



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 655A -

ANNO: 2015

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Siciliano

MATERIA: Elaborazione di Segnali Biomedici. Prof.Molinari

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



**POLITECNICO  
DI TORINO**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Biomedica

A.A. 2014-2015

# Elaborazione di segnali biomedici

## Appunti

Prof. Molinari

Katia Siciliano

Da qui in avanti si considera il modello di RUMORE ADDITIVO, per cui  $x$  è il segnale prelevato, che è quello che effettivamente si ha a disposizione, e si sa che all'interno di ciò che è stato acquisito ci sarà il segnale biologico di interesse, che chiamiamo  $s(t)$ , corrotto da un certo livello di rumore  $n(t)$ .

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

Il rumore s'intende additivo, <sup>cioè</sup> vuol dire che temporalmente si sovrappone al segnale.

Questo non è l'unico modello di rumore possibile, ma è quello più utilizzato. Ci sono dei casi in cui il rumore additivo non modella bene quello che succede nella realtà e allora si ricorre a un modello di rumore moltiplicativo.

$$x(t) = s(t) \cdot n(t)$$

Cosa è  $n(t)$  nella pratica dipende dai casi, perché ogni segnale biologico è prevalentemente corrotto da un determinato tipo di rumore.

Nel caso di prelievo di segnale ECG  $s(t)$  è il segnale ECG vero e proprio,  $n(t)$  è tutta l'attività elettrica che gli elettrodi registrano ma che non è dovuta alla pompa cardiaca: muscoli respiratori, Tremore muscolare, potenziali superficiali, ecc.

Il grafico nella slide si vede il potenziale di un battito cardiaco corrotto dal tremore muscolare.

Esiste sempre in tutto il muscolo di fondo che crea sempre attività elettrica diversa da zero, che si chiama Tremore muscolare.

Ci possono essere altri disturbi, come l'interferenza di rete.

Un'attenuazione infinita dell'interferenza di rete non si può ottenere; si può ottenere un CRR sufficientemente alto, ma non infinito.

Se non si conosce il rumore, il modello classico è quello di assumere il rumore un processo casuale gaussiano bianco.

È un modello generico, che in prima battuta è sempre accettato.

Un processo casuale è gaussiano (con distribuzione delle ampiezze di tipo gaussiano) quando se si prendono tutti i campioni di  $n(t)$  e se ne crea un istogramma, si ottiene una distribuzione di tipo gaussiano.

Un processo casuale si dice bianco quando è totalmente scorrelato, cioè quando i campioni del segnale del processo casuale non sono correlati con nessun altro campione,



3-03-2015

## RAPPORTO SEGNALE - RUMORE

Siccome registrazioni prive di rumore sono fisicamente non realizzabili, bisogna capire se la registrazione fatta è di qualità sufficiente. Se non è di qualità sufficiente molto spesso diventa inutile ai fini dell'elaborazione e quindi anche ai fini della registrazione in generale.

Come si quantifica il rumore che affligge il segnale?

Il problema di avere valori di SNR troppo bassi è indice di una cattiva qualità dell'acquisizione.

Non esiste un limite inferiore di SNR.

Supponendo di esprimere SNR in dB, un criterio spannometrico di massima è quello che dice se l'SNR non è almeno di una dozzina di dB, molto probabilmente la registrazione va considerata di bassa qualità. Questo numero non lo si può dare in modo preciso perché dipende da come si definisce l'SNR.

Ci sono definizioni diverse di rapporto segnale-rumore.

Siccome si ha un modello additivo  $x(t) = s(t) + n(t)$  ci sono 4 casi:

- ① segnale e rumore sono entrambi processi casuali
- ② segnale e rumore sono entrambi deterministici
- ③ segnale deterministico - rumore casuale
- ④ segnale casuale - rumore deterministico

Nei 4 casi si utilizzano definizioni di SNR differenti perché la natura del segnale è differente.

### Rapporto segnale - rumore (SNR)

È definito in modo differente a seconda di cosa sono il segnale ed il rumore ed è un indice di quanto affidabile sia la registrazione.

Valori di SNR troppo bassi sono sintomo di scarsa qualità del segnale, rendendo difficoltose le successive elaborazioni (rivelazione di un potenziale, stima di un parametro spettrale, riallineamento, ...)

• Segnale - processo e rumore - processo:

Definito come il rapporto tra la potenza di segnale e quella di rumore

$$SNR = \frac{P_s}{P_n} \quad SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_s}{P_n} = 20 \cdot \log_{10} \frac{\sigma_s}{\sigma_n}$$

Nella realtà non è possibile separare durante la registrazione il segnale dal rumore, in quanto quest'ultimo è sempre presente. Nel lucido seguente si osserva un segnale costituito dalla sovrapposizione di due processi casuali gaussiani limitati in banda con caratteristiche simili a quelle del segnale EMG. Nella prima metà della registrazione sono presenti segnale e rumore additivo, nella seconda solo rumore.

9

Il caso più semplice è quando sia il segnale che il rumore sono processi casuali; in questo caso si definisce come rapporto di



Un segnale biologico che è un segnale casuale non intermittente è il segnale EEG.

L'esempio di un segnale biologico che è un segnale casuale intermittente è il segnale EEG durante contrazioni volontarie.

### Segnale quasi-periodico, rumore processo

• Segnale - quasi periodico e rumore - processo:

La potenza media del segnale dipende dalla finestra di osservazione. Meglio definire il rapporto segnale/rumore come rapporto tra una misura di ampiezza del segnale ( $A_s$ , valore di picco, picco-picco, efficace ...) significativa rispetto all'applicazione e l'ampiezza della fascia di rumore (ad esempio, nel caso della fascia al 95%,  $4\sigma_n$ ).

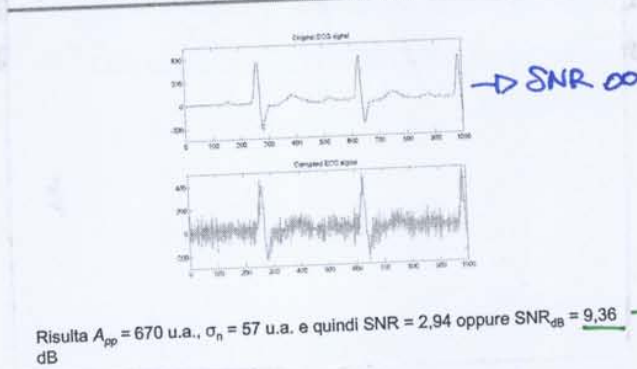
$$SNR = \frac{A_s}{4\sigma_n}$$

$$SNR_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \frac{A_s}{4\sigma_n}$$

Il caso classico di segnale quasi-periodico è l'ECG; oltre ad essere deterministico è anche quasi-periodico.

Un esempio di questo caso di segnale e rumore è l'ECG corrotto da Tremore muscolare.

### ECG corrotto da tremore muscolare



→ < 10dB quindi il segnale non è grande

In questo caso conviene fare un rapporto di ampiezze:

$$SNR = \frac{A_s}{A_n}$$

Se lo si vuole convertire in dB lo si moltiplica per  $20 \log$

L'ampiezza di un segnale è data dall'ampiezza massima meno l'ampiezza minima, quella che viene chiamata ampiezza picco-picco. Se si avesse un potenziale che è solo positivo si prenderebbe

~~Se la varianza è una misura della potenza del rumore, la deviazione standard è una misura della sua ampiezza.~~

Variabili

l'ampiezza di picco. Quindi prendere l'ampiezza di picco o di picco-picco dipende da come è fatto il segnale.

Dare una misura dell'ampiezza del rumore si fa più fatica. Calcolare la potenza è immediato perché è la varianza.



Se si prende una data deviazione standard si ha un errore di 1 specie troppo grande nelle code.

Dato un segnale quasi deterministico corrotto da un rumore che è un processo casuale, si vuole calcolare SNR, non è un errore definito  $A_p/N_p$ , ma si deve essere consapevoli che si sta sottovalutando il rapporto segnale-rumore.

Se si vuole l'area al 99% va benissimo, si tratta di una convenzione, cioè convenzionalmente si accetta un errore di 1^a specie del 5%, ma si può mettere un errore di 1^a specie piccolo a piacere.

Per un segnale ECG, come misura di AS, ha più senso l'ampiezza di picco picco.

Se non ci fosse rumore SNR varrebbe  $\infty$ . La deviazione standard del rumore viene calcolata dove non c'è segnale, perché altrimenti si calcola la deviazione standard del rumore e una parte della  $\sigma$  del segnale.

Bisogna ricordarsi che il segnale ECG è fatto da un insieme di onde e poi da un tratto isoelettrico prima che compaia il battito successivo. In quel tratto bisogna calcolare la deviazione standard. Se si calcola  $\sigma$  dove c'è il segnale parte della variabilità è data dall'ECG.

### Segnale periodico, rumore periodico

• Segnale - quasi periodico e rumore periodico:

In questo caso conviene definire il SNR come rapporto tra l'ampiezza picco - picco del segnale deterministico e la corrispondente ampiezza picco - picco del rumore.

$$SNR = \frac{A_{pp}}{N_{pp}}$$

$$SNR_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \frac{A_{pp}}{N_{pp}}$$

Lo stesso vale nel caso di segnale quasi deterministico e rumore periodico.

**ATTENZIONE:** volendo fare riferimento al rapporto tra potenze occorre considerare come parametri di ampiezza i valori efficaci.

Il caso n° 3 è quando sia il segnale che il rumore sono periodici, cioè deterministici.

Il caso classico è il segnale ECG corrotto da interferenza di rete.

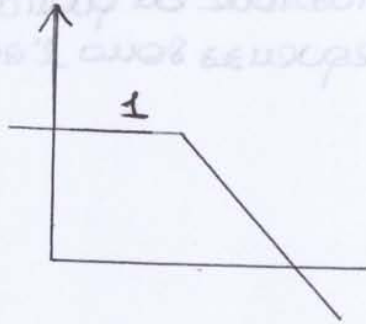
Quest'ultima è un problema di tutti i segnali in quanto vengono acquisiti con una strumentazione elettronica, ma in particolare del segnale ECG. Anche in questo caso conviene definire SNR come rapporto di ampiezze:

$$SNR = \frac{A_{pp}}{N_{pp}}$$

Una cosa da evitare è mettere al numeratore un'ampiezza di picco picco e al denominatore un'ampiezza di picco, perché si



Quando ci si riferisce a questi filtri si sta pensando a come è fatto il modulo della FST di quel filtro, ma la FST ha anche una fase.



Per definizione in banda passante questo filtro ha un guadagno unitario. Si vuole lavorare con filtri che in banda passante non semplificano.

I filtri passa alto, p. basso, p. banda, r. banda vanno bene quando si ha un rumore che affligge il segnale e che si può localizzare con facilità sull'asse delle frequenze e toglierlo tramite il filtro opportuno.

Nel dominio del tempo  $x$  e  $n$  sono sovrapposti; si è calcolato l'SNR che è insufficiente. Si vuole migliorare l'SNR attenuando il rumore; si va a vedere come è fatta la trasformata di Fourier di  $x$  e si scopre che in frequenza segnale e rumore occupano due bande che sono ragionevolmente separate tra loro.



In un caso come questo serve un filtro passa basso che taglia dopo il segnale.

Se fosse stato il contrario, cioè si aveva prima il rumore e poi il segnale si utilizza un filtro passa alto.

### Miglioramento SNR<sup>(1)</sup>

Tipicamente avviene mediante l'utilizzo di filtri opportuni.

#### Casi possibili

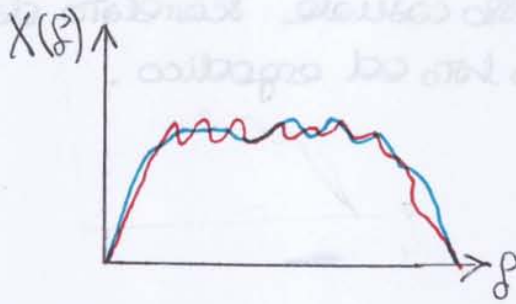
1. Segnale e rumore occupano bande diverse e ben separate
  - artefatto da movimento e segnale EMG
  - segnale ECG e tremore muscolare
  - segnale EEG e interferenza di rete (50 Hz)



utilizzo di filtri PASSABASSO o PASSAALTO



Se segnale e rumore sono sovrapposti e a banda larga i filtri tradizionali non funzionano.



