



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 653A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Romanazzi

MATERIA: Appunti Tecnica delle Costruzioni 2014-2015.
Prof.Mancini

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

INDICE

SICUREZZA STRUTTURALE	1
FONDAMENTI PER IL PROGETTO CON I COEFFICIENTI DI SICUREZZA	14
BASIS OF STRUCTURAL DESIGN	17
ROBUSTEZZA STRUTTURALE	28
AZIONI 40EFFETTI STRUTTURALI: VISCOSITÀ E RITIRO	62
PLASTICITÀ	83
MATERIALI DA COSTRUZIONE	101

Corso di Tecnica delle Costruzioni 14/15_sicurezza strutturale

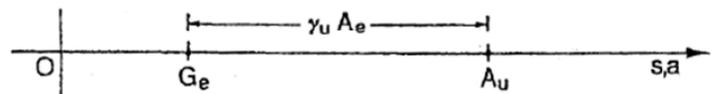
2. elasticità lineare che non consente di tener conto di fenomeni anelastici e reologici (fessurazione, fluage, ...) e della eventuale non-linearità di comportamento del materiale
3. coefficienti di sicurezza necessariamente ampi perchè devono coprire tutte le cause di incertezza lato azioni e resistenze \Rightarrow effetto psicologico pericoloso
4. misura reale della sicurezza artificiosa o impossibile

Ma anche dei vantaggi:

1. facilità di determinazione delle sollecitazioni per la possibilità di applicare il principio di sovrapposizione degli effetti
2. facilità nell'individuazione delle combinazioni di carico più gravose (linee di influenza)
3. buona attendibilità (in campo statico) delle sollecitazioni determinate nei campi usuali di impiego
4. buon comportamento nelle numerose strutture realizzate

Metodo di calcolo a rottura

La misura della sicurezza avviene nello spazio delle FORZE. È un metodo nato per rispondere agli svantaggi del metodo precedente. La verifica della sicurezza non si fa più nello spazio delle tensioni bensì in quello delle forze. Si rappresenta in un asse le sollecitazioni e le azioni. Se G_e è il livello delle azioni permanenti in esercizio (peso proprio della struttura) le azioni variabili vengono amplificate di un coefficiente γ_u tale che: $\gamma_u \cdot A_e \leq A_u$



Si analizza in questo modo una condizione ultima e non più di esercizio:

$$G_e + \gamma_u \cdot A_e \leq A_u$$

con :

G_e azioni permanenti di esercizio

A_e azioni variabili di esercizio

A_u azioni variabili ultime

γ_u coefficiente di sicurezza ultimo

Abbiamo anche per questo metodo dei vantaggi:

1. misura della sicurezza ancora deterministica
2. non valuta le condizioni di esercizio
3. coefficienti di sicurezza necessariamente ampi perchè devono coprire tutte le cause di incertezza lato azioni e resistenze \Rightarrow effetto psicologico pericoloso

E dei vantaggi:

1. possibilità di presa in conto di fenomeni anelastici o reologici o di non-linearità di comportamento dei materiali
2. valutazione corretta degli effetti delle deformazioni impresse
3. possibilità di controllo sperimentale della sicurezza ultima

In ogni caso entrambi i metodi deterministici presentano notevoli lacune nella valutazione della sicurezza strutturale poiché un buon metodo deve essere affidabile sia per quanto riguarda le condizioni di esercizio che quelle ultime.

Pertanto, considerata la variabile aleatoria Esito $E=R - S$, la probabilità di insuccesso è calcolata nel seguente modo:

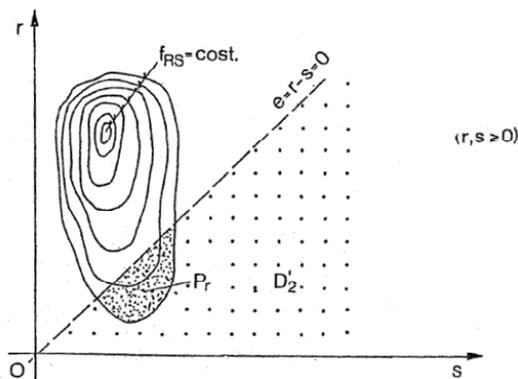
$$P_r = P\{E \leq 0\} = \int_{D_r'} f_{R,S}(r,s) dr ds \quad (1)$$

con :

D_r' dominio di insuccesso (insicurezza), nel quale
cioè $e \leq 0$

$f_{R,S}$ densità di probabilità congiunta delle due variabili
aleatorie R ed S

Nel grafico è rappresentata la funzione di densità di probabilità delle variabili aleatorie r (resistenza) e s (sollecitazione). Al di sotto della retta di stato limite $e=r-s=0$ si trova il dominio di insuccesso ($s>r$), quindi la porzione di f_{RS} al



$$P_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_r^{+\infty} f_{R,S}(r,s) ds \right] dr \quad (2)$$

di sotto della retta stato limite definisce la probabilità di insuccesso P_r .

$$P_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^s f_{R,S}(r,s) dr \right] ds \quad (3)$$

Per misurare questo volume è necessario integrare la (1) per strisce, possiamo farlo in due modi:

- orizzontali
- verticali

Ipotizzando che R e S siano indipendenti (ipotesi che si verifica spesso) la probabilità congiunta $f_{RS}(r,s)$ corrisponde al prodotto delle probabilità semplici:

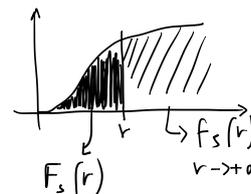
$$f_{R,S}(r,s) = f_R(r) f_S(s)$$

quindi la (2) e la (3) diventano:

$$P_r = \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r) \left[\int_r^{+\infty} f_S(s) ds \right] dr = \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r) [1 - F_S(r)] dr$$

$$P_r = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) \left[\int_{-\infty}^s f_R(r) dr \right] ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) F_R(s) ds$$

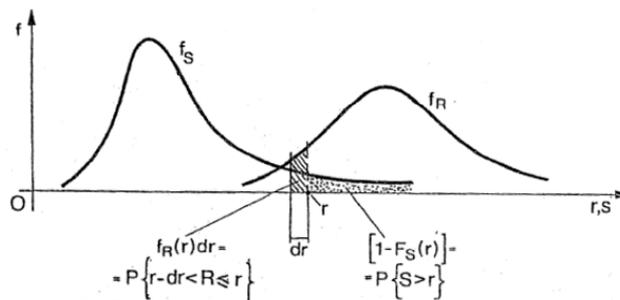
* $F_S(r)$ indica la funzione di probabilità cumulativa (o di ripartizione)



Per comprendere al meglio le espressioni appena scritte facciamo riferimento alle due rappresentazioni grafiche, prima dell'integrazione in orizzontale e poi in verticale.

Nella prima situazione, fissiamo un valore della resistenza R nella f_R compreso in un intervallo dr $\{r-dr, r\}$.

La probabilità $P\{r-dr \leq R \leq r\}$ equivale all'area trapezoidale sottesa dalla curva f_R sulla lunghezza dr . Il caso sfavorevole si manifesta quando la sollecitazione è più grande di questa resistenza, ovvero l'area sottostante f_S alla destra di R. Quest'area vale quindi : $P\{S>r\} = [1-F_S(r)]$



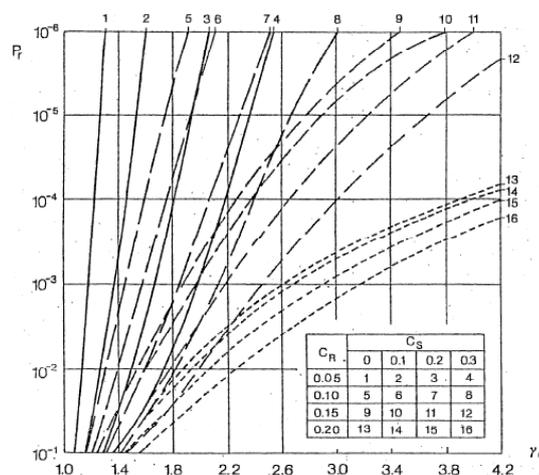
Il coefficiente $\beta = \frac{\bar{z}}{\sigma_z}$ si definisce indice di sicurezza ed è un misuratore della probabilità di rottura (cambiando il suo valore cambia l'estensione del dominio di insuccesso e quindi la probabilità di rottura). Inoltre il coefficiente β corrisponde all'inverso del coefficiente di variazione della variabile aleatoria Z ($c_z = \frac{\sigma_z}{\bar{z}}$)

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{\frac{\mu_R}{\mu_S} - 1}{\sqrt{\frac{\sigma_R^2}{\mu_S^2} + \frac{\sigma_S^2}{\mu_S^2}}} = \frac{\gamma_0 - 1}{\sqrt{\gamma_0^2 c_R^2 + c_S^2}}$$

dove $\gamma_0 = \frac{\bar{r}}{\bar{s}}$ rappresenta il coefficiente di sicurezza centrale.

La probabilità di insuccesso risulta per tanto esprimibile come funzione di $P_r(\gamma_0, c_r, c_s)$.

Per giudicare la bontà dell'indice di sicurezza centrale definiamo graficamente l'andamento della probabilità di insuccesso P_r in funzione di γ_0 fissando coppie di valori (c_r, c_s). Si può notare che per valori elevati di c_r (curve da 9 a 16) anche un sensibile aumento di γ_0 non riesca a confinare P_r entro valori sufficientemente bassi. Per valori bassi di c_r (curve da 1 a 8) risulta invece significativa la variabilità di S. Ciò significa che il coefficiente di sicurezza centrale non è un buon indice per la misura della sicurezza. C'è un'altra spiegazione a questo fatto: γ_0 è definito come il rapporto tra le due medie (r ed s), ciò implica che non tiene conto della distribuzione delle due distribuzioni.



Introduciamo ora nuovi coefficienti di sicurezza e, tramite lo stesso procedimento verifichiamone l'affidabilità:

$$\gamma_k = \frac{R_k}{S_k} \quad \text{coefficiente di sicurezza caratteristico}$$

$$\gamma_d = \frac{R_d}{S_k} \quad \text{coefficiente di sicurezza di calcolo}$$

$$\gamma_k = \frac{R_k}{S_k} = \frac{\mu_R - k_R \sigma_R}{\mu_S + k_S \sigma_S} \frac{\mu_R}{\mu_S} \frac{\mu_S}{\mu_R} = \gamma_0 \frac{1 - k_R c_R}{1 + k_S c_S}$$

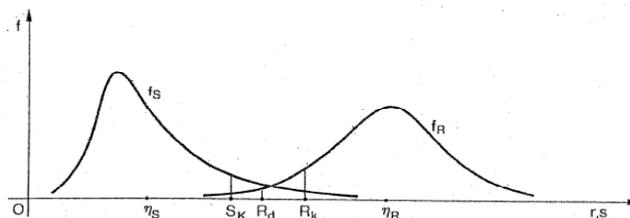
$$\gamma_d = \frac{R_d}{S_k} = \frac{\mu_R - d_R \sigma_R}{\mu_S + k_S \sigma_S} \frac{\mu_R}{\mu_S} \frac{\mu_S}{\mu_R} = \gamma_0 \frac{1 - d_R c_R}{1 + k_S c_S}$$

I valori k e d individuano i due frattili, in particolare per k useremo il 5% mentre d è di ordine inferiore (5‰). Per una distribuzione normale assumeranno i seguenti valori:

$$k_R = 1.645$$

$$k_S = 1.645$$

$$d_R = 3.09$$



a1) FOSM

Si basa su una approssimazione di primo ordine in serie di Taylor della funzione di stato limite linearizzata ai valori medi ed usa solo medie e covarianze delle variabili casuali (normali e log-normali).

Definita la funzione esito

$$Z = g(X) = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

sviluppandola in serie di Taylor nell'intorno dei valori medi si ottiene:

$$Z = g(\mu_X) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} (X_i - \mu_{X_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} (X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j}) + \dots$$

da cui:

$$\mu_Z \cong g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$$

$$\sigma_Z^2 \cong \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial X_j} \text{cov}(X_i, X_j)$$

La covarianza di due variabili casuali X_i, X_j è il momento del secondo ordine rispetto alle rispettive medie μ_{X_i} e μ_{X_j} .

Se le variabili X_i sono indipendenti l'espressione della varianza si può semplificare:

$$\sigma_Z^2 \cong \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 \text{Var}(X_i)$$

Avendo calcolato μ_Z e σ_Z posso determinare $\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z}$

β	1,282	2,326	3,090	3,719	4,265	4,753	5,199
$P_r = P_r(\beta)$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}

Per gli stati limite ultimi ordinari siamo intorno a valori di $P_r \approx 10^{-4} \div 10^{-5}$. A livello europeo la scelta del codice è quella di usare per lo stato limite ultimo un valore prossimo a 3,8 quando la durata di vita prevista è 50 anni. Per una durati di vita di 100 anni invece si usa un valore vicino a 4,2. Per lo stato limite in condizioni di esercizio $P_r \approx 10^{-2} \div 10^{-3}$ a cui corrispondono valori di β tra 2,3 e 2,5.

a2) AFOSM (Hasofer-Lind per variabili normali)

Usa le variabili normali standardizzate:

$$X'_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad i=1, 2, \dots, n$$

Questa nuova variabile X'_i ha media nulla e deviazione standard unitaria.

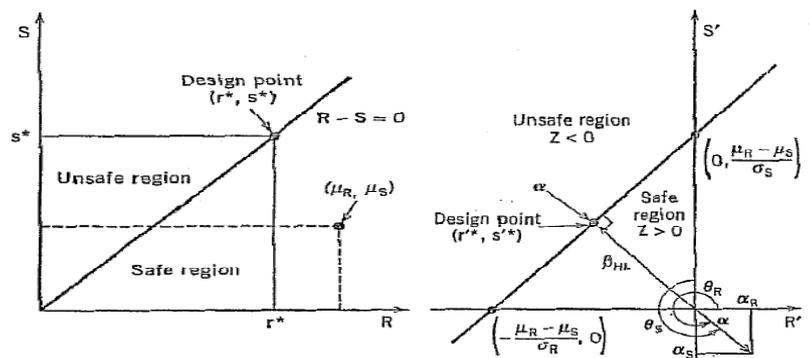
L'indice di sicurezza β_{HL} è definito come distanza minima dall'origine degli assi rispetto alla superficie di stato limite.

$$\beta_{HL} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$$

$$R' = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad S' = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S}$$

L'equazione di stato limite è:

$$\sigma_R R' - \sigma_S S' + \mu_R - \mu_S = 0$$



Metodo probabilistico di livello 1

Il metodo probabilistico di livello 1 invece di confrontare la distribuzione delle probabilità della resistenza e quella delle sollecitazioni confronta due valori rappresentativi (detti valori di calcolo) delle resistenze e delle sollecitazioni.

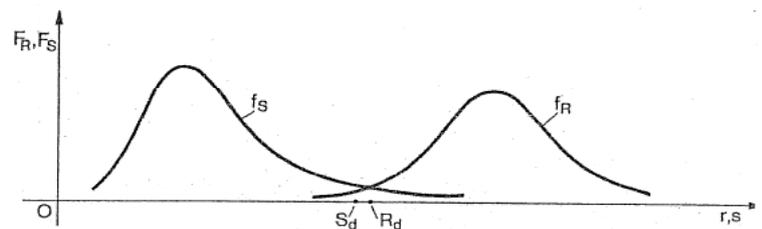
$R_d = g_R(x_{1_{ESTR}}, x_{2_{ESTR}}, \dots, x_{m_{ESTR}})$ consideriamo i valori "più deboli" delle resistenze

$S_d = g_S(x_{m+1_{ESTR}}, x_{m+2_{ESTR}}, \dots, x_{n_{ESTR}})$ consideriamo i valori "più forti" delle sollecitazioni

verificando che risulti:

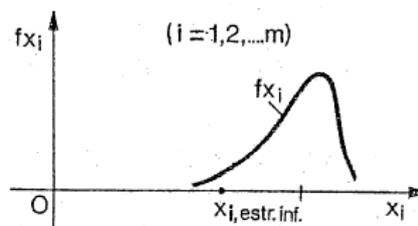
$$R_d \geq S_d$$

In pratica per le sollecitazioni considero un valore S_d che ha poca probabilità di essere superato (accettando una piccola probabilità di avere valori maggiori) mentre per le resistenze considero un valore R_d che ha una probabilità scelta a priori di essere minorata (probabilità piccolissima di avere una resistenza più bassa). Per le resistenze consideriamo i frattili 5%



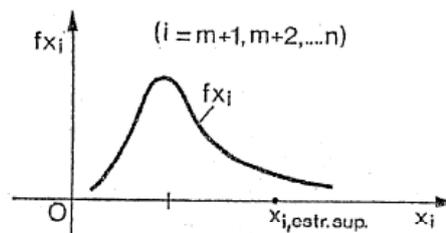
(ovvero consideriamo il valore che ha probabilità 5% di essere superato).

$$F_{X_i}(x_{i_{ESTR.INF.}}) = 0.05$$



Per le sollecitazioni si assumono i frattili 0,95% (accettiamo una probabilità del 5% di ottenere valori maggiori).

$$F_{X_i}(x_{i_{ESTR.SUP.}}) = 0.95$$



Il metodo, detto dei valori estremi, non tiene conto delle aleatorietà ed incertezze dei legami funzionali $g_R(\dots)$ e $g_S(\dots)$.

L'utilizzazione "ad litteram" della procedura può talvolta comportare dei problemi di coerenza, ad esempio quando un'azione interviene nello stesso tempo lato sollecitazioni e lato resistenze, in quanto dovrebbe essere, allo stesso tempo maggiorata e minorata!

Il problema si risolve in tali casi assumendo per tale azione un valore deterministico anzichè due valori estremi.

Questo metodo però non è ancora adatto per un livello applicativo e di confronto con i codici poiché per poter calcolare il valore estremo della resistenza devo conoscere a priori la pdf di tutte le variabili coinvolte. Ma, poiché non ho queste conoscenze, devo introdurre una ulteriore semplificazione: alcune variabili (quelle meno influenti o che posso controllare con altre modalità) devo assumerle in modo deterministico.

Calcolo dei frattili per distribuzione normale e log-normale

I valori caratteristici (k) e di progetto (d) sono valutati come frattili delle distribuzioni:

- frattile 5% per resistenza caratteristica
- frattile ~0.1% per resistenza di calcolo (per effetto del coefficiente γ_m)

Per distribuzione normale abbiamo:

$$X_k = \mu_X - 1.64\sigma_X$$

$$X_d = \mu_X - 3.09\sigma_X$$

Per la log-normale (asimmetrica) occorre valutare il coefficiente skewness (obliquità) α_X :

$$\alpha_X = 3V_X + V_X^3 \quad \text{con } V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad \text{coefficiente di variazione}$$

Il valore caratteristico o di calcolo si valutano quindi con le espressioni:

$$X_i = \mu_X \exp\left[k_{p,0} \sqrt{\ln(1+V_X^2)}\right] / \sqrt{1+V_X^2} \quad i = k \text{ oppure } d$$

dove $k_{p,0}$ è il coefficiente della distribuzione normale per lo stesso frattile (1.64 per il valore caratteristico o 3.09 per il valore di progetto).

