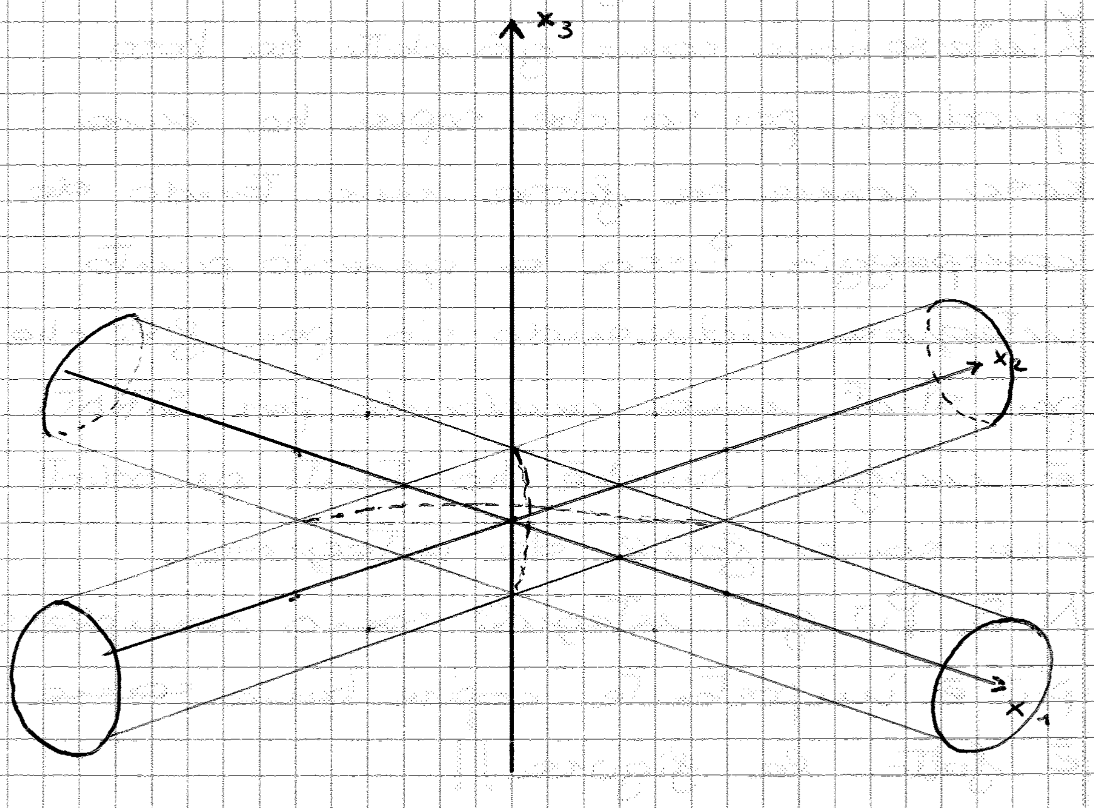
$0 \leq x_3 \leq f(x_1; x_2)$



in questo caso è consigliabile ridurre per FILI perchè altrimenti avrei a che fare con tante circonferenze diverse. Vediamo ora ancora un esempio che è l'unione di due funzioni perpendicolari ad un asse

$x_1^2 + x_3^2 \leq 1$ ~ è indipendente da x_2

$x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ ~ è indipendente da x_1



INTEGRALI TRIPLI → TRE INTEGRALI SEMPLICI

PASSAGGIO PRELIMINARE: può essere fatto un cambio di coordinate che non sempre è necessario ma è utile

RIDUZIONE PER FILI o PER STRATI

CAMBIAMENTO DI COORDINATE INTEGRALI TRIPLI

1) LINEARI: utilizzando una matrice provo a raddrizzare una figura

2) POLARI: è un cambiamento di coordinate tipico del piano infatti è un casino da utilizzare in 3D. Questo nuovo tipo di coordinate prende il nome di COORDINATE CILINDRICHE e SFERICHE.

COORDINATE: significa identificare la posizione di punti attraverso l'assegnazione di numeri.

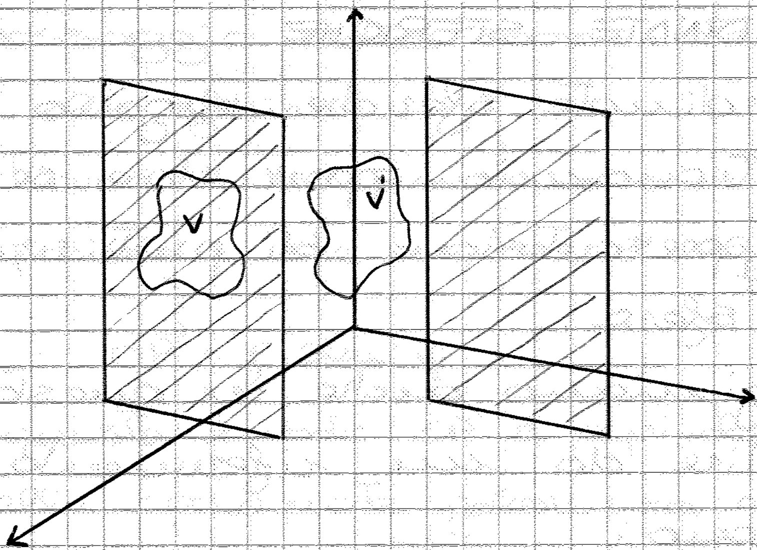
→ COORDINATE CARTESIANE

Come un punto è possibile trovare 3 numeri che identificano un punto:

e quindi:

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos\theta \\ x_2 = \rho \operatorname{sen}\theta \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

in entrambi i casi ho una terna di numeri. Una volta risolto il sistema posso trovare altri numeri