Si utilizzano degli approcci particolari. Quelli che vedremo sono la tecnica dell'averaging e il filtro ottimo. Queste tecniche hanno un campo di applicazione molto ridotto e quindi per funzionare bene richiedono che siano soddisfatte delle ipotesi a priori.



La tecnica dell'averaging serve sempre e solo in presenza di segnali deterministici prevedibili. Il termine prevedibile non è relativo alla forma che deve essere prevedibile; questo è già compreso nel fatto che il segnale è deterministico.

Il fatto che si ripete in modo prevedibile vuol dire che si sa con precisione quando il segnale c'è e quando non c'è.

Ad esempio il segnale ECG è un segnale deterministico ma non è prevedibile.

I segnali classici che rispondono a quest'ipotesi sono quelli che vengono chiamati potenziali evocati poiché deriva... quando io lo chiamo (risposta di un sistema fisiologico a uno stimolo esterno).

Il segnale deterministico si deve ripetere un numero di volte sufficientemente alto, sostanzialmente identico a se stesso.

Tutti i sistemi fisiologici sono sottoposti all'effetto fatica, cioè se si prende un soggetto e periodicamente gli si dà uno stimolo acustico il suo sistema uditivo risponde con un potenziale evocato per un po' di volte, ma dopo un po' cala la risposta.



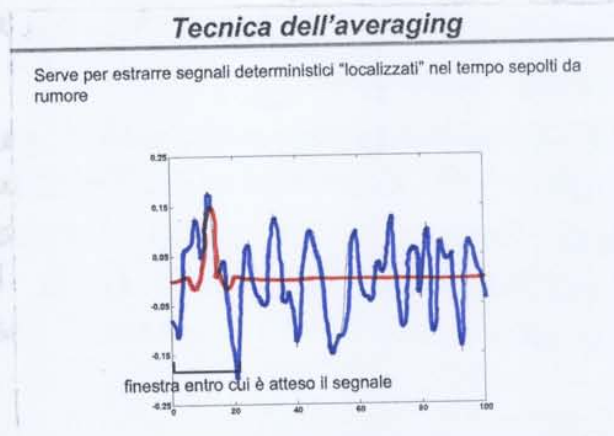
L-03-2015

## TECNICA DELL' AVERAGING

La tecnica dell'averaging è utilizzabile con profitto e funziona bene se segnale e rumore soddisfanno delle ipotesi:

- il segnale deve essere un segnale deterministico che si ripete in modo prevedibile; ciò vuol dire che si sa se c'è e se non c'è e si sa dove è all'interno della registrazione.

Qui sotto è riportato un esempio di un potenziale (in rosso) coperto da tanto rumore che in realtà quello che si acquisisce è il segnale in blu.



- il segnale si deve ripetere un certo numero di volte sostanzialmente identico a se stesso; al max qualche centinaio perché poi ogni sistema fisiologico per diverse ragioni cambia la risposta.
- il rumore deve essere un processo casuale, stazionario almeno in senso lato ed ergodico.

Un processo casuale si dice stazionario in senso lato quando i due primi momenti statistici, quello di ordine 0 (valore medio) e quello di ordine 1 (funzione di autocorrelazione), sono indipendenti dal tempo. Funzione di autocorrelazione indipendente dal tempo vuol dire che non dipende da dove lo vado a misurare, ma solo dal ritardo tra i campioni per cui lo misuro.

Un processo casuale è affetto da una certa variabilità; se è ergodico vuol dire che le medie temporali (cioè il segnale acquisito  $n(t)$  mi dice tutto del sistema che lo ha generato) sostituiscono le medie di insieme.

L'ergodicità, da qui in poi, viene sempre affetta.

- rumore scorrelato dal segnale

Non bisogna confondere il concetto di correlazione con quello di dipendenza e con quello di causa.



Serve acquisire un po' di più perché per calcolare l'SNR bene si ha bisogno di un tratto dove il segnale non c'è.

Per tanto sotto queste ipotesi si stimola, si acquisisce per un certo tempo, per un certo numero di volte (sufficientemente elevato). Supponiamo un centinaio.

$N$  stimoli  $\Rightarrow N$  registrazioni

Ogni registrazione (brano o epoca), in termini matematici, è descrivibile secondo il solito modello:

$$x_i(t) = s(t) + n_i(t)$$

Siccome il segnale, per le ipotesi fatte, è sempre uguale, non dipende dall'epoca.

Si vuole calcolare l'SNR dell'epoca  $i$ -esima.

Facciamo un rapporto di ampiezze perché il segnale è deterministico e il rumore è casuale.

$$SNR_{x_i} = \frac{A_s}{4 \sigma_n} \quad i = 1, \dots, 100$$

La deviazione standard  $\sigma_n$  è calcolata nel pezzo dove non c'è il segnale.

Se si misurasse l'SNR di tutte le 100 epoche si trova lo stesso valore? Sì perché il segnale è uguale a se stesso, quindi  $A_s$  deve essere uguale in tutte le epoche; il rumore è WSS, perciò le sue proprietà energetiche non cambiano nel tempo e quindi ha la stessa varianza e la stessa deviazione standard.

Si fa la media delle  $N$  epoche:

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t) = s(t) + \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i(t)}_{\text{Media di una variabile casuale}}$$

Calcoliamo l'SNR dell'epoca mediata e la confrontiamo con l'SNR dell'epoca  $i$ -esima.

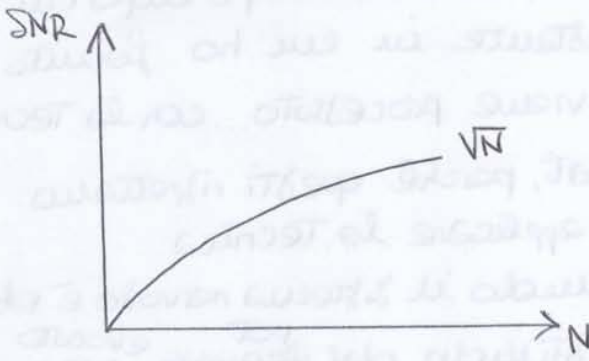
Se si confrontano due SNR bisogna definirli allo stesso modo. Il numeratore dell'SNR mediato è uguale a quello di prima:

$$SNR_{\bar{x}} = \frac{A_s}{4 \sigma_n / \sqrt{N}}$$

Al crescere di  $N$  la  $f_t$  del FPB diminuisce, quindi diventa sempre più stretto e taglia sempre più rumore. Siccome il segnale è sempre rumore e sempre più basso. Mentre, per quanto riguarda il segnale, la media è equivalente a un filtro passa tutto.

Siccome l'SNR aumenta all'aumentare di  $N$  e che all'aumentare di  $N$  la potenza di

Come varia l'SNR:



Se ho un insieme di registrazioni e voglio sapere se le ipotesi sono rispettate, le medio in sequenza e devo ottenere questo andamento teorico.

Dato 100 epoche contenenti  $s(t)$  e  $n(t)$  che rispettano le ipotesi viste prima e si vede verificare che l'SNR aumenta di  $\sqrt{N}$ , se ne prendono 2, si fa la media e si vede che l'SNR aumenta di  $\sqrt{2}$ , poi se ne mediano 3 e deve essere aumentato di  $\sqrt{3}$ , ecc.

Rumore bianco → quando il suo spettro è piatto  
 Un rumore che non ha tutte le frequenze, ma ha uno spettro diverso, si dice che è colorato.

LABORATORIO 1

fopen → apre un file  
 'r' in lettura  
 'w' in scrittura

**h** = fopen (filename, 'r')

Se la variabile è positiva vuol dire che il file è stato trovato, mentre se è negativa vuol dire che non esiste oppure non è possibile aprirlo.

$x = \text{fread}(h, \text{inf}, \text{'float'})$   
 legggo i dati fino a EOF  
 legggo i dati in formato floating point

MEDIA  
 Prima di uscire dal ciclo, devo moltiplicare per  $\frac{1}{N}$ .



Quindi, facendo la media, non è più vero che l'averaging si comporta come un filtro passa tutto, ma si comporta come un FPB. Il jitter, avendo disallineato i segnali, fa in modo che la tecnica dell'averaging applichi un FPB anche al segnale.

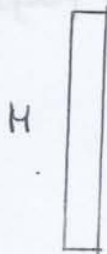
In presenza del jitter, la  $f_T$  del FPB equivalente imposto sul segnale, dipende dal jitter stesso. Sappiamo di esprimere la latenza in ms, se il potenziale non è equidistante dallo stimolo, vuol dire che la latenza è una variabile casuale. Una variabile casuale ha un valor medio e una varianza.

Quella che dà fastidio è la varianza, perché il valor medio potrebbe essere anche 10 s, ma se la varianza fosse uguale a 0, i segnali sarebbero tutti allineati 10 s dopo.

Allora si può dimostrare che in presenza di jitter, la tecnica dell'averaging impone al segnale un FPB equivalente la cui  $f_T$  è proporzionale alla varianza del jitter medesimo.

Tanto maggiore è la varianza del jitter, tanto più stretta è la  $f_T$  del FPB equivalente (inversamente proporzionale).

Letture del file:



$$M = 13000$$

$$N = 130 \text{ numero di epoche}$$

read ci restituisce un vettore lungo M campioni. La funzione read legge tutti i campioni contenuti nel file e li mette in un unico vettore.

ogni epoca è lunga 100 campioni



Se prendessimo una singola epoca, da 1 a 100 campioni, è stato visto che il segnale è contenuto nei primi 25 campioni e dopo si avvia la coda di rumore.

Per fare la media, la coda più semplice da fare è prendere i dati contenuti in M e tradurli in una matrice.



Il calcolo del ritardo si fa con un'istruzione fornita, chiamata delay.

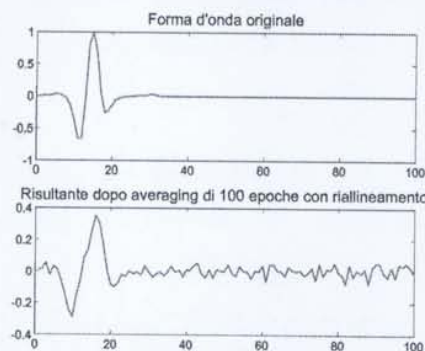
È vietato fare il riallineamento in cascata, perché non si è mai in grado di riallineare perfettamente, ma si riesce a calcolare il ritardo con un errore o con un margine di incertezza. Se facciamo un riallineamento a catena, l'errore viene propagato.

In realtà questa funzione non fa il riallineamento, cioè non prende in ingresso  $x_1$  e  $x_2$  e restituisce  $x_2$  riallineato, ma restituisce un ritardo in campioni.

Bisogna quindi prendere  $x_2$  e spostarlo di tot campioni nella direzione giusta.

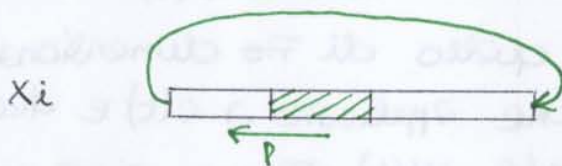
Se si riesce a compensare il jitter si ottiene un segnale di questo tipo:

Averaging con riallineamento



All'interno di ogni epoca sappiamo che il potenziale è sicuramente presente e ha sempre la stessa forma e quindi sappiamo quanti campioni dura.

Supponiamo di avere un'epoca  $i$ -esima che devo riallineare



Applico la funzione delay tra quest'epoca e l'epoca n° 1 e scopro che per riallineare quest'epoca devo prendere il potenziale e spostarlo verso sinistra di  $p$  campioni.

1° METODO: effettuare uno shift circolare; tutto ciò che esce da sinistra rientra a destra (in Matlab esiste una funzione che fa shift da  $dx$  a  $dx$  o da  $dx$  a  $dx$  di un vettore)

2° METODO: Riempire  $p$  campioni lasciati vuoti con numeri casuali (in questo caso non è consigliato)



Il problema non è  $R$ , ma è la presenza di rumore che si innesta all'uscita del filtro.

Calcoliamo la Trasformata di Fourier di  $u'(t)$

$$\hat{U}(f) = \frac{C(f)\phi(f)}{R(f)}$$

Per definire cosa si intende per  $u'(t)$  massimamente simile a  $u(t)$ , oppure  $u'(t)$  ottimo dobbiamo stabilire un criterio matematico, che in questo caso è il criterio del minimo errore quadratico. Quindi la stima  $u'(t)$  sarà ottima quando, confrontata con il valore reale  $u(t)$ , produrrà un valore quadratico minimo.