Questa espressione la possiamo semplificare:

$$\text{con } V_X < 0.2 \quad X_i \cong \mu_X \exp(k_{p,0} V_X)$$

Esempio:

Proviamo ad applicare l'espressione appena scritta per un caso pratico.

Consideriamo un calcestruzzo con $\mu_X = 30$ MPa, $\sigma_X = 5$ MPa da cui si ricava:

$$V_X = \frac{5}{30} = 0.167 < 0.20$$

Log-normale	$R_k = 30 \exp(-1.64 \times 0.167) = 22.8$ MPa
(scelta consigliata)	$R_d = 30 \exp(-3.09 \times 0.167) = 17.9$ MPa

Normale	$R_k = 30 - 1.64 \times 5 = 21.8$ MPa
	$R_d = 30 - 3.09 \times 5 = 14.6$ MPa

Per le resistenze conviene sempre usare la funzione log-normale in quanto più corretta non assumendo valori negativi.

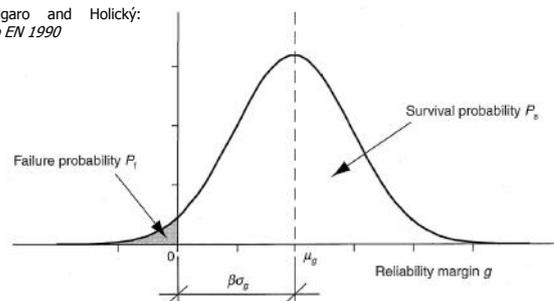
FONDAMENTI PER IL PROGETTO CON I COEFFICIENTI DI SICUREZZA PARZIALI ED ANALISI DI SICUREZZA

Nella precedente lezione abbiamo definito l'indice di sicurezza:

$$\beta = \mu_g / \sigma_g$$

se le variabili aleatorie R e S hanno distribuzione normale la distribuzione della variabile esito è:

Gulvanessian, Calgaro and Holický:
Designers' Guide to EN 1990



$$g = 0 \rightarrow u = -\mu_g / \sigma_g$$

R ed E normali!

la probabilità di insuccesso è data da:

$$P_f = \Phi\left(-\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right)$$

ovvero come la funzione cumulativa della distribuzione a livello $-\beta$.

Se invece R e E sono qualunque la probabilità di insuccesso è data dalla definizione di probabilità congiunta:

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_E(x) \cdot \phi_R(x) dx$$

$\varphi_E(x)$ = Funzione di densità di probabilità delle sollecitazioni

$\phi_R(x)$ = Funzione cumulativa di probabilità delle resistenze

I valori di target assunti da β sono fissati sulla base di un rischio limite accettato dalla società (derivato dai limiti nei costi di costruzione della struttura e della vita umana). Si accetta un valore di perdita della vita umana per anno pari a 10^{-6} , a cui corrisponde un valore di $\beta=4.7$ per lo SLU. Per un periodo di n anni:

$$\Phi(\beta_n) = [\Phi(\beta_1)]^n$$

$$(n=50 \rightarrow \Phi(\beta_{50})=3.8)$$

Nel Basis of Design (EN 1990) è impiegato il metodo "FORM" con i seguenti passi:

- Variabili di base \underline{X} trasformate in standardizzate normali \underline{U} e la funzione esito $g(\underline{X})=0$ in $g'(\underline{U})=0$
- $g'(\underline{U})=0$ è approssimata con un iperpiano tangente (serie di Taylor)
- Viene determinato il punto di progetto su $g'(\underline{U})=0$ più vicino all'origine, per via iterativa
- β è calcolato come distanza dal punto di progetto dall'origine
- Si valuta infine P_f come $P_f = \Phi(-\beta)$

EsempioAcciaio S235 con $\mu = 280$ MPa e $\sigma = 22.4$ MPa

$$V = 22.4 / 280 = 0.08 < 0.2$$

Distribuzione log-normale

$$f_{yd} = \frac{\mu}{\sqrt{1+V^2}} \exp(-\alpha \cdot \beta \sqrt{\ln(1+V^2)}) =$$

$$= \frac{280}{\sqrt{1+0.08^2}} \exp(-0.8 \cdot 3.8 \sqrt{\ln(1+0.08^2)}) = 218.93 \text{ MPa}$$

resistenza di snervamento di calcolo

oppure (con la formula semplificata)

$$f_{yd} = \mu \exp(-\alpha \beta V) = 280 \exp(-0.8 \cdot 3.8 \cdot 0.08) = 219.55 \text{ MPa}$$

Se voglio calcolare il valore caratteristico (frattile 5%):

$$\alpha_K = 3V_x + V_x^3 = 3 \cdot 0.08 + 0.08^3 = 0.2405$$

$$f_{yk} = \mu \exp(k_{p,0} V_x) = 280 \exp(1.64 \cdot 0.08) = 245.6 \text{ MPa}$$

1.64
(normale) $V_x < 0.2$

$$\gamma = \frac{245.6}{219.55} = 1.118$$

Il risultato comune che dev'essere raggiunto è che nessuno stato limite può essere superato quando in modelli vengono usati i valori di progetto per le azioni, per le proprietà dei materiali e per i dati di natura geometriche.

Gli stati limite sono sia ultimi che di esercizio quindi c'è la necessità di definire situazioni di progetto e casi di carico. I modelli strutturali e quelli per le azioni possono essere di tipo fisico e/o matematico.

Le variabili di base che consideriamo sono:

- lato sollecitazioni= azioni dirette, indirette e di natura ambientale
- lato resistenze= proprietà dei materiali e dei prodotti
- dati geometrici

Classificazione delle azioni

Classificazione in base al TEMPO:

- permanenti (G): azioni che agiscono per tutta la durata di vita con variazioni trascurabili o monotone fino ad un valore asintotico
 - peso proprio
 - permanenti portati (tramezzi, pavimenti, ecc...)
 - effetti di ritiro/fluage
 - cedimenti irregolari
 - spinte dei liquidi
 - spinte dei terreni
 - precompressioni
- variabili (Q): azioni la cui variazione nel tempo non è né trascurabile né monotona
 - carichi imposti sulle strutture
 - vento
 - neve
 - sisma
 - (spinte dei liquidi)
- accidentali (A): azioni di breve durata ma rilevante intensità che è improbabile si presentino nella durata di vita prevista
 - esplosioni
 - impatto
 - (neve)
 - (sisma)

Classificazione in base alla NATURA:

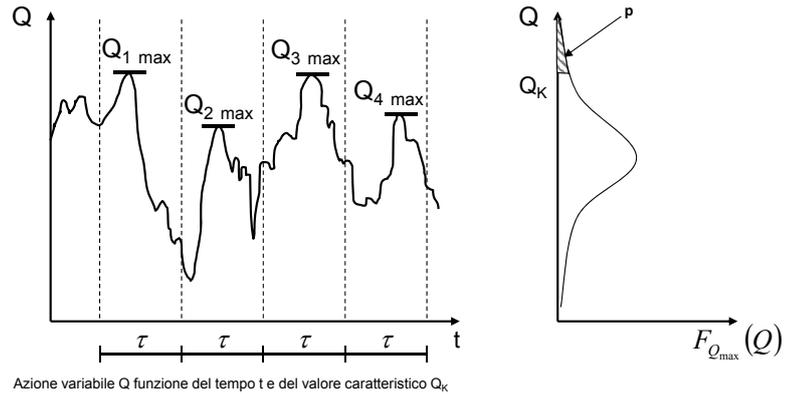
- dirette: forze applicate alla struttura il cui modello non dipende dalla risposta della struttura
- indirette: deformazioni impresse che producono effetti dipendenti dalla risposta strutturale (fluage, ritiro, temperatura, cedimenti)

Classificazione in base allo SPAZIO:

- fisse: assumono una posizione fissa nel tempo (peso proprio)
- mobili: posizione variabile nel tempo (traffico sui ponti)

Su questo diagramma abbiamo sulle ordinate l'azione variabile Q e sulle ascisse il tempo t . Supponiamo che da misurazioni fatte in luogo si ottenga un diagramma come quello in figura, come facciamo a risalire al valore caratteristico? Bisogna fare la cosiddetta statistica dei massimi:

- divido l'ascissa in intervalli uguali tra loro;
- in ognuno degli intervalli prendo il valore massimo;
- riporto i valori massimi in un istogramma e costruisco la pdf;
- si va a prendere il frattile 5% che corrisponderà al valore caratteristico.



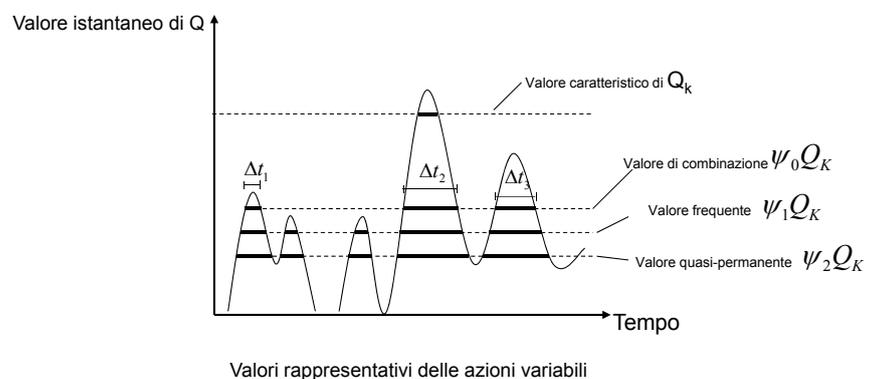
Le azioni accidentali sono eventi di brevissima durata e poco probabili per questo non possiamo fare delle statistiche, per questo hanno dei valori di progetto A_d che vengono specificati in ogni progetto.

Le azioni sismiche vengono descritte con un valore caratteristico A_{Ed} o specificato in ogni progetto.

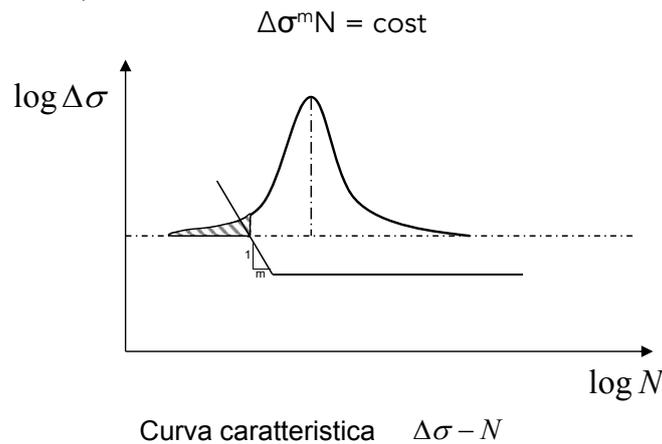
Come accennato in precedenza, quando si hanno più azioni variabili indipendenti tra di loro, la probabilità che si verifichino tutte contemporaneamente con il valore caratteristico è molto bassa. Per questo è necessario introdurre dei coefficienti Ψ che tengono conto di questo basso valore di probabilità. Abbiamo tre tipi di valori:

- valore di combinazione $\Psi_0 Q_k$: si applica sia allo SLU che allo SLE irreversibile, tiene conto della probabilità ridotto di intervento simultaneo dei valori più sfavorevoli di diverse azioni indipendenti;
- valore frequente $\Psi_1 Q_k$: si usa sia allo SLE che allo SLU accidentale, corrisponde all'azione presente nel 1% del periodo di riferimento (per gli edifici) o ad un periodo di ritorno di 1 settimana (per i ponti).
- valore quasi-permanente $\Psi_2 Q_k$: si usa per SLU in combinazione accidentale e sismica SLE reversibili e effetti reologici (effetti dovuti alla non-linearità di comportamento del materiale), corrisponde alla azione presente per 0.5 del periodo di riferimento.

Il valore caratteristico è il valore più alto (probabilità 5% di essere superato); più un basso abbiamo il valore di combinazione (che è intercettato 3 volte nel grafico); il valore frequente si trova ancora più in basso; il valore quasi-permanente è il più basso ed è infatti intercettato nel grafico più volte rispetto agli altri.



Per definire la resistenza a fatica del materiale si eseguono delle prove ad ampiezza costante tramite curve caratteristiche $\Delta\sigma - N$ corrispondente al frattile 5% delle rotture. La legge che governa queste curve è del tipo:



Si usano assi logaritmici perché si fa riferimento a milioni di cicli. Per un certo $\Delta\sigma$ faccio un numero di prove, trovo N cicli diversi, faccio la pdf di questi cicli e prendo il frattile 5% della distribuzione. Questo frattile corrisponde alla durata di vita N che corrisponde ad un determinato σ .

Verifica col metodo dei coefficienti parziali (semiprobabilistico)

Il valore di progetto di un'azione viene definito come:

$$F_d = \gamma_f F_{rep}$$

dove il valore rappresentativo F_{rep} è dato da:

$$F_{rep} = \psi F_K \quad (\psi = 1 / \psi_0 / \psi_1 / \psi_2)$$

Per il progetto sismico il valore rappresentativo è A_{Ed} e dipende dalla risposta strutturale.

Dopo quello delle azioni, si definisce il valore di progetto delle sollecitazioni:

$$E_d = \gamma_{Sd} E \{ \gamma_{f,i} F_{rep,i}; a_d \} \quad i \geq 1$$

dove:

γ_{Sd} Coefficiente parziale relativo alle incertezze nella modellazione delle sollecitazioni e delle azioni

$\gamma_{f,i}$ Coefficiente parziale che tiene conto delle sfavorevoli deviazioni delle azioni dai valori rappresentativi

a_d Valori di progetto dei dati geometrici

Si può anche scrivere una formula semplificata raccogliendo $\gamma_{Sd} \gamma_{f,i}$ in un unico coefficiente:

$$E_d = E \{ \gamma_{F,i} F_{rep,i}; a_d \} \quad i \geq 1$$

con $\gamma_{F,i} = \gamma_{Sd} \gamma_{f,i}$

Per le proprietà dei materiali si usano dei valori di progetto:

$$X_d = \eta \frac{X_K}{\gamma_m}$$

η Valore medio del fattore di conversione fra resistenza sperimentale e in sito

γ_m Coefficiente parziale che tiene conto delle sfavorevoli deviazioni delle proprietà dai valori caratteristici e della quota "casuale" del fattore di deviazione η

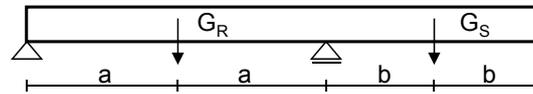
Nel caso di EQU si ha:

$$E_{d,dst} \leq E_{d,stab}$$

$E_{d,dst}$ Valore di progetto delle sollecitazioni indotte dalle azioni destabilizzanti

$E_{d,stab}$ Valore di progetto delle sollecitazioni indotte dalle azioni stabilizzanti

Consideriamo l'esempio di una trave con luce pari a $2a$ e sbalzo $2b$:



Le sollecitazioni da considerare sono quelle permanenti, la verifica è positiva se:

$$G_{Rd}a > G_{Sd}b$$

con $G_{Rd} = \gamma_{G,inf} G_R$ e $G_{Sd} = \gamma_{G,sup} G_S$

Per quanto riguarda STR o GEO si confrontano le sollecitazioni di progetto con i valori di progetto delle resistenze:

$$E_d \leq R_d$$

E_d Valore di progetto delle sollecitazioni, sia scalare che vettoriale

R_d Valore di progetto della corrispondente resistenza

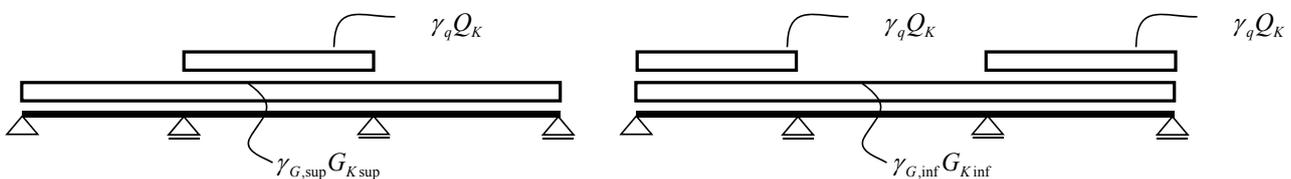
Questo confronto si può effettuare sia in termini scalari che vettoriali: il confronto tra due momenti è vettoriale mentre quello tra due sforzi normali è scalare.

Per i valori di riferimento a FAT bisogna consultare i diversi codici per i materiali.

Combinazione delle azioni (fatica esclusa)

Per ogni caso di carico critico i valori di progetto delle sollecitazioni devono essere calcolati combinando i valori delle azioni che possono intervenire contemporaneamente: si sceglie un caso di carico; si osservano le variabili coinvolte; uso i coefficienti di riduzione tenendo conto del fatto che un'azione la dovrò considerare "piena" (azione principale).

Ogni combinazione delle azioni deve includere un'azione principale oppure un'azione accidentale.



Se voglio calcolare, ad esempio, il momento flettente massimo di questa trave nella zona centrale: considero il carico proprio (con il valore superiore del suo coefficiente) distribuito su tutta la struttura e il carico variabile, poiché si può posizionare ovunque, al centro in modo da eseguire i calcoli con la configurazione peggiore. Se invece voglio trovare il valore minimo, il carico permanente è sempre distribuito su tutta la struttura (questa volta considero il valore inferiore del suo coefficiente) e il carico variabile lo considero sulle campate laterali.