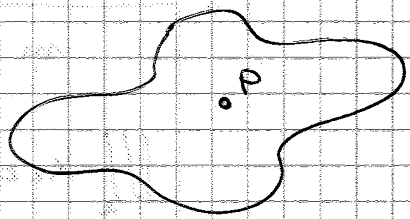


questo è stato fatto per raddrizzare l'angolo. Abbiamo ottenuto una fetta e quindi è cambiata forma e forse è più facile da ridurre tuttavia ho bisogno del coefficiente di compressione che è sempre determinato dal determinante della JACOBIANA

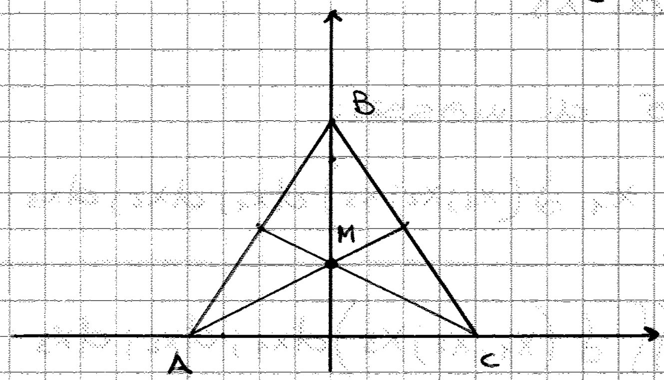
$$J = \begin{array}{ccc} \text{derivata rispetto } \rho & \text{derivata rispetto } \theta & \text{derivata rispetto } x_3 \\ \end{array}$$

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \det = \rho$$

calcolando il determinante trovo quindi il coefficiente correttivo forza descrive completamente la traiettoria come se tutta la massa fosse concentrata in quel punto.



è dunque chiaro che in questo media devo tenere conto di come è distribuita la massa e come varia in ogni punto della figura



Nel disegno sopra la massa è distribuita uniformemente e il baricentro è dato dall'intersezione delle mediane.
Più in generale in 3D con massa distribuita uniformemente si intende:

$$A \subseteq \mathbb{R}^3$$

ed in questo caso il baricentro si definisce come:

$$(g_1, g_2, g_3) = \left(\frac{\iiint_A x_1 \, dx_1 dx_2 dx_3}{m(A)}, \frac{\iiint_A x_2 \, dx_1 dx_2 dx_3}{m(A)}, \frac{\iiint_A x_3 \, dx_1 dx_2 dx_3}{m(A)} \right)$$

devo tenere conto di quanto è lontano dal

Si tratta dunque di considerare il corpo fatto da tanti punti per esempio se voglio considerare il momento di inerzia di una figura 3D rispetto all'origine con massa uniforme ed unitaria dovrò fare:

$$\iiint_A (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

Se la massa non fosse UNIFORME o UNITARIA dovrei moltiplicare per $\delta(x_1; x_2; x_3)$

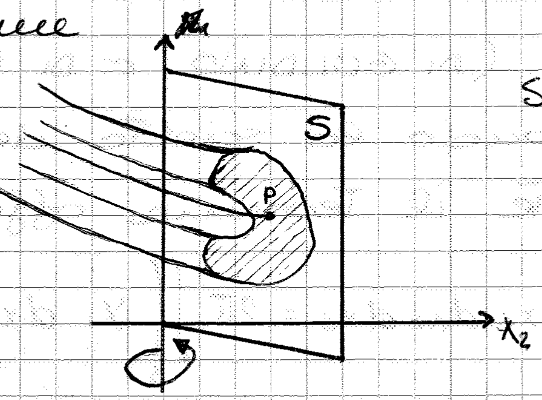
- Se sono rispetto ad un asse:

$$\iiint_A (x_1^2 + x_2^2)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

che viene moltiplicato per $\delta(x_1 x_2 x_3)$ se la massa non è uniforme

CALCOLO DEL VOLUME DEI SOLIDI DI ROTAZIONE (figure 3D)

Un solido di rotazione è una figura piana che viene fatta ruotare intorno ad una retta e nella sua rotazione sviluppa un volume



S = insieme misurabile in $\mathbb{R}^2$

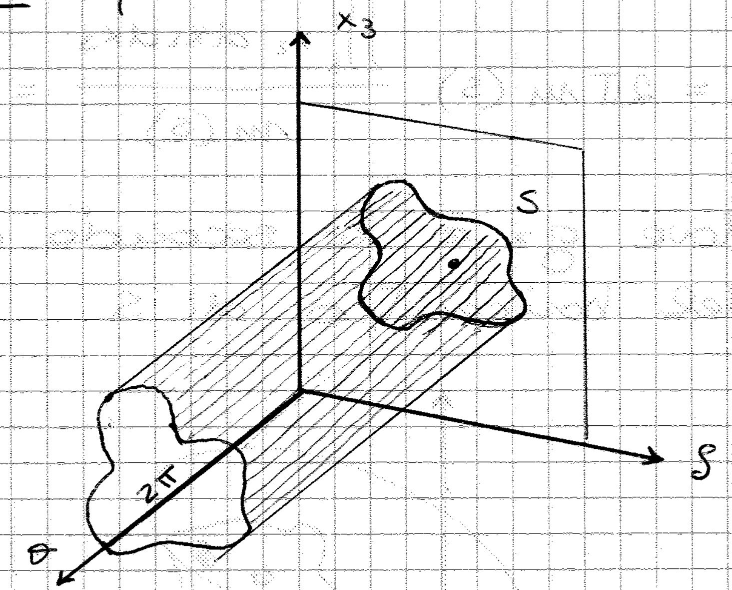
• DIM: l'idea è quella di usare le COORDINATE CILINDRICHE

$$\begin{cases} \underline{x_1} = \rho\cos\theta \\ \underline{x_2} = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ \underline{x_3} = x_3 \end{cases}$$

l'integrale dunque diventa:

$$\iiint_V 1\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iiint_{V'} \rho\, d\rho\, d\theta\, dx_3$$

devo capire chi è V' partendo dalle proiezioni di P anche se faccio ruotare la figura ρ resta costante SEMPRE quindi:



ρ e x_3 non cambiano nella rotazione e dunque da una ciambella ho ottenuto un cilindro che è facil= =mente integrabile per fili

$$\iiint_V 1\, dx_1; dx_2; dx_3 = \iiint_{V'} \rho\, d\rho\, d\theta\, dx_3 =$$

CURVA PARAMETRICA IN $\mathbb{R}^n$ ($n=2$; $n=3$)

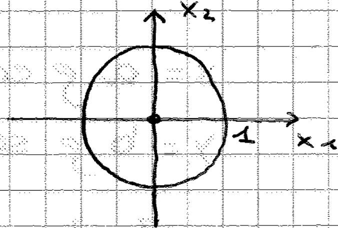
$$\begin{cases} x_1 = \cos t \\ x_2 = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

← CURVA IN FORMA PARAMETRICA

$t \in [0; 2\pi]$

$P = (x_1; x_2)$

$x_1^2 + x_2^2 = 1$



Questo approccio è il migliore perchè mi permette di ragionare nel migliore dei modi.

Chiameremo curva in $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ x_2 = \gamma_2(t) \\ \vdots \\ x_n = \gamma_n(t) \end{cases} \qquad t \in [a; b]$$

Queste componenti le posso considerare come un vettore

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t); \dots ; \gamma_n(t))$$

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

integrali Tripli:

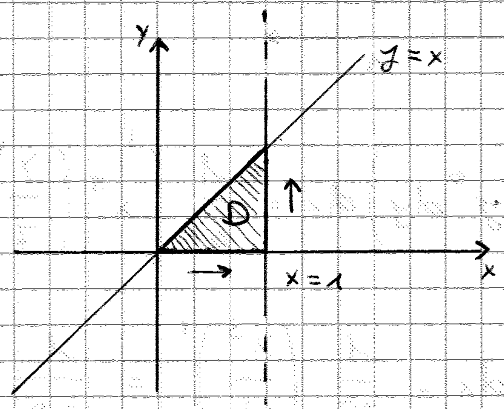
1) $$\int_S x y^2 z^3 \, dx\,dy\,dz$$

$z = x \cdot y$ $\qquad$ $y = x$

$x = 1$

$z = 0$

• quando $z = 0$



$x \cdot y = 0$ se e solo se $x = 0$ e $y = 0$

Se fisso x e y la zeta cresce di conseguenza. Quindi io definisco il mio dominio:

$$D \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq 1,\; 0 \leq y \leq x \right\}$$

quindi l'integrale sarà:

$$\int_D \int_0^{xy=z} x y^2 z^3 \, dx\,dy\,dz =$$

diciamo subito che sia la x che la y non dipendano da z

$$= \int x y^2 \left(\frac{z^4}{4} \right)_0^{xy} dx\,dy =$$

devo passare in coordinate SFERICHE:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & 0 \leq \rho \leq 1 \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

ora torniamo alle formule princi=
=poli

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & \text{SFERA} \\ z^2 = x^2 + y^2 & \text{CONO} \end{cases}$$

nel nostro caso con $x = 0$

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ z = y^2 \end{cases}$$

ed allora

$$2z^2 = 1$$

$$z^2 = \frac{1}{2} \leadsto z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

e quindi trovo φ per z:

$$z = \rho \cos \theta \leadsto 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

dunque l'integrale diventerà:

$$\int_S x^2 \, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \big(\rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \theta \, \overbrace{\rho^2 \operatorname{sen} \varphi}^{|J|} \big) \, d\varphi \, d\theta \, d\rho =$$

$$= \underset{①}{\int_0 \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi} \; \underset{②}{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta} \; \underset{③}{\int_0^1 \rho^4 \, d\rho} =$$

Risolvo i tre integrali separatamente uno

② $\left(\frac{\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2}\right)_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

③ $\left(\frac{\rho^5}{5}\right)_0^1 = \frac{1}{5}$

La soluzione a questo punto non è altro che il prodotto delle 3 soluzioni

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{3}\right) \cdot \pi \cdot \frac{1}{5}$

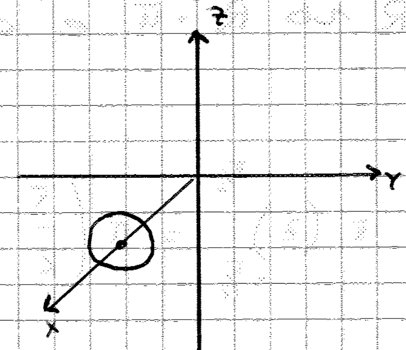
3) Ora proviamo a fare un esercizio con la rotazione

$\left\{x^2 + y^2 - 2x\cos z + \cos^2 z \leq 1 \,;\, -\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

$(x - \cos z)^2 + y^2 \leq 1$

fissando dei punti trovo delle cose:

→ quando $z = 0$ $(x-1)^2 + y^2 = 1$ in questo modo ho un cerchio centrato in $(1;0)$



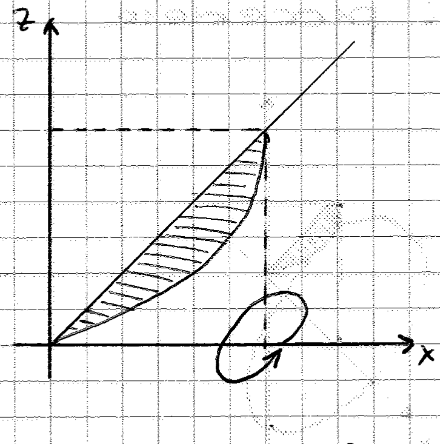
→ quando $z = \pm\frac{\pi}{2}$ $x^2 + y^2 = 1$ è di nuovo un cerchio centrato in (1;0) ma su di un altro quadrante.