Si tratta di trovare il filtro ottimo (LSE)  $\hat{U}(f)$  tale che  $\hat{U}(f)$  sia massimamente simile ad  $U(f)$

$$\hat{U}(f) = \frac{C(f)\Phi(f)}{R(f)}$$

L'obiettivo è la minimizzazione dell'errore quadratico (criterio LSE):

$$e = \int_{-\infty}^{\infty} [u'(t) - u(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{U}(f) - U(f)]^2 df$$

$$e = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{[S(f) + N(f)]\Phi(f)}{R(f)} - \frac{S(f)}{R(f)} \right|^2 df$$

Se  $u'$  fosse una stima perfetta l'errore quadratico sarebbe nullo. L'ottimo è stato definito nel dominio del tempo, perché a me interessa che la forma d'onda  $u'(t)$  sia uguale a  $u(t)$  nel tempo.

Devo a questo punto trovare quel valore di  $\phi$  che mi produce un  $u'(t)$  che mi produce un errore quadratico minimo.

Per trovare il minimo dovrei derivare rispetto a  $\phi$  e uguagliare la derivata a zero,  $\frac{\partial e}{\partial \phi} = 0$ , e controllare che questo sia un punto di minimo. Nel dominio del tempo questo è un po' complicato, perché se devo esprimere  $u'$  in funzione di  $\phi$  ci sono di mezzo due convoluzioni.

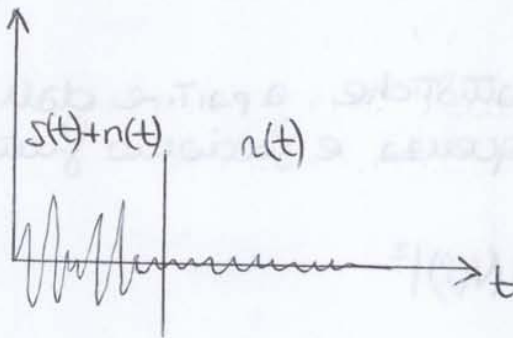
Pertanto decido di minimizzarla nel dominio della frequenza, andando a cercare il minimo errore quadratico spettrale.

Questa operazione è lecita perché me lo consente il Teorema di Parseval.

Parseval dice che i termini energetici si possono calcolare sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza. L'energia è proporzionale al quadrato del segnale, quindi.

$n(t)$  da solo potrei avercelo se il segnale biologico è intermittente, cioè riesco a fare una registrazione di rumore in assenza di segnale (ad esempio tratto idealectrico di una registrazione ECG, oppure l'EMG durante una contrazione volontaria).

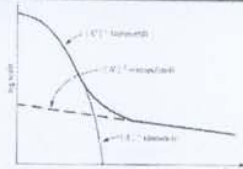
Supponiamo di avere nel dominio del tempo un caso di questo tipo:



Prendo il secondo pezzo, calcolo il modulo di  $|N(f)|^2$  e sottraggo questo allo spettro del primo pezzo, quindi ottengo  $|S(f)|^2$ .

Questo, però, si applica esclusivamente se il segnale è intermittente.

### Estrapolazione di parametri per il filtro

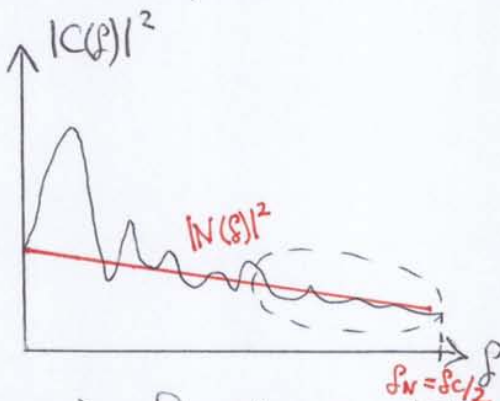


#### Osservazioni:

1. Per ottenere il filtro ottimo non è richiesta la conoscenza né della funzione di trasferimento del sistema di condizionamento del segnale  $R(f)$ , né lo spettro di potenza del segnale reale  $U(f)$ .
2.  $|S(f)|^2 + |N(f)|^2 = |C(f)|^2$  e spesso  $|N(f)|^2$  può essere estrapolato da  $|C(f)|^2$  potendo quindi estrapolare anche una stima di  $|S(f)|^2$ .
3. È sufficiente disporre di una stima degli spettri del segnale  $s(t)$  e del rumore sovrapposto (utilizzando l'estrapolazione grafica vista e, se possibile, effettuando registrazioni di rumore in assenza di segnale).

30

Nel caso in cui il segnale è sempre presente, come ad esempio nel caso dell'EEG, c'è un altro metodo, detto metodo grafico.



Su un grafico in funzione della frequenza studieremo a rappresentare  $|C(f)|^2$ . All'interno di questo grafico, nell'ipotesi



9-03-2015

## TRASFORMATA Z

**Trasformata z**

Sistema lineare tempo invariante (LTI) con risposta all'impulso  $h[n]$

Si pone all'ingresso del sistema la sequenza:  $x[n] = z^n$  dove  $z$  è un numero complesso

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{n-k}h[k]$$

$$= z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{-k}h[k] = z^n H(z)$$

Trasformata z di una sequenza  $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{-k}h[k]$

Quando si prende un segnale e se ne fa la Trasformata di Fourier lo si sta descrivendo in termini delle due componenti armoniche; è una somma di sinusoidi complessi. ( $\rightarrow e^{-j2\pi ft}$ )  
 Invece di darne la sua descrizione come serie di punti in funzione del tempo, ne do una descrizione sulla base di una serie di coefficienti, ciascuno dei quali mi dice quanto di una determinata frequenza c'è <sup>all'interno</sup> di quel segnale.

Si tratta di una scomposizione delle segnale in una base.

Quando faccio la Trasformata z scompongo il segnale in una serie, secondo una base, che generalmente è l'esponente di un numero complesso.

Supponiamo di avere un sistema lineare tempo invariante e di avere una sequenza discreta  $x[n]$  all'ingresso del sistema, all'uscita si ha una sequenza  $y[n]$  e supponiamo di chiamare  $h[n]$  la risposta all'impulso di questo sistema (slide 2).

Se descriviamo cosa succede nel dominio del tempo all'uscita di questo sistema otteniamo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] = \sum z^{n-k}h[k] = z^n \sum z^{-k}h[k] = z^n H(z)$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{-k}h[k]$$

Se  $z = e^{-j2\pi f}$   $H(f) = \sum e^{j2\pi f k} h[k]$

Un ritardatore discreto di  $k$  passi è un sistema lineare tempo invariante che non fa altro che riproporci in uscita lo stesso segnale che c'era in ingresso ritardato di  $k$  campioni.

Il modulo della FST di questo filtro è unitario, poiché l'uscita è identica all'ingresso, solo spostata sull'asse temporale. Pertanto se ho un sistema lineare tempo invariante che ritarda di  $k$  campioni l'ingresso, posso scrivere:

$$y[n] = x[n-k]$$

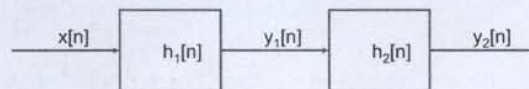
Per calcolare la funzione di trasferimento del ritardatore

$$y[n] = z^{-k} x[n] = z^{-k} z^n X(z) = z^{-k} H(z)$$

$$H(z) = z^{-k}$$

Il ritardatore discreto di  $k$  passi è l'elemento costitutivo di tutti i filtri digitali. Per filtrare un segnale in digitale bastano somme, moltiplicazioni e ritardi.

#### Esercizio: sistemi discreti in cascata



Per calcolare la risposta all'impulso, poniamo in ingresso la sequenza:  $x[n] = \delta[n]$

Per calcolare la funzione di trasferimento, poniamo in ingresso la sequenza:  $x[n] = z^n$

$$h_{eq}[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

$$H_{eq}(z) = H_1(z)H_2(z)$$



Il numeratore di  $H(z)$  è rappresentato da una serie di coefficienti  $b$ , che moltiplicano una serie di ritardatori di  $k$  passi, che vanno da 0 passi fino a  $nb$ . Al denominatore si ha la stessa cosa solo che i coefficienti si chiamano  $a$  e i ritardatori vanno da 0 a  $na$ .

Si dimostra che mettendo i numeri opportuni al posto dei coefficienti  $a$  e  $b$  e selezionando i valori di  $na$  ed  $nb$  opportuni si possono avere tutte le FDT dei filtri digitali tradizionali.

Il numeratore è un polinomio in funzione di  $z$  per  $z$  che va da  $z^0$  a  $z^{-nb}$ . Pertanto  $nb$  è l'ordine del polinomio, ciò vuol dire che ammette  $nb$  radici. Siccome queste radici annullano il numeratore della FDT, corrispondono agli ZERI.

Pertanto il numeratore definisce il numero e la posizione degli zeri. Il denominatore tramite  $na$  definisce il numero di poli e tramite i coefficienti  $a$  definisce la loro posizione.

Si dimostra che un filtro digitale è univocamente determinato dalla sequenza dei coefficienti.

L'ordine del polinomio non è necessario saperlo, perché se ho un filtro con al denominatore 5 coefficienti  $a$ , so già che l'ordine del denominatore è 4.

Basta avere i vettori dei coefficienti  $a$  e  $b$ .

Il passaggio tra il filtro digitale in termini di  $H(z)$  e l'equazione temporale del filtro,  $y[n]$ , è immediato.

#### ESEMPIO 1

$$H(z) = \frac{2 + 3z^{-1} - 4z^{-2}}{1 - z^{-2} + 2z^{-3}}$$

$$nb = 2$$

ordine del polinomio  
al numeratore

$$na = 3$$

$$b = [2, 3, -4]$$

$$a = [1, 0, -1, 2]$$

Si vuole ora ricavare l'equazione temporale del filtro per capire come si combina l'ingresso per ottenere l'uscita.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



- Se  $n_a = 0$ , il denominatore vale 1. Tutte le radici della FDT sono ZERI, allora si dice che il filtro è di tipo "all-zero", non ricorsivo, a media mobile (MA).

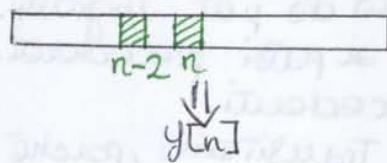
$$H(z) = 2 + 3z^{-2}$$

$$y[n] = 2x[n] + 3x[n-2]$$

y non compare più alla destra dell'equazione Temporale, quindi è non ricorsivo.

Si dice inoltre a media mobile perché l'uscita è una combinazione lineare di un numero prefinito di ingressi.

Pertanto per generare l'uscita di questo filtro mi serve solo un campione dell'ingresso al tempo n (moltiplicato per 2), a cui vado a sommare un campione dell'ingresso 2 passi prima.



Per generare l'uscita al passo corrente mi serve il campione corrente di posizione n e il campione di posizione n-2.

Se ho un segnale lungo da filtrare non posso che spostare n, si prendono sempre questi due campioni che scorrono lungo il segnale e da qui la dicitura media mobile.

L'ordine dei polinomi al numeratore e al denominatore si dicono quanti campioni si servono per effettuare il filtraggio.

Si dimostra che se una FDT ha solo zeri come radici, la sua risposta all'impulso è di lunghezza finita.

Quindi un filtro con  $n_a = 0$ , si dice filtro FIR (con risposta all'impulso finita).

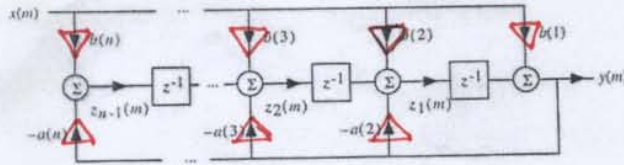
- Se  $n_a \neq 0$  e  $n_b \neq 0$  allora il filtro è di tipo "pole-zero", è ricorsivo ed è sia autoregressivo che a media mobile (ARMA).

Basta che ci sia un polo all'interno della FDT e la sua risposta all'impulso diventa di lunghezza infinita.

Pertanto i filtri ARMA sono di tipo IIR.



### Struttura a minimo numero di ritardatori



L'equazione differenziale del filtro digitale può essere rappresentata mediante strutture differenti, contenenti sommatore, moltiplicatori e ritardatori. Il generico ritardatore  $z^{-1}$  introduce un ritardo pari ad un passo di campionamento. I ritardatori  $z_i(m)$  possono essere inizializzati a valori opportuni quando il filtro non ha condizioni iniziali nulle. Tra le possibili strutture equivalenti quella rappresentata in figura ha il minimo numero di ritardatori.