STATI LIMITE ESERCIZIO

La verifica si effettua confrontando le sollecitazioni calcolate con i valori di progetto delle azioni con i valori limite di progetto del criterio di esercizio permanente:

$$E_d \leq C_d$$

Combinazione delle azioni

a) Combinazione caratteristica (SLE irreversibili)

La prima azione variabile (principale) viene considerato con il valore "pieno" e le altre con i coefficienti di combinazione:

$$E_d = E\{G_{K,j}; P; Q_{K,1}; \psi_{0,i} Q_{K,i}\} \quad j \geq 1; i > 1$$

b) Combinazione frequente (SLE reversibili)

La prima azione variabile (principale) è affetta dal coefficiente di combinazione $\Psi_{1,1}$ e le altre hanno coefficiente di combinazione più basso.

$$E_d = E\{G_{K,j}; P; \psi_{1,1} Q_{K,1}; \psi_{2,i} Q_{K,i}\} \quad j \geq 1; i > 1$$

c) Combinazione quasi-permanente (effetti di lungo termine ed estetici)

Tutte le azioni variabili hanno coefficiente di combinazione:

$$E_d = E\{G_{K,j}; P; \psi_{2,i} Q_{K,i}\} \quad j \geq 1; i > 1$$

Vediamo in tabella alcuni valori dei coefficienti Ψ per gli edifici:

Azione	ψ_0	ψ_1	ψ_2
⇒ Azioni dirette sugli edifici			
⊙ Cat. A: domestici, aree residenziali	0.7	0.5	0.3
⊙ Cat. B: uffici	0.7	0.5	0.3
⊙ Cat. C: aree di aggregazione	0.7	0.7	0.6
⊙ Cat. D: aree di commercio	0.7	0.7	0.6
⊙ Cat. E: aree di deposito	1	0.9	0.8
⊙ Cat. F: aree di traffico (P ≤ 30kN)	0.7	0.7	0.6
⊙ Cat. G: aree di traffico (30 ≤ P ≤ 160kN)	0.7	0.5	0.3
⊙ Cat. H: tetti	0	0	0
⇒ Neve sugli edifici			
⊙ Finlandia, Islanda, Norvegia, Svezia	0.70	0.50	0.20
⊙ Altri paesi CEE per H > 1000m s.l.m.	0.70	0.50	0.20
⊙ Altri paesi CEE per H ≤ 1000m s.l.m.	0.50	0.20	0
⇒ Vento sugli edifici	0.6	0.2	0
⇒ Temperatura negli edifici	0.6	0.5	0

Vediamo anche i valori dei coefficienti γ :

- per le azioni EQU

$$\gamma_{Gj,sup} = 1.10 \quad \gamma_{Gj,inf} = 0.90 \quad \gamma_{Q,1} = 1.50/0 \quad \gamma_{Q,i} = 1.50/0$$

Se la verifica dell'equilibrio statico coinvolge anche la resistenza:

$$\gamma_{Gj,sup} = 1.35 \quad \gamma_{Gj,inf} = 1.15 \quad \gamma_{Q,1} = 1.50/0 \quad \gamma_{Q,i} = 1.50/0$$

- per le azioni STR/GEO (assenza di azione geotecnica)

$$\gamma_{Gj,sup} = 1.35 \quad (1.125 \cdot 1.20) \quad \gamma_{Gj,inf} = 1.00 \quad (0.875 \cdot 1.20) \quad (\gamma_{sd} = 1.20)$$

$$\gamma_{Q,1} = 1.50/0 \quad \gamma_{Q,i} = 1.50/0 \quad (1.35 \cdot 1.10) \quad (\gamma_{sd} = 1.10) \quad \xi = 0.85$$

ROBUSTEZZA STRUTTURALE

Una struttura deve essere progettata ed eseguita in modo tale da non essere danneggiata, in misura iperproporzionale rispetto alla causa, da eventi quali:

- Esplosioni
- Impatto
- Conseguenze di errori umani

Il danno potenziale provocato da tali eventi può essere evitato o contenuto con l'impiego di una o più delle seguenti strategie:

- Evitando o eliminando o riducendo i rischi cui la struttura può essere soggetta
- Scegliendo una forma strutturale poco sensibile alle azioni considerate
- Scegliendo una forma strutturale che possa sopravvivere adeguatamente alla rimozione accidentale di alcune membrature o parti limitate della struttura, a prezzo di danni localizzati
- Evitando sistemi strutturali che possono collassare senza preavviso
- Incatenando mutuamente le varie parti strutturali

Il concetto principale che riguarda la robustezza è che la capacità residua della struttura, ovvero la resistenza dopo l'evento, dev'essere maggiore o uguale alla resistenza residua richiesta:

$$\text{Capacità residua} \geq \text{Richiesta residua}$$

Quando si fa riferimento alla capacità residua si intende:

- resistenza
- deformabilità
- duttilità (capacità di esprimere grandi deformazioni in campo plastico)
- stabilità
- peso/massa
- rigidità

Il sistema strutturale può cambiare natura durante l'evento in funzione dello scenario delle azioni.

Le barriere di sicurezza sono progettate con due requisiti fondamentali:

1. Risposta elastica flessionale (in condizioni di energia minore)
2. Risposta plastica flessionale e membranale (seconda linea di difesa, energia maggiore)

È fondamentale definire gli scenari di rischio, quindi distinguere le cause di origine:

- interne
- esterne

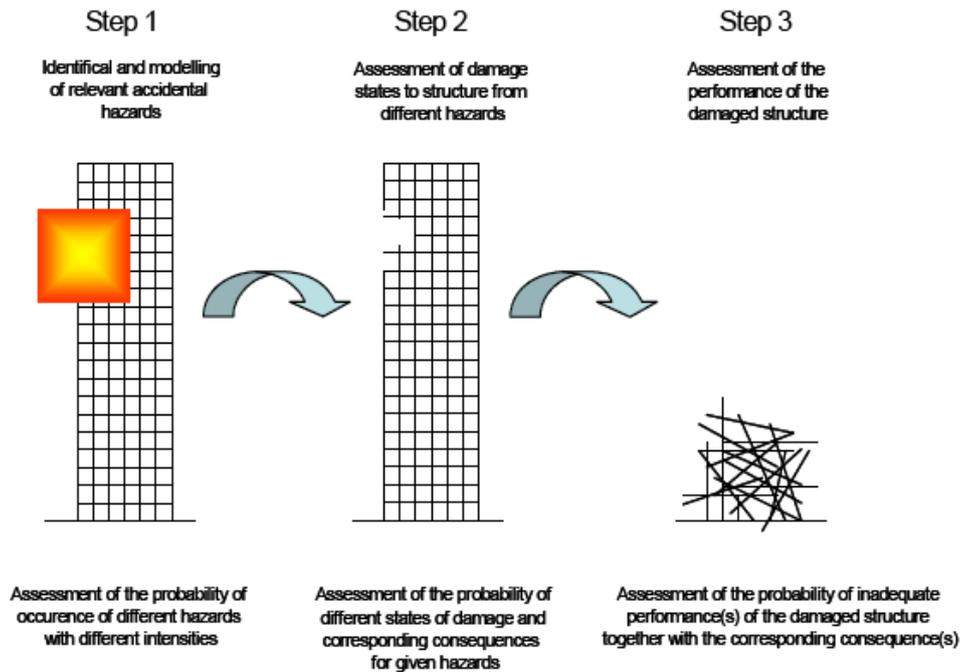
Le cause di origine interna sono:

- Grandi variazioni delle resistenze attese (meno rare di quanto ci si possa attendere)
- Grandi variazioni delle proprietà di un prodotto, in conseguenza di errori umani
- Errori umani nella concezione e nel progetto, non rilevati durante tutto il processo

Mentre le cause di origine esterna:

- Esplosioni di gas
- Impatto di veicoli
- Tsunami
- Azioni terroristiche

Data la grande variabilità di tali cause, bisogna immaginare quale può essere il massimo evento credibile (max massa attesa di un camion, max velocità, max angolo di impatto...)



Scenario formale di approccio:

Step 1: modellazione dei rischi H_i e delle relative esposizioni;

Step 2: valutazione dei danni diretti D_j ;

Step 3: valutazione del conseguente comportamento globale della struttura S_k e delle corrispondenti conseguenze globali $C(S_k)$

Si definisce rischio:

$$R = \sum_{i=1}^{N_H} p(H_i) \sum_{j=1}^{N_D} \sum_{k=1}^{N_S} p\left(\frac{D_j}{H_i}\right) p\left(\frac{S_k}{D_j}\right) C(S_k)$$

dove:

N_H = numero di rischi

N_D = numero dei danni locali D_j

N_S = numero dei tipi di comportamento conseguenti S_k

$p(H_i)$ = Probabilità di evento del rischio H_i

$p(D_j/H_i)$ = Probabilità di intervento di danno locale D_j dovuto da H_i

$p(S_k/D_j)$ = Probabilità di intervento della risposta strutturale S_k per effetto del danno locale D_j

$C(S_k)$ = Le conseguenze (monetizzate) del comportamento strutturale S_k

Per ridurre globalmente il rischio abbiamo diverse strade:

- I metodi che tendono a ridurre il termine $p(H_i)$ sono classificati come "event control" (EC)
- I metodi che riducono il termine $p(D_j/H_i)$ sono noti come "specific load resistance method" (SLR)
- I metodi che minimizzano la possibilità di collasso progressivo dovuto a danno locale $p(S_k/D_j)$ sono noti come "alternate load path method" (AP)
- I metodi che minimizzano il termine $C(S_k)$ sono noti come "Reduction of consequences method" (RC)

Possiamo quindi definire l'indice di sicurezza in tre modi:

a) indice basato sulle conseguenze (dirette/indirette)

$$I_{rob} = \frac{R_{Dir}}{R_{Dir} + R_{Ind}}$$

R_{dir} : rischio diretto espresso dal 1° termine dell'equazione precedente

R_{ind} : rischio espresso dal 2° termine dell'equazione precedente

Una struttura robusta ha indice che tende a 1, mentre una struttura poco robusta ha indice tendente a zero.

b) indice di robustezza probabilistico:

$$RI = \frac{P_{f(damaged)} - P_{f(intact)}}{P_{f(intact)}}$$

$P_{f(damaged)}$: probabilità di collasso per un sistema strutturale danneggiato

$P_{f(intact)}$: probabilità di collasso per un sistema strutturale intatto

c) indice di robustezza deterministico: (rapporto riserva di resistenza)

$$RSR = \frac{R_c}{S_c}$$

R_c : valore caratteristico della resistenza di taglio alla base

S_c : valore di calcolo del taglio alla base allo SLU

La robustezza della struttura può essere valutato come:

$$RIF_i = \frac{RSR_{fail,i}}{RSR_{intact}}$$

$RSR_{fail,i}$: rapporto riserva di resistenza della struttura danneggiata

RSR_{intact} : rapporto riserva di resistenza della struttura integra

Se i due valori sono simili vuol dire che la struttura è robusta (la riserva di resistenza rimane quasi costante); se invece il rapporto decade vuol dire che la struttura ha subito un danno globale.

Elementi per la robustezza

• Resistenza:

- Fornire resistenza al di là del minimo richiesto dalle condizioni di progetto non accidentali
- Graduazione delle resistenze, incrementando quella delle zone o degli elementi critici

• Monoliticità e solidarizzazione:

- Preferire strutture monolitiche o rese tali tramite la solidarizzazione dei singoli elementi
- Ridurre al minimo necessario il numero dei giunti strutturali (i giunti possono esserci a patto di installare gli "shock adsorbers")

• Seconda linea di difesa (fa fronte all'energia residua dell'evento):

- Prevedere la possibilità di mobilitare più meccanismi di resistenza sequenziali, verificando la reale possibilità che possano esplicarsi attraverso le mutue connessioni

Corso di Tecnica delle Costruzioni 14/15_robustezza strutturale

Osserviamo a questo proposito alcune proprietà intrinseche dei materiali in termini di duttilità:

Building material	Ductility
Mild steel, low alloy aluminium	More than 10
High-strength steel, metals	5-20
Reinforced concrete	1-10
3 Wood	1-3
Stone, brick, terracotta	1-2
Unreinforced, low-strength concrete	1-2
Unreinforced high-strength concrete	1-1.5
Glass, ceramic, stone, most fabrics	About 1

Cemento armato -> la duttilità varia in base all'armatura

più grande è la resistenza del c.l.s minore è la duttilità

- Collasso progressivo rispetto a "zipper stopper":
 - Creare una serie di elementi di maggiore resistenza localizzati lungo la catena strutturale, tali da impedire il collasso a catena (effetto domino)
- Capacity design ed elementi fusibili (elementi deboli che assorbono la deformazione e dissipano energia):
 - Utilizzare un criterio di gerarchia delle resistenze accoppiato alla presenza di zone indebolite (fusibili) idonee a limitare la trasmissione delle sollecitazioni tra parti adiacenti, molto utile per scenari di deformazioni impresse (cedimenti fondali o sisma);
 - Mantenere capacità resistente fino alle deformazioni ultime (minori di quelle impresse);
 - Produrre dissipazione energetica
- Dispositivi sacrificali e protettivi:
 - Utilizzare dispositivi sacrificali idonei a proteggere le strutture dagli eventi accidentali (fenders)
 - Nei casi di impatti di veicoli, la forza generata è:

$$F = \frac{mv}{t} = \frac{mv^2}{2l}$$

$m \cdot v$ = quantità di moto

$m \cdot v^2 / 2$ = energia cinetica

t = durata impatto

l = lunghezza della zona d'impatto

- Scenari di knock-out:
 - Occorre progettare la struttura in modo tale che ogni singolo elemento strutturale possa essere eliminato senza provocare pesanti conseguenze
- Rigidezza:
 - La struttura deve mantenere dopo l'evento sufficiente rigidezza alle azioni orizzontali onde limitare gli effetti di 2° ordine
 - si ottiene combinando gli shear walls (pareti di taglio) con telai (la rigidezza al taglio degli shear walls è molto più grande di quella dei telai)

Corso di Tecnica delle Costruzioni 14/15_robustezza strutturale

- Attenzione ed intervento attivo: nel caso in cui si verifica un evento eccezionale deve esserci qualcosa che interviene per limitare le conseguenze
 - Bisogna prestare attenzione ai segni premonitori (larghe fessure, grandi deformazioni, spalling cioè espulsione del copri-ferro, perdita di connettori, corrosione, fretting cioè fatica sotto azione di contatto, assenza di movimenti previsti ed attesi, vibrazione eccessiva, rumore, infiltrazioni, abrasione)
 - In una struttura robusta è previsto un protocollo che indichi le misure rimediali da intraprendere
- Prove:
 - Utilizzo di prove sperimentali a rottura quando la modellazione matematica e fisica risulta incerta
- Monitoraggio / controllo qualità:
 - Il monitoraggio continuo può essere utile per mettere in evidenza comportamenti anomali della struttura che potrebbero portare a conseguenza dannose
 - Il monitoraggio dà la possibilità di fare un "model updating" ovvero aggiornare il modello matematico tenendo conto delle risposte reali della struttura e inoltre permette di controllare parametri statici e dinamici nel tempo
 - Il sistema di monitoraggio dev'essere robusto, ovvero si deve autocontrollare in modo da non generare falsi allarmi
 - il controllo di qualità permette di ridurre i rischi esecutivi
- Dispositivi meccanici:
 - Intervengono durante un'azione eccezionale per controllare i movimenti e dissipare energia
 - Attivi: funzionano con alimentazioni elettriche
 - Passivi: non necessitano di input energetico (sono migliori perché in caso di evento eccezionale spesso non disponiamo di corrente elettrica)
 - Possono essere elastoplastici (composte da legami in acciaio tali da dare grandi deformazioni plastiche e quindi dissipano energia) oppure oliodinamici (quando c'è un'azione impulsiva, l'olio si muove per effetto di pistoni e passando in dei piccoli fori dissipa energia)

L'impiego degli elementi dipende dal tipo di evento atteso e dalla risposta della struttura prevista.

Bisogna:

- distinguere se si tratta di evento controllato da carico o da deformazione;
- valutare se l'evento è ripetitivo;
- definire i limiti fisici di forza (massimo dell'energia dell'evento, velocità di impatto e deformazione);
- definire le condizioni che si possono accettare dopo l'evento.

Esempi di azioni accidentali: Impatto

Si definisce impatto l'interazione tra oggetto in movimento e struttura. In questa iterazione l'energia cinetica dell'oggetto viene trasformata in energia di deformazione in un tempo molto breve. Vengono quindi indotti degli effetti dinamici ed entra inoltre in gioco il comportamento non lineare dei materiali.

L'impatto può essere rigido (energia è essenzialmente dissipata dal corpo che impatta) oppure smorzato (struttura progettata per deformarsi in modo da assorbire l'energia di impatto). Per quanto riguarda l'impatto rigido, si assume che l'oggetto che collide si deformi con legge lineare durante la fase d'impatto. La forza massima scambiata:

$$F_{\max} = V_R \sqrt{k \cdot m}$$

V_R = velocità d'impatto

k = rigidità equivalente dell'oggetto che impatta

m = massa che impatta

La formula si ricava dall'espressione dell'impulso:

$$F \Delta T = m V_R$$

dalla quale si ottiene

$$\Delta T = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$F = \frac{m V_R}{\sqrt{\frac{m}{k}}} = V_R \sqrt{k m}$$

Se l'impatto è smorzato e la struttura si deforma elasticamente (in parte si deforma anche l'oggetto ma in percentuale minore) l'oggetto si può assumere rigido:

$$F_{\max} = V_R \sqrt{k m}$$

V_R = velocità d'impatto

k = rigidità equivalente della struttura nella direzione d'impatto

m = massa che impatta

Se invece la struttura si deforma plasticamente bisogna controllare che ci sia la capacità di espletare le deformazioni plastiche subite, cioè che ci sia sufficiente duttilità ad assorbire l'energia cinetica dell'oggetto che collide:

$$\frac{1}{2} m V_0^2 = F_0 \cdot y_0$$

F_0 = resistenza al limite plastico

y_0 = spostamento punto di impatto

AZIONI

In ambito europeo i codici sono divisi in:

- EN 1990 : sicurezza, funzionalità e durabilità;
- EN 1991 : azioni sulle strutture;
- EN 1992 : relativo al calcestruzzo armato;
- EN 1993 : relativo all'acciaio;
- EN 1994 : relativo ai materiali composti di acciaio e calcestruzzo;
- EN 1995 : relativo al legno;
- EN 1996 : relativo alle murature;
- EN 1999 : relativo all'alluminio
- EN 1997 : strutture di fondazione geotecnica;
- EN 1998 : progetto sismico

} codici riferiti ai materiali

Il codice EN 1991 è a sua volta diviso in parti differenti:

Part of Eurocode 1 : Actions on structures	Title (Subject)	Issued
EN 1991-1-1	General actions – Densities, self-weight, imposed loads for buildings	April 2002
EN 1991-1-2	General actions – Actions on structures exposed to fire	November 2002
EN 1991-1-3	General actions – Snow loads	July 2003
EN 1991-1-4	General actions – Wind actions	April 2005
EN 1991-1-5	General actions – Thermal actions	November 2003
EN 1991-1-6	General actions – Actions during execution	June 2005
EN 1991-1-7	General actions – Accidental actions	July 2006
EN 1991-2	Traffic loads on bridges	September 2003
EN 1991-3	Actions induced by cranes and machinery	July 2006
EN 1991-4	Silos and tanks	May 2006

Le azioni si classificano:

- a) secondo la natura
 - dirette (forze concentrate o distribuite)
 - indirette (distorsioni, variazioni termiche, cedimenti anelastici)
- b) secondo la risposta
 - statiche (non inducono significative accelerazioni)
 - dinamiche (inducono significative accelerazioni)
- c) secondo la variazione nello spazio
 - fisse (distribuzione spaziale fissa nel tempo)
 - mobili (distribuzione spaziale variabile)
- d) secondo la variazione della loro intensità nel tempo
 - permanenti (restano attive durante tutta la durata della vita)
 - variabili (possono essere di breve o lunga durata)
 - eccezionali (agiscono come conseguenze di eventi poco verosimili; vengono definite da una probabilità di occorrenza di 10^{-6} ÷ 10^{-7} e attraverso un valore nominale di intensità)

Corso di Tecnica delle Costruzioni 14/15_azioni

Materiali	Peso dell'unità di volume o di superficie	
A) Malte		
Malta bastarda (di calce o cemento)	19,00	kN/m ³
Malta di gesso	12,00	kN/m ³
Intonaco (spessore cm 1,5)	0,30	kN/m ²
B) Manti di copertura		
Manto impermeabilizzante di asfalto o simile	0,30	kN/m ²
Manto impermeabilizzante prefabbricato con strati bituminosi di feltro, di vetro o simili	0,10	kN/m ²
Tegole maritate (embrici e coppi)	0,60	kN/m ²
Sottotegole di tavelloni (spessore 3-4 cm)	0,35	kN/m ²
Lamiere di acciaio ondulate o nervate	0,12	kN/m ²
Lamiere di alluminio ondulate o nervate	0,05	kN/m ²
Lastre traslucide di resina artificiale, ondulate o nervate	0,10	kN/m ²
C) Muratura		
Muratura di mattoni pieni	18,00	kN/m ³
Muratura di mattoni semipieni	16,00	kN/m ³
Muratura di mattoni forati	11,00	kN/m ³
Muratura di pietrame e malta	22,00	kN/m ³
Muratura di pietrame listato	21,00	kN/m ³
Muratura di blocchi forati di calcestruzzo	12,00	kN/m ³
D) Pavimenti (escluso sottofondo)		
Gomma, linoleum o simili	0,10	kN/m ²
Legno	0,25	kN/m ²
Laterizio o ceramica o grès o graniglia (spessore 2 cm)	0,40	kN/m ²
Marmo (spessore 3 cm)	0,80	kN/m ²
E) Vetri		
Normale (3 mm)	0,075	kN/m ²
Forte (4 mm)	0,10	kN/m ²
Spesso (5 mm)	0,125	kN/m ²
Spesso (6 mm)	0,15	kN/m ²
Retinato (8 mm)	0,20	kN/m ²

CARICHI VARIABILI

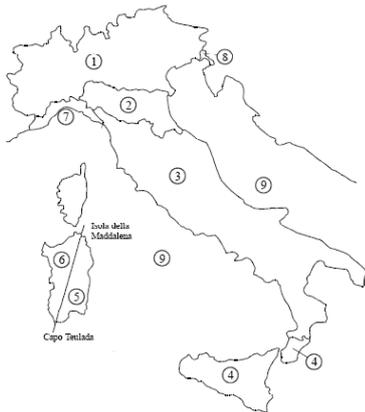
I carichi variabili comprendono la classe dei carichi legati alla destinazione d'uso dell'opera. I modelli di tali azioni possono essere costituiti da:

- carichi verticali uniformemente distribuiti (q_k) [kN/m²]
 - carichi orizzontali lineari (H_k) [kN/m]
 - carichi verticali concentrati (Q_k) [kN]
-] formano oggetto di verifiche locali distinte (Oss.)