→ continuando in questo modo ottengo

5) Calcolare il volume del solido generato da una rotazione attorno all'asse delle x della regione:

$$D = \left\{ (x; 0; z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2 \leq z \leq x \right\}$$

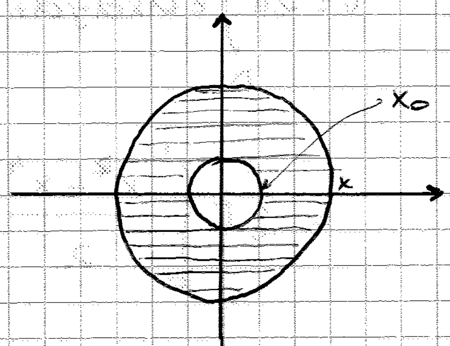
nel nostro caso y=0 quindi considero y=0 come piano:



una volta che la figura ha girato mi troverò una corona circolare fatta così:

$x = x_0$

con $0 \leq x_0 \leq 1$



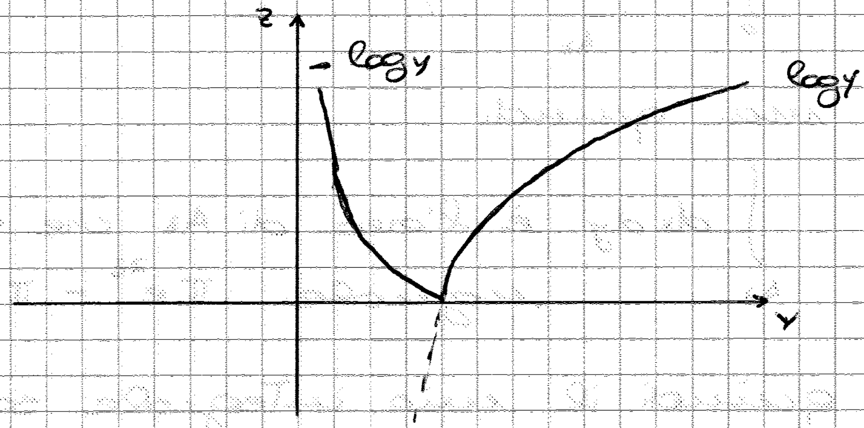
quindi il volume sarà dato da:

$$V = \int_0^1 \left(\int_{A_x} dy\, dz \right) dx$$

ma

$$A_x = \int_{A_z} dy\, dz = \text{Area della corona circolare}$$

considero il piano $x=0$



sapendo che:

- $z = -\log y$

  $-z = \log y$

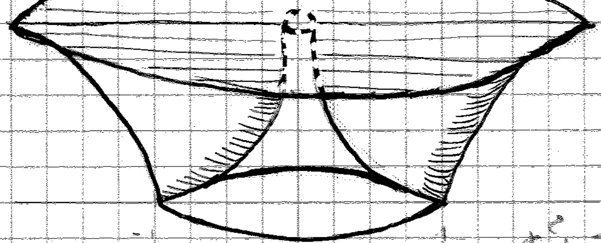
  $y = e^{-z}$ ← raggio

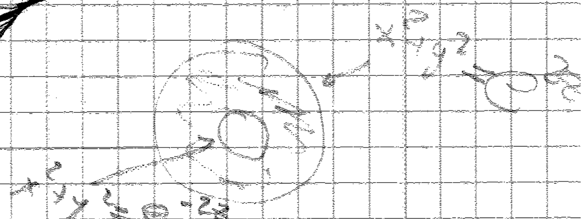
- $z = \log y$

  $y = e^{z}$ ← raggio

quindi otterrò una figura:

$A_z = \{(xy) \in \mathbb{R}^2\}$





$$A_z = \{(xy) \in \mathbb{R}^2 / e^{-2z} \leq x^2+y^2 \leq e^{2z}\}$$

e quindi avrò:

$$\int_0^1 \left(\iint_{A_z} e^{2z} \, dx\,dy \right) dz$$

integro per strati paralleli al piano xy

ANALISI II 26-10-12

FUNZIONE CURVA

Intervallo → Dominio

$\gamma(t) : I \to \mathbb{R}^n$

La funzione è continua

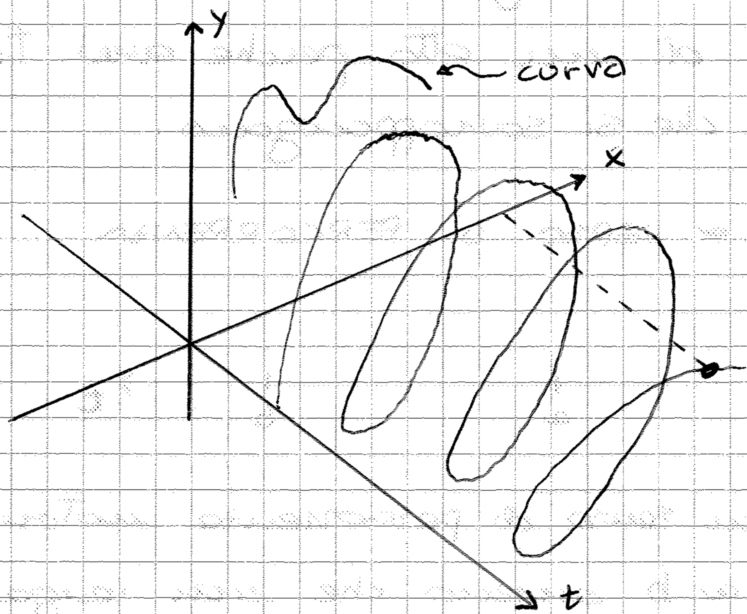
→ PROPRIETÀ DELLE CURVE:

- CURVA SEMPLICE: si dice che una curva è SEMPLICE se $\gamma(t)$ è iniettiva sulla parte interna di I.