9

È stato detto che un filtro digitale è fatto da moltiplicatori, somme e ritardatori discreti di  $K$  passi.

Della sequenza  $H(z)$  posso rappresentare la struttura a minimo numero di ritardatori, che è uno schema a blocchi della FBT fatto da moltiplicatori, somme e ritardatori discreti di 1 passo in cascata. Ci servono tanti ritardatori discreti di 1 passo quanto sarà l'ordine del filtro.

Nella parte superiore del filtro ci sono tutti i coefficienti  $b$ , che sono in ordine decrescente. La parte di sopra è quella a media mobile, mentre quella sotto (coefficienti  $a$ ) è la parte autoregressiva. Anche i coefficienti  $a$  sono in ordine decrescente.

Lo schema a minimo numero di ritardatori ci dice come funziona il filtraggio in digitale step by step.

### Esempio di funzionamento

I valori assunti dai ritardatori al campione  $m$ -esimo saranno:

$$y(m) = b(1) x(m) + z_1(m-1);$$

$$z_1(m) = b(2) x(m) + z_2(m-1) - a(2) y(m);$$

$$z_{n-2}(m) = b(n-1) x(m) + z_{n-1}(m-1) - a(n-1) y(m);$$

$$z_{n-1}(m) = b(n) x(m) - a(n) y(m);$$

I valori assunti dall'uscita dei ritardatori possono essere inizializzati a valori opportuni per simulare condizioni iniziali non nulle.

10

Fino a che non ho messo in ingresso un numero di ingressi pari all'ordine del filtro c'è qualche valore di  $z$  che vale 0, poiché qualche ramo non si è ancora propagato fino all'uscita. I valori  $z$  si chiamano  $pe_i$  o condizioni iniziali.

Nonostante si ragiona in termini di filtro nuovo e condizioni

da 0 a  $f_c/2$ .

Devo specificare questo parametro poiché la trasformata di Fourier è una quantità continua in frequenza e quindi la si può rappresentare su un numero di punti che si vuole.

### Filtraggio di una sequenza mediante filtro digitale

Un filtro digitale è descritto dai due vettori dei coefficienti  $b$  ed  $a$ . Data una sequenza  $x(n)$  di ingresso, l'uscita del filtro è ottenuta mediante convoluzione discreta della sequenza stessa con la risposta all'impulso del filtro.

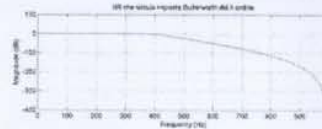
Facendo riferimento al pacchetto Matlab®, definiti i vettori dei coefficienti in modo opportuno l'uscita del filtro che riceve in ingresso una sequenza  $x$  può essere ottenuta mediante la funzione `filter`:

$$y = \text{filter}(b, a, x);$$

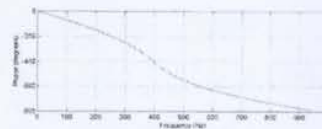
La stessa funzione supporta anche il filtraggio dei dati a blocchi: la sequenza di ingresso è suddivisa in blocchi consistenti in un dato numero di campioni e la sequenza di uscita è ottenuta filtrando i blocchi dati in ingresso uno dopo l'altro. In questo caso, però, dopo il primo blocco le condizioni iniziali non saranno più nulle.

Matlab® è un marchio di The MathWorks Inc., MA, USA

### Risposta nel dominio della frequenza



$b = [0.0011 \ 0.0096 \ 0.0384$   
 $0.0895 \ 0.1342 \ 0.1342 \ 0.0895$   
 $0.0384 \ 0.0096 \ 0.0011]$



$a = [1.0000 \ -1.7916 \ 2.5319$   
 $-2.1182 \ 1.3708 \ -0.6090$   
 $0.1993 \ -0.0431 \ 0.0058$   
 $-0.0004]$

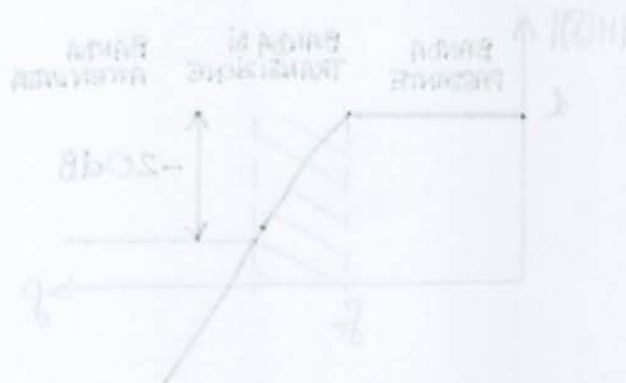
Si generano i vettori  $b, a$  di un filtro IIR che simula la risposta in modulo di un filtro analogico alla Butterworth utilizzando un ricorsivo di ordine 9

```
[b,a] = butter(9,400/1000);
```

Si ottiene la risposta in frequenza (complessa) su 256 punti e si rappresenta modulo e fase della stessa

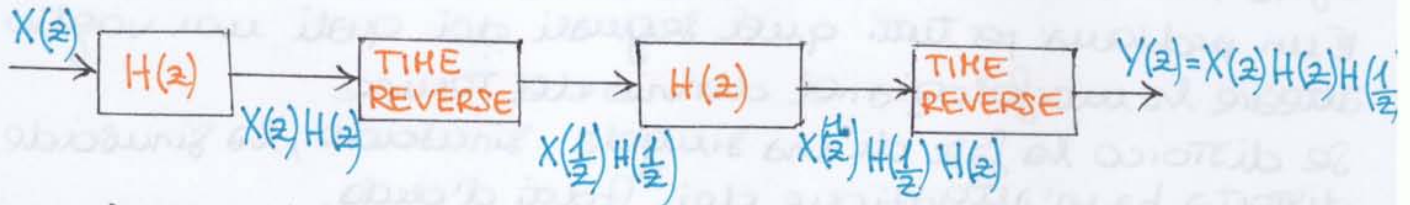
```
freqz(b,a,256,2000);
```

### FILTRI IIR





Il filtraggio a doppia passata prevede di sfruttare una proprietà della Trasformata  $z$ , per cui, filtrando il segnale due volte, dopo un'operazione di Time reverse (cioè giro l'asse temporale), consente di recuperare completamente la distorsione di fase.



All'uscita del primo blocco abbiamo già distorto il segnale, poiché  $H(z)$  ha una fase non lineare.

Allora si prende il segnale filtrato e si applica un'operazione di time reverse, ciò vuol dire che il primo campione diventa l'ultimo e l'ultimo diventa il primo.

Invertendo l'asse del tempo è come mettere all'esponente di  $z$   $-1$ . Quindi l'operazione di time reverse restituisce in uscita  $X(\frac{1}{z})H(\frac{1}{z})$ . Stessa proprietà di cui gode anche la Trasformata di Fourier.

A questo punto viene rifiltrato il segnale con la stessa FDT  $H(z)$ .

All'uscita ottengo  $X(\frac{1}{z})H(\frac{1}{z})H(z)$ . Compio un'altra volta un passaggio di time reverse. Alla fine, detta  $Y(z)$  l'uscita, si ottiene  $Y(z) = X(z)H(z)H(\frac{1}{z})$

$z$  è un numero complesso e quindi  $H(\frac{1}{z}) \cdot H(z)$  è come dire una quantità per il suo complesso coniugato perché si sta cambiando il segno alla parte immaginaria.

Quindi  $Y(z) = X(z) |H(z)|^2$

Il modulo quadro di  $H(z)$  è una quantità reale e quindi la sua fase è zero.

Qualunque sia la fase di questa FDT con questa tecnica si annulla.

NB1: Quando applichiamo un filtraggio a doppia passata l'effetto filtrante è più forte, perché moltiplichiamo per  $|H(z)|^2$ .

Se ho un FPB che introduce un'attenuazione di 20 dB, con il filtraggio a doppia passata ho introdotto un'attenuazione di 40 dB.



Un conto è dare le specifiche sulla maschera del filtro, un conto è dare le specifiche sul filtraggio.

Se, ad esempio, bisogna dimensionare un filtro passa basso, con  $f_c = 400\text{ Hz}$ , che introduce un'attenuazione di almeno  $50\text{ dB}$  ci stiamo riferendo alla maschera del filtro  $H(z)$ , pertanto se lo si fa con un filtro IIR o con la tecnica a doppia passata non è importante. Il problema, posto così, vuol dire che è la maschera che deve rispettare le specifiche e non come si usa il filtro.

Se, invece, il filtraggio deve introdurre un'attenuazione complessiva di  $100\text{ dB}$ , allora si può scegliere se fare un filtro che attenua  $100\text{ dB}$  e applicarlo una volta sola o un filtro che attenua  $50\text{ dB}$  e applicare una doppia passata.

Quindi filtro e filtraggio sono due cose diverse.

Allo stesso modo se dico che il filtro deve avere fase lineare, mi sto riferendo al filtro e quindi bisogna per forza utilizzare un filtro FIR. Se invece il filtraggio non deve introdurre distorsione di fase si può utilizzare un IIR a doppia passata.

NB2: Il filtraggio a doppia passata è nato appositamente per recuperare la distorsione di fase e quindi si usa solo con filtri IIR.

Il filtraggio a doppia passata è lecito solo per filtri IIR e per segnali di cui non si vuole distorcere la fase. Altrimenti si filtra normalmente.

Con questa tecnica si perde, però, la possibilità di funzionare in tempo reale. Non si può fare campione per campione, perché bisogna avere tutta la sequenza per poterla invertire.

Tutti i filtri digitali, FIR e IIR, sono perfettamente implementabili in tempo reale. Se si vuole usare la tecnica a doppia passata invece no, poiché bisogna fare un'intera reverse di tutta la sequenza filtrata.

CONDIZIONI:

1) La lunghezza della sequenza deve essere almeno 3 volte l'ordine del filtro ricorsivo.

Questa regola è data per il motivo del transitorio.



## Tecniche di progetto dei filtri IIR

Technique	Description	Functions
Analog Prototyping	Using the poles and zeros of a classical lowpass prototype filter in the continuous (Laplace) domain, obtain a digital filter through frequency transformation and filter discretization.	Complete design functions: <code>besself, butter, cheby1, cheby2, ellip</code> Order estimation functions: <code>buttord, cheb1ord, cheb2ord, ellipord</code> Lowpass analog prototype functions: <code>besselap, buttap, chebtap, cheb2ap, ellipap</code> Frequency transformation functions: <code>lp2lp, lp2hp, lp2bp, lp2bs</code> Filter discretization functions: <code>bilinear,impinvar</code>
Direct Design	Design digital filter directly in the discrete domain by approximating a piece-wise linear magnitude response.	<code>yulewalk</code>
Parametric Modeling*	Find a digital filter that approximates a prescribed time or frequency domain response.	Time-domain modeling functions: <code>lpc, procy, stabc</code> Frequency-domain modeling functions: <code>invfreqz, invfreqs</code>

\*See the System Identification Toolbox for an extensive collection of parametric modeling tools.

17

Per filtri IIR ci sono 5 filtri disponibili. Le sintassi di questi filtri sono tutte uguali. Bisogna fornire l'ordine e la frequenza di taglio. La  $f_T$  è una sola per PA e PB, sono due per passa banda e rigetta banda. Come si fa a stabilire qual è l'ordine di un filtro? Non esiste una funzione matematica da applicare per stabilire a priori l'ordine di un filtro.

Per tanto, si fanno delle prove. cioè si generano i parametri  $a$  e  $b$ , rappresenta la FDT e si decide se quel filtro va bene o meno. Se va bene si procede con il filtraggio, mentre se non va bene si cambiano i parametri. In particolare si cambia l'ordine del filtro. L'ordine del filtro determina il numero di radici. Se un filtro ha una  $f_T = 100\text{Hz}$  e  $\omega = 100,001$  deve attenuare vuol dire che deve andare giù molto rapidamente.

Se il numero di radici è molto alto vuol dire che il filtro diventa instabile.

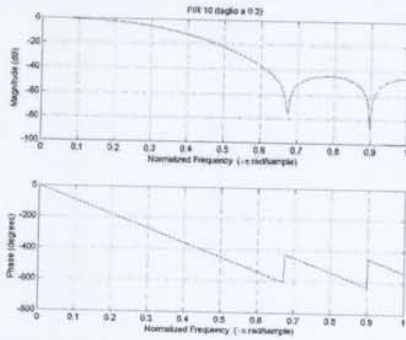
C'è la possibilità di utilizzare alcuni funzioni di supporto che danno una stima dell'ordine date le caratteristiche del filtro

`buttord, cheb1ord, cheb2ord, ellipord`

Se voglio fare un FPB con  $f_T = 30\text{Hz}$  e che introducesse 20dB in banda attenuata, allora queste funzioni danno un ordine di grandezza di quello che dovrebbe essere il numero di radici del filtro.

Esiste un altro metodo per dimensionare i filtri IIR, che è la soluzione di un sistema di Yule Walker, che è un sistema lineare.

### Esempio: passabasso di ordine 10 FIR



$a = 1;$   
 $b = [-0.0052 \ -0.0080$   
 $0.0134 \ 0.1057$   
 $0.2405 \ 0.3072$   
 $0.2405 \ 0.1057$   
 $0.0134 \ -0.0080$   
 $-0.0052]$

Si osservi la rotazione di fase lineare in banda passante e la minor ripidità rispetto all'IIR

21

Nell'esempio si ha un PB di ordine 10 che taglia a 0,3.  
 A parità di ordine un filtro FIR è molto più lento di un filtro IIR.

La fase è lineare. Siccome è una quantità periodica di periodo  $2\pi$  allora la si può rappresentare o come una linea che scende all'infinito oppure la si può ribaltare di  $2\pi$ .

Il valore  $\pi$  dei coefficienti del filtro è stato scelto in modo da ottenere una fase lineare e una risposta in ampiezza simmetrica.

Esempio  
 $[1, 5, 1]$   
 $[1, 5, 1]$   
 $[1, 5, 1]$

Il valore  $\pi$  dei coefficienti del filtro è stato scelto in modo da ottenere una fase lineare e una risposta in ampiezza simmetrica.



16-03-2015

## FILTRAGGIO A BLOCCHI

La struttura a minimo numero di ritardatori è importante perché ci dice ad ogni campione di ingresso  $x$ , come viene generato il campione all'uscita.

All'ingresso di ogni ritardatore esistono dei valori, chiamati  $z$ , che derivano dal prodotto dei coefficienti a media mobile per gli ingressi e dei coefficienti autoregressivi per le uscite sommati. Tra di loro. Questi valori  $z$  non vanno però direttamente all'uscita perché si ha tutta una catena di ritardatori che devono passare. Questi valori  $z$  sono quelli che sono responsabili del transitorio, perché all'inizio, quando nel futuro non è stato inserito ancora nessun campione  $x$  all'ingresso, questi valori  $z$  sono valori nulli oppure possono essere casuali. Non corrispondono però al valore corretto, cioè i coefficienti  $b$  per l'ingresso, oppure  $a$  per l'uscita.

Questo determina il fatto che finché almeno l'ultimo  $z$  non si è propagato all'uscita, questa catena di ritardatori mi genera il transitorio.

Il transitorio di filtraggio non è un problema grave poiché avremo sempre un ordine del futuro che è molto minore rispetto al numero di campioni che costruisce il segnale. Esiste, però, un modo di preinizializzare i pesi e in alcuni casi può essere importante per minimizzare o annullare il transitorio di filtraggio. Questo succede quando devo effettuare il filtraggio a blocchi, che è una tecnica che si utilizza quando non si può allocare sul dispositivo memoria sufficiente per elaborare tutto il segnale. Questo è il caso di dispositivi reali programmabili, dove la RAM a bordo è limitata. Quindi avendo un segnale troppo lungo, non lo carico in memoria e lo filtro tutto in una volta, ma lo divido in blocchi.

Se ragionissimo in termini di filtraggio tradizionale succede che prendo un blocco del segnale, lo filtro; ho un transitorio di filtraggio all'inizio. Poi scarico il filtro e filtro un altro blocco e ho di nuovo il transitorio di filtraggio all'inizio. Quindi se filtro in modo tradizionale, avrei



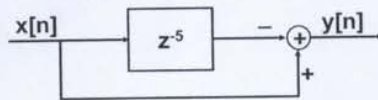
## RIMOZIONE DELL'INTERFERENZA DI RETE

Il segnale biologici per cui l'interferenza di rete rappresenta un problema sono quelli che hanno un'informazione specifica nel dominio del tempo che si vuole mantenere. Il segnale che più di tutti patisce della presenza dei 50Hz è il segnale ECG.

### Rimozione dell'interferenza di rete

Filtro notch

Ipotizzando un'interferenza di rete con ampiezza e frequenza costante, supponendo di campionare il segnale ad una frequenza pari a 250 Hz



Struttura a minimo numero di ritardatori di un filtro Notch. C'è un solo ritardatore di  $K$  passi.

$$y[n] = x[n] - x[n-5]$$

$$a = 1;$$

$$Y(z) = X(z)(1 - z^{-5})$$

$$b = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1];$$

30

Quasi tutti i filtri che rimuovono l'interferenza di rete implementano l'equivalente di un rigetto banda, cioè si vede attenuare solo la 50Hz.

Il filtro Notch è un filtro molto utilizzato, presente su un certo numero di dispositivi reali, cioè gli elettrocardiografi, (il 90% di questi dispositivi ha un tasto con scritto "line", che quando viene premuto viene inserito il filtro Notch). È quindi un filtro indesiderabile o disindesiderabile.

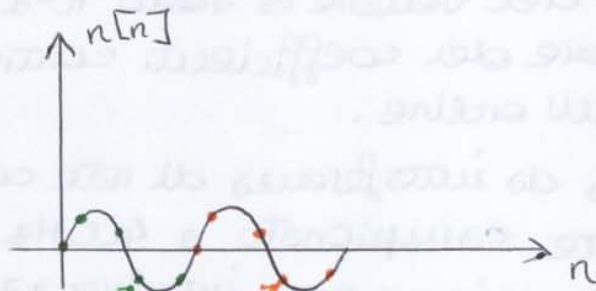
L'ipotesi è che sovrapposto al segnale ci sia un'interferenza di rete di ampiezza costante. Se quest'ipotesi non è verificata il filtro Notch funziona male. Quando un filtro funziona male vuol dire che impone un'attenuazione scarsa al rumore.

Quest'ipotesi nel caso pratico di acquisizione di biopotenziali è un'ipotesi

Quando ho una strumentazione di prelievo applicata al paziente ci sono due possibili canali di interferenza a 50Hz:

- sbilanciamento d'impedenza degli elettrodi. Se gli elettrodi sono bene attaccati e se l'interfaccia elettrodo-... non cambia, questa darebbe origine a un'interferenza di ampiezza costante. Quando si fa ECG sott'acqua questo non è tanto vero





I punti del periodo successivi sono messi esattamente alla stessa quota del periodo precedente, poiché la sinusoidale è un sottomultiplo della frequenza di campionamento.

Indipendentemente dal periodo il campione della sinusoidale ha sempre lo stesso valore.

Ogni 5 campioni la sinusoidale di rete si ripete uguale a se stessa.

E allora in questo caso si fa denoising per sottrazione; al valore del campione attuale sottraggo il valore del segnale che si ha 5 campioni prima.

$$y[n] = x[n] - x[n-5]$$

Si può generalizzare l'espressione del filtro Notch per un rapporto qualunque tra  $f_c$  e  $f_0$ . Supponiamo di chiamare questo numero  $k$ .

$$k = \frac{f_c}{f_0}$$

$$y[n] = x[n] - x[n-k]$$

Dall'equazione temporale di un filtro bisogna essere in grado subito di ricavare  $H(z)$ .

$$H(z) = 1 - z^{-k}$$

Questa è la FDT di un filtro FIR e quindi è sempre stabile per qualunque valore di  $k$  e può avere fase lineare.

Per avere fase lineare il filtro FIR deve avere il vettore  $b$  simmetrico o antisimmetrico.

In questo caso è un vettore antisimmetrico

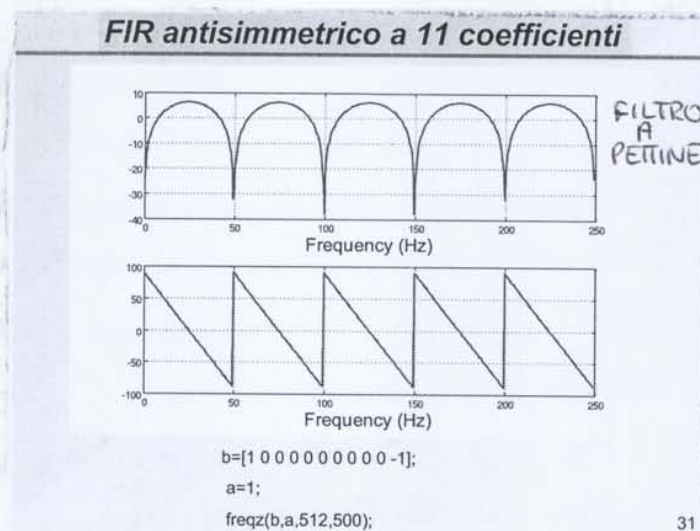
$$b = [1 \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0}_{k-1} \ -1]$$

quindi è a fase lineare, pertanto non distorce il segnale.

Il sottocampionamento è più rischioso perché se avessi campionato il segnale originale a una frequenza di campionamento che rispettava al limite il teorema di Nyquist, quando sottocampiono il teorema di Nyquist non lo rispetto più e quindi rischio di incorrere nel fenomeno dell'aliasing. Se viene violato il teorema di Nyquist, quello che si ottiene è solo spazzatura. Però l'istruzione `resample`, quando si vede ricampionare a una  $f_c$  più bassa, prima di farlo applica un filtro passa basso con frequenza di taglio pari a  $f_c/2$ , per cui si è sicuri di rispettare Nyquist.

Se la  $f_c$  iniziale è 256 e si vede ricampionare a 250 Hz, la funzione `resample` capisce che si sta sottocampionando, per cui applica un FPB con  $f_t = 125$  Hz e poi ricampiona a 250 Hz il segnale. Questo però non sempre va bene poiché con il filtro passa basso può essere buttato via più di metà segnale.

Se utilizzo l'istruzione `freqz` per vedere come è fatto il filtro in modulo e fase ottengo questo:



Se guardo il modulo si possono fare due annotazioni:

- il modulo della FDT non ha valore costante a 1 in banda passante. Teoricamente si vorrebbero dei filtri che in banda passante avessero modulo pari a 1, cioè 0 dB.

La banda passante in questocaso è tutto tranne 50 Hz, che deve essere attenuato.

In questo caso si ha un fenomeno, detto OVERSHOOT



Il filtro Notch ha un altro grosso pregio. La funzione di Trasferimento riportata nella slide di prima ha uno zero di Trasmissione anche in continuo. Il valor medio di un segnale è la frequenza pari a 0. Il filtro Notch ha uno zero di trasmissione in continuo e quindi <sup>per qualunque valore di k</sup> qualunque sia il segnale  $x$  di ingresso, il segnale di uscita è sempre a valor medio nullo.

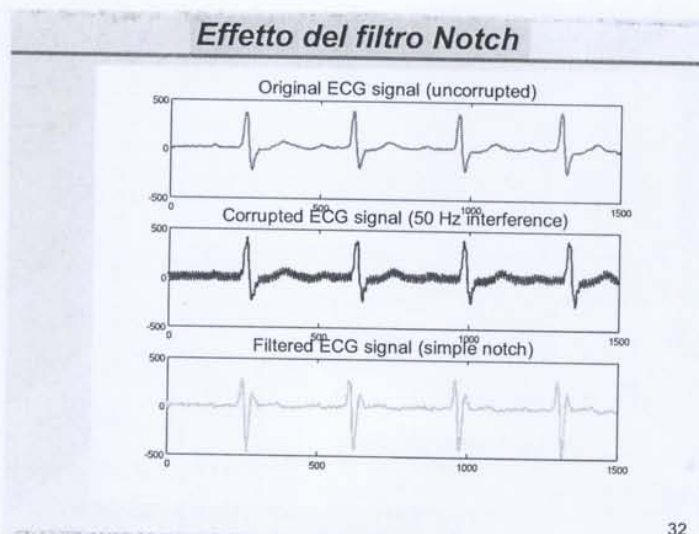
Questo viene dimostrato in questo modo:

$$H(z) = 1 - z^{-k}$$

$$H(\beta) \Big|_{\beta=0} = 1 - e^{-j2\pi f k} = 0 \quad \text{per ogni valore di } k.$$

Il filtro Notch funziona in real time.

ESEMPIO:



Il segnale filtrato in questo esempio non è distorto, ma è stata semplicemente tolta anche la sinusoidale a 100 Hz.

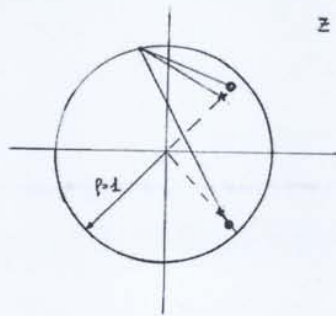
È cambiata solo la forma dell'onda P e dell'onda R, ma sono sempre allo stesso posto, la loro differenza non è cambiata.

La distorsione di un segnale nel dominio del tempo non vuol dire che la morfologia è costante, vuol dire che sono costanti i rapporti temporali che ci sono tra le diverse onde del segnale, in questo caso ECG, se lo avessi distorto l'intervallo che c'è tra l'onda P e l'onda R nel segnale originale avrebbe un valore diverso nel segnale filtrato. Questa forma che si ottiene è dovuta al fatto che il segnale

Se li vado a vedere nel cerchio di raggio unitario, sono all'interno del cerchio per questioni di stabilità. Quindi posizione all'interno del cerchio le radici complesse. Quella che varia è solo la parte immaginaria, ma il modulo è lo stesso.

### Rimozione dell'interferenza di rete

Filtro ricorsivo



$$y[n] = x[n] + c_1 x[n-1] + c_2 x[n-2] + c_3 y[n-1] + c_4 y[n-2]$$

33

La FDT di questo filtro è

$$H(z) = \frac{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1 - c_3 z^{-1} - c_4 z^{-2}}$$

L'unico problema è trovare  $c_1, c_2, c_3, c_4$  in modo da posizionare le radici attorno a 50Hz.

Questo si fa con la funzione "rico" che serve per generare i coefficienti a media mobile e quelli autoricorsivi a partire da una serie di parametri che bisogna fornire.

Bisogna dargli questi parametri perché il filtro ricorsivo ha un vincolo, cioè ha 4 radici e quindi a seconda di come vengono posizionate non si può avere una banda stretta e un'attenuazione molto grande perché il filtro non va giù a più di 20 dB a decade.

Se vuoi avere una banda molto stretta, che taglia solo la 50Hz, zeri e poli vanno messi molto vicini, ma in questo modo l'attenuazione sarà poca.



18-03-2015

## FILTRO ADATTIVO

È possibile rimuovere l'interferenza di rete in tempo reale anche quando l'interferenza di rete ha ampiezza <sup>non</sup> costante sul segnale? Ci sono stati diversi approcci e tutti funzionano con delle limitazioni.

Ci sono stati approcci che Togliavano l'ipotesi che la sinusoide di rete avesse ampiezza costante però venivano imposte altre condizioni da rispettare.

Di tutti gli approcci che funzionano ragionevolmente c'è quello che viene chiamato filtro adattivo. In realtà anche questo fa un'ipotesi sul segnale, che però non è molto vincolante.

Il filtro adattivo è un processo iterativo e tenta di adattarsi al rumore. È un approccio mediante il quale si tenta di stimare il rumore, adattandolo progressivamente, e una volta che ci si è adattati, cioè è stata stimata una sinusoide che ha le stesse caratteristiche del disturbo, questa sinusoide viene tolta per sottrazione. Anche questo filtro, come il filtro Match, effettua un denoising mediante sottrazione, dopo, però, che si è riusciti a stimare il disturbo in modo corretto.

Questo filtro è puramente digitale, non esiste un equivalente analogico, per cui non ha un equivalente FIR o IIR. È un filtro a sé stante, che funziona dal punto di vista numerico.

L'ipotesi base è che il segnale su cui si vuole fare denoising abbia degli intervalli sufficientemente lunghi in cui l'ampiezza è costante.

Se ho un segnale ECG corrotto da interferenza di rete, ci sono alcuni tratti di questo segnale in cui c'è solo  $n(t)$  (come nella linea isoelettrica).



Non si fanno ipotesi sul rumore, cioè il rumore può essere di ampiezza variabile e per certi aspetti può essere anche di frequenza leggermente variabile. Per piccole variazioni della frequenza di rete questo filtro funziona ugualmente.

Se  $e[n]$  sono i campioni di una sinusoide alla frequenza di rete che ci creiamo noi vuol dire che

$$e_n = A \sin(\omega n T)$$

Quanto vale  $A$  all'inizio è irrilevante.

Il campione al passo futuro è  $e_{n+1} = A \sin(\omega n T + \omega T)$ , mentre quello al passo precedente è  $e_{n-1} = A \sin(\omega n T - \omega T)$

Considero questi campioni perché tutti i processi adattivi sono utili quando predicano qualcosa.

L'adattamento di quasi tutti gli operatori matematici è sempre fatto verso il futuro.

Il campione futuro  $n+1$  posso riderlo utilizzando le proprietà di  $\sin$  e  $\cos$ .

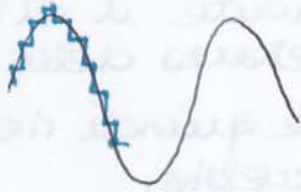
$$\begin{aligned} e_{n+1} &= 2A \sin(\omega n T) \cos(\omega T) - A \sin(\omega n T - \omega T) = \\ &= 2k e_n - e_{n-1} \end{aligned}$$

$$k = \cos(\omega T)$$

Dato un campione attuale  $e_n$  e dato il suo campione precedente  $e_{n-1}$  posso cercare di predire qual è l'errore che commetto al passo futuro. Se il filtro funziona bene, cioè se riesce a predire in modo corretto il campione futuro succede che quando arriverà il nuovo campione reale, il valore del nuovo campione reale sarà uguale a quello predetto. In questo caso sono in condizione di adattamento.

Se, invece, la predizione non è corretta esiste un errore di predizione e per sapere di quanto ho sbagliato faccio la differenza tra il valore reale e quello predetto.





Il mio campione è anziché essere sulla sinusoide, ad un certo tempo, è più basso. Allora prendo il campione e lo aumento di una quantità pari a  $c$  e lo porto più in alto. Allora si può avere che la sinusoide sia stimata in modo da avere una scalinatura che tenta di seguire la sinusoide al meglio possibile. Questo non è un problema, perché le condizioni di adattamento sono sempre fatte così. Quando si arriva a quello che effettivamente si vuole stimare, si comincia ad oscillare attorno.

Due considerazioni fondamentali:

- $c$  è una quantità ragionevolmente piccola, però non può essere troppo piccola perché altrimenti non ci si adatta mai, cioè finisce l'intervallo isoelettrico quando si è ancora disadattati. Non può neanche essere una quantità troppo grande, perché la sinusoide verrebbe stimata a gradoni, cioè si continua ad oscillare attorno alla sinusoide di una quantità molto grande.

Ottimizzare il valore di  $c$  è un problema. Nel caso dell'ECG il tempo di adattamento dipende dalla frequenza cardiaca.

Se questa è alta  $c$  dovrà essere più grande perché il tratto isoelettrico è più corto e quindi ho poco tempo per adattarmi. Alcuni dicono che c'è quasi una proporzionalità diretta tra frequenza cardiaca e valore di  $c$  da impostare.

- Una volta che nel tratto isoelettrico il filtro si è adattato, quando incontra segnale e rumore si disadatta, perché tenta di adattarsi a quello che c'è all'interno di  $x$ , ma poiché all'interno di  $x$  non c'è più solo la sinusoide ma ci sono le onde, allora tenta di adattarsi anche a tutte le onde PQRST.

Questo filtro, se funziona bene, arriva all'onda P in condizioni di adattamento, comincia a filtrare e man mano che filtra si disadatta. Arriva all'onda T che si è un po' disadattato e si deve riadattare nel tratto elettrico



## STIMA SPETTRALE

I segnali biologici non sono altro che la misura che facciamo di un campo elettrico, elettromagnetico, ecc, di un sistema fisiologico. Molto spesso i sistemi fisiologici lo diciamo la loro impronta non tanto nel dominio del tempo, ma nel dominio della frequenza. La motivazione per cui si fa stima spettrale è che il contenuto frequenziale del segnale, per molti segnali dà maggiori informazioni rispetto alla normale acquisizione nel dominio del tempo.

Questo è particolarmente vero per i segnali casuali, cioè per quei segnali biologici assimilabili a processi casuali, dove l'informazione portata nel tempo è a volte irrilevante.

La gran parte dell'informazione del segnale EEG sta nella frequenza. La stessa cosa si può dire per il segnale EKG.

Poi ci sono altri segnali che portano un'informazione nel dominio del tempo e un'informazione complementare nel dominio della frequenza, cioè fanno vedere un'altra cosa.

Fare stima spettrale vuol dire ricavare la stima dello spettro del segnale.

La stima spettrale si divide in due famiglie:

- Stima spettrale tradizionale o non parametrica
- Stima spettrale parametrica.

Fourier è alla base della stima spettrale non parametrica, però la storia è molto più antica.

### Stima spettrale: cenni storici<sup>(1)</sup>

• VI secolo a.c.: Pitagora teorizza la relazione tra la lunghezza di una corda vibrante e le note musicali prodotte.

• XVII secolo d.c.: Isaac Newton → scomposizione della luce bianca mediante un prisma. Introduzione della parola spettro (1671).

• 1738: Bernoulli risolve lo studio della corda vibrante

$$u(x,b) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx (A_k \cos kct + B_k \sin kct)$$

• 1755: Eulero scopre la formula per trovare i coefficienti  $A_k$  e  $B_k$ .

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x,0) \sin(kx) dx$$

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x,0) \cos(kx) dx$$

2

### Stima spettrale: cenni storici<sup>(2)</sup>

• 1822: Fourier estende il lavoro di Bernoulli ad una  $u(x)$  qualsiasi

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\alpha x + B_k \sin k\alpha x)$$

• 1900: Shuster propone il periodogramma

• 1927 - 1946: Slutsky e Daniell osservano le fluttuazioni del periodogramma e propongono smoothing o medie

• 1930: Wiener affronta in modo statistico i temi di stima spettrale (attorno al '40 formalizza anche una prima applicazione di tecniche di stima spettrale di tipo tempo - frequenza)

• 1934: teorema di Wiener - Khintchine

• 1942: Danielson e Lanczas presentano la FFT. Diviene uno strumento di utilizzo comune nel 1962.

• 1967: stima spettrale ad alta risoluzione

3



È stato chiamato periodogramma perché era una rappresentazione, ancora molto in voga in chi si occupa di acustica ambientale, per cui sull'asse orizzontale non veniva messa la frequenza, ma il periodo ( $1/f$ ).

Il diagramma che fa vedere quali sono i periodi contenuti in un segnale è stato chiamato periodogramma, però concettualmente è lo spettro.

Oggi giorno il periodogramma viene usato come notazione per indicare la stima con l'asse delle frequenze.

Nel periodo 1927-1946 Slutsky e Daniell osservano che il periodogramma ha delle fluttuazioni casuali.

A me piacerebbe avere uno spettro che mi dice quanto ogni frequenza è ampia in quel segnale, ma se compaiono delle oscillazioni casuali io posso interpretare delle frequenze molto alte che in realtà poi sono più basse, o delle frequenze come affetti nel segnale o molto basse, ma che in realtà ci sono. Questi matematici proposero, quando si ha variabilità casuale, una stima alternativa fatta su un certo numero di medie che vengono fatte per abbattere la variabilità. Non funzionava benissimo tanto che esiste un periodogramma, detto periodogramma di Daniell, che oggi è quasi in disuso.

Wiener affrontò, attorno al 1930, i temi della stima spettrale. Aveva formalizzato il parallelo che c'è tra la statistica e la stima spettrale e insieme a Khintchine propose il Teorema di Wiener-Khintchine che è il cardine della stima spettrale, che è quello che ci assicura, dopo determinate ipotesi, determinate prestazioni ed è quello che indica anche come si calcola uno spettro.

È un teorema che la maggior parte delle volte, però, viene ignorato, perché ci impone dei vincoli che sono un po' critici da rispettare nel caso particolare di segnali biomedici. Nel 1942 nasce la Fast Fourier Transform (FFT), che è un algoritmo importantissimo poiché basta poca potenza di calcolo per calcolare lo spettro in modo numerico in tempo reale.



Segnale biologico ha uno spettro che è sempre costante, ma essendo lo spettro l'impronta di un sistema fisiologico, i sistemi fisiologici si adattano, cambiano, non danno mai origine a segnali WSS.

Riusciamo a non vederlo perché non ci possiamo permettere la sommatoria da  $-\infty$  a  $+\infty$ , poiché noi lavoriamo al finito.

Allora quello che bisogna chiedersi non è se il segnale è WSS in generale, ma se quel segnale può essere considerato WSS su quel pezzo di segnale che stiamo considerando.

Ad esempio, preleva segnale EEG da un soggetto; io so già che il segnale EEG non è stazionario, perché cambia in base alla funzione che sta facendo il soggetto, cioè con il funzionamento del cervello. Però se ho acquisito 1 secondo di segnale EEG, allora bisogna vedere se in questo secondo è WSS. Se sì, posso applicare il teorema di W-K e quindi posso calcolare lo spettro del segnale.

Quello che in realtà andiamo a misurare è uno spettro di potenza, poiché è la potenza la quantità legata alla frequenza, mentre l'energia è legata al tempo.

Quindi quello che calcolo è la densità spettrale di potenza, che è un grafico che mi fa vedere come la potenza è distribuita sulla frequenza.

$$P_{x,x}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{x,x}[m] e^{-j2\pi f m T}$$

$m$  è un ritardo

$T$  è il passo di campionamento

Se effettivamente l'ipotesi di segnale WSS è rispettata, siamo sicuri che la densità spettrale di potenza (PSD) che abbiamo ottenuto è SIMMETRICA, REALE e POSITIVA.

La potenza è una quantità reale ed è anche positiva.

La PSD è simmetrica rispetto alla frequenza 0, oppure rispetto alla  $f_N$ .

La quantità  $P(f)$  non è altro che il risultato della Trasformata di Fourier e la transf. di  $f$  è simmetrica.



Normale perché il modulo di  $e^{j2\pi f}$  è uguale a 1.  
 Se si ha una funzione pari o simmetrica e lo si scompone rispetto a una base ortogonale si ottiene una matrice di scomposizione simmetrica e la geometria ci dice che queste matrici hanno tutte autovettori positivi.  
 Se il segnale non è più WSS, si ha un'autocorrelazione che varia, perché se il segnale cambia la sua struttura non è più vero che la correlazione è indipendente dal tempo, e quindi quella che misuro, trascurando i ritardi, è un'autocorrelazione parziale.

### Processi casuali

Valor medio	$\bar{x}[n] = E\{x[n]\}$
Autocorrelazione	$r_{xx}[n_1, n_2] = E\{x[n_1]x^*[n_2]\}$
Crosscorrelazione	$r_{xy}[n_1, n_2] = E\{x[n_1]y^*[n_2]\}$
Autocovarianza	$c_{xx}[n_1, n_2] = E\{(x[n_1] - \bar{x}[n_1])(x^*[n_2] - \bar{x}^*[n_2])\}$

preoccupiamoci di dimostrarlo. Per un processo biologico l'ergodicità è assunta a priori.

Possiamo togliere il valore medio perché consideriamo una sola realizzazione e possiamo togliere anche il limite poiché abbiamo un pezzo di segnale limitato.

Se alla definizione di spettro togliamo queste due cose rimane solo il modulo quadro della Trasformata di Fourier, che non è più lo spettro vero, ma una stima.

A partire dallo stesso segnale  $x$  questa relazione definisce lo spettro in un modo, mentre il teorema di W-K in un altro, ma sono la stessa cosa.

La stima spettrale non parametrica si divide in due grandi famiglie:

- metodi di stima diretti
- metodi di stima indiretti.

### Definizioni equivalenti

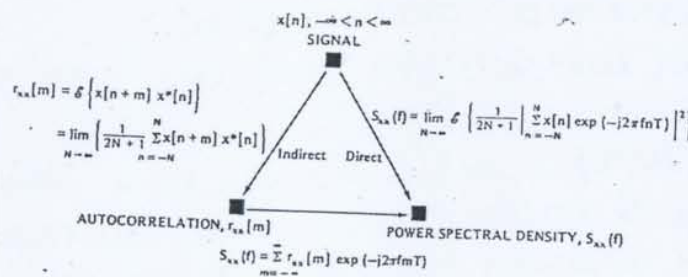


Figure 4.1 Equivalent definitions of the power spectral density under the assumption of ergodicity.

9

In alto si ha il segnale, supponiamo, per semplicità, di lunghezza infinita. Se applico la definizione di spettro di potenza per segnali stazionari ed ergodici, ho definito la densità spettrale di potenza. Questo passaggio è diretto, cioè prendo il segnale, ne calcolo la Trasformata di Fourier e ne faccio il modulo quadro.

SEGNALE → TRASFORMATA DI FOURIER → MODULO

Ma se interpretiamo il teorema di W-K come criterio operativo, questo ci dice come possiamo ricavare la PSD a partire dalla funzione di autocorrelazione

SEGNALE → SEQUENZA DI AUTOCORRELAZIONE → TRASFORMATA DI FOURIER DELLA SEQUENZA DI AUTOCORRELAZIONE



Se avessimo una sequenza numerica lunga  $N$  campioni, possiamo fare l'ipotesi che questa derivi da una sequenza di lunghezza infinita, moltiplicata per una finestra rettangolare

$$\text{rect}[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e quindi si salvano solo  $N$  campioni.

Supponiamo di voler calcolare lo spettro del segnale  $x_0[n]$ , facendo la trasformata di Fourier e prendendo il modulo quadro. Se il segnale lo posso scrivere come il prodotto di due segnali differenti, la trasformata di Fourier di un segnale che è il prodotto di due segnali è la convoluzione delle due trasformate di Fourier, e la trasformata di Fourier di una finestra rettangolare è un seno digitale.

$$X_0(f) = X(f) * D_N(f)$$

SINC DIGITALE  
 KERNEL DI DIRICHLET

$$D_N(f) = T e^{-j2\pi f T (N-1)} \frac{\sin(\pi f T N)}{\sin(\pi f T)}$$

Supponiamo che il segnale sia una sinusoidale centrata a frequenza  $f_0$  e la sua trasformata di Fourier sia  $1 \text{ o } 2 \delta$ . Prendo questa sinusoidale e la tronco come in figura. Devo quindi fare la convoluzione tra le  $2 \delta$  e  $\frac{\sin x}{x}$ . Fare questa convoluzione vuol dire prendere  $\frac{\sin x}{x}$  e centrarlo a  $f_0$  e a  $-f_0$ .

### Problema dei lobi laterali

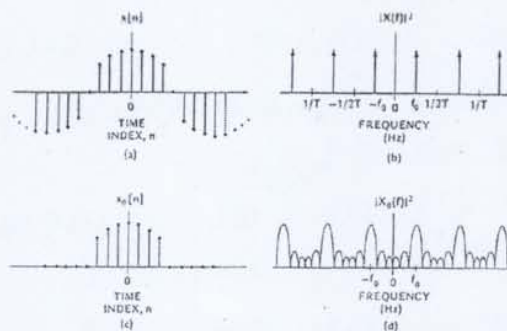


Figure 5.5 Illustration of discrete-time Fourier transform (DTFT) bias due to leakage of windowed data. (a) Original discrete-time sinusoidal sequence. (b) Magnitude of periodic DTFT of sinusoidal sequence. (c) Windowed sinusoidal sequence. (d) Magnitude of DTFT of windowed sequence.



è che hanno potenza unitaria, cioè l'integrale del loro spettro vale 1. Questo ci permette di non alterare la potenza del segnale. Però c'è una differenza, cioè che nel primo grafico tutta la potenza è concentrata alla stessa frequenza, mentre nel secondo grafico c'è una parte di potenza che non è alla frequenza  $f_0$ , ma è sparpagliata dalle oscillazioni che ha la funzione  $\frac{\sin x}{x}$ . Questo effetto è un effetto di perdita di potenza, detta leakage di potenza, dovuto alle oscillazioni che ha lo spettro di questa finestra e che chiamiamo lobi laterali.

Lo spettro di una finestra è fatto da due parti principali, il lobo principale e l'altra parte che sono i lobi secondari, che hanno un'area associata. La somma complessiva delle aree dei lobi è 1.

Una finestra a supporto limitato ha il lobo principale che assomiglia un po' alla delta di Dirac ed ha tutte le oscillazioni che sono i lobi secondari. Quindi la delta di Dirac è come se fosse una finestra che non ha lobi laterali, ma ha solo un lobo principale infinitamente stretto.

Questo è un effetto che succede quando si ha una sinusoidale, ma se ne abbiamo di più oppure abbiamo un segnale a banda larga le cose peggiorano.

Questo effetto verrà chiamato più avanti POLARIZZAZIONE DELLA STIMA, cioè tentato di fare una stima, calcolo un valore sbagliato e si dice che la stima è polarizzata.

Tutto nasce dal fatto che abbiamo un supporto temporale limitato.

### Finestratura: definizioni

finestra temporale applicata ai dati	$w[n]$
finestra in frequenza	$W(f) = FFT\{w[n]\}$
finestra applicata alla sequenza di autocorrelazione	$\omega[m]$
finestra "spettrale"	$\Omega(f)$



prima di calcolare la Trasformata di Fourier, ci mette dopo una finestra che voglio io. Qualche si vorrebbe è una Delta di Dirac però non si può fare, quindi bisogna trovare una finestra che abbia delle caratteristiche comode abbastanza.

Siccome il problema sono i lobi secondari, una finestra che può andare bene è una finestra che ha i lobi secondari sufficientemente bassi. Ci sono finestre che hanno dei lobi secondari molto ampi fatti in questo modo:



questo è il lobo principale

Ci sono finestre che hanno dei lobi secondari molto più bassi, però il lobo principale è più grosso:



Se si toglie potenza dai lobi secondari, questa va a finire nel lobo principale, poiché l'area totale vale 1.

Se consideriamo una finestra ci interessa sia l'ampiezza dei lobi secondari sia la larghezza del lobo principale.

Il terzo parametro con cui si calcola una finestra è la velocità con cui i lobi secondari decadono.

Si preferisce una finestra con velocità di decremento alta, perché il leakage di potenza è limitato a poche frequenze vicino al lobo principale.

Quindi si vuole una finestra con:

- ① lobo principale più stretto possibile
- ② lobi secondari più bassi possibili
- ③ velocità di decremento più alta possibile

### Parametri caratteristici di una finestra

#### LARGHEZZA DEL LOBO PRINCIPALE

- a) Larghezza di banda a 3 dB (halfpower bandwidth)
- b) Banda equivalente

#### VELOCITA' DI DECREMENTO DEI LOBI SECONDARI

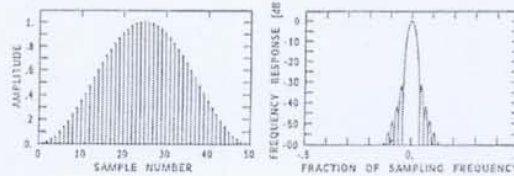
sidelobe decay rate (dB/ottava).

E' funzione di N, ma tende ad un valore asintotico per N grandi

#### AMPIEZZA DEI LOBI LATERALI

riferita all'ampiezza del lobo principale (dB)

### Finestra di Hann



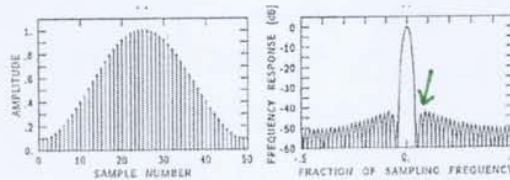
$$w[n] = \cos^2(\pi[n])$$

$$W(f) = 0,5D_N(f) + 0,25[D_N(f - 1/NT) + D_N(f + 1/NT)]$$

Il lobo principale si allarga ancora, i lobi secondari diventano più bassi e la velocità di decremento è molto alta.

### - FINESTRA DI HANNING

#### Finestra di Hamming (coseno rialzato)



$$w[n] = 0,54 + 0,46\cos(\pi[n])$$

$$W(f) = 0,54D_N(f) + 0,23[D_N(f - 1/NT) + D_N(f + 1/NT)]$$

Hamming invece di utilizzare  $\cos^2$  ha utilizzato il  $\cos$  rialzato.

La finestra di Hamming è molto utilizzata perché ha dei lobi secondari che sono quasi 40dB più sotto del lobo principale.

La velocità di decremento non è il massimo, ma sono talmente bassi che non importa. Questa è una delle poche finestre che ha il primo lobo secondario che è più basso degli altri.

È talmente utilizzata che, quando si fa stima spettrale con Matlab, se non si specifica la finestra, Matlab applica una finestra di Hamming.



Uno spettro viene ricavato per due cose differenti:

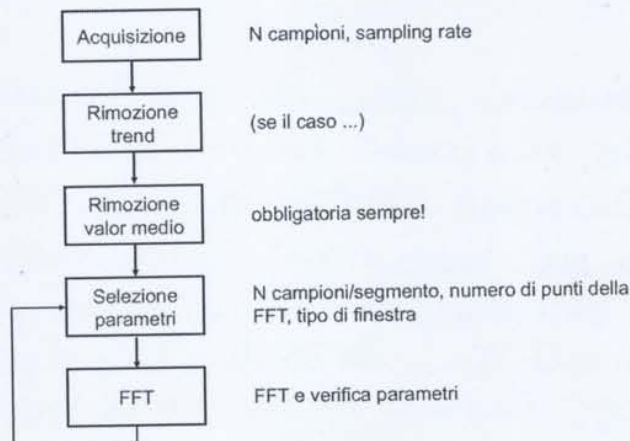
- osservarlo, cioè si vuole vedere come è fatto lo spettro di un certo segnale.
  - ricavare lo spettro perché si vuole misurare qualcosa di questo.
- Nel primo caso confrontare finestre differenti è molto importante. Se il compito della stima spettrale è produrre uno spettro, per poi farci dei calcoli sopra, questa differenza è più sfumata.

Se si utilizza il metodo diretto si finestra il segnale, se si utilizza quello indiretto si finestra la sequenza di autocorrelazione. La finestra si applica sempre prima della Trasformata di Fourier.

La finestrazione non è obbligatoria. Bisogna ricordarsi che esiste il leakage di potenza e che se non finestravamo una finestra c'è già, che è quella rettangolare.

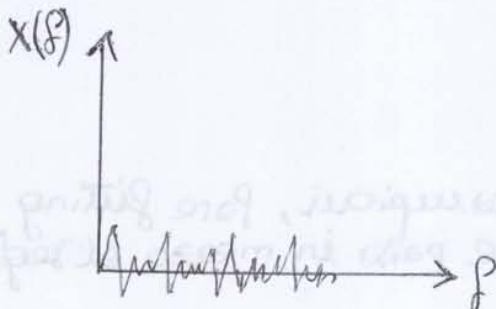
### PASSI FONDAMENTALI PER EFFETTUARE LA STIMA SPETTRALE CON IL METODO DIRETTO

#### Metodo diretto: periodogramma



10

- Acquisizione del segnale, quindi si hanno un certo numero di campioni, ottenuti a una certa frequenza di campionamento.
- Bisogna rimuovere il trend.



Questo segnale NON ha un trend!

Questa funzione vede in ingresso il segnale, e l'ordine del polinomio con cui si vuole interpolare e restituisce i coefficienti del polinomio. Una volta generato il polinomio lo si sottrae alle campioni del segnale.

Esiste un'altra funzione che si chiama 'detrending'. Si può utilizzare al posto che funzioni bene per il caso considerato.

- Quello che bisogna fare sempre è rimuovere il valor medio, altrimenti quello che si ottiene è spazzatura.

Detto  $x_0$  un segnale a valor medio nullo, l'equivalente segnale a valor medio non nullo si può derivare  $x = x_0 + k$ , con  $k$  costante. Quando si fa stima spettrale, essendo che gli stimatori sono quadratici, bisogna fare il modulo quadro.

Se si fa il quadrato di  $x$  si genera nuovamente leakage di potenza in continua. Siccome il valor medio è alla frequenza zero e quindi non ci interessa, allora lo togliamo.

La stima spettrale fatta su segnale a valor medio non nullo è doppiamente affetta da leakage, a partire dalla continua.

- Si selezionano i parametri. Si possono cambiare i parametri finché non si ottiene una rappresentazione della stima spettrale che vada bene.

### Periodogramma: esempio

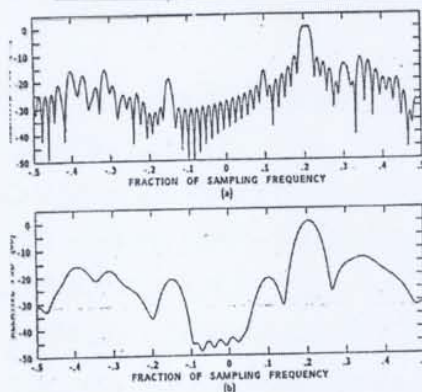


Figure 8.2 Periodogram estimates of the 64-point test sequence. (a) One segment had no window. (b) Three segments and Hamming window.



### Correlogramma: esempio

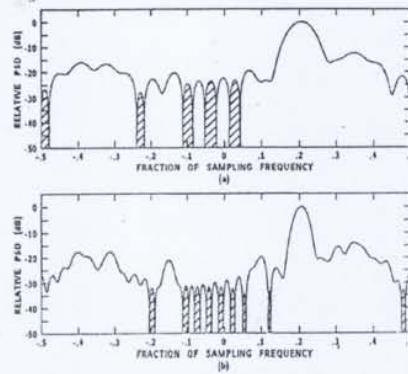


Figure 3.4 Correlogram method PSD estimate of 64-point test sequence. The absolute value of the PSD has been plotted. The shaded areas designate negative PSD values. (a) 16 lags and Hamming window. (b) 22 lags and Hamming window

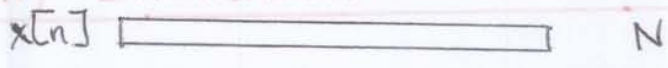
13

Peraltro bisogna fare una di queste due cose:

- ~~forse~~ ribaltare i valori negativi e farli diventare positivi, e quindi si prende il modulo del correlogramma
- i valori negativi vengono messi a zero.

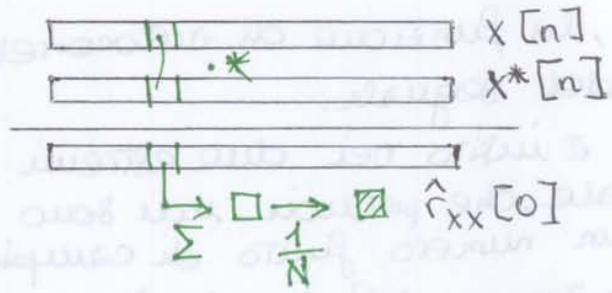
Sulla carta i due metodi (periodogramma e correlogramma) danno lo stesso risultato, ma nella pratica no, perché si lavora sul finito.

Supponiamo di avere un segnale  $x[n]$ , fatto da  $N$  campioni e vogliamo calcolare la sequenza di autocorrelazione.



La formula vista prima va implementata per tutti i valori di  $m$  per cui intendendo calcolare la funzione di autocorrelazione. Il ritardo positivo di ordine minimo è  $m=0$ .

$m=0$

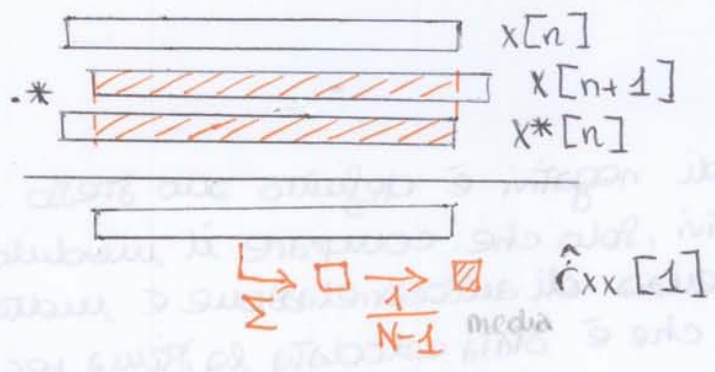


Quando faccio la moltiplicazione di  $x[n]$  per il suo complesso coniugato posso ottenere un vettore o uno scalare a seconda di come lo faccio.

In Matlab sono implementati sia le operazioni elemento per elemento, che le operazioni fatte con la logica matriciale. Se abbiamo 2 vettori della stessa lunghezza,  $a$  e  $b$ :

- $a * b \rightarrow$  SCALARE (MOLTIPLICAZIONE RIGA PER COLONNA)
- $a .* b \rightarrow$  VETTORE (ELEMENTO PER ELEMENTO)

$m=1$



Per quale valore di ritardo massimo riedo a calcolare un valore di correlazione? Se  $N$  è il numero di campioni, al massimo posso calcolare il valore della funzione di autocorrelazione per  $m=N-1$ .



Questo stimatore della sequenza di autocorrelazione non è unico. Ce n'è un altro alternativo fatto in questo modo:

### Stimatore alternativo della ACS<sup>(1)</sup>

$$\hat{r}_{xx}[m] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n] & 0 \leq m \leq N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x^*[n+|m|]x[n] & -(N-1) \leq m < 0 \end{cases}$$

Calchia solo il termine che c'è davanti alla sommatoria che è sempre  $\frac{1}{N}$

I due stimatori sono legati dalla seguente relazione:

$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{N-|m|}{N} \hat{r}_{xx}[m]$$

Questo secondo stimatore è apparentemente poco logico e peggiore del precedente, ma ha caratteristiche importanti.

34

Per  $m=0$  i due stimatori coincidono, perché in 0 la funzione di autocorrelazione deve misurare l'energia del segnale. Lo schema visto prima per calcolare la funzione di autocorrelazione vale anche in questo caso. La differenza si ha solo quando applico il fattore di normalizzazione. Allora con lo stesso codice in Matlab li posso calcolare entrambi.

### Proprietà stimatore ACS

#### POLARIZZAZIONE

si dimostra che lo stimatore è non polarizzato

$$E\{\hat{r}_{x,x}[m]\} = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} E\{x[n+m]x^*[n]\} = r_{x,x}[m]$$

#### VARIANZA

considerando un processo gaussiano, la varianza aumenta con  $m$  e si annulla solo se  $N \rightarrow \infty$ . Lo stimatore è non consistente.

$$\text{var}\{\hat{r}_{x,x}[m]\} \approx \frac{N}{(N-m)^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (r_{xx}^2[k] + r_{x,x}[k+m]r_{x,x}[k-m])$$

Se  $N \gg m$

33

Parametri su cui si valuta come funziona uno stimatore:

### - POLARIZZAZIONE (BIAS)

Supponiamo di avere una popolazione contenente un certo numero di soggetti, che sono caratterizzati dal fatto di avere una certa variabile casuale,  $\theta$ .

Per stimare il valore  $\theta$  non posso prendere tutti i soggetti, ma prendo un sottocampione dal quale calcolo un valore stimato di  $\theta$ .

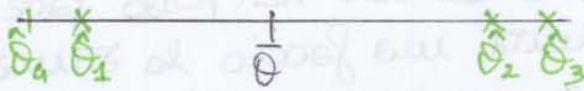
Quindi questo stimatore è NON POLARIZZATO.  
 È uno stimatore consistente.

CONSISTENTE vuol dire che su campioni diversi mi restituisce sempre la stessa stima.

Lo stimatore non polarizzato e perfettamente consistente è quello che su ogni campione mi restituisce sempre esattamente  $\bar{\theta}$ . Questo, però, non esiste.

Ci si accontenta del fatto che questi numeri non siano sempre gli stessi, ma che siano centrati vicini al valore che devo stimare.

Supponiamo di avere un altro stimatore



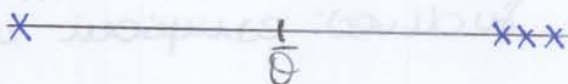
È vero che i due stimatori sono entrambi non polarizzati, ma il primo restituisce dei valori molto più vicini al valore da stimare.

La consistenza di uno stimatore è data dalla varianza della stima. Più bassa è la varianza della stima, più consistente è lo stimatore.

Esistono stimatori:

- NON POLARIZZATI e CONSISTENTI;
- NON POLARIZZATI MA NON CONSISTENTI;
- MOLTO POLARIZZATI e CONSISTENTI;
- POLARIZZATI e NON CONSISTENTI (la maggior parte).

Il caso classico di uno stimatore polarizzato e non consistente è questo:



Per verificare se uno stimatore è polarizzato si deve calcolare il valore atteso, per vedere quanto è consistente si deve calcolare la varianza.

Gli statistici valutano la consistenza in questo modo:

$$P\{|\hat{\theta} - \bar{\theta}|\} = \varepsilon \rightarrow \text{valore piccolo a piacere}$$