Vediamo in seguito alcuni esempi per le diverse categorie di edifici:

Cat.	Ambienti	q_k [kN/m ²]	Q_k [kN]	H_k [kN/m]
A	Ambienti ad uso residenziale. Sono compresi in questa categoria i locali di abitazione e relativi servizi, gli alberghi. (ad esclusione delle aree suscettibili di affollamento)	2,00	2,00	1,00
B	Uffici. Cat. B1 Uffici non aperti al pubblico Cat. B2 Uffici aperti al pubblico	2,00 3,00	2,00 2,00	1,00 1,00
C	Ambienti suscettibili di affollamento Cat. C1 Ospedali, ristoranti, caffè, banche, scuole Cat. C2 Balconi, ballatoi e scale comuni, sale convegni, cinema, teatri, chiese, tribune con posti fissi Cat. C3 Ambienti privi di ostacoli per il libero movimento delle persone, quali musei, sale per esposizioni, stazioni ferroviarie, sale da ballo, palestre, tribune libere, edifici per eventi pubblici, sale da concerto, palazzetti per lo sport e relative tribune	3,00 4,00 5,00	2,00 4,00 5,00	1,00 2,00 3,00
D	Ambienti ad uso commerciale. Cat. D1 Negozi Cat. D2 Centri commerciali, mercati, grandi magazzini, librerie...	4,00 5,00	4,00 5,00	2,00 2,00

In base all'azione del vento l'Italia è divisa in zone:



Mapa delle zone in cui è suddiviso il territorio italiano

La pressione del vento si calcola con l'espressione:

$$p = q_b \cdot c_e \cdot c_p \cdot c_d$$

dove:

- $q_b = \frac{1}{2} \rho v_b^2$ pressione cinetica di riferimento con ρ densità dell'aria assunta convenzionalmente costante pari a $1,25 \text{ kg/m}^3$ e v_b velocità di riferimento del vento (in m/s);
- c_e coefficiente di esposizione
- c_p coefficiente di forma (o aerodinamico)
- c_d coefficiente dinamico, può essere assunto cautelativamente pari ad 1 nelle costruzioni di tipologia ricorrente, quali gli edifici di forma regolare non eccedenti 80 m di altezza ed i capannoni industriali

Velocità di riferimento v_b

La velocità di riferimento v_b è il valore caratteristico della velocità del vento a 10 m dal suolo su un terreno di categoria di esposizione II, mediata su 10 minuti e riferita ad un periodo di ritorno di 50 anni.

$$v_b = v_{b,0} \quad \text{per } a_s \leq a_0$$

$$v_b = v_{b,0} + k_a (a_s - a_0) \quad \text{per } a_0 < a_s \leq 1500 \text{ m}$$

a_s è l'altitudine sul livello del mare (in m) del sito ove sorge la costruzione

Zona	Descrizione	$v_{b,0}$ [m/s]	a_0 [m]	k_a [1/s]
1	Valle d'Aosta, Piemonte, Lombardia, Trentino Alto Adige, Veneto, Friuli Venezia Giulia (con l'eccezione della provincia di Trieste)	25	1000	0,010
2	Emilia Romagna	25	750	0,015
3	Toscana, Marche, Umbria, Lazio, Abruzzo, Molise, Puglia, Campania, Basilicata, Calabria (esclusa la provincia di Reggio Calabria)	27	500	0,020
4	Sicilia e provincia di Reggio Calabria	28	500	0,020
5	Sardegna (zona a oriente della retta congiungente Capo Teulada con l'Isola di Maddalena)	28	750	0,015
6	Sardegna (zona a occidente della retta congiungente Capo Teulada con l'Isola di Maddalena)	28	500	0,020
7	Liguria	28	1000	0,015
8	Provincia di Trieste	30	1500	0,010
9	Isole (con l'eccezione di Sicilia e Sardegna) e mare aperto	31	500	0,020

Coefficiente di esposizione c_e

Il coefficiente di esposizione c_e dipende dall'altezza z sul suolo del punto considerato, dalla topografia del terreno, e dalla categoria di esposizione del sito ove sorge la costruzione. In assenza di analisi specifiche che tengano in conto la direzione di provenienza del vento e l'effettiva scabrezza e topografia del terreno che circonda la costruzione, per altezze sul suolo non maggiori di $z = 200 \text{ m}$, esso è dato dalla formula

$$c_e(z) = k_r^2 c_t \ln(z/z_0) [7 + c_t \ln(z/z_0)] \quad \text{per } z \geq z_{\min}$$

$$c_e(z) = c_e(z_{\min}) \quad \text{per } z < z_{\min}$$

Coefficiente di topografia in genere $c_t = 1$

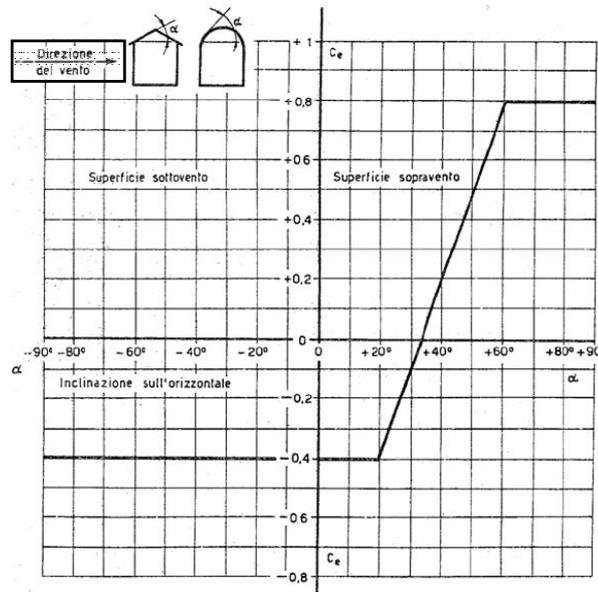
Categoria di esposizione del sito	k_r	z_0 [m]	z_{\min} [m]
I	0,17	0,01	2
II	0,19	0,05	4
III	0,20	0,10	5
IV	0,22	0,30	8
V	0,23	0,70	12

Coefficiente di forma o aerodinamico c_p

Si calcola in base ai diversi tipi di struttura:

- a) Edifici a pianta rettangolare con coperture, piane, a falde, inclinate, curve

Il coefficiente di forma parte da un valore nullo per angoli $\alpha = 25^\circ$ e cresce fino a +0,8 per angoli $\alpha = 60^\circ$ mentre diventa negativo (depressione) per valori di $\alpha < 25^\circ$ fino a raggiungere il valore minimo di -0,4

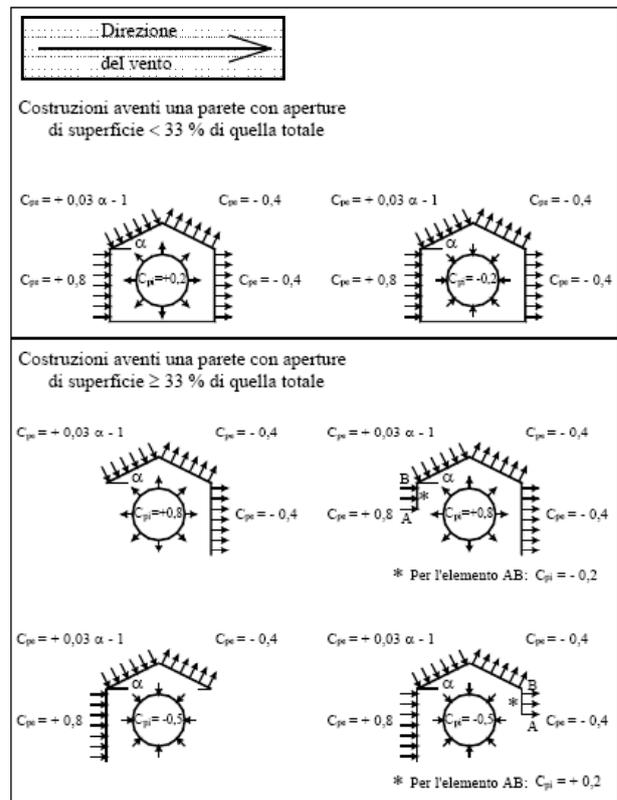


Coefficiente per pressione esterna C_{pe}

Immaginiamo che il vento arrivi da sinistra verso destra, quando trova la superficie i "filetti fluidi" deviano. In questo modo si crea una pressione sulla parte sinistra della copertura e una depressione sulla parte destra. La depressione può scoperchiare il tetto: è più complicato difendersi dalle depressioni perché bisogna impedire che gli elementi di copertura (tegole) vengano rimossi.

Vediamo ora quali sono i valori dei coefficienti c_{pi} da usare nei diversi edifici:

- Costruzioni aventi una parete con aperture di superficie <33% di quella totale: sulla faccia esposta (detta "sopravento") abbiamo un angolo di 90° quindi sarà necessario un coefficiente $c_{pe}=+0,8$. Sulla superficie di copertura inclinata di un angolo α il coefficiente è pari a: $c_{pe}=+0,03 \alpha - 1$. Sulla seconda superficie inclinata e sulla parete verticale sulla destra abbiamo una depressione e il coefficiente assume il valore $c_{pe}=-0,4$. All'interno può esserci (a seconda di avere una finestra nella facciata sopravvento o sottovento) una pressione applicata su tutte le pareti che si valuta con un $c_{pi}=+0,3$ oppure una depressione con $c_{pi}=-0,2$.
- Costruzioni aventi una parete con aperture di superficie $\geq 33\%$ di quella totale: (vedi figura)



d) Travi ad anima piena e reticolare

Nel caso di travi isolate la pressione totale si considera agente solo sulla superficie della parte piena della parete (S_p) e si valuta utilizzando seguenti coefficienti di forma:

$$c_p = 2 - \frac{4}{3}\varphi \quad \text{per } 0 \leq \varphi < 0,3$$

$$c_p = 1,6 \quad \text{per } 0,3 \leq \varphi < 0,8$$

$$c_p = 2,4 - \varphi \quad \text{per } 0,8 \leq \varphi < 1$$

dove $\varphi = \frac{S_p}{S}$ (rapporto tra superficie della parte piena della parete e superficie delimitata dal contorno della trave).

Nel caso di travi multiple disposte parallelamente alla mutua distanza "d" non maggiore del doppio dell'altezza, il valore della pressione sull'elemento successivo sarà pari a quello sull'elemento precedente moltiplicato per il seguente coefficiente di riduzione:

$$\square = 1 - 1,2\varphi \quad \text{per } \varphi \leq \frac{2}{3}$$

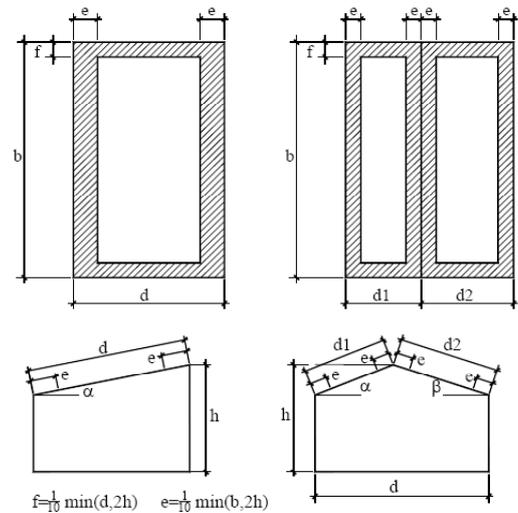
$$\square = 0,2 \quad \text{per } \varphi > \frac{2}{3}$$

Quando $d/h \geq 5$ gli elementi vengano considerati come isolati, mentre per $2 < d/h < 5$ si procede all'interpolazione lineare.

e) Pressioni massime

Nel caso di zone di discontinuità della forma esterna degli edifici a pianta rettangolare con coperture piane, a falde, inclinate e curve, delle coperture multiple, delle tettoie e pensiline isolate, e nelle strutture secondarie disposte nella fascia perimetrale dell'edificio ed in corrispondenza dei displuvi il valore assoluto del coefficiente di forma può subire notevoli incrementi.

Tali effetti, dovuti a vorticosità locale, in assenza di specifiche prove in galleria del vento, potranno essere valutati assumendo per le zone comprese nelle fasce sopra descritte, il coefficiente $c_p = -1,8$.



a) Copertura ad una falda

b) Copertura a due falde

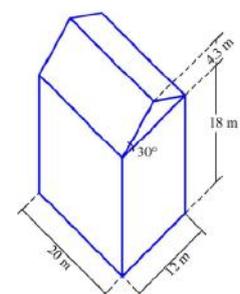
Esempio:

Determinare la spinta del vento sull'edificio in figura situato a Torino (altezza s.l.m 293 m).

Dati progettuali: La costruzione ha un'altezza pari a 20 m ed è collocata in un'area urbana caratterizzata da edifici di simile altezza. La sua vita utile di progetto è pari a 50 anni (struttura di Classe 1)

La pressione del vento p è ottenuta mediante la seguente espressione:

$$p = q_b \cdot c_e \cdot c_p \cdot c_d$$



A tale categoria di esposizione corrispondono:

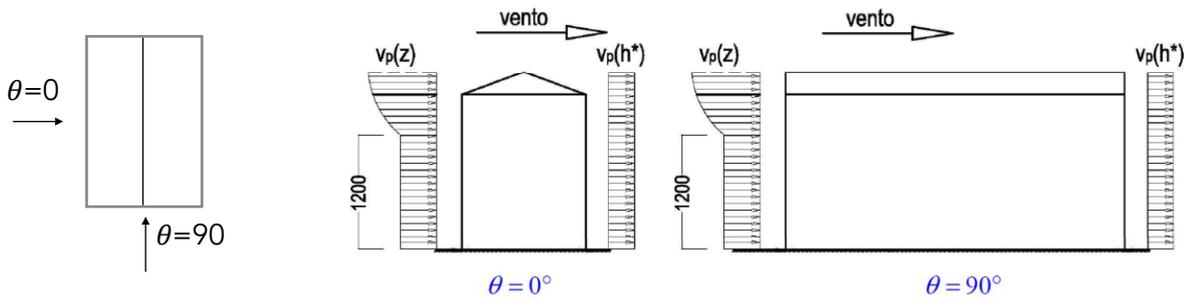
Categoria di esposizione del sito	k_r	z_0 [m]	z_{min} [m]
I	0,17	0,01	2
II	0,19	0,05	4
III	0,20	0,10	5
IV	0,22	0,30	8
V	0,23	0,70	12

Il coefficiente topografico c_t si assume in genere uguale a 1 salvo casi speciali di costruzioni presso la sommità di colline o pendii isolati.

Il coefficiente di esposizione si determina con le seguenti formule:

$$c_e(z) = k_r^2 c_t \ln(z/z_0) [7 + c_t \ln(z/z_0)] \quad \text{per } z \geq z_{min}$$

$$c_e(z) = c_e(z_{min}) \quad \text{per } z < z_{min}$$



Si divide l'edificio in due fasce:

k_r	c_t	z_0 (m)
0.23	1	0.7

- per $z < z_{min} = 12m$

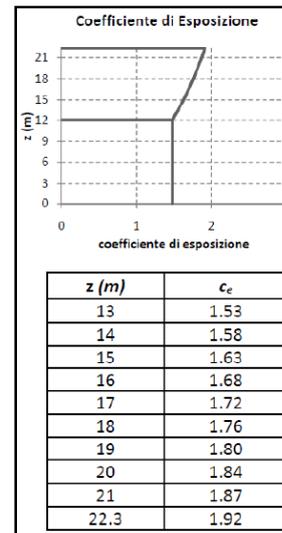
$$c_e(z) = c_e(z_{min} = 12m) = 1.48 \quad \text{costante}$$

$$c_e(z = 12m) = k_r^2 c_t \ln(z/z_0) [7 + c_t \ln(z/z_0)]$$

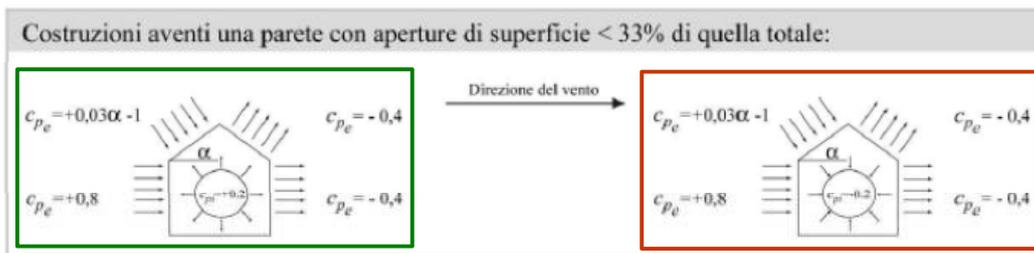
$$c_e = 0.23^2 \cdot 1 \cdot \ln(12/0.7) [7 + 1 \cdot \ln(12/0.7)] = 1.48$$

- per $z \geq z_{min} = 12m$

$$c_e(z) = k_r^2 c_t \ln(z/z_0) [7 + c_t \ln(z/z_0)] \quad \text{per } z \geq z_{min} \Rightarrow$$



Per determinare il coefficiente di forma si fa l'ipotesi di una costruzione che ha una parete con aperture di superficie minore di 1/3 di quella totale $c_{pi} = \pm 0,2$.