Il grafico di γ sarà un sottoinsieme di R^{n+1} NON bisogna confondere il grafico con l'IMMAGINE che è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

⇒ per ESEMPIO:

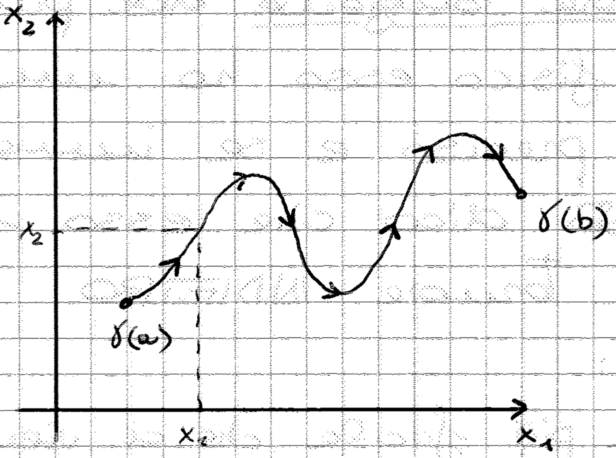
- $n = 2$
- Immagine $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$
- Grafico $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$



L'immagine di una curva si chiama anche SOSTEGNO esso è la proiezione

$x_1 = \gamma(t_1)$

$x_2 = \gamma(t_2)$



il senso di percorrenza vale anche per le curve chiuse.

→ CURVA REGOLARE

Si dice che una CURVA È REGOLARE quando:

$$x = \gamma(t) \ : \ I \longrightarrow R^n$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

deve verificare alcune condizioni:

1)
$$\frac{d}{dt}\gamma_i(t) \qquad i = 1; 2; \dots ; n$$

esiste ed è continua

2)
$$\begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

il vettore sopra prende il nome

$$\alpha(\tau) : J \to I$$

$$(\gamma \circ \alpha)(\tau) = \gamma(\alpha(\tau))$$

$$\delta(\tau) : J \to \mathbb{R}^n \quad \text{CURVA}$$

$$\delta'(\tau) = \frac{d}{d\tau}\,\delta(\tau) = \frac{d}{d\tau}\,\gamma(\alpha(\tau)) =$$

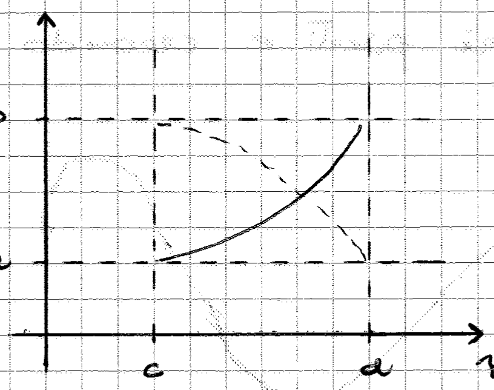
$$= \underbrace{\frac{d\gamma\,\alpha(\tau)}{dt}}_{\text{VETTORE}} \cdot \underbrace{\frac{d\alpha}{d\tau}}_{\text{SCALARE}}(\tau)$$

- I CAMBIAMENTI DI VARIABILE ACCETTABILI:

$$\alpha = J \to I$$

derivabili con derivata continua con

$$\alpha'(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in J$$



$\alpha'(\tau) > 0$

$\alpha'(\tau) < 0$

Se $\gamma(t)$ è semplice e regolare e se $t : a(\tau)$ ACCETTABILE allora $\delta(\tau)$ REGOLARE, SEMPLICE e quindi hanno lo stesso sostegno ma può cambiare il senso di percorrenza alle condizioni espresse prima.

$$\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2} = \|\gamma'(t)\|$$

VETTORE NORMA

quindi: SI DEFINISCE LUNGHEZZA DI UNA CURVA γ REGOLARE (SEMPLICE) CIOÈ LA LUNGHEZZA DI γ:

$$\boxed{l_\gamma = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt}$$

TEOREMA: Sia $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrica regolare e sia $\alpha : [c;d] \to [a,b]$ cambiamento di parametro accettabile

→ Sia $\delta(\tau) = (\gamma \circ \alpha)(\tau)$

→ Allora $l_\gamma = l_\delta$

DIMOSTRAZIONE: La dimostrazione è semplice ed il senso di percorrenza non deve cambiare

$\alpha'(\tau) > 0$ $\qquad n = 2$

$$l_\delta = \int_c^d \sqrt{(\delta_1'(\tau))^2 + (\delta_2'(\tau))^2}\, d\tau =$$

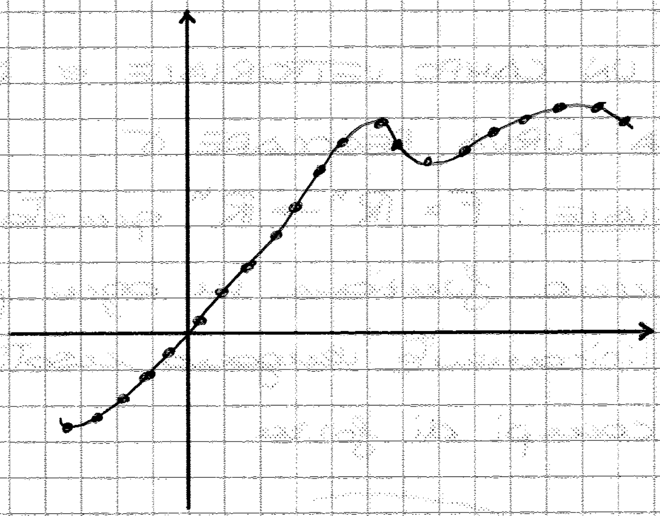
ora sviluppando l'integrale e ricordando chi è δ:

$$= \int_c^d \sqrt{[\gamma_1'(\alpha(\tau))\,\alpha'(\tau)]^2 + [\gamma_2'(\alpha(\tau))\,\alpha'(\tau)]^2}\, d\tau =$$

$$= \int_c^d \sqrt{(\alpha'(\tau))^2 [\gamma_1'\alpha(\tau)]^2 + (\gamma_2'(\alpha(\tau)))^2}\, d\tau =$$

INTEGRALE CURVILINEO DI UN CAMPO SCALARE SU UNA CURVA DATA REGOLARE

CAMPO SCALARE: il campo scalare è $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cioè una funzione che va da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ cioè una funzione che riduce le incognite.
Ed allora se ho una certa regione di piano che contiene il sostegno allora vado a vedere quanta parte del piano viene a trovarsi nella curva:



$$\underbrace{\int_\gamma}_{\text{per dire che è una curva}} f\,ds = \int_a^b f(\gamma_1(t);\ldots\ldots,\gamma_n(t))\cdot \underbrace{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+\cdots+(\gamma_n'(t))^2}\,dt}_{ds}$$

Se δ è un'altra parametrizzazione ottenuta da γ mediante un cambio di parametro accettabile allora:

$$\boxed{\int_\gamma f\,ds = \int_\delta f\,ds}$$

per calcolare le componenti uso il metodo classico. Se $\gamma(t)$ è la curva il versore tangente sarà:

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = t(t)$$

allora se faccio il prodotto scalare del versore per F:

$$(x_1, x_2, \dots x_n) \longleftrightarrow t \rightsquigarrow F(x_1; \dots; x_n) \cdot t(t) = f(x_1 \cdots x_n)$$

così misuro in ogni istante la direzione della forza lungo la traiettoria. Quindi è una quantità scalare e dovrò integrarla nel senso degli integrali scalari:

$$\int_a^b F(\gamma_1(t) \cdots \gamma_n(t)) \cdot \underbrace{t(t)}_{\frac{\gamma'(t)}{\cancel{\|\gamma'(t)\|}}} \cdot \underbrace{\sqrt{(\gamma_1(t))^2 + \cdots + (\gamma_n(t))^2}}_{\|\gamma'(t)\|} \, dt$$

e quindi posso semplificare ed ottengo:

$$\int_\gamma F\,dt = \int_a^b F(\gamma_1(t) \cdots \gamma_n(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

TEOREMA: Se F è un campo vettoriale continuo e se $\gamma(t)$ è una curva regolare, presa un'altra curva $\delta(\tau) = \gamma(\alpha(\tau))$ dove α è un cambiamento di parametro accettabile, allora:

ANALISI II ESERCITAZIONE 30/10/12

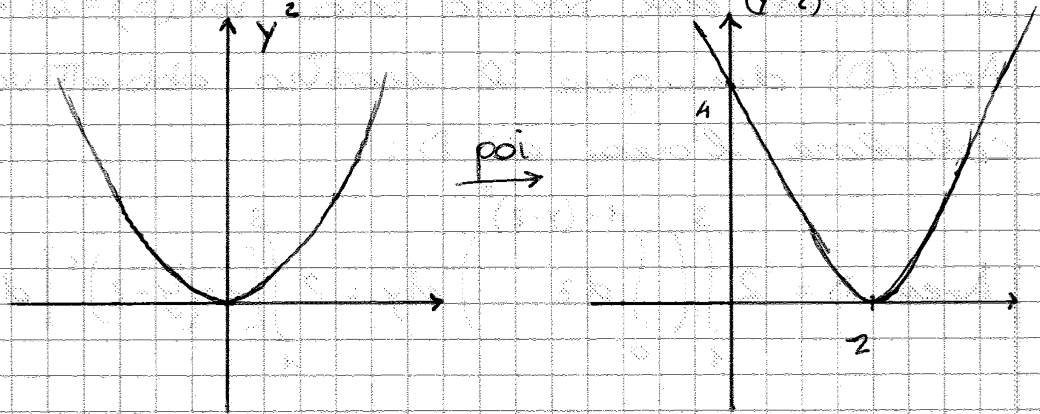
1) Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse z dello insieme:

$$D \left\{ (0; y; z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, |z| + (y-z)^2 \leq 1 \right\}$$

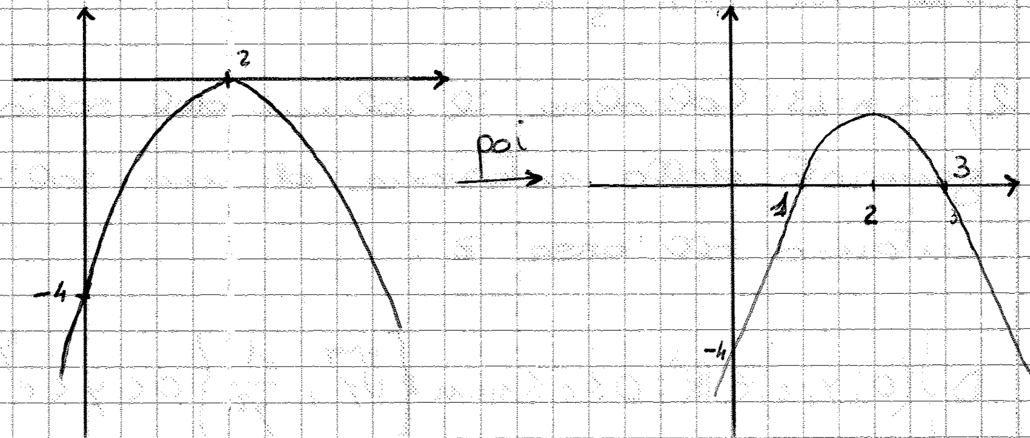
dobbiamo dunque disegnare questa cosa:

$$|z| = 1 - (y-z)^2 \quad \begin{cases} z = 1 - (y-2)^2 \\ z = -1 + (y-2)^2 \end{cases}$$

quindi facciamo:



poi la ribalto:



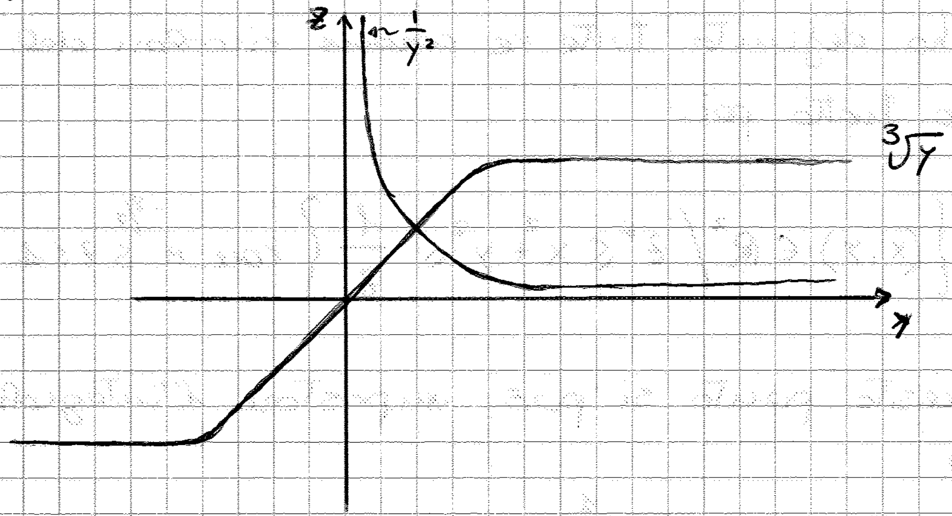
il risultato così ottenuto sarà l'unione delle due e dunque:

$$\sqrt[3]{y} < \frac{1}{y^2} \longleftrightarrow y = \frac{1}{y^6}$$

$$\frac{1}{y^6} - y > 0 \longleftrightarrow \frac{1-y^7}{y^6} > 0$$

$$1 - y^7 > 0 \qquad 1 > y^7 \Rightarrow \boxed{y < 1}$$

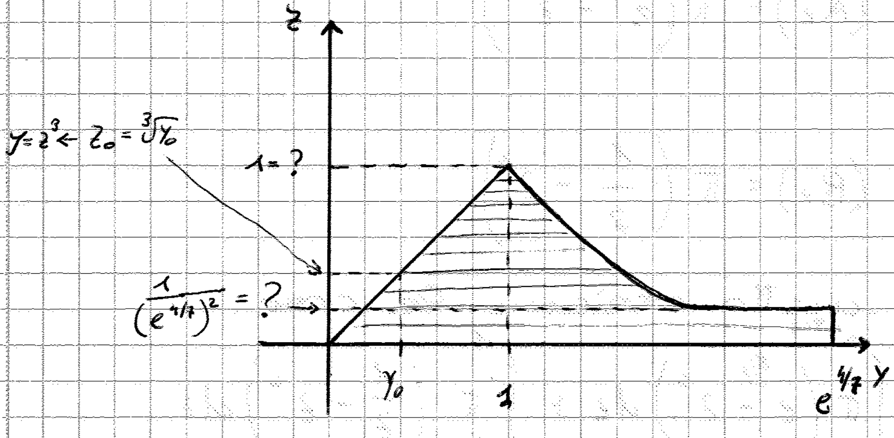
graficamente ottengo che:



quindi tra le due funzioni devo prendere il minimo:

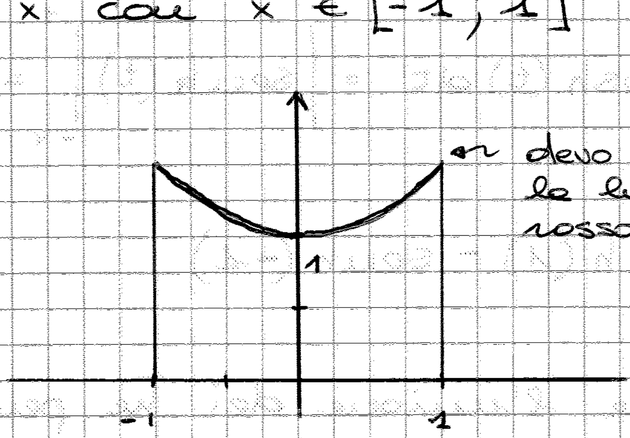
$$\min\{\} = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{y^2} & 1 \leq y \leq e^{4/7} \end{cases}$$

quindi riassumendo graficamente ciò che ottengo è:



ora Tagli la figura con dei piani e devo

3) Calcolare la lunghezza dell'arco di CATENARIA γ dato dal grafico $\varphi(x) = \cosh x$ con $x \in [-1; 1]$



devo calcolare la lunghezza in rosso

quindi:

$$\gamma(t) : (t ; \cos h(t))$$

$$\gamma'(t) = 1 ; (\operatorname{sen} h(t)) \quad -1 \leq t \leq 1$$

per calcolare la lunghezza di $|\gamma|$ (si indica come il valore assoluto ma indica la lunghezza della curva):

$$|\gamma| = \int_{-1}^{1} \sqrt{1^2 + \operatorname{sen} h^2(t)}\, dt =$$

→ Ricordo la formula breve riposso:

$$\int_\gamma ds = \int_a^b \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}\, dt$$

$$\gamma : [a ; b] \to \mathbb{R}$$

$$\gamma(t) : (x(t) ; y(t))$$

---

ritornando all'esercizio:

i percorsi:

—∘—∘—∘—∘—∘—∘—∘—∘

→ Piccolo richiamo di teoria utile per capire:

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(x_t; y_t)\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