Per il calcolo dell'effetto globale del vento sulle pareti esterne verticali ($\alpha=90^\circ$) nelle due direzioni x e y si cumulano gli effetti delle pressioni e depressioni sulle pareti sopravvento e sottovento. La pressione unitaria totale vale pertanto:

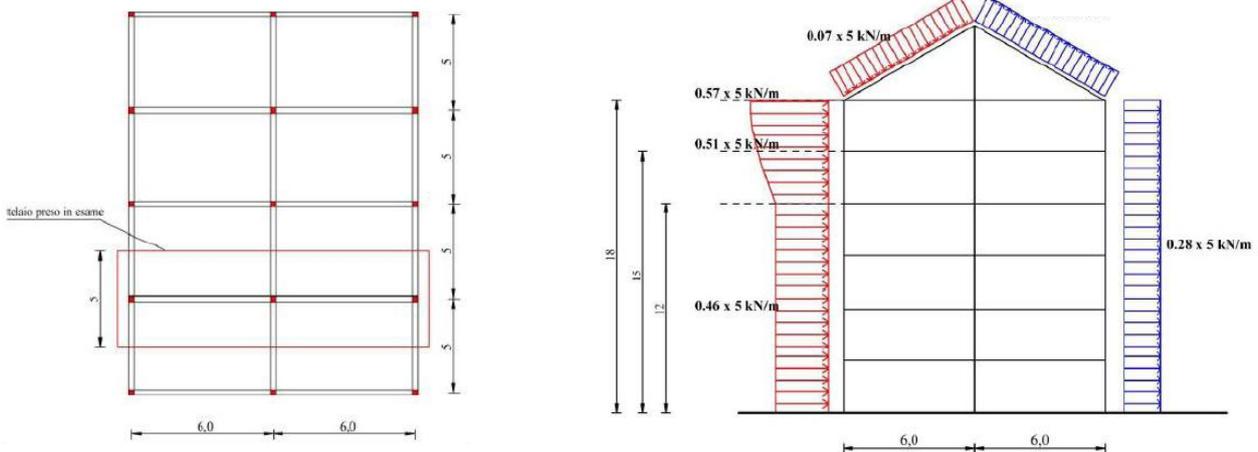
Pareti esterne verticali	q	q sottovento	q _{TOT}
	(kN/m ²)	(kN/m ²)	(kN/m ²)
z ≤ 12 m	0.46	0.28	0.74
z = 15 m	0.51	0.28	0.79
z = 18 m	0.57	0.28	0.85
z = 22.3 m	0.60	0.30	0.90

Mentre sulle falde:

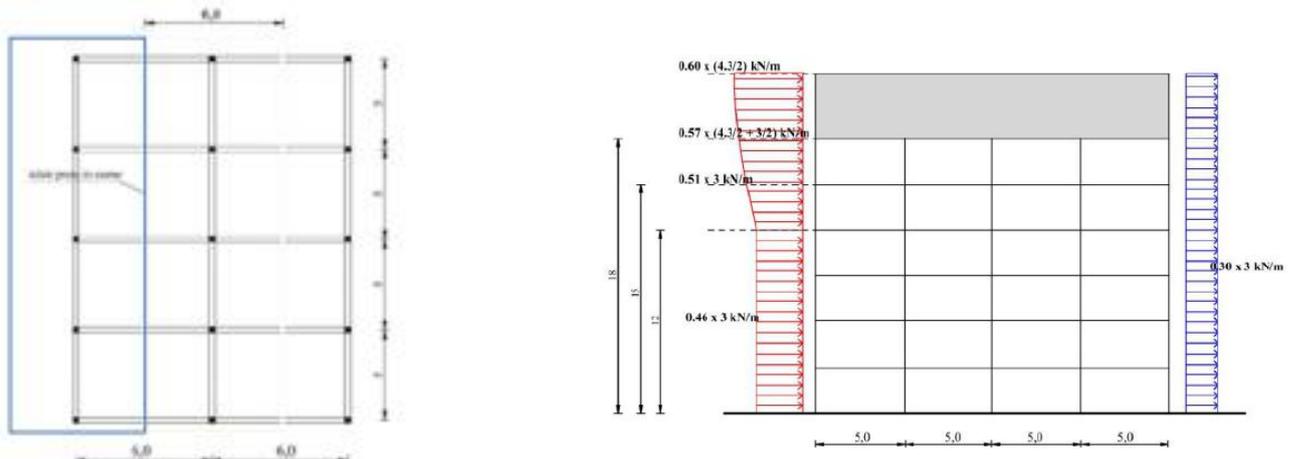
Tetto (falda sopravvento)	q _b	c _e	c _p	c _d	q
	(N/m ²)		0.03α-1		(kN/m ²)
z = 20 m	390.63	1.84	-0.1	1	-0.07
z = 22.3 m	390.63	1.92	-0.1	1	-0.07

Tetto (falda sottovento)	q _b	c _e	c _p	c _d	q
	(N/m ²)				(kN/m ²)
z = 20 m	390.63	1.84	-0.4	1	0.29
z = 22.3 m	390.63	1.92	-0.4	1	0.30

La distribuzione globale sull'edificio è data dallo schema in figura:



Stiamo prendendo in esame un solo telaio e dobbiamo calcolare la pressione del vento che agisce su di esso. I valori ottenuti precedentemente per lo schema globale sono moltiplicati per 5 perché consideriamo come se il vento di tutta la facciata sia concentrato sul telaio in esame. Nell'altra direzione abbiamo invece:



Azione della neve (seguiremo la norma NTC 2008)

Il carico da neve interessa quelle superfici su cui la neve ha la possibilità di accumularsi (coperture, balconi, terrazzi).

L'entità del carico dipende da diversi fattori quali:

- la forma e le caratteristiche della superficie (rugosità, sviluppo di calore, ..)
- il clima meteorologico locale (ventosità, probabilità di precipitazione ...)

La NTC 2008 (par. 3.4) descrive in maniera dettagliata la procedura da seguire per il calcolo dei carichi da neve

Il carico neve q_s provocato dalla neve sulle coperture è valutato mediante la seguente espressione:

$$q = \mu_i \cdot q_{sk} \cdot C_E \cdot C_t$$

dove:

- μ_i coefficiente di forma della copertura;
- q_{sk} valore caratteristico di riferimento del carico neve al suolo [kN/m²] per un periodo di 50 anni;
- C_E coefficiente di esposizione;
- C_t Coefficiente termico tale coefficiente tiene conto delle proprietà di isolamento termico del materiale utilizzato in copertura. In assenza di uno specifico e documentato studio, deve essere utilizzato $C_t = 1$.

Per ipotesi il carico neve agisce in direzione verticale e lo si riferisce alla proiezione orizzontale della superficie della copertura.

Valore caratteristico del carico neve al suolo q_{sk} :

- Il carico di riferimento neve al suolo, per località poste a quota inferiore a 1500 m sul livello del mare, non dovrà essere assunto minore di quello calcolato in base alle espressioni riportate nel seguito, cui corrispondono valori associati ad un periodo di ritorno pari a 50 anni.
- L'altitudine di riferimento a_s è la quota del suolo sul livello del mare nel sito di realizzazione dell'edificio.
- Per altitudini superiori a 1500 m sul livello del mare si dovrà fare riferimento alle condizioni locali di clima e di esposizione utilizzando comunque valori di carico neve non inferiori a quelli previsti per 1500 m.

Zona I - Alpina

Aosta, Belluno, Bergamo, Biella, Bolzano, Brescia, Como, Cuneo, Lecco, Pordenone, Sondrio, Torino, Trento, Udine, Verbania, Vercelli, Vicenza:

$$\begin{aligned} q_{sk} &= 1,50 \text{ kN/m}^2 & a_s &\leq 200 \text{ m} \\ q_{sk} &= 1,39 [1 + (a_s/728)^2] \text{ kN/m}^2 & a_s &> 200 \text{ m} \end{aligned}$$

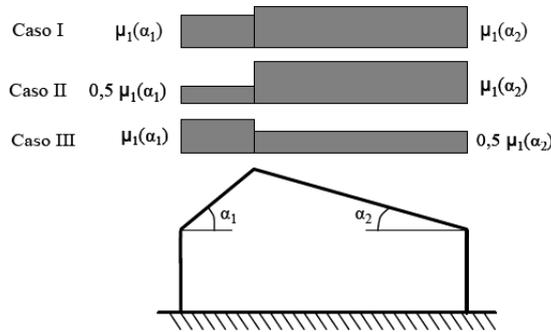
Zona I – Mediterranea

Alessandria, Ancona, Asti, Bologna, Cremona, Forlì-Cesena, Lodi, Milano, Modena, Novara, Parma, Pavia, Pesaro e Urbino, Piacenza, Ravenna, Reggio Emilia, Rimini, Treviso, Varese:

$$\begin{aligned} q_{sk} &= 1,50 \text{ kN/m}^2 & a_s &\leq 200 \text{ m} \\ q_{sk} &= 1,35 [1 + (a_s/602)^2] \text{ kN/m}^2 & a_s &> 200 \text{ m} \end{aligned}$$

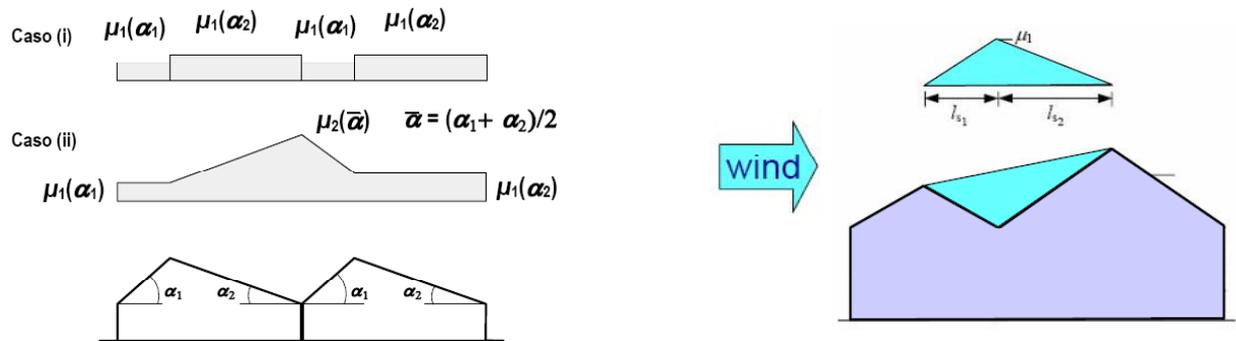
b) Copertura a due falde: abbiamo due angoli diversi α_1 e α_2 e si possono verificare i seguenti casi:

- carico da neve senza vento si considera la condizione di Caso I
- carico da neve con vento si deve considerare la peggiore tra le condizioni Caso 2 e Caso 3.



c) Copertura a più falde, si considera:

- neve depositata in assenza di vento si considera il Caso (i)
- neve depositata in presenza di vento si considera il caso (ii)



Il coefficiente μ_2 tiene conto dell'accumulo della neve nel caso di più falde accostate.

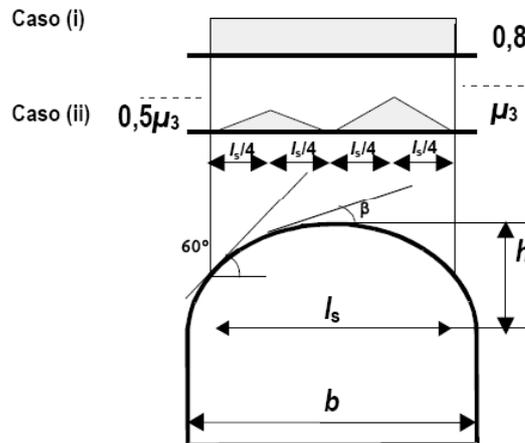
d) Coperture cilindriche, è necessario introdurre un ulteriore coefficiente μ_3 definito in questo modo:

per $\beta > 60^\circ$, $\mu_3 = 0$

β =angolo formato dalla tangente alla copertura

per $\beta \leq 60^\circ$, $\mu_3 = 0,2 + 10 h/b$, con $\mu_3 \leq 2,0$.

- carico da neve depositata in assenza di vento si considera il Caso (i)
- carico da neve in presenza di vento si considera il caso (ii)

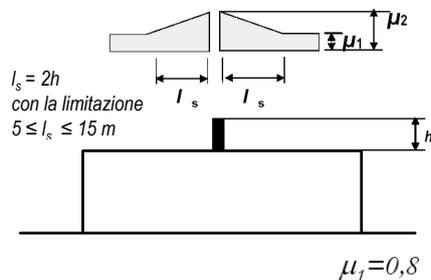


Effetti locali

In taluni casi, per la verifica delle membrature, occorre prendere in considerazione delle condizioni di carico particolari indotte da fenomeni locali.

Tali condizioni di carico non dovranno fare oggetto di specifiche combinazioni di carico che interessino l'intera struttura.

a) Accumuli di neve in corrispondenza di sporgenze

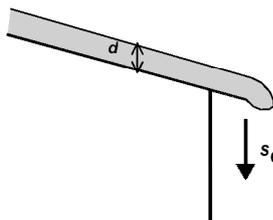


Se la deposizione della neve avviene in presenza di vento la presenza di sporgenze, quali ad esempio i parapetti delle coperture piane, causano la formazione di accumuli nelle zone di «ombra aereodinamica».

$$\mu_2 = \gamma h / q_{sk} \quad 0,8 \leq \mu_2 \leq 2,0$$

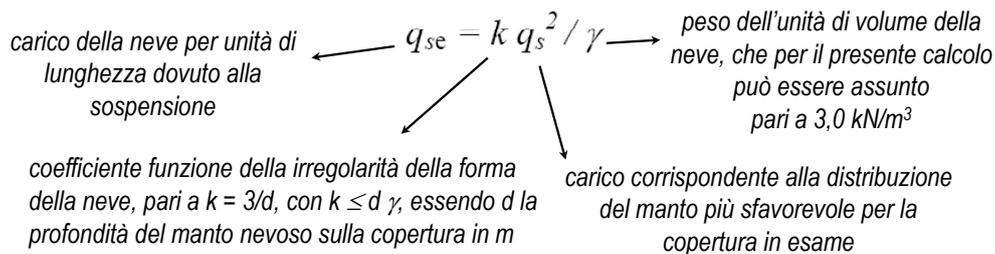
peso dell'unità di volume della neve [kN/m³], che per i presenti calcoli può essere assunto pari a 2 kN/m³

b) Neve aggettante dal bordo di una copertura



In località poste a quota superiore a 800m sul livello del mare, nella verifica delle parti di copertura a sbalzo sulle murature di facciata si dovrà considerare l'azione della neve sospesa oltre il bordo della copertura, sommato al carico agente su quella parte di tetto, secondo lo schema illustrato.

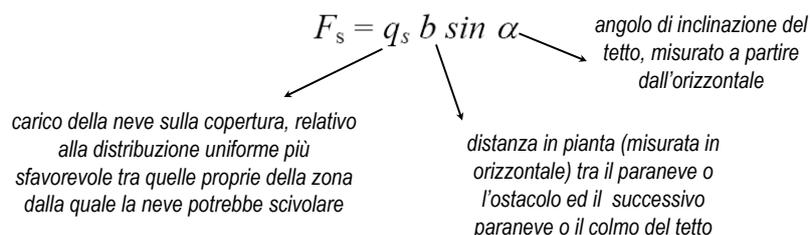
I carichi dovuti alla neve sospesa in oggetto saranno considerati agenti in corrispondenza del bordo della copertura e si possono calcolare mediante l'espressione:



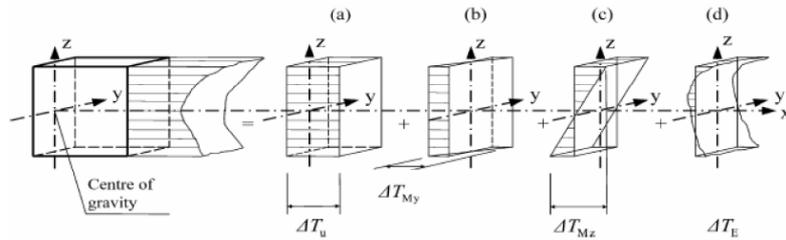
c) Carichi della neve sulle barriere paraneve e altri ostacoli

In talune situazioni la neve può scivolare via da un tetto a falde o curvo. In questo caso si assume pari a zero il coefficiente di attrito tra la massa di neve e la superficie di copertura.

L'azione statica F_s impressa da una massa di neve che scivola su barriere paraneve o altri ostacoli, nella direzione di scivolamento, per unità di lunghezza dell'edificio vale:



Le variazioni di temperatura, però, non hanno andamento lineare, in realtà sono costituite da una serie di componenti:

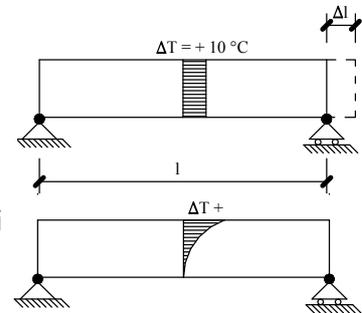


- a) componente uniforme ΔT_u ;
- b) componente lineare ΔT_{My} ;
- c) componente lineare ΔT_{Mz} ;
- d) componente non lineare.

La variazione di temperatura è una deformazione impressa che può essere congruente o non congruente e anche compatibile o non compatibile con i vincoli dei materiali.

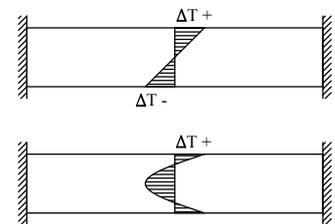
Consideriamo il caso di una trave appoggiata:

- se la variazione della temperatura è uniforme, la deformazione impressa è congruente (rispetta le equazioni di congruenza) e compatibile, quindi non insorgono effetti statici interni o esterni;
- se la variazione di temperatura è curva (incendio superficiale) la deformazione impressa è non congruente e compatibile e quindi insorgono stati tensioni autoequilibrati ma non insorgono reazioni



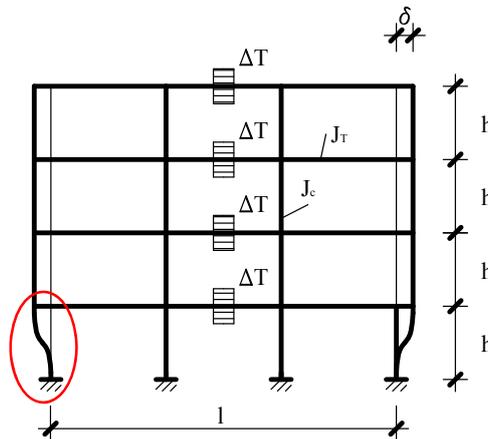
Consideriamo ora una trave con due incastri alle basi:

- se la variazione di temperatura è lineare (a farfalla) la deformazione impressa è congruente ma non compatibile quindi nascono delle reazioni vincolari e conseguenti tensioni;
- se la variazione di temperatura non è lineare la deformazione impressa non è congruente e non è compatibile con i vincoli, quindi nascono reazioni vincolari ed autolesionismi per effetto isostatico ed iperstatico.