∘—∘—∘—∘—∘—∘—∘—∘—

① $\gamma_1(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0; 1]$

$$\int_{\gamma_1} f\,ds = \int_0^1 (t+8\cdot 0^2)\cdot\sqrt{1^2+0^2}\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

② $\gamma_2(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

$$\gamma_2 = \int_0^{\pi/4} \cos t + 8\operatorname{sen}^2 t \cdot \sqrt{\underbrace{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t}_{\to \sqrt{1}=1}}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos t\,dt + 8\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2 t\,dt = \Big(\operatorname{sen} t\Big)_0^{\pi/4} + 8\left(\frac{t - \operatorname{sen} t\cos t}{2}\right)_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi - 2$$

③ $-\gamma_3 = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

L'integrale lungo γ_3 sarà:

$$\int_{-\gamma_3} f\,ds = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (t+8t^2)\cdot\sqrt{1^2+1^2}\,dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (t+8t^2)\sqrt{2}\,dt =$$

$$\int_a F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

troviamo che $\overline{OA}$ l'asse delle x ha equ

$y=0$

$$\int_{\gamma_1} F\,dy = \int_0^1 (0;t^2)\cdot(1,0)\,dt = 0$$

prodotto scalare

ora vedo tra $\overline{AB}$

prodotto scalare

$$\int_{\gamma_2} F\,dy = \int_0^{\pi/4} \left(\operatorname{sen}^2(t), \cos^2(t)\right)\cdot(-\operatorname{sen} t;\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{-\pi/4}\left(-\operatorname{sen}^3 t+\cos^3 t\right)dt = \int_0^{\pi/4} -\operatorname{sen} t\left(1-\cos^2 t\right)dt +$$

$$+\int_0^{\pi/4}\cos t\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)dt =$$

a questo punto mi trovo con:

$$\int_0^{\pi/4} -\operatorname{sen}(t)\,dt + \int_0^{\pi/4}\operatorname{sen}(t)\cos^2(t)\,dt + \int_0^{\pi/4}\cos(t)\,dt - \int_0^{\pi/4}\cos(t)+\operatorname{sen}^2(t)\,dt =$$

$$=\left(\cos t\right)\Big|_0^{\pi/4} - \left(\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_0^{\pi/4} + \left(-\operatorname{sen}(t)\right)\Big|_0^{\pi/4} - \left(\frac{\operatorname{sen}^3(t)}{3}\right)\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$=\left(\frac{\sqrt2}{2}-1\right) - \frac{\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3-1}{3} - \frac{\sqrt2}{2} - \frac{\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3}{3} =$$

$$=\left(\frac{\sqrt2}{2}-1\right) - \frac{\frac12\cdot\frac{\sqrt2}{2}-1}{3} - \frac{\sqrt2}{2} - \frac{\frac12\,\frac{\sqrt2}{2}}{3} =$$

$$= -\frac43 - \frac{\sqrt2}{6}$$

$$F(x_1;x_2;x_3) = \begin{cases} f_1 & (x_1;x_2;x_3) \\ f_2 & (x_1;x_2;x_3) \\ f_3 & (x_1;x_2;x_3) \end{cases} \qquad F \in C^1(A)$$

$$\operatorname{rot} F(x_1 x_2 x_3) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

moto traslatorio più rotatorio

$\mathbb{R}^3$ i j k $\qquad$ $\mathbb{R}^n$ $e_1\, e_2\, e_3 \dots e_n$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = f_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + f_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + f_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Il rotore di F può essere determinato attraverso il determinante

→ 1)

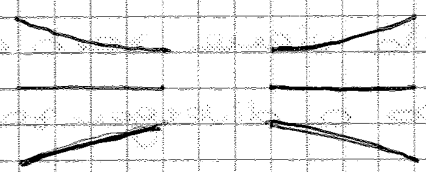
$$\operatorname{rot} F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) i + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right) j +$$

$$+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) k =$$

$$\text{div } F(x) = \nabla \cdot F$$

La divergenza misura la COMPRESSIONE o MENO del flusso



quando la divergenza di un campo è zero il flusso è regolare!

---

f campo scalare $C^2(A)$

← Esistono tutte le derivate parziali seconde CONTINUE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

rot (grad f) =

$n = 2$

$$\text{grad} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} ; \frac{\partial f}{\partial x_2} ; \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$$

→ Prima componente:

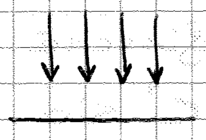
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 0$$

Se le derivate esistono e sono continue se faccio prima il grad e poi il rotore il risultato è zero → CAMPO IRROTAZIONALE

→ Una proposizione simile si scopre con la divergenza

Campo vettoriale $F \in C^2(A)$

CAMPO GRAVITAZIONALE

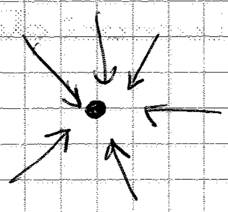


$(x_1 ; x_2)$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{campo vettoriale costante}$$

$$g = (x_1 ; x_2 ; x_3) = -x_3 \quad \text{CAMPO CONSERVATIVO}$$

⇝ Caso di attrazione gravitazionale → Sole



$$F = \frac{1}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \qquad A = \mathbb{R}^3 / \{0\}$$

Ora PROVO A CERCARE LE CONDIZIONI PER VEDERE SE UN CAMPO È <u>CONSERVATIVO</u>

⇝ CONDIZIONE NECESSARIA:

$\mathbb{R}^3$

F conservativo $\exists\, g : F = \text{grad}\, g$

$\text{rot } F = \text{rot}(\text{grad}\, g) = 0$

Se F è un campo di $\mathbb{R}^3$ di classe C^1 e se è conservativo allora necessariamente deve essere irrotazionale

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} ; \frac{\partial f}{\partial x_2} ; \dots ; \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \qquad i \neq j$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \right) \qquad g \in \mathbb{R}^2$$