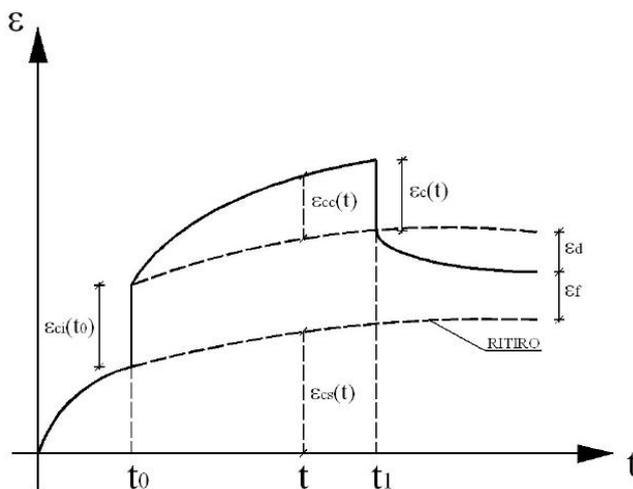
Negli edifici insorgono sollecitazioni molto elevate che costringono a disporre dei giunti di dilatazione.

Consideriamo un edificio multipiano e ammettiamo che il J_T (rigidezza) delle travi sia molto più grande della J_C dei pilastri per cui tutte le variazioni di temperatura vanno a finire nei pilastri.



EFFETTI STRUTTURALI: VISCOSITÀ E RITIRO

Immaginiamo di prendere dei campioni e di uno di questi campioni ne misuriamo il ritiro senza caricarlo. Il ritiro è un fenomeno fisico che avviene in assenza di carico applicato e corrisponde ad una perdita d'acqua del getto. Se riportiamo la ϵ nel tempo osserviamo come il campione accumula un accorciamento. Il ritiro consiste sempre in un accorciamento, a meno che la prova non viene effettuata sott'acqua. Il provino seguirà la curva $\epsilon_{cs}(t)$. Per il secondo campione, invece, la misura viene effettuata applicata un carico a partire dal tempo t_0 : il campione continuerà a ritirarsi ma subirà anche delle deformazioni dovute al carico. Dall'istante in cui lo comprimiamo nascerà una $\epsilon_{ci}(t_0)$ (il tratto in realtà non è verticale, assume questa disposizione solo perché le scale di tempo sono molto grandi). Se non ci fosse la viscosità mi aspetterei che dal tempo t_0 in poi il campione continui a ritirarsi e che mi dia una risposta secondo una curva parallela alla curva precedente. Invece misuro che le deformazioni del campione sono molto più grandi e continuano a crescere nel tempo. La differenza tra queste deformazioni totali e la deformazione di ritiro che comunque avrei è la viscosità: $\epsilon_{cc}(t)$. Adesso ammettiamo che nell'istante t_1 scarichiamo il materiale, mi aspetterei che il materiale mi restituisse la deformazione elastica $\epsilon_{ci}(t_0)$ ma non è così: il calcestruzzo è un materiale "invecchiante", nel senso che le sue caratteristiche meccaniche variano nel tempo. Poiché anche la resistenza cresce nel tempo, crescerà anche il modulo elastico, quindi la stessa variazione di carico produrrà una variazione di ϵ più piccola. Se continuo a misurare il provino, esso continua a fornire una deformazione: questa deformazione di chiama elasticità differita. Questa deformazione corrisponde ad una parte della deformazione elastica precedentemente impressa ma che viene restituita nel tempo. Questa $\epsilon_d(t)$ però non andrà mai a intersecare la curva di ritiro, una parte di deformazione $\epsilon_f(t)$ resta immagazzinata nel materiale ed è chiamata plasticità differita (FLUAGE). In genere nelle strutture non osserviamo questo tipo di comportamento perché non è possibile sottrarre il peso proprio.



- $\epsilon_{ci}(t_0)$ = Deformazione elastica istantanea al tempo t_0
- $\epsilon_{cs}(t)$ = Deformazione di ritiro al tempo t
- $\epsilon_{cc}(t)$ = Deformazione di fluage al tempo t
- $\epsilon_c(t)$ = Deformazione elastica allo scarico al tempo t_1 ($\epsilon_c(t) < \epsilon_{ci}(t_0)$) per effetto dell'aumento del modulo elastico con l'età)
- $\epsilon_d(t)$ = Elasticità differita
- $\epsilon_f(t)$ = Plasticità differita

Si osserva che tutte queste proprietà sono proporzionali alla tensione applicata purché questa tensione sia inferiore al 40% della resistenza del calcestruzzo.

$$\text{per } \sigma_c \leq 0.4 f_{ckj} \quad \epsilon_{ci}, \epsilon_f, \epsilon_{cc}, \epsilon_c, \epsilon_d \propto \sigma$$

Omettendo l'influenza delle condizioni termoigrometriche e considerando solo l'effetto della storia delle sollecitazioni, in applicazione del principio di sovrapposizione e dell'ipotesi di linearità, si può rappresentare nella seguente forma la legge di evoluzione della deformazione totale (somma di quella dovuta alla tensione e ad una eventuale deformazione impressa $\epsilon_{cn}(t)$)

$$\epsilon_c(t) = \epsilon_{cn}(t) + \int_0^t J(t, \tau) \frac{\partial \sigma_c(\tau)}{\partial \tau} \partial \tau$$

τ = istante in cui si verifica la variazione di tensione $\partial \sigma / \partial \tau$

E, ponendo $\tau=t_0$ $\sigma(t)=\sigma(t_0)$ e $\epsilon_{cn}(t_0)=0$ risulta:

$$\epsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) J(t, t_0) + \int_{t_0}^t J(t, \tau) \frac{\partial \sigma_c(\tau)}{\partial \tau} \partial \tau + \epsilon_{cn}(t) \quad (1)$$

Se la variazione di tensione è applicata per intervalli discreti, risulta:

$$\epsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) J(t, t_0) + \sum_{i=1}^n J(t, t_i) \Delta \sigma(t_i) + \epsilon_{cn}(t)$$

Se invece si opera sulle tensioni, per una storia di deformazioni assegnata, si perviene all'integrale di rilassamento:

$$\sigma_c(t) = \int_0^t R(t, \tau) \frac{\partial (\epsilon_c(\tau) - \epsilon_{cn}(\tau))}{\partial \tau} \partial \tau$$

R = *funzione rilassamento* [FL⁻²] → sollecitazione al tempo t provocata da una deformazione impressa unitaria applicata nell'istante τ (modulo elastico al tempo t)

In analogia a quanto prima:

$$\sigma(t, t_0) = [\epsilon_c(t_0) - \epsilon_{cn}(t_0)] R(t, t_0) + \int_{t_0}^t R(t, \tau) \frac{\partial (\epsilon_c(\tau) - \epsilon_{cn}(\tau))}{\partial \tau} \partial \tau \quad (2)$$

Nelle precedenti equazioni la soluzione diretta è semplice, quella inversa porta ad equazioni integrali di Volterra, di difficile soluzione.

In ogni caso entrambe le famiglie di equazioni richiedono la conoscenza delle leggi di fluage (prove a tensione costante) e di rilassamento (prove a deformazione costante).

		FUZIONE FLUAGE $J(t, \tau)$	FUNZ. RILASSAMENTO $R(t, \tau)$
TIPO DI PROBLEMA	PROBLEMI CON STORIA DI TENSIONE ASSEGNATA	$\epsilon_c(t) = ?$ Semplice integrazione	$\epsilon_c(t) = ?$ Soluzione equazione integrale di Volterra
	PROBLEMI CON STORIA DI DEFORMAZIONE ASSEGNATA	$\sigma_c(t) = ?$ Soluzione equazione integrale di Volterra	$\sigma_c(t) = ?$ Semplice integrazione

tipo di problema in cui è più frequente la soluzione dell'equazione integrale di Volterra

STRUTTURE OMOGENEE

Secondo Principio Del Fluage Lineare - Teorema Dell'isomorfismo

Immaginiamo di avere un corpo di un materiale omogeneo, elasto-viscoso e soggetto a vincoli rigidi, al quale applichiamo un sistema di deformazioni impresse non congruenti e non compatibili $\bar{\epsilon}_A$. Cosa succede al corpo? Può succedere che il corpo si rompa oppure che nasca un sistema di deformazioni elastiche complementari tali che le deformazioni $\bar{\epsilon}_A + \epsilon_A$ siano compatibili e congruenti e che quindi avvenga lo spostamento.

La ϵ_A rappresenta una deformazione elastica complementare che produce un sistema σ_A di tensioni autoequilibrate.

Si aggiunge un sistema di deformazioni impresse $\bar{\epsilon}_B$ che è definito come: $\bar{\epsilon}_B = k\epsilon_A$. Ciò comporta che anche il sistema $\bar{\epsilon}_B$ è non congruente e non compatibile, di conseguenza nasce un secondo sistema di deformazioni elastiche complementari ϵ_B tale che $\bar{\epsilon}_B + \epsilon_B$ risulti congruente e compatibile. ϵ_B comporta la nascita delle σ_B .

La deformazione totale del corpo (che è congruente e compatibile) è:

$$\epsilon = \bar{\epsilon}_A + \epsilon_A + \bar{\epsilon}_B + \epsilon_B$$

mentre la tensione totale (autoequilibrata) è:

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_B$$

Per studiare l'effetto di $\bar{\epsilon}_B$ supponiamo che:

$$\epsilon_B = -\bar{\epsilon}_B$$

Allora

$$\epsilon = \bar{\epsilon}_A + \epsilon_A + \bar{\epsilon}_B - \bar{\epsilon}_B = \bar{\epsilon}_A + \epsilon_A$$

abbiamo ottenuto uno stato di deformazione congruente e compatibile.

Inoltre

$$\epsilon_B = -k\epsilon_A \Rightarrow \sigma_B = -k\sigma_A$$

Quindi

$$\sigma = \sigma_A - k\sigma_A = \sigma_A(1 - k)$$

con $\sigma_A(1 - k)$ equilibrato.

Poiché la soluzione proposta risulta essere congruente, compatibile ed equilibrata, per il teorema di Kirchhoff sull'unicità della soluzione dell'equilibrio elastico, essa risulta essere quella reale.

Ad esempio, si può considerare una trave precompressa con martinetti e poi bloccata, nella quale interviene il fluage (proporzionale alla deformazione elastica): lo stato di deformazione non varia, lo stato di tensione varia mantenendosi simile a se stesso.

Si può generalizzare come segue:

"L'introduzione in un corpo elastico omogeneo a vincoli rigidi in stato di coazione di una deformazione impressa simile alla deformazione elastica preesistente non modifica lo stato di deformazione, mentre lo stato di tensione varia in similitudine a se stesso."

Una deformazione impressa quale $\bar{\epsilon}_B$ si chiama ISOMORFA.

Supponiamo, a tal fine, di introdurre il vincolo $n+1^{\text{mo}}$ prima dei carichi, in esso nascerà di conseguenza una reazione:

$$\mathbf{X}_{n+1}(t_0)$$

e tutte le altre reazioni subiranno delle variazioni $\Delta X_i(t_0)$.

Per ritornare alle condizioni iniziali occorre far subire al vincolo $n+1^{\text{mo}}$ un cedimento δ uguale all'abbassamento provocato in quel punto dal carico.

Di conseguenza in $n+1$, al tempo t_0 :

$$\underbrace{X_{n+1}(t_0)}_A - \underbrace{X_{n+1}(t_0)}_B = 0$$

mentre negli altri vincoli i:

$$\underbrace{X_i(t_0)}_C + \underbrace{\Delta X_i(t_0)}_D - \underbrace{\Delta X_i(t_0)}_E = X_i(t_0)$$

dove

A : effetto di forze, quindi invariabile nel tempo (per il secondo principio del fluage lineare)

B : effetto di deformazioni impresse, quindi variabile nel tempo con legge di rilassamento

C : forze

D : forze

E : deformazioni impresse

Tenuto conto della origine dei diversi contributi, al tempo t risulterà:

$$X_{n+1}(t) = X_{n+1}(t_0) - X_{n+1}(t_0) \frac{R(t, t_0)}{E_c} = X_{n+1}(t_0) \left[1 - \frac{R(t, t_0)}{E_c} \right]$$

$$X_i(t) = X_i(t_0) + \Delta X_i(t_0) - \Delta X_i(t_0) \frac{R(t, t_0)}{E_c} = X_i(t_0) + \Delta X_i(t_0) \left[1 - \frac{R(t, t_0)}{E_c} \right]$$

Poiché per $t_0 = 28$ giorni risulta $R(t, t_0)/E_c = 0,15 \div 0,30$ per $t = \infty$ risulta:

$$X_{n+1}(t) = (0,70 \div 0,85) X_{n+1}(t_0)$$

Il valore finale della reazione nel vincolo $n+1^{\text{mo}}$ risulta essere sensibilmente prossimo (70%-85%) al valore che si sarebbe ottenuto nel caso di vincolo preesistente alla applicazione del carico.

La viscosità del calcestruzzo fa sì che la struttura acquisisca questo nuovo vincolo, messo dopo il carico e che lo riporti quasi totalmente nello stato iniziale, precedente all'applicazione del carico.

Molti procedimenti costruttivi implicano variazioni di schema statico, ma con tempi t_1 di introduzione dei nuovi vincoli talora sensibilmente distinti da t_0 .

Occorre pertanto generalizzare il precedente principio introducendo la variabile $t_1 > t_0$.

La funzione $\xi(t, t_1, t_0)$ misura la parte dovuta al fluage della differenza tra la distribuzione di reazioni corrispondenti all'applicazione del carico permanente nello schema 2 e quella corrispondente allo schema 1, per carichi applicati in t_0 nello schema 1 e vincoli aggiuntivi introdotti in t_1 .

$$0 \leq \xi \leq 1$$

$\xi=0$ per $t=t_1$

$\xi=1$ per $t=t_0^-$ (al limite)

mentre per $t_1=t_0^+$

$$\xi(t, t_0^+, t_0) = \int_{t_0}^t R(t, \tau) dJ(\tau, t_0) = 1 - \frac{R(t, t_0)}{E_c}$$

che corrisponde al caso precedente. Introducendo nella (1) di pag. 64:

$$\sigma_c = 0 \text{ per } t < t_0 \text{ e } \sigma_c = 1 \text{ per } t > t_0 \Rightarrow \varepsilon_c(t, t_0) = J(t, t_0)$$

e dalla (2)

$$I = J(t_0, t_0)R(t, t_0) + \int_{t_0}^t R(t, \tau) dJ(\tau, t_0)$$

dove $J(t_0, t_0) = 1/E_c$

Se questi vincoli li inserisco ad un tempo $t=40$ anni non cambiano nulla alla mia struttura, perché l'effetto del fluage è terminato.

Il passo importante di questo principio è quello di valutare gli effetti di vincoli introdotti sulla struttura in tempi diversi.

Quinto Principio Del Fluage Lineare

La funzione integrale $\xi(t, t_1, t_0)$ può anche essere adottata per il caso di strutture omogenee soggette a successive variazioni di schema statico. In questo caso la reazione nel vincolo posticipato k^{mo} introdotto al tempo t_k nello schema statico $k-1^{\text{mo}}$ vale:

$$X_k^{(k)}(t) = X_k^{el(k)} \xi(t, t_1, t_0) \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

Questa relazione produce una variazione nelle reazioni dei vincoli introdotti in precedenza che può essere valutata "elasticamente" in accordo al teorema dell'isomorfismo (1° principio della viscoelasticità lineare).

Allora le reazioni nei vincoli posticipati introdotti ai tempi $t_j \leq t_k$ assumono le espressioni:

$$X_j^{(m)}(t) = X_j^{el(j)} \xi(t, t_j, t_0) + \sum_{k=j+1}^m a_{jk}^{(k-1)} X_k^{(k)}(t)$$

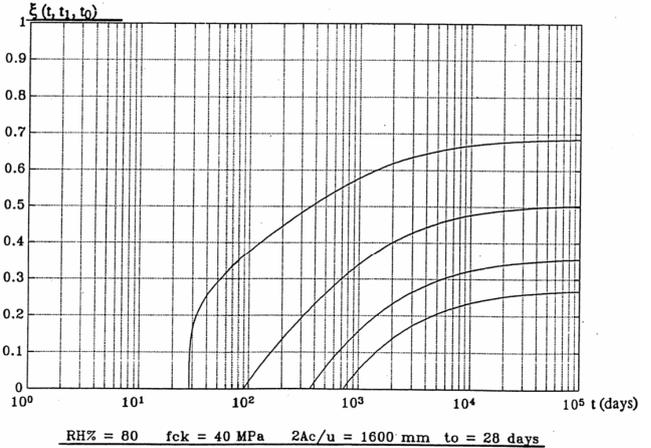
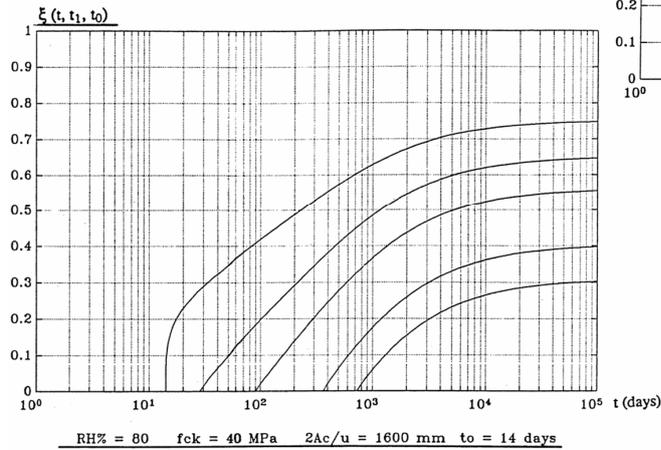
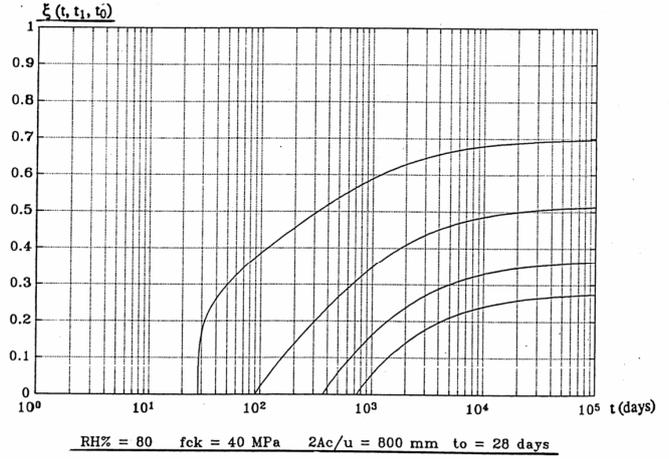
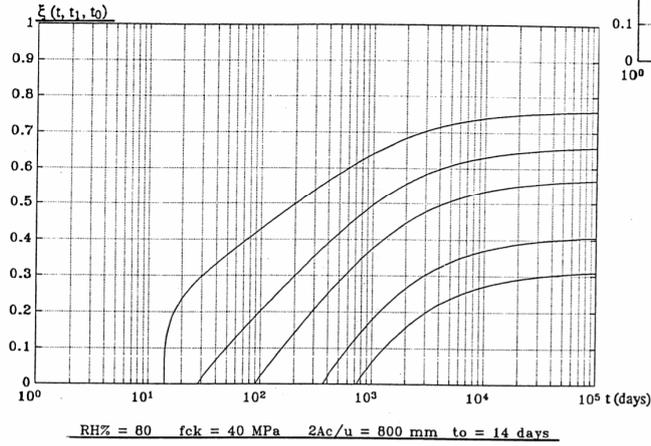
Dove $a_{jk}^{(k-1)}$ sono le reazioni elastiche nel j^{mo} vincolo posticipato dovuto all'applicazione di $X_k = 1$ nello schema $k-1$.

In definitiva nel vincolo k^{mo} insorge una reazione pari a quella che sarebbe presente se il vincolo fosse stato introdotto nella struttura con schema originale in $k-1$ vincoli.

I vincoli preesistenti subiscono, per effetto dei vincoli posticipati successivi, variazioni di reazioni che dipendono esclusivamente dalle reazioni $X_k^{(k)}(t)$ che insorgono in tali vincoli nello schema statico in cui vengono introdotti.

Corso di Tecnica delle Costruzioni 14/15_effetti strutturali: viscosità e ritiro

Per la funzione ξ abbiamo un parametro in più: t_0 .
 Con $t_0=28$ il 70% della sollecitazione che avrei se avessi messo prima il vincolo posticipato me lo trovo a tempo infinito.
 Più è vecchio il calcestruzzo, minore è l'effetto dell'aggiunta dei vincoli



Possiamo anche scrivere:

$$\varepsilon_{tot}(t, t_0) - \varepsilon_n(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E_{ceff}} + \frac{\Delta\sigma(t)}{E_{cadj}}$$

Modulo effettivo

$$\frac{1}{E_{ceff}} = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}}$$

Modulo corretto

$$\frac{1}{E_{cadj}} = \frac{1}{E_c(t_0)} + \chi(t, t_0) \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}}$$

- Modulo elastico effettivo: tiene conto della quota viscosa della deformazione dovuta ai carichi applicati in t_0 ;
- Modulo corretto: include il coefficiente correttivo.

Il problema dell'integrale di Volterra risulta semplificato a patto di conoscere il valore di $\chi(t, t_0)$

Il valore di χ può essere determinato in modo esatto per un caso di puro rilassamento: data una deformazione costante ε_n applicata al tempo t_0 , risulta

$$\sigma(t, t_0) = \varepsilon_n R(t, t_0) = \frac{\sigma(t_0)}{E_c(t_0)} R(t, t_0)$$

Confrontando questa espressione con quella della deformazione totale $\varepsilon_{tot}(t, t_0)$ si ottiene (dopo vari passaggi):

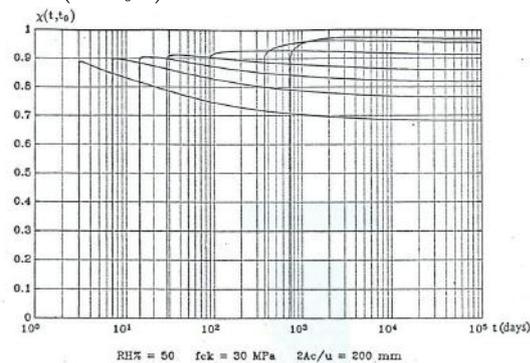
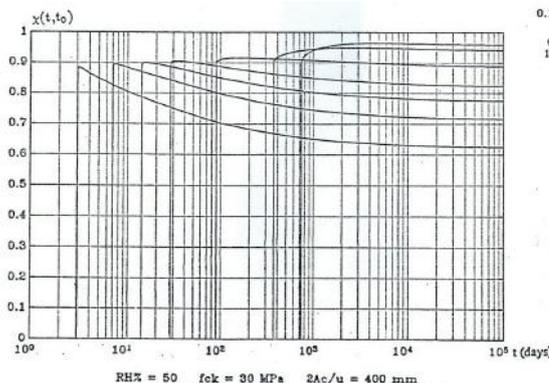
$$\chi(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{E_c(t_0) - R(t, t_0)} - \frac{E_{c28}}{E_c(t_0)\varphi_{28}(t, t_0)}$$

Tale espressione è esatta per problema di puro rilassamento e puro fluage; è approssimata in tutti gli altri casi. In tutti i casi in cui la variazione di tensione assume forma di esponenziale smorzato gli errori sono trascurabili. È il caso ad esempio del ritiro e dei cedimenti degli appoggi che hanno leggi di variazione simili a quelle del fluage.

La funzione χ è tabulata in funzione delle leggi di viscosità oggi proposte. In via approssimata si può assumere:

$$\chi \cong 0,8 \quad \text{oppure} \quad \chi \cong \frac{t_0^{0,5}}{(1+t_0^{0,5})} \quad \text{o anche} \quad \chi = \frac{t_0^{0,5}}{(n+t_0^{0,5})} \quad n = \text{parametri reologici}$$

Legge di variazione di χ . L'unica differenza tra i due diagrammi è lo spessore fittizio.



Le curve assumono valori finali compresi tra 0,65 e 0,9. Quindi considerare $\chi=0,8$ si conferma essere una buona scelta.

EFFETTI STRUTTURALI DEL RITIRO

Per valutare gli effetti strutturali bisogna valutare le entità della deformazione del ritiro. Di seguito sono elencati alcuni valori forfettari per il coefficiente di ritiro (M.C. 90)

ambiente asciutto=
ritiro più forte perché
si perde più acqua
dall'impasto

Table 2.1.11. Shrinkage values $\epsilon_{cs,70} \times 10^4$ for an ordinary structural concrete after a duration of drying of 70 years

Dry atmospheric conditions inside (RH = 50%)			Humid atmospheric conditions (outside) (RH = 80%)		
Notional size $2A_c/\mu$ (mm)					
50	150	600	50	150	600
-0.57	-0.56	-0.47	-0.32	-0.31	-0.26

segno negativo
perché parliamo di
compressioni

In pratica possiamo dire che il ritiro corrisponde a una variazione di temperatura in riduzione di circa 40°C:

Con: $\epsilon_{cs} \cong 0,40/1000$

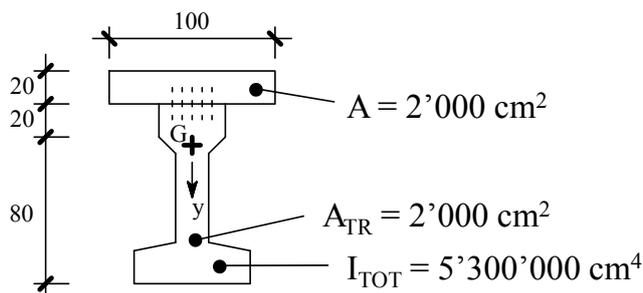
$$a = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

risulta: $\Delta T = 0,4/1000 \cdot 10^5 = 40 \text{ } ^\circ\text{C} !!$

Ritiro Differenziale Trave-Soletta

In genere le travi prefabbricate si considerano "stagionate", quindi con un ritiro: $\epsilon_{cs} \cong 0$

Mentre la soletta viene gettata in opera e ciò comporta un $\epsilon_{cs} \neq 0$.



Nello schema sulla sinistra sono riportate le dimensioni della struttura trave-soletta.

Esprimiamo il ritiro con la deformazione impressa $\bar{\epsilon}_z = \epsilon_{cs}$ che è NON CONGRUENTE.

Quando gettiamo la soletta, essa cerca di accorciarsi ma è "cucita" con delle armature alla trave (linee tratteggiate) che garantiscono la resistenza allo scorrimento. La soletta cerca di accorciarsi ma la trave lo impedisce: ci sarà un compromesso, ovvero la soletta si accorcerà di poco mentre la trave si deformerà anche in modo flessionale.

Di conseguenza alla deformazione impressa $\bar{\epsilon}_z$ nasce un sistema di deformazioni elastiche complementari tali che la deformazione totale sia congruente:

$$\epsilon_z + \bar{\epsilon}_z = \lambda + \mu y \quad \text{deformazione piana}$$

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z = E \cdot (\lambda + \mu y - \bar{\epsilon}_z)$$

Poiché si tratta di stati di tensione autoequilibrati, deve risultare:

$$\int_A \sigma_z dA = 0$$

da cui:

$$E \cdot \int_A (\lambda + \mu y - \bar{\epsilon}_z) dA = 0 \Rightarrow \int_A \lambda dA + \int_A \mu y dA - \int_A \bar{\epsilon}_z dA = 0$$

=0 perché momento statico sezione rispetto ad asse baricentro

Quindi:

$$N \cdot \left(\frac{1}{E_s A_s} + \frac{1}{E_c A_c} \right) = \varepsilon_{c,s}$$

da cui:

$$N = \frac{\varepsilon_{c,s}}{\frac{1}{E_s A_s} + \frac{1}{E_c A_c}}$$

**SFORZO NORMALE INTERNO SCAMBIATO
TRA ACCIAIO E CALCESTRUZZO**

Con $\varepsilon_{c,s} = 0,3 \cdot 10^{-3}$, $A_s = 2 \text{ cm}^2$ (1 Φ 16), $A_c = 900 \text{ cm}^2$ (30 x 30 cm)

Risulta:
$$N = \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{\frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot 2} + \frac{1}{250000 \cdot 900}} = 1179 \text{ Kg}$$

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s} = \frac{1179}{2} = 589,5 \text{ Kg/cm}^2 \text{ (COMPRESSIONE)}$$

$$\sigma_s = \frac{N}{A_c} = \frac{1179}{900} = 1,31 \text{ Kg/cm}^2 \text{ (TRAZIONE)}$$

Raddoppiando l'armatura risulta: $N = 2317 \text{ Kg}$

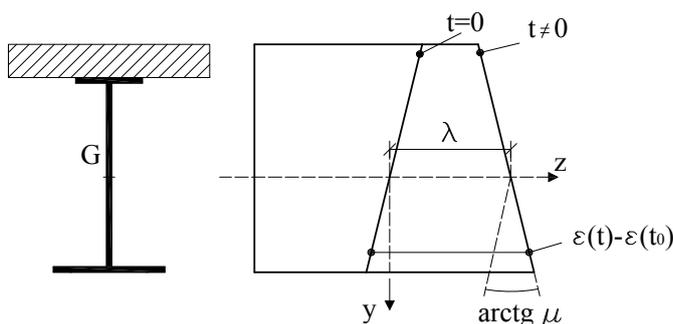
$\sigma_s = 579 \text{ Kg/cm}^2$ La tensione dell'acciaio rimane costante mentre
 $\sigma_s = 2,57 \text{ Kg/cm}^2$ quella del calcestruzzo raddoppia

Nei pilastri molto armati si può raggiungere tensioni superiori alla resistenza a trazione del calcestruzzo e ciò porta a fessurazione del calcestruzzo (il processo di ritiro è molto violento nei primi 2-3 giorni).

In realtà, anche in questo caso, l'intervento del fluage in trazione riduce a circa il 40% del valore elastico lo stato di sollecitazione reale.

Applicazione del metodo A.A.E.M.

Consideriamo una struttura composta: trave in acciaio e soletta in calcestruzzo.



La condizione di compatibilità della deformazione si esprime tramite questa formula:

$$\varepsilon_{tot}(t) - \varepsilon_{tot}(t_0) = \lambda + \square y$$

Supponendo che non intervengano variazioni delle azioni permanenti dopo t_0 , con il metodo A.A.E.M. la deformazione totale può essere espressa come:

$$\varepsilon_{tot}(t) - \varepsilon_{tot}(t_0) = \Delta \varepsilon_n + \sigma(t_0) \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}} + [\sigma(t) - \sigma(t_0)] \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \chi(t, t_0) \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}} \right]$$

$\Delta \varepsilon_n = \varepsilon_n(t) - \varepsilon_n(t_0)$ ← contributo del primo carico applicato
 salto di tensione supposto avvenire in un solo istante t, con coefficiente correttivo

Se si assume l'origine dell'asse y nel baricentro della sezione ideale con riferimento al fattore α_c la quantità $S_c + \alpha_c \cdot S_s$ assume valore nullo, quindi:

$$\lambda = \frac{\Delta \varepsilon_n A_c + (\beta A_c + \gamma S_c) \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}}}{A_i} \quad \text{con } A_i = A_c + \alpha_c A_s$$

$$\lambda = \frac{\Delta \varepsilon_n S_c + (\beta S_c + \gamma I_c) \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}}}{I_i} \quad \text{con } I_i = I_c + \alpha_c I_s$$

Determinati μ e λ si conoscono $\sigma(t) - \sigma(t_0)$ e $\sigma_s(t) - \sigma_s(t_0)$.

La deformazione imposta corrispondente al ritiro è contenuta nel termine $\Delta \varepsilon_n$.

Si può usare in alternativa una procedura che conduce ad un risultato approssimato.

Il ritiro della parte di calcestruzzo (soletta) è impedito dalla connessione all'acciaio(trave), nasce quindi una forza di trazione nel calcestruzzo pari a:

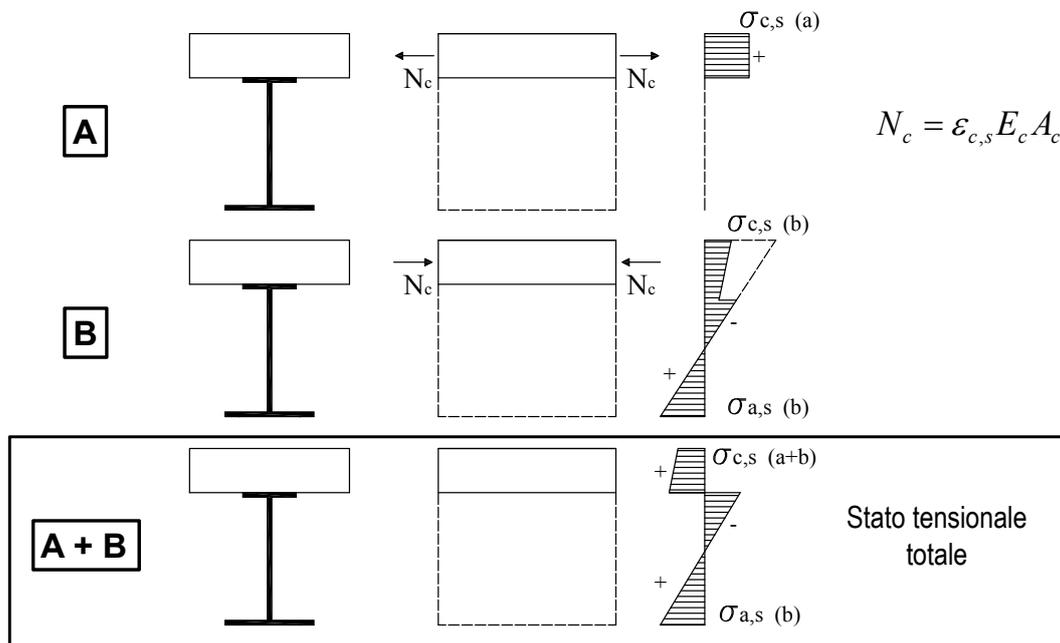
$$N_c = \sigma_{c,s} \cdot A_c = E_c \cdot \varepsilon_{c,s} \cdot A_c$$

Si simula l'effetto applicando:

A) al calcestruzzo una forza di trazione N_c

B) alla sezione composta una forza di compressione $-N_c$

Lo stato tensionale totale si ottiene dalla somma dei due precedenti (A+B)



Per tener conto dell'effetto smorzante benefico del fluage si può valutare N_c con un modulo ridotto

$$E^* = \frac{E_c}{1 + \phi(\infty, t_0)}$$

Ci si può quindi limitare ad effettuare due valutazioni elastiche per le strutture miste al tempo t_0 (modulo E_c) ed al tempo t (modulo E^*).

L'equazione di compatibilità nella struttura è:

$$\eta_{ci}(t) - \eta_{ci}(t_0) = a_{ni}(t) - a_{ni}(t_0) + [a_{i0} + \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j(t_0)] E_c(t_0) \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}} +$$

$$+ E_c(t_0) \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) dX_j(\tau) \quad (i = 1, \dots, n)$$

Spostamento in "i" in direzione "i" effetto di deformazioni impresse
 Spostamento elastico in "i" in direzione "i" effetto delle azioni permanenti valutato con $E_c(t_0)$
 Spostamenti elastici in "i" in direzione "i" effetti di forze unitarie dirette come le incognite iperstatiche X_j , valutati con $E_c(t_0)$

Traducendo la formula in parole ho che:

la variazione di spostamento tra t_0 e t è la somma di un'eventuale deformazione impressa al corpo (es: cresce la temperatura, il corpo esposto al sole si allunga) + quota viscosa della deformazione elastica applicata inizialmente + quota dovuta a tutta l'evoluzione tensionale.

Imponendo l'uguaglianza delle due precedenti espressioni si ottiene:

$$E_c(t_0) \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) dX_j(\tau) + [X_i(t) - X_i(t_0)] a_{sii} +$$

$$+ [a_{i0} + \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j(t_0)] E_c(t_0) \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}} + a_{ni}(t) - a_{ni}(t_0) = 0$$

$$(i = 1, \dots, n).$$

che rappresenta un sistema di equazioni di compatibilità nelle incognite X_j .

Quali sono le diverse possibili soluzioni per impostare il sistema?

a) tutti i vincoli elastici sono applicati in t_0^-

si introducono solo i valori $X_j(t_0)$ ottenuti da una analisi elastica a t_0

b) uno o più vincoli elastici sono introdotti a t_0^+

$X_j(t_0)$ vanno calcolati per i vincoli elastici presenti in t_0^- , per gli altri $X_j(t_0) = 0$

Questa soluzione è conveniente solo nel caso a) oppure se i carichi sono applicati in tempi vicini.

In ogni caso si ottiene un sistema di equazioni integrali nelle incognite X_j , da risolvere numericamente.

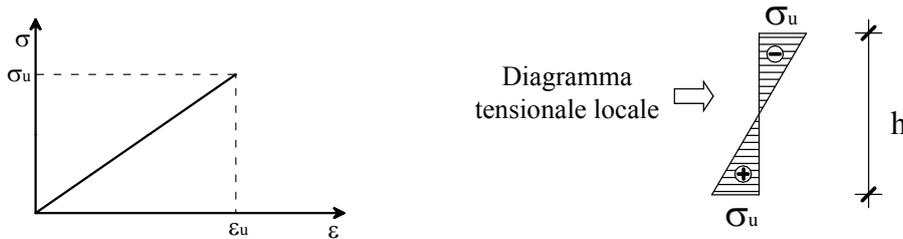
Applicando il metodo AAEM l'equazione ricorrente del sistema diventa:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} E_c(t_0) [X_j(t) - X_j(t_0)] \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \chi(t, t_0) \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}} \right] + [X_i(t) - X_i(t_0)] a_{sii} +$$

$$+ [a_{i0} + \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j(t_0)] E_c(t_0) \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}} + a_{ni}(t) - a_{ni}(t_0) = 0$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

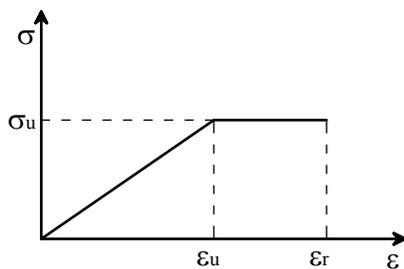
a) TRAVE COMPOSTA DA MATERIALE ELASTO-FRAGILE



Se faccio un calcolo elastico il collasso lo ottengo per $\sigma_{max} = \sigma_u$, pertanto nella sezione di incastro.

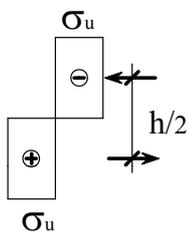
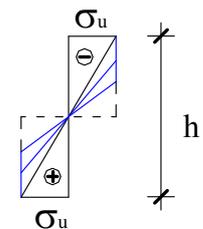
$$\sigma_u = \frac{M}{W} = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{6}{b \cdot h^2} = \frac{ql^2}{2 \cdot b \cdot h^2} \quad \text{da cui} \quad q_u = \frac{2 \cdot b \cdot h^2}{l^2} \cdot \sigma_u \quad \leftarrow \text{CARICO DI COLLASSO}$$

b) TRAVE COMPOSTA DA MATERIALE ELASTO-PLASTICO



Il diagramma ha andamento lineare fino alla σ_u e successivamente un tratto con σ costante ma grandi deformazioni.

Il diagramma delle tensioni fino al raggiungimento di σ_u corrisponde a quello osservato per il materiale elasto-fragile. Successivamente il diagramma tensionale si modifica assumendo dei tratti di σ costante agli estremi della sezione e conservando dei tratti di σ con andamento lineare nella parte centrale.



Il tratto di $\sigma = \text{cost}$ aumenta sempre di più sino ad una situazione finale in cui il diagramma tensionale corrisponde al diagramma sulla sinistra. Questa costituisce una situazione ideale in quanto è impossibile avere dei materiali che si plasticizzano totalmente prima della rottura.

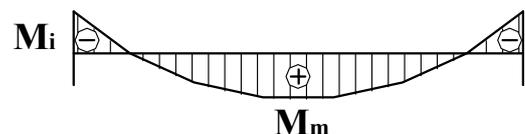
Se riuscissi a plasticizzare completamente la sezione e continuassi ad applicare momento allora la sezione inizierebbe a ruotare: ho formato una "cerniera plastica". La sezione non perde il momento immagazzinato ma quando è completamente plastica, basta un momento piccolissimo per farla ruotare.

Nella situazione limite la sezione presenta un braccio di leva della coppa interna pari ad $h/2$.

A differenza del caso precedente, quando $\sigma_{max} = \sigma_u$ la struttura non collassa ma inizia a plasticizzarsi. La struttura si rompe quando diventa un cinematismo, ovvero quando $M_i = M_m$

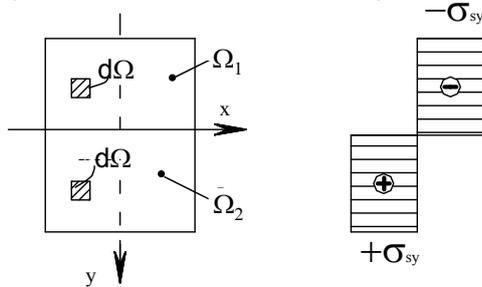
$$\text{Quindi: } M_i = M_m = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ql^2}{16}$$

Il carico si ridistribuisce nelle zone che dispongono ancora di rigidità.



In un istante generico l'allungamento della fibra superiore è $l \cdot \epsilon_{sy}$ dove l è la lunghezza del tronco. Per quanto riguarda le tensioni, fino a quando non si raggiunge la deformazione ϵ_{sy} il diagramma è lineare. L'ultimo diagramma di tensione lineare è proprio quello che corrisponde alla deformazione di snervamento (diagramma a farfalla). Continuando a far crescere il momento la tensione nelle fibre estreme non può più crescere, quindi crescerà nelle fibre intermedie fino a raggiungere il valore di snervamento. La sezione avrà una parte soggetta completamente a compressione e la parte rimanente soggetta a trazione.

Imponendo le condizioni di equilibrio della sezione (deformazioni indeterminate) risulta:



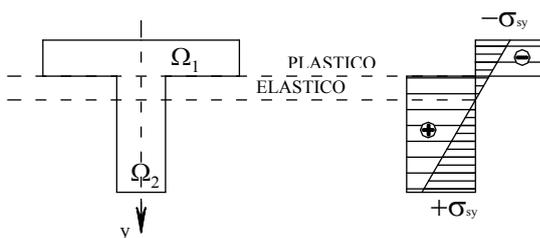
$$N = 0 \quad \Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

$$\int_{\Omega} \sigma d\Omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Omega_1} \sigma d\Omega + \int_{\Omega_2} \sigma d\Omega = 0$$

$$-\sigma_{sy} \int_{\Omega_1} d\Omega + \sigma_{sy} \int_{\Omega_2} d\Omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\Omega_1 + \Omega_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_1 = \Omega_2$$

L'asse neutro plastico (asse x che divide la sezione in fibre tese e fibre compresse) divide la sezione in due zone che hanno la stessa area. L'asse neutro, invece, divide la sezione in sezioni che hanno lo stesso momento statico rispetto all'asse neutro. Ne consegue che, in generale, asse neutro plastico e asse neutro elastico non sono coincidenti.

Vediamo un ulteriore caso in cui l'asse neutro si sposta dalla condizione elastica alla condizione plastica:



$$M_p = \int_{\Omega} \sigma y d\Omega = -\sigma_{sy} \int_{\Omega_1} y d\Omega + \sigma_{sy} \int_{\Omega_2} y d\Omega = \sigma_{sy} \cdot (|S_1| + |S_2|)$$

Posto $Z = |S_1| + |S_2| \Leftrightarrow$ **MODULO PLASTICO DELLA SEZIONE**

Risulta $\sigma_{sy} = M_p / Z$

Elasticità: $\sigma_{el} = M_{el} / W$ con $W = J / y_{max}$ **FIBRE ESTREME ALLO SNERVAMENTO**

Plasticità: $\sigma_{sy} = M_p / Z$ con $Z = |S_1| + |S_2|$ **TUTTE LE FIBRE ALLO SNERVAMENTO**

Si definisce coefficiente di forma:

$$\varphi = Z/W > 1$$

è sempre maggiore di uno perché è una misura delle risorse plastiche rispetto alle risorse elastiche.

Sezione rettangolare $\Leftrightarrow W = \frac{b \cdot h^2}{6} \quad Z = 2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{b \cdot h^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \varphi = Z/W = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot \frac{6}{b \cdot h^2} = 1,5$

Sezione doppio T $\Leftrightarrow \varphi = 1,12 \div 1,16$

Sezione circolare $\Leftrightarrow \varphi = 1,7$

Sezione triangolare $\Leftrightarrow \varphi = 2,37$

Un φ elevato indica che la sezione è poco sfruttata in campo elastico ed ha quindi grandi risorse plastiche; un φ ridotto indica che la sezione è molto sfruttata in campo elastico e quindi con poche risorse elastiche.

Abbiamo una sorta di contraddizione: alcuni materiali con risorse plastiche migliori (come l'acciaio) in realtà vengono sfruttati molto in campo elastico e poco in campo plastico.

2.2 Presenza di taglio assieme alla flessione

Il taglio consuma una parte delle risorse del materiale.

Per le strutture metalliche si considera una condizione di snervamento puntuale in termini di componenti normali e tangenziali di tensione (siamo in caso di sforzo biassiale):

$$\sigma^2 + \alpha^2 \cdot \tau^2 = \sigma_{sy}^2$$

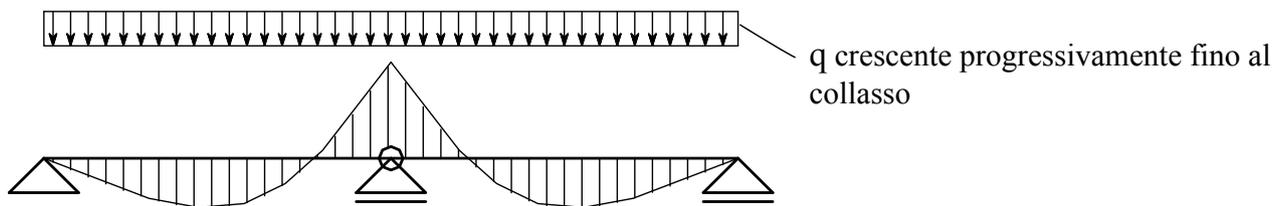
$\alpha = 2$ (TRESCA) oppure $\alpha = \sqrt{3}$ (VON MISES)

La presa in conto del taglio è significativa solo per sezioni con φ poco maggiore di 1 (IPE, HE, ...) e può essere valutata imponendo che il collasso avvenga per sole σ nelle piattabande e per combinazione di σ e τ nelle anime.

Si rileva peraltro che qualora il taglio sia sufficientemente basso da comportare tensioni tangenziali non molto prossime al limite σ_{sy}/α , l'influenza del taglio sulla valutazione del momento plastico è del tutto trascurabile.

Nel caso del cemento armato non è ancora stato completamente definito l'effetto del taglio sul momento plastico.

3. CALCOLO DEL CARICO DI COLLASSO IN STRUTTURE IPERSTATICHE



Consideriamo una trave a due campate con un carico uniforme applicato e facciamo crescere questo carico fino al valore che porta al collasso della struttura.

I momenti elastici sono: $\frac{ql^2}{8}$ in corrispondenza dell'appoggio centrale; $\frac{ql^2}{14}$ in mezzeria delle due

campate. Se continuo ad aumentare il carico, in corrispondenza delle sezioni con momento maggiore si formeranno le cerniere plastiche.

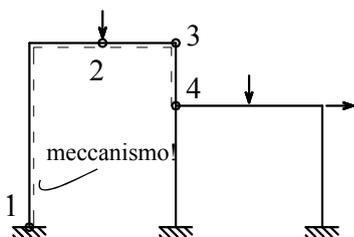
Si forma la prima cerniera plastica sull'appoggio centrale e per gli ulteriori incrementi del carico, la struttura è ISOSTATICA. In questa situazione la struttura non collassa ancora.

La formazione della successiva cerniera plastica, trasformando la struttura in un meccanismo, comporta il collasso della stessa.

In generale: in una struttura n volte iperstatica occorrono n+1 cerniere plastiche per raggiungere il collasso.

Esistono però casi particolari:

- COLLASSO PARZIALE



Consideriamo un telaio multi-connesso che ha tre incastri al piede: 6 volte iperstatica ($n=6$). Supponiamo che si formi una sequenza di cerniere: 1, 2, 3, 4. Queste 4 cerniere fanno diventare la struttura labile, quindi si instaura un meccanismo di collasso (anche se parziale). Per un collasso mi aspetterei un collasso solo con la formazione di 7 cerniere plastiche ma in questo caso non è così: ho un cinematismo di collasso parziale che non sfrutta tutta l'iperelasticità della struttura.

4. TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ANALISI LIMITE

TEOREMA $\begin{cases} \text{STATICO (Greenberg)} \Rightarrow \text{carico di collasso approssimato per difetto} \\ \text{CINEMATICO (Prager)} \Rightarrow \text{carico di collasso approssimato per eccesso} \end{cases}$

4.1 Richiamo principio dei lavori virtuali

Consideriamo una struttura deformabile in equilibrio sotto l'azione di forze esterne e sottoposta ad un sistema di spostamenti virtuali (congruenti e compatibili): il lavoro delle forze esterne \mathcal{L}_e deve eguagliare il lavoro delle sollecitazioni interne \mathcal{L}_i :

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$$

Per una struttura piana composta di travi e caricata nel suo piano risulta:

$$\mathcal{L}_e = \sum_{i=1}^k P_i \cdot \delta_i$$

$k =$ numero di forze P_i

$\delta_i =$ componente secondo P_i dello spostamento del suo punto di applicazione

Il lavoro interno è compiuto dalle caratteristiche di sollecitazione M, N, T , associate agli spostamenti ad esse corrispondenti.

Riferendoci al tronco elementare di lunghezza ds ed integrando lungo tutto il sistema, si ottiene:

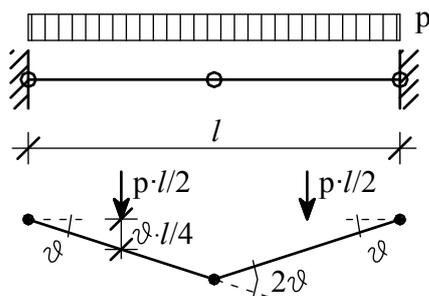
$$\mathcal{L}_i = \int_{\text{SISTEMA}} (N \cdot \Delta ds + T \cdot dy + M \cdot \Delta d\theta)$$

Al collasso si può ammettere che le aste siano composte da tronchi rigidi connessi da cerniere plastiche nelle quali si concentra il lavoro interno. Ne consegue:

- CARICHI CONCENTRATI $\sum_{i=1}^k P_i \cdot \delta_i = \sum_{j=1}^m M_j \cdot \vartheta_j$ $m =$ numero di cerniere plastiche

- CARICHI DISTRIBUITI $\int_{\text{SIST}} p \cdot \delta \cdot dx = \sum_{j=1}^m M_j \cdot \vartheta_j$

Si applica il P. L. V. ad un caso semplice in cui le condizioni di simmetria strutturale e di carico consentono di individuare facilmente la posizione delle cerniere plastiche.



$$\mathcal{L}_e = \frac{p \cdot l}{2} \cdot \frac{\vartheta \cdot l}{4} \cdot 2 = \frac{p \cdot l^2 \cdot \vartheta}{4}$$

$$\mathcal{L}_i = Mp \cdot \vartheta + Mp \cdot 2\vartheta + Mp \cdot \vartheta = 4 \cdot Mp \cdot \vartheta$$

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$$

$$\Rightarrow \frac{p \cdot l^2 \cdot \vartheta}{4} = 4 \cdot Mp \cdot \vartheta \quad \Rightarrow \quad p = \frac{16 \cdot Mp}{l^2}$$

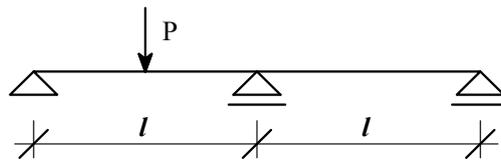
Non è però sempre così agevole la determinazione della posizione delle cerniere plastiche! I termini del lavoro interno sono additivi in quanto in tutte le cerniere ha luogo lavoro interno positivo.

L'angolo θ , individuante la configurazione ultima, è sufficientemente piccolo da poterlo confondere con la sua tangente.

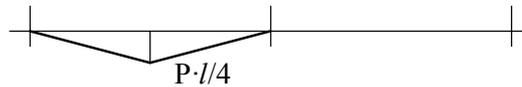
Operando su tronchi rigidi, il lavoro del carico distribuito può essere sostituito con quello del suo risultante.

Consideriamo un esempio:

Trave continua a due campate con forza concentrata nella mezzeria della prima campata.



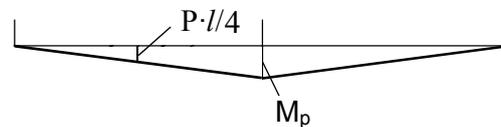
Supponiamo che (anche se sbagliato) il diagramma del momento sia fatto così:



Se questo è il diagramma del momento, il carico limite è:

$$\frac{P \cdot l}{4} = M_p \Rightarrow P_L = \frac{4 \cdot M_p}{l}$$

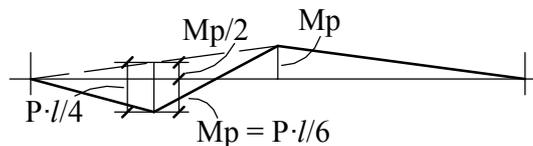
Ipotizzando invece un altro diagramma del momento:



Si ottiene:

$$\frac{P \cdot l}{4} = \frac{M_p}{2} \Rightarrow P_L = \frac{2 \cdot M_p}{l}$$

Se consideriamo il diagramma di momento corretto:



Otteniamo questa volta due cerniere plastiche, a cui corrispondono due momenti plastici:

$$\frac{P \cdot l}{4} - \frac{M_p}{2} = M_p \Rightarrow P_L^* = \frac{6 \cdot M_p}{l}$$

Il diagramma di momento isostatico lo devo sempre "rispettare": posso traslarlo o ruotarlo ma deve sempre mantenere il valore $P \cdot l/4$ in corrispondenza della forza applicata. Il valore P_L del carico lo raggiungo con due sezioni plasticizzate ed è il massimo tra quelli ipotizzati. Partendo dal diagramma di momento elastico ho un'impostazione corretta nella valutazione del momento limite.

4.2 Teorema Cinematico (2° teorema dell'analisi limite)

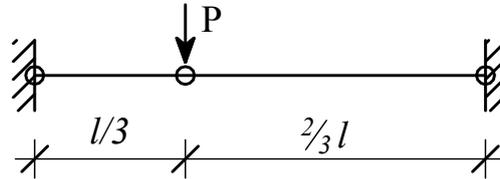
Se plasticizzo un numero sufficiente di sezioni ($n+1$ sezioni) in una struttura n volte iperstatica allora può essere trasformata in un meccanismo CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE (i pezzi restano connessi dalle cerniere, si muove ma non c'è il distacco). Questo meccanismo si può equilibrare con il PLV: posso trovare la distribuzione dei carichi che lo rende equilibrato e che sarà cinematicamente ammissibile. Posso dire che il carico limite è minore tra quelli cinematicamente ammissibili, poiché ogni carico ad esso superiore corrisponde ad un meccanismo di collasso differente, ottenibile solo con un rinforzo della struttura.

Il Lemma di Feinber enuncia che se si rinforza un sistema iperstatico (senza introdurre altri indebolimenti, si rinforza almeno una sezione) il carico limite non può diminuire.

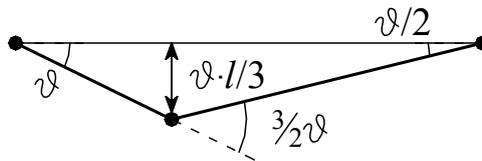
Esempi di applicazione del metodo cinematico

- MODALITA' OPERATIVE
- individuare un possibile meccanismo di collasso
 - determinare il corrispondente carico limite con il P.L.V.
 - verificare che il diagramma di momento ultimo risulti staticamente ammissibile

Consideriamo una trave con doppio incastro soggetta ad una forza concentrata P a 1/3 della luce:



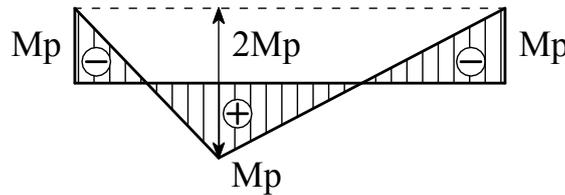
Si formeranno tre cerniere plastiche:



Se indico con θ l'angolo nella cerniera di sinistra, ottengo attraverso il PLV:

$$P \cdot \theta \cdot \frac{l}{3} = M_p \cdot \theta + M_p \cdot \frac{3}{2} \cdot \theta + M_p \cdot \frac{\theta}{2} \quad P_L = \frac{9 \cdot M_p}{l}$$

Per verificare che sia questo il meccanismo cinematico reale, facciamo il diagramma di momento:



Se la trave fosse isostatica (due appoggi) con carico concentrato in 1/3 avremmo:

$$\text{MOMENTO ISOSTATICO: } \bar{M} = \frac{2}{3} \cdot P \cdot \frac{l}{3} = \frac{2}{9} \cdot P \cdot l$$

$$2 \cdot M_p = \frac{2}{9} \cdot P \cdot l \Rightarrow M_p = \frac{P \cdot l}{9}$$

Quindi la soluzione è staticamente ammissibile e il carico limite è:

$$P_L = \frac{9 \cdot M_p}{l}$$

Consideriamo ora il caso di un telaio incastrato con due carichi concentrati applicati uno orizzontalmente sulla traversa e l'altro verticale in mezzeria della traversa:

