NUMERO: 651A -

ANNO: 2015

# A P P U N T I

STUDENTE: Romanazzi

MATERIA: Appunti Esame Orale Idraulica. Prof.Revelli

# Programma corso di IDRAULICA

## Fluidi

- definizione di fluido EQUAZIONE DI STATO*
- sforzi tangenziali LEGGE DI NEWTON*
- fluidi non newtoniani
- SPINTA TOTALE*
- TEOREMA DEL TETRAEDO DI CAUCHY**

## Statica dei fluidi

- EQUAZIONE DELLA STATICA DEI FLUIDI*
- EQUAZIONE DI STEVIN**
- andamento delle pressioni di un fluido in statica
- supercie di separazione tra due fluidi
- misura delle pressioni (manometro semplice, manometro differenziale, manometro metallico)
- SPINTA SU SUPERFICIE PIANA**
- SPINTA DU SUPERFICI CURVE**
- spinta di Archimede EQUILIBRIO AL GALLEGGIAMENTO**

## Cinematica dei fluidi

- tipi di moto (moto vario, moto permanente, moto uniforme)
- punto di vista lagrangiano e euleriano DERIVAZIONE EULERIANA*é
- tubo di flusso

## Dinamica dei fluidi

- CONSERVAZIONE DELLA MASSA* (caso particolare: moto permanente)
- EQUAZIONE GLOBALE DI CONTINUITÁ* (caso particolare: moto permanente)
- corrente EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DELLA CORRENTE* (casi particolari)
- EQUAZIONE GLOBALE DELLA DINAMICA PER UN FLUIDO QUALSIASI*** (considerazioni)
- casi particolari dell'equazione globale: moto permanente e corrente
- *EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES*** (dispense) facoltative!*
- EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES*** FORMA LOCALE E GLOBALE

## Dinamica dei fluidi perfetti

- EQUAZIONE DI EULERO* FORMA LOCALE E GLOBALE
- TEOREMA DI BERNOULLI** carattere energetico
- luce a battente orizzontale e verticale
- tubo di pitot
- ESTENSIONE DEL TEOREMA DI BERNOULLI ALLE CORRENTI*** e applicazione
- energia idroelettrica
- ESTENSIONE DEL TEOREMA DI BERNOULLI AI FLUIDI REALI****

## Moto laminare

- numero di Reynolds
- ANDAMENTO PARABOLICO DELLE VELOCITÁ*** FORMULA DI POISEUILLE
- caratteristiche del moto laminare (velocità media, cadente piezometrica e $\tau_0$)
- MOTO LAMINARE TRA DUE LASTRE*
- considerazioni moto laminare per diverse sezioni
- TAYLOR-COUETTE(moto laminare con lastra in movimento)*

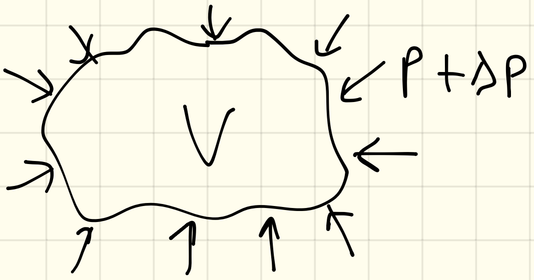
## Moti di filtrazione

- definizione generale
- ipotesi di semplificazione (mezzo poroso omogeneo e isotropo, separazione netta tra insaturo e saturo)
- ESPERIMENTO DI DARCY* (velocità di filtrazione, cadente piezometrica, legge di Darcy)
- PORTATA DI UNA FALDA ARTESIANA** (trincea drenante con profondità di falda finita e infinita)
- PORTATA DI UN ACQUIFERO FREATICO** (formula di Charlie, trincea drenante)

## Serbatoi

- definizione generale
- CONDIZIONE DI PERIODICITÁ*
- esempi di calcolo della capacità minima

# EQUAZIONE DI STATO DEI FLUIDI




$$\Delta V = -\frac{V \Delta p}{\varepsilon}$$

$\varepsilon$ = modulo di elasticità

$$m = \rho V = cost$$

$$dm = \rho\, dV + V\, d\rho = 0 \qquad \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\frac{dp}{\varepsilon} = \frac{d\rho}{\rho}}$$

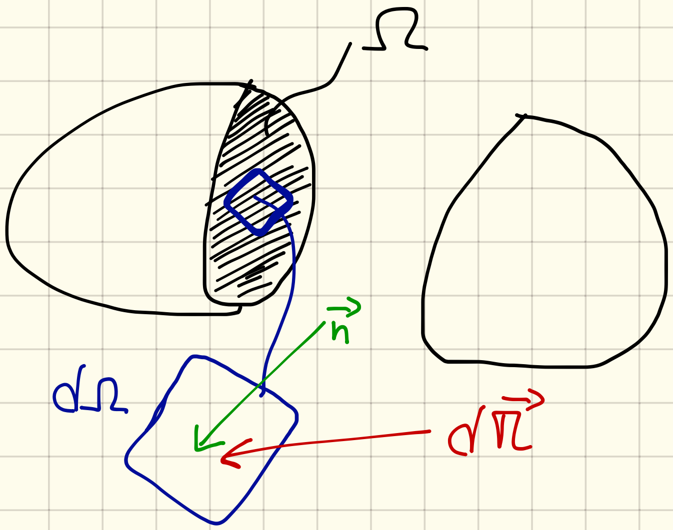
EQUAZIONE DI STATO

$\varepsilon$ ha valori molto grandi, quindi:

$$\frac{d\rho}{\rho} \cong 0 \Rightarrow \rho = cost$$

liquidi incomprimibili

# SPINTA TOTALE




$$\lim_{d\Omega \to 0} \frac{d\vec{\Pi}}{d\Omega} = \vec{\Phi}_n \quad \text{SFORZO UNITARIO}$$

$$d\vec{\Pi} = \vec{\Phi}_n \cdot d\Omega \quad \Rightarrow \quad \vec{\Pi} = \int_\Omega \vec{\Phi}_n \, d\Omega \quad \text{SPINTA TOTALE}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 86

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{vmatrix}$$ TENSORE DEGLI SFORZI

Proprietà:

- Piani principali: sforzi tangenziali nulli
- $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = S$ invariante
- $\tau = 0 \Rightarrow$ strato ISOTROPO, questo implica che:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = S/3 = p$$

$$\vec{\Phi}_n = p\vec{n} \qquad p = \text{pressione}$$

$\tau = 0 \Rightarrow d\mu = 0 \longrightarrow$ FLUIDO FERMO

# LEGGE DI STEVIN

$$\rho \vec{F} = \text{grad}\, p$$

Se F ammette potenziale, allora: $\vec{F} = \text{grad}\, U$

$$\rho\, \text{grad}\, U = \text{grad}\, p$$

Se fluido incomprimibile $\rho = cost$ quindi

$$\text{grad}\, \rho U = \text{grad}\, p$$

$$U = \frac{p}{\rho}$$

Nel caso di campo gravitazionale: $\vec{F} = -\text{grad}\, \vec{g} z$

$$-\rho\, \text{grad}\, g z = \text{grad}\, p \qquad \rho g = \gamma$$

$$\text{grad}\,(\gamma z + p) = 0$$

$$z + \frac{p}{\gamma} = cost \qquad \text{LEGGE DI STEVIN}$$

$\frac{p}{\gamma}$ = altezza piezometrica

$h = z + \frac{p}{\gamma}$ CARICO PIEZOMETRICO

# Posizione del centro di spinta

$$S \cdot \xi = \int_{\Omega} p x \, d\Omega$$

$$S \cdot \xi = \int_{\Omega} \gamma x^2 \operatorname{sen}\alpha \, d\Omega = \gamma \operatorname{sen}\alpha \int_{\Omega} x^2 \, d\Omega =$$

$$S \cdot \xi = \gamma \operatorname{sen}\alpha \, I_y$$

$$S \cdot \eta = \int_{\Omega} p y \, d\Omega$$

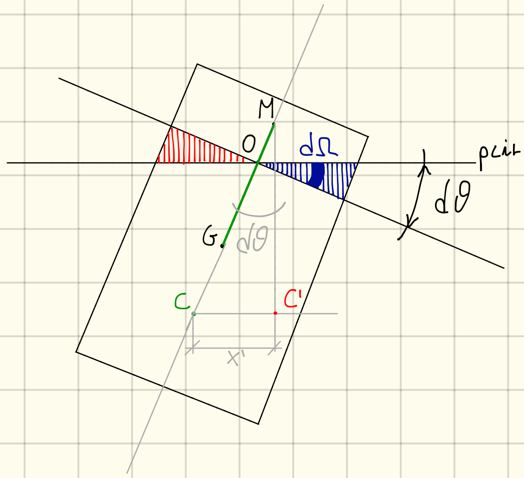
$$S \cdot \eta = \int_{\Omega} \gamma x y \operatorname{sen}\alpha \, d\Omega = \gamma \operatorname{sen}\alpha \, I_{xy}$$

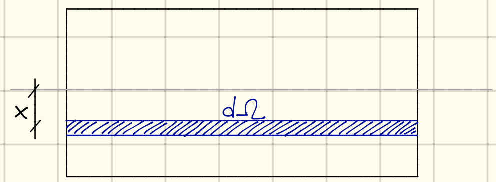
$$S \cdot \eta = \gamma \operatorname{sen}\alpha \, I_{xy}$$

$$\xi = \frac{\gamma \operatorname{sen}\alpha \, I_y}{S} = \frac{\gamma \operatorname{sen}\alpha \, I_y}{\gamma h_G \Omega} = \frac{I_y}{M}$$

$$\eta = \frac{\gamma \operatorname{sen}\alpha \, I_{xy}}{S} = \frac{\gamma \operatorname{sen}\alpha \, I_{xy}}{\gamma h_G \Omega} = \frac{I_{xy}}{M}$$

# Galleggiamento




$$dV = x\,d\theta\,d\Omega$$

$$dF_c = \gamma x\,d\theta\,d\Omega$$

$$dM = dF_c \cdot x = \gamma x^2 d\theta\,d\Omega$$

$$M = \int_\Omega \gamma x^2 d\theta\,d\Omega = \gamma\,d\theta \int_\Omega x^2 d\Omega = \gamma\,d\theta\,I_y$$

Ma il momento si puó anche scrivere come:

$$M = \gamma V_c x' \qquad x' = \overline{CM}\,\mathrm{sen}\,d\theta \cong \overline{CM}\,d\theta$$

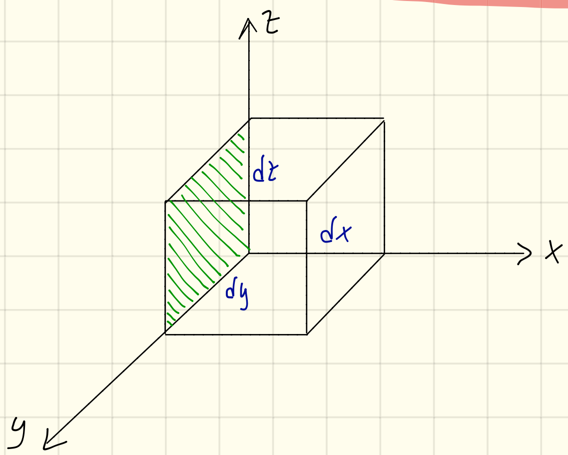
$$\cancel{\gamma}\,\cancel{d\theta}\,I = \cancel{\gamma}\,V_c\,\overline{CM}\,\cancel{d\theta}$$

$$\overline{CM} = \frac{I}{V_c} \qquad \overline{GM} = \overline{CM} - \overline{CG} \qquad (\overline{CG} = e)$$

$$GM = \frac{I}{V_c} - e$$

DISTANZA METACENTRICA

## Conservazione della massa




Massa entrante: $(\rho u\, dt)\, dy\, dz$

Massa uscente: $\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dt\, dy\, dz$

Considerando tutte le facce del cubo:

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) \cancel{dx\, dy\, dz}\, dt = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dt\, \cancel{dx\, dy\, dz}$$

variazione di massa complessiva

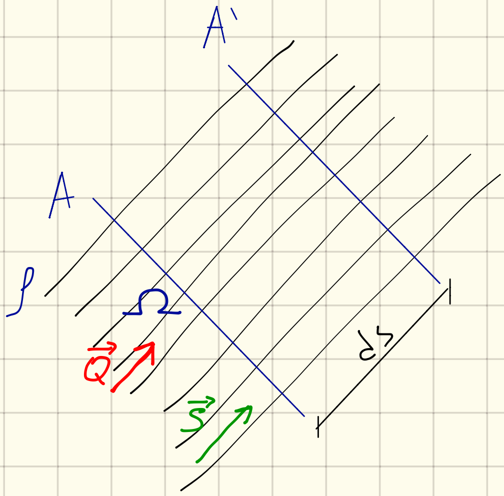
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0$$

Moto permanente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

# Equazione di continuità per una corrente




$$\Omega = \Omega(s,t)$$

$$Q = Q(s,t)$$

MASSA ENTRANTE: $\rho Q \, dt$

MASSA USCENTE: $\left[\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds\right] dt$

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds \, dt = -\frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} dt \, ds$$

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} = 0$$

Casi particolari:

- $\rho = \text{cost} \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$
- MOTO PERMANENTE $\Rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \Rightarrow Q = \text{cost}$
- $\Omega = \text{cost} \Rightarrow U \cdot \Omega = \text{cost} \Rightarrow U = \text{cost}$

In componenti:

$$\begin{cases} \rho\left(F_x - \dfrac{Du}{Dt}\right) = \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_z}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_y}{\partial z} \\ \rho\left(F_y - \dfrac{Dv}{Dt}\right) = \dfrac{\partial \tau_z}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_x}{\partial y} \\ \rho\left(F_z - \dfrac{Dw}{Dt}\right) = \dfrac{\partial \tau_y}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_x}{\partial z} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{cases}$$

Le incognite sono: $\rho$, $u$, $v$, $w$, $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$
$\tau_x$, $\tau_y$, $\tau_z$

Le altre equazioni sono:

- CONTINUITÀ $\dfrac{D\rho}{Dt} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \,\mathrm{div}\,\vec{u}$

- EQUAZIONE DI STATO: $\rho = \text{cost}$ (fluido incomprimibile)

- 5 equazioni sul tipo di fluido (reologia)

$$-\int_W \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dW = \underbrace{-\int_W \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dW}_{\vec{I}} - \int_W \left( \frac{\partial \rho u \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \vec{u}}{\partial z} \right) dW$$

INERZIA LOCALE

$$-\int_W \left( \frac{\partial \rho u \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \vec{u}}{\partial z} \right) dW =$$

$$= \int_\Omega \rho \vec{u} \underbrace{\left( u \cos \hat{nx} + v \cos \hat{ny} + w \cos \hat{nz} \right)}_{u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}} d\Omega$$

$$\int_W \rho \vec{F} dW - \int_W \vec{\Phi}_n dW - \int_W \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dW + \int_\Omega \rho \vec{u} u_n d\Omega = 0$$

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M} = 0$$

EQUAZIONE GLOBALE DELLA DINAMICA PER UN FLUIDO QUALSIASI

# EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES:

- Fluido viscoso:

$$\rho\left(\vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt}\right) = \mathrm{grad}\,p - \mu \Delta_2 \vec{u} - \frac{1}{3}\mu\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u}$$

- Fluido incomprimibile: $(\mathrm{div}\,\vec{u} = 0)$

$$\boxed{\rho\left(\vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt}\right) = \mathrm{grad}\,p - \mu \Delta_2 \vec{u}}$$

- Forma globale:

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_i + \vec{M}_e + \vec{I} - \mu \int_\Omega \frac{\partial \vec{u}}{\partial n}\, d\Omega = 0$$

DA VEDERE

# Teorema di Bernoulli

Ipotesi:

1) Fluido perfetto: $\rho\left(F - \frac{D\vec{u}}{Dt}\right) = \text{grad}\,p$

2) Incomprimibilità: $\rho = \text{cost}$

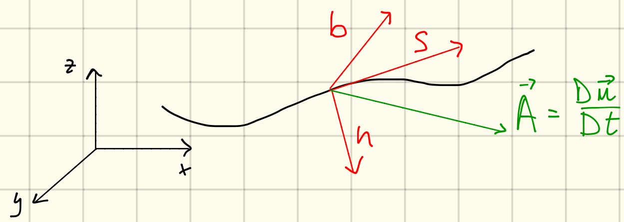
3) $\vec{F} = -\text{grad}\,gz \Rightarrow \rho\vec{F} - \rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \text{grad}\,p$

$$-\text{grad}\,\rho g z - \rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \text{grad}\,p$$

$$\text{grad}\left(p + \gamma z\right) = -\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}$$

$$\text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{D\vec{u}}{Dt}$$

Introduco una terna intrinseca:




Scompongo il vettore $\vec{A}$ secondo le direzioni s, n, b

$$\vec{A} = \left(\frac{Du}{Dt}, \frac{u^2}{R}, 0\right)$$

Riscrivo l'equazione ottenuta secondo le nuove direzioni.

# Luce a battente orizzontale

Fig 5.8 (pag 114)

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \underbrace{\cancel{\frac{u_A^2}{2g}}}_{=0} = z_B + \underbrace{\cancel{\frac{p_B}{\gamma}}}_{=0} + \frac{u_B^2}{2g}$$

nella sez. contratta le traiettorie sono rettilinee → distribuzione idrostatica delle pressioni ⇒ $p_B = 0$

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{u_B^2}{2g}$$

$$\frac{u_B^2}{2g} = z_A - z_B + \frac{p_A}{\gamma} \Rightarrow u_B = \sqrt{2g(h+\delta)} \qquad \delta = z_A - z_B$$

Se $\delta << h$ otteniamo:

$$u_B = \sqrt{2gh}$$

Considerando la contrazione delle velocità $c_v$:

$$u_B = c_v \sqrt{2gh}$$

$$Q = u_B \Omega_c \qquad \text{dove} \quad \Omega_c = c_c \Omega$$

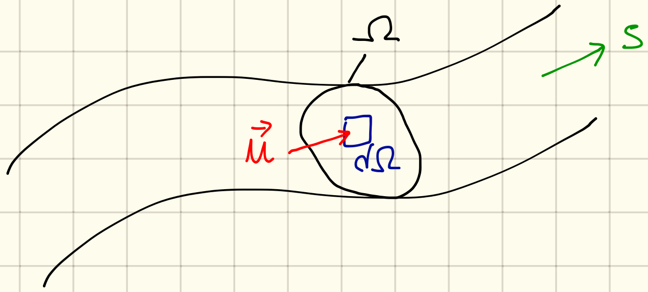
→ coefficiente di contrazione

$$Q = c_c c_v \Omega \sqrt{2gh}$$

$$Q = m \Omega \sqrt{2gh}$$

→ COEFFICIENTE DI EFFLUSSO

# Teorema di Bernoulli alle correnti




$\vec{s}$ traiettoria della corrente

MOTO PERMANENTE $\Rightarrow H = cost$

$dQ = u\, d\Omega$

$\gamma dQ =$ peso che attraversa $d\Omega$ nell'unità di tempo

$\gamma H dQ =$ carico totale al peso $\gamma dQ$, ovvero la POTENZA che passa attraverso $d\Omega$

$\gamma H dQ = dP$

$$P = \int_\Omega dP = \int_\Omega \gamma H dQ = \int_\Omega \gamma H u\, d\Omega = \int_\Omega \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) u\, d\Omega$$

$$P = \int_\Omega \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) u\, d\Omega + \gamma \int_\Omega \left(\frac{u^2}{2g}\right) u\, d\Omega$$

$$= \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \int_\Omega u\, d\Omega + P_{cin} = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) Q + P_{cin}$$

$$P_{cin} = \gamma \int_\Omega \left(\frac{u^2}{2g}\right) u\, d\Omega$$

Introduciamo: $\alpha = \dfrac{\gamma \int_\Omega \frac{u^2}{2g} u\, d\Omega}{\gamma \frac{U^2}{2g} U \Omega}$

$U =$ velocità media

# Effetto Venturi

Fig 5.14 (pag 124)

$$\delta = \left(z_A + \frac{p_A}{\gamma}\right) - \left(z_B - \frac{p_B}{\gamma}\right) = \frac{U_B^2 - U_A^2}{2g}$$

$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

$$\Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} = \frac{U_B^2 - U_A^2}{2g}$$

$$T = \gamma \pi r^2 J L$$

Per definizione:

$$\tau = \frac{T}{\Omega}$$

Quindi:

$$\tau = \frac{\gamma \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} J \cancel{L}}{2 \cancel{\pi} \cancel{r} \cancel{L}} = \gamma \frac{r}{2} J$$

$$r = \frac{D}{2} \Rightarrow \tau = \gamma \frac{D}{4} J$$

$\frac{D}{4}$ si definisce RAGGIO IDRAULICO:

$$R = \frac{\Omega}{C} \qquad C = \text{contorno bagnato}$$

$$\tau_0 = \gamma R J$$

Osservando gli altri termini:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}(h) = J$$ MOTO UNIFORME

Quindi:

$$\Delta_2 u = -\frac{\gamma J}{\mu} \qquad u = u(r)$$

Analizzo il laplaciano:

$$\Delta_2 u = \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

In coordinate cilindriche:

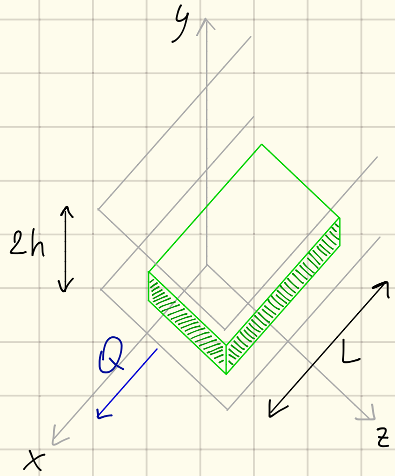
$$\Delta_2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \underbrace{\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}}_{=0}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -\frac{\gamma J}{\mu}$$

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -\frac{\gamma J}{\mu} \\ u = 0 \qquad r = R \\ \frac{du}{dr} = 0 \qquad r = 0 \end{cases}$$

# Moto laminare tra due lastre




Ipotesi:
- fluido tra 2 rette //
- lastre poco distanti ma di lunghezza infinita

$$\vec{u} = (u, \cancel{v}, \cancel{w})$$

$$u = u(\cancel{x}, y, \cancel{z}) = u(y)$$

Scrivendo Navier-Stokes, si ottiene:

$$-\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma z) - \mu \Delta_2 u$$

$$\frac{Du}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{w\frac{\partial u}{\partial z}}_{=0} = 0$$

$$\Delta_2 u = \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{=0}$$

Quindi ottengo:

$$0 = \frac{d}{dx}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) - \frac{\mu}{\gamma}\frac{d^2 u}{dy^2}$$

$$J = -\frac{\mu}{\gamma}\frac{d^2 u}{dy^2}$$

# Teoria di Kolmogorov

1) Definisce la MEDIA D'INSIEME sulla base di una serie di misure della grandezza, osservate in diversi istanti in un punto fisso.

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} u_i(t)$$

$N$ = numero di misurazioni
$u_i(t)$ = misurazione al tempo $t$

$$u_i'(t) = u_i(t) - \langle u(t) \rangle$$ SCARTO RISPETTO ALLA MEDIA

$$\langle u_i'(t)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(u_i'(t)\right)^2$$ SCARTO QUADRATICO MEDIO

In base alla dipendenza dal tempo si suddividono:

$\langle u(t) \rangle \neq f(t)$ e $\langle u'(t) \rangle \neq f(t)$ statisticamente stazionaria

$\langle u(t) \rangle = f(t)$ e $\langle u'(t) \rangle = f(t)$ statisticamente non stazionaria

2) Per una media corretta occorrono molte misure, quindi propone di fissare un punto ed eseguire una sola misura ma per un tempo esteso: MEDIA TEMPORALE

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\,dt$$

$$u' = u - \bar{u}$$

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(u'(t)\right)^2 dt$$

Quale media scegliere? → media d'insieme teoricamente giusta
↳ media temporale facile da calcolare

# Equazioni del moto medio di Reynolds

Mediamo l'equazione di continuità:

$$0 = \langle \mathrm{div}(\vec{u}) \rangle = \langle \mathrm{div}(\bar{\vec{u}} + \vec{u}') \rangle = \mathrm{div} \langle (\bar{\vec{u}} + \vec{u}') \rangle =$$

$$= \mathrm{div}\left( \langle \bar{\vec{u}} \rangle + \underbrace{\cancel{\langle \vec{u}' \rangle}}_{=0} \right) = \mathrm{div}\, \bar{\vec{u}} = 0$$

vale solo per i termini lineari $\leftarrow$ $\mathrm{div}\, \bar{\vec{u}} = 0$   Equazione di continuità del moto medio

Analizziamo cosa accade per le equazioni di Navier-Stokes

- Per il termine $\mu \Delta_2 \vec{u}$ si ottiene:

$$\mu \Delta_2 \vec{u} \longrightarrow \mu \Delta_2 \bar{\vec{u}} \rightarrow \Delta_2 \text{ è lineare}$$

- Per il termine non lineare dell'accelerazione:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \vec{u} \cdot \mathrm{grad}\, \vec{u}$$

Il problema è che: $\langle \vec{u} \cdot \mathrm{grad}\, \vec{u} \rangle \neq \langle \vec{u} \rangle \cdot \langle \mathrm{grad}\, \vec{u} \rangle$

Infatti:

$$\langle \vec{u} \cdot \mathrm{grad}\, \vec{u} \rangle = \langle (\bar{\vec{u}} + \vec{u}') \cdot \mathrm{grad}(\bar{\vec{u}} + \vec{u}') \rangle =$$

$$= \langle \bar{\vec{u}} \cdot \mathrm{grad}\, \bar{\vec{u}} \rangle + \underbrace{\cancel{\langle \bar{\vec{u}} \cdot \mathrm{grad}\, \vec{u}' \rangle}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\langle \vec{u}' \cdot \mathrm{grad}\, \bar{\vec{u}} \rangle}}_{=0} + \langle \vec{u}' \cdot \mathrm{grad}\, \vec{u}' \rangle$$

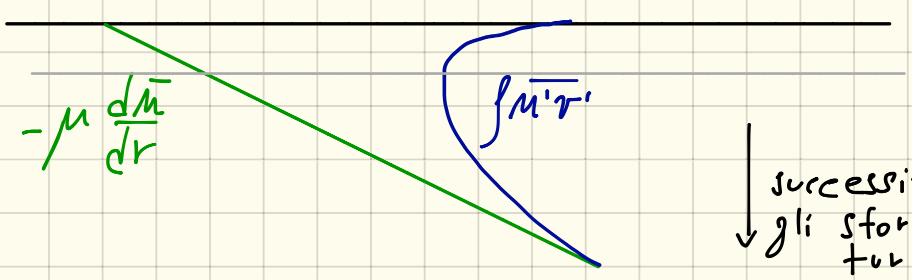
$$\frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial t} + \bar{\vec{u}} \cdot \mathrm{grad}\, \bar{\vec{u}} + \langle \vec{u}' \cdot \mathrm{grad}\, \vec{u}' \rangle = -\frac{1}{\rho} \mathrm{grad}\, \bar{p} + \vec{g} + \nu \Delta_2 \bar{\vec{u}}$$

Scrivendo quindi l'espressione degli sforzi $\tau$ dovuti alla componente laminare e alla componente turbolenta:

$$\tau = -\mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) - \rho\,\overline{v'u'}$$

Per un condotto circolare:

$$\tau = \underbrace{-\mu \frac{d\bar{u}}{dr}}_{\text{COMPONENTE LAMINARE}} \underbrace{- \rho\,\overline{u'v'}}_{\text{COMPONENTE TURBOLENTA}}$$




Vicino alla parete prevalgono gli sforzi di natura viscosa

successivamente prevalgono gli sforzi di natura turbolenta

Il profilo delle velocità è dato da:

$$\gamma \frac{r}{2} J = -\mu \frac{d\bar{u}}{dr} - \rho\,\overline{u'v'}$$

$$\frac{d\bar{u}}{dr} = -\frac{\gamma J}{2\mu} r - \frac{\rho}{\mu}\overline{u'v'}$$

Integrando:

$$\bar{u} = \frac{\gamma J}{4\mu}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right) - \frac{\rho}{\mu}\int_r^{D/2} \overline{u'v'}\,dr$$

# Teorema di Buckingham

Data una grandezza fisica, di cui non conosco la legge ma solo che è funzione di altre grandezze:

$$y = f(\underline{\underline{q_1}}, \underline{\underline{q_2}}, \underline{\underline{q_3}}, \dots, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

Scelgo tre grandezze e chiedo che siano dimensionalmente indipendenti:

$$\frac{y}{q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} q_3^{\alpha_3}} = f\left(q_1, q_2, q_3, \frac{q_4}{q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} q_3^{\alpha_3}}, \dots, \frac{q_n}{q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} q_3^{\alpha_3}}, a_1, \dots, a_n\right)$$

Scrivo un'equazione di soli numeri puri:

$$\frac{y}{q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} q_3^{\alpha_3}} = f\left(\cancel{q_1}, \cancel{q_2}, \cancel{q_3}, \frac{q_4}{q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} q_3^{\alpha_3}}, \dots, \frac{q_n}{q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} q_3^{\alpha_3}}, a_1, \dots, a_n\right)$$

Ottengo quindi:

$$N = f(N_4, N_5, \dots, N_n, a_1, a_2, \dots, a_3)$$

# Teorema di Buckingham per il moto turbolento

MOTO ASSOLUTAMENTE TURBOLENTO $\quad \tau_0 = f(D, U, \rho)$

Si ottiene:

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{\lambda}{8} \qquad \lambda = 8\lambda_1$$

# Significato del numero di Reynolds:

$$\frac{\tau_{0TURB}}{\tau_{0LAM}} = \frac{\lambda}{8}\,\frac{\rho U^2 D}{\mu U 8} = \frac{\lambda}{64}\,\frac{\rho U D}{\mu}$$

NUMERO DI REYNOLDS

esprime il rapporto tra componente laminare e componente turbolenta

## Moto turbolento in tubo scabro

$$\tau_0 = f(D, U, \rho, \mu, \varepsilon)$$

Come quantificare $\varepsilon$? Non in base alla geometria del tubo ma in base agli EFFETTI sul moto del fluido.

→ TUBI DI NIKURADSE ⇒ scabrezza equivalente

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{2{,}51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3{,}71}\,\frac{\varepsilon}{D}\right)$$

### Formule pratiche:

1) DARCY $\quad J = \beta \dfrac{Q^2}{D^n} \qquad \beta$ = materiale del tubo

2) CHEZY $\quad U = \chi\sqrt{RJ}$

$\chi = k R^{1/6}$ formula di Strickler

$\chi = \dfrac{1}{n} R^{1/6}$ formula di Manning

[...]

La perdita di carico totale è:

$$\Delta H = H_1 - H_2 = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} - h_2 - \frac{U_2^2}{2g}$$

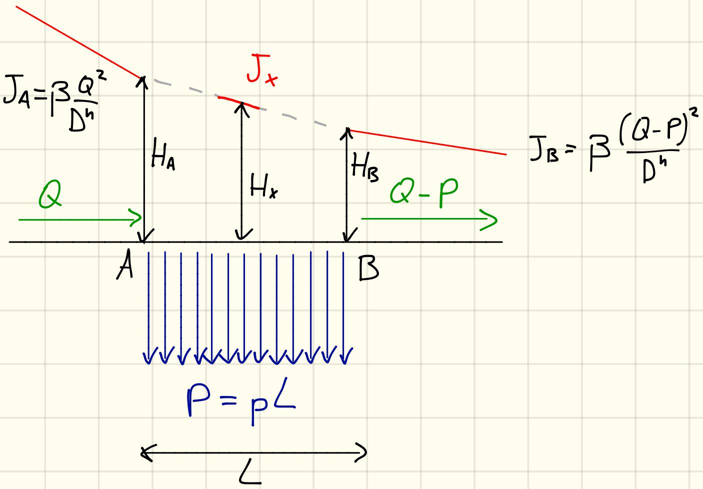
$$= \frac{Q}{g\Omega_2}(U_1 - U_2) + \frac{1}{2g}(U_1^2 - U_2^2)$$

$$= \frac{\cancel{\Omega_2} U_2 (U_1 - U_2)}{g \cancel{\Omega_2}} + \frac{1}{2g}(U_1^2 - U_2^2)$$

$$= \frac{1}{2g}(2U_2^2 - 2U_2U_1 + U_1^2 - U_2^2)$$

$$\Delta H = \frac{1}{2g}(U_1 - U_2)^2$$

## Erogazioni distribuite:




$$dH = J_x\,dx = \beta \frac{(Q-px)^2}{D^h}\,dx$$

$$H_x = H_A - \int_0^x J_x\,dx = H_A - \frac{\beta}{D^h}\int_0^x (Q-px)^2\,dx$$

$$H_x = H_A - \frac{\beta}{D^h}\,x\left[Q^2 + \frac{(Px)^2}{3} - Qpx\right]$$

$$H_B = H_{x=L} = H_A - \frac{\beta}{D^h}L\left[Q^2 + \frac{P^2}{2} - QP\right]$$

Se la condotta finisce in B : $Q = P$

$$H_A - H_B = \frac{\beta}{D^h}L = \frac{1}{3}\frac{\beta}{D^h}Q^2L = \frac{1}{3}JL$$

Il problema di progetto invece non è determinato dal sistema poiché l'equazione di continuità consiste in una semplice identità: $Q_1 = Q_2 + Q_3$
Quindi abbiamo un sistema di tre equazioni con quattro incognite: $D_1, D_2, D_3, y_N$.
Tra le infinite soluzioni considero quella che costa meno.

COSTO TOTALE $\quad C = C_1 + C_2 + C_3$

Il costo varia in base a: materiale, diametro, lunghezza.

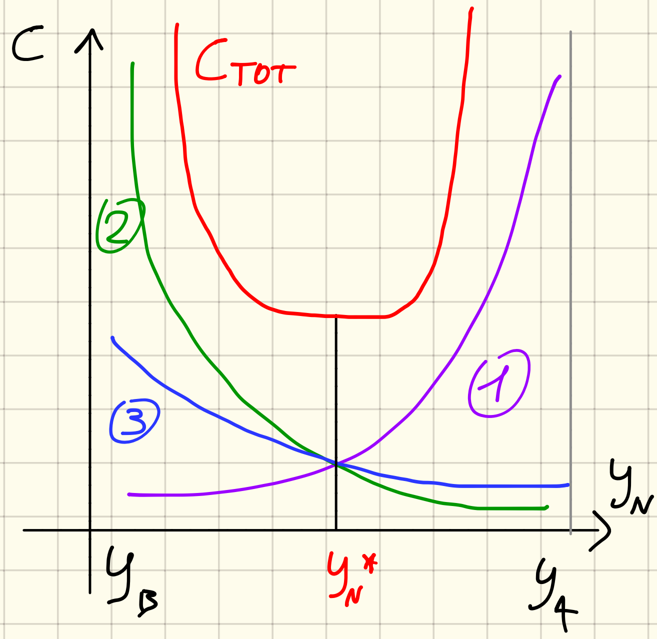
$$C_1 = c_1 D_1^{\alpha} l_1 \qquad \alpha \approx 1,2 \div 1,3$$

↳ materiale

COSTO TOTALE: $C = c_1 D_1^{\alpha} l_1 + c_2 D_2^{\alpha} l_2 + c_3 D_3^{\alpha} l_3$

Con l'equazione del minimo costo ho determinato il problema:

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dy_N} = 0 \\ y_A - y_N = \beta_1 \dfrac{Q_1^2}{D_1^h} l_1 \\ y_N - y_B = \beta_2 \dfrac{Q_2^2}{D_2^h} l_2 \\ y_N - y_C = \beta_3 \dfrac{Q_3^2}{D_3^h} l_3 \end{cases}$$




Dal sistema:

- $y_N \to y_A \Rightarrow D_1 \to \infty$
- $y_N \to y_B \Rightarrow D_2 \to \infty$

$y_N \to y_B \Rightarrow D_1 \to$ finito
$y_N \to y_A \Rightarrow D_2 \to$ finito

$$c_1 \beta_1^{\frac{\alpha}{n}} Q_1^{\frac{2\alpha}{n}} \left(\frac{\ell_1}{y_A - y_N}\right)^{\frac{\alpha+n}{n}} = c_2 \beta_2^{\frac{\alpha}{n}} Q_2^{\frac{2\alpha}{n}} \left(\frac{\ell_1}{y_N - y_B}\right)^{\frac{\alpha+n}{n}} +$$

$$c_3 \beta_3^{\frac{\alpha}{n}} Q_3^{\frac{2\alpha}{n}} \left(\frac{\ell_1}{y_N - y_C}\right)^{\frac{\alpha+n}{n}}$$

Essendo:

$$\frac{\ell_1}{y_A - y_N} = \frac{D_1^n}{\beta_1 Q_1^2}$$

$$c_1 \beta_1^{\frac{\alpha}{n}} Q_1^{\frac{2\alpha}{n}} \cdot \frac{D_1^{\alpha+n}}{\beta_1^{\frac{\alpha+n}{n}} Q_1^{\frac{2\alpha+2n}{n}}} = c_2 \beta_2^{\frac{\alpha}{n}} Q_2^{\frac{2\alpha}{n}} \cdot \frac{D_2^{\alpha+n}}{\beta_2^{\frac{\alpha+n}{n}} Q_2^{\frac{2\alpha+2n}{n}}} +$$

$$+ c_3 \beta_3^{\frac{\alpha}{n}} Q_3^{\frac{2\alpha}{n}} \cdot \frac{D_3^{\alpha+n}}{\beta_3^{\frac{\alpha+n}{n}} Q_3^{\frac{2\alpha+2n}{n}}}$$

$$c_1 \frac{D_1^{\alpha+n}}{\beta_1 Q_1^2} = c_2 \frac{D_2^{\alpha+n}}{\beta_2 Q_2^2} + c_3 \frac{D_3^{\alpha+n}}{\beta_3 Q_3^2}$$

$\downarrow$ condotta entrante

$\downarrow$ $\downarrow$ condotte uscenti

# Metodo di Cross

Per risolvere il sistema si usa il METODO DI CROSS:

1) Ci si dimentica dell'ultima equazione e si risolve il problema delle equazioni di continuità.
2) Si sceglie una soluzione tra le infinite possibili e "si aggiusta" utilizzando l'ultima equazione.

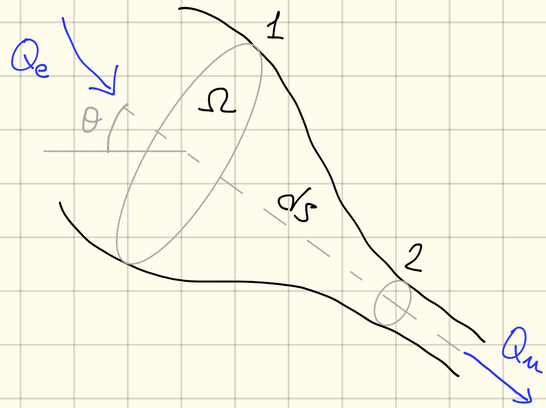
$$\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot Q_i'^{\,2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \left(Q_i'\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \left(Q_i' + q_c'\right)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \left(Q_i'^{\,2} + 2\,Q_i' q_c' + q_c'^{\,2}\right) = 0$$

$$q_c' = -\frac{\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot Q_i^2}{2\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot Q_i'} = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot Q_i' \left(Q_i'\right)$$

# Equazione di Saint-Venant




Equazione di continuità:

$$\rho Q - \left(\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds\right) = \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} ds$$

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds = \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} ds$$

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0}$$

essendo fluido incomprimibile $\rho = cost$

Analizziamo gli addendi dell'equazione globale:

- $\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{D\vec{m}}{Dt} = m\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + U \frac{\partial \vec{U}}{\partial s}\right)$
- $\vec{G} = \rho g \Omega ds \, sen\,\theta = \rho g \Omega ds \frac{\partial z_f}{\partial s}$
- $\Pi_1 = p\Omega$ spinta sulla sup. 1
- $-\Pi_2 = p\Omega + \frac{\partial p\Omega}{\partial s} ds = p + p\frac{\partial \Omega}{\partial s} ds + \Omega \frac{\partial p}{\partial s} ds$ spinta sulla sup. 2
- $\Pi_L = p \frac{\partial \Omega}{\partial s} ds$ componente perpendicolare della spinta sulla sup. lat.
- $\Pi_t = -\tau_0 P ds$ componente tangente della spinta sulla sup. lat

  ↳ contorno bagnato

Sommando si ottiene:

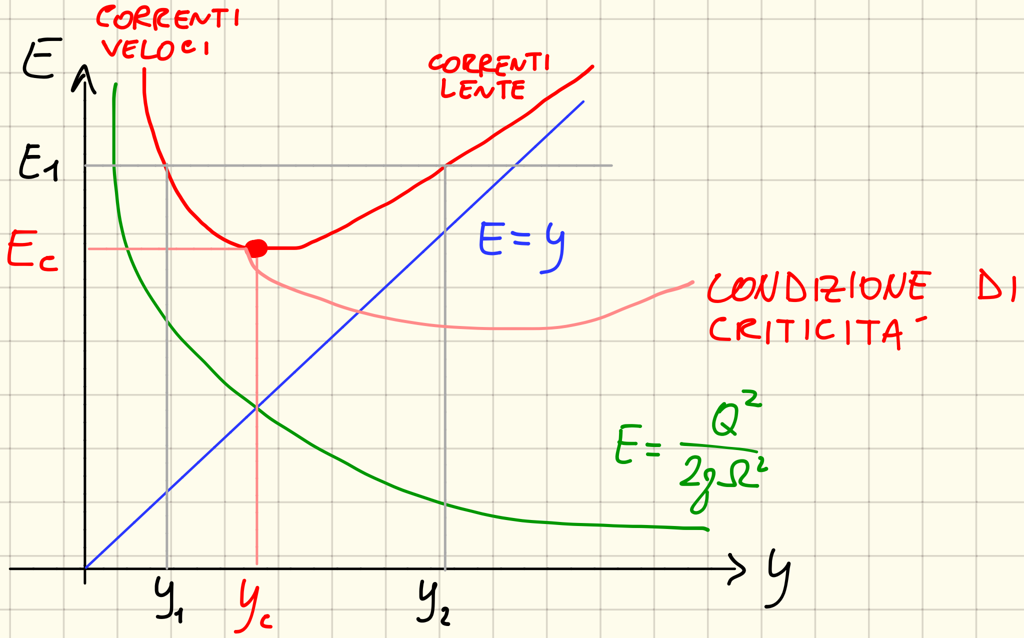
$$-\rho g \Omega ds \frac{\partial z_f}{\partial s} - \Omega \frac{\partial p}{\partial s} ds - \tau_0 P ds = \rho \Omega ds \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s}\right)$$

# Moto permanente

Si definisce carico specifico:

$$E = y + \frac{U^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2}$$

Ponendo $Q = cost$, tracciamo un andamento qualitativo di $E(y)$




Per trovare il minimo, derivo:

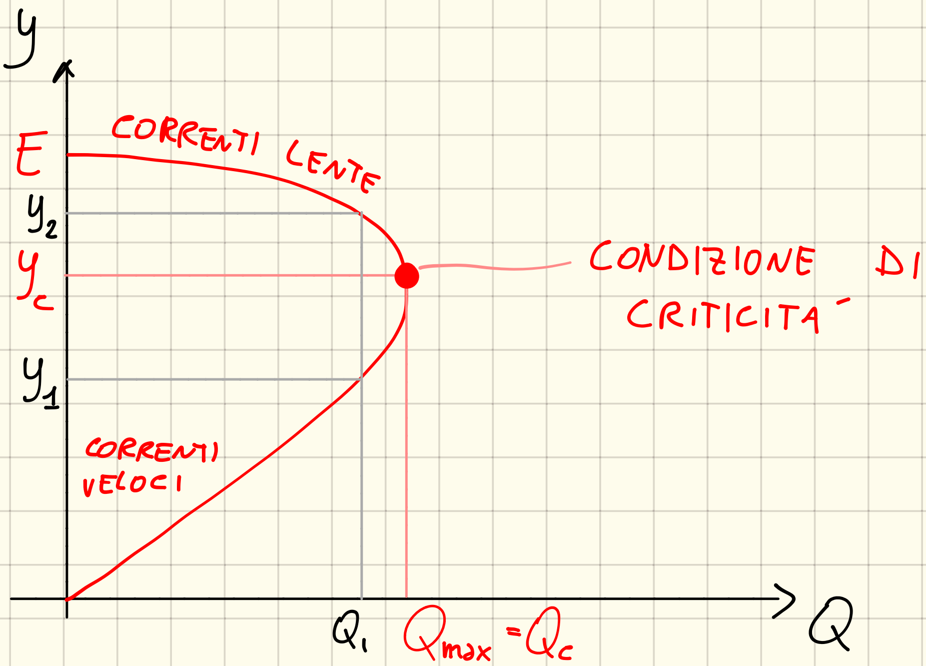
$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{g\Omega^3}\frac{d\Omega}{dy} = 1 - \frac{Q^2 B}{g\Omega^3} \Rightarrow \frac{dE}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{Q^2 B}{g\Omega^3} = 1$$

Si definisce altezza critica l'altezza a cui, fissata la portata, corrisponde il minimo dell'energia (energia critica):

$$\frac{Q^2 B}{g\Omega^3} = 1 \rightarrow y_c$$

Ipotizzo ora di avere un carico specifico costante e definisco il grafico $Q(y)$:

$$Q = \sqrt{2g(E-y)}$$




La posizione del massimo è:

$$\frac{dQ}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dy} = \sqrt{2g(E-y)} \cdot \frac{d\Omega}{dy} - \frac{g\Omega}{\sqrt{2g(E-y)}} = 0$$

$$2g(E-y)B - g\Omega = 0$$

$$y = E - \frac{\Omega}{2B} = E - \frac{y_m}{2} \rightarrow \text{corrisponde a } y_c$$

Si ottiene:

$$\frac{1}{2}\left(h_1 + h_0\right) = \frac{1}{g}\frac{h_0}{h_1}c^2$$

$$c = \pm\sqrt{\frac{g}{2}\frac{h_1}{h_0}\left(h_1 + h_0\right)}$$

$$c = \pm\sqrt{\frac{g}{2}\frac{\left(h_0 + \delta\right)}{h_0}\left(2h_0 + \delta\right)}$$

$$\boxed{c = \pm\sqrt{g h_0\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\delta}{h_0} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{h_0^2}\right)}}$$

Casi particolari:

- Se $\delta$ é molto piccolo: $c = \pm\sqrt{g h_0\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\delta}{h_0}\right)}$ FORMULA DI BASEN
- Se $\delta$ é infinitesimo: $c = \pm\sqrt{g h_0}$ FORMULA DI LAGRANGE

In generale: $c = \pm\sqrt{g y}$

Per le correnti lente: $U < \sqrt{g y_c} < \sqrt{g y} = |c|$

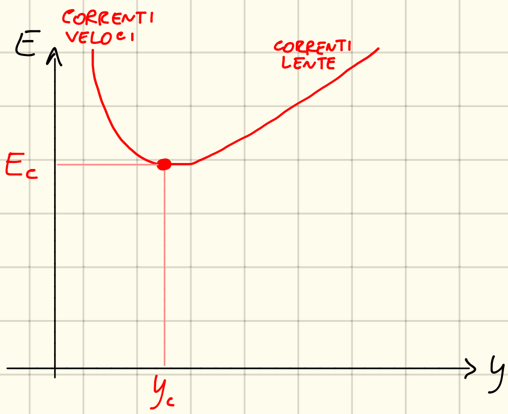
Per le correnti veloci: $U > \sqrt{g y_c} > \sqrt{g y} = |c|$

# Tracciamento qualitativo dei profili di corrente a pelo libero

$$E = f(y(s))$$

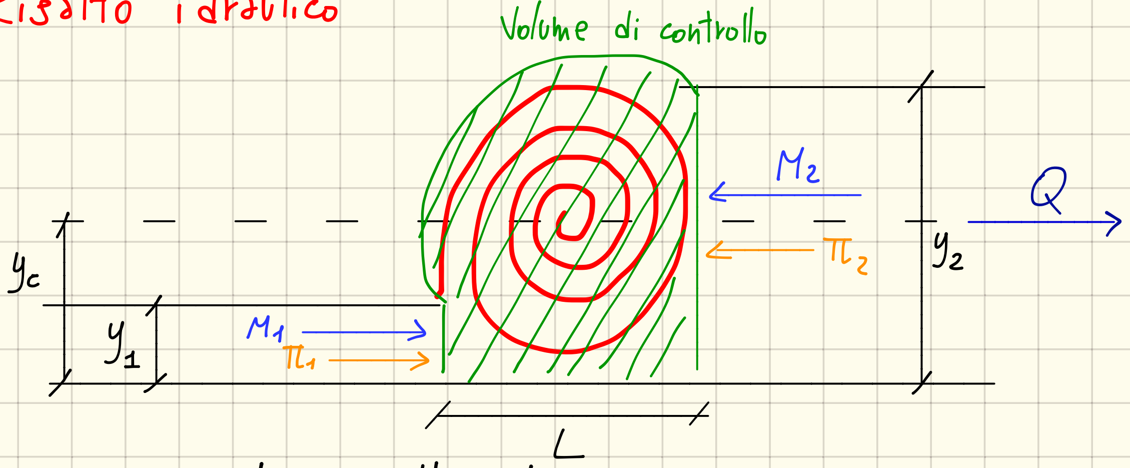
$$\frac{dE}{ds} = \frac{dE}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{ds} = \frac{i_f - J}{\frac{dE}{dy}}}$$

$$U = \chi\sqrt{RJ} \qquad J = \frac{U^2}{\chi^2 R} = \frac{Q^2}{\chi^2 R \Omega^2}$$




| numeratore | | denominatore | |
|---|---|---|---|
| $y > y_u$ | + | $y > y_c$ | + |
| $y = y_u$ | 0 | $y = y_c$ | 0 |
| $y < y_u$ | − | $y < y_c$ | − |

# Risalto idraulico




Consideriamo alveo rettangolare.

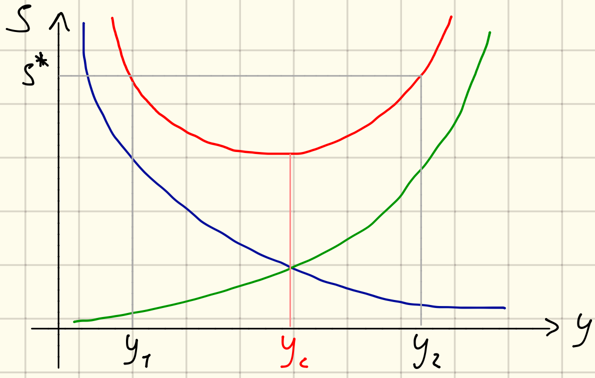
Siamo in moto permanente : $Q = \text{cost}$, $I = 0$

Sforzi tangenziali e peso trascurabili perché piccoli e opposti.

$$\Pi_1 + M_1 = \Pi_2 + M_2$$

$$S_1 = S_2$$

$$S = \Pi + M = \underbrace{\gamma h_G \Omega}_{A} + \underbrace{\rho \frac{Q^2}{\Omega}}_{B}$$




Considerando: $\Omega = By$

$$S = \frac{1}{2}\gamma B y^2 + \rho \frac{Q^2}{By}$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dy} = \gamma B y - \rho \frac{Q^2}{By^2} = 0 \qquad \text{Minimo di } S(y)$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g B^2}} \equiv y_c$$

La variazione di energia é:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = y_1 + \frac{U_1^2}{2g} - y_2 - \frac{U_2^2}{2g}$$

$$= y_1 - y_2 + \frac{Q^2}{2g B^2 y_1^2} - \frac{Q^2}{2g B^2 y_2^2}$$

$$= y_1 - y_2 + \frac{q^2}{2g}\left(\frac{1}{y_1^2} - \frac{1}{y_2^2}\right)$$

$$= \dots = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2}$$

$$\Delta E = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2}$$

Lunghezza del risalto:

$$L = (6 \div 7)(y_2 - y_1)$$

oppure

$$L = 6 y_1$$

## Teorema di Bernoulli esteso a un fluido irrotazionale

Eq. di Eulero: $\rho\left(\vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt}\right) = \frac{\partial p}{\partial x}$ proiettata su x

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \longrightarrow$$ scrivo in funzione del potenziale $\varphi$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)$$

$$v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^2}{\partial x}\right) \qquad w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^2}{\partial x}\right)$$

Quindi: $$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(|\vec{u}|^2\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{|\vec{u}|^2}{2}\right)$$

## ISO-$\psi$ e ISO-$\varphi$

Si definisce la funzione corrente $\psi$ tale che:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Per determinare l'andamento di $\psi$ studiamo le curve per cui tale funzione è costante:

$$d\psi = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial y}}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{v}{u} \qquad \text{ISO-}\psi$$

Le linee a $\psi$ costante coincidono con le LINEE DI CORRENTE

Il potenziale è invece:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Quindi le curve per cui $\varphi = \text{cost}$:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = -\frac{u}{v} \qquad \text{ISO-}\varphi$$

Le ISO-$\varphi$ e le ISO-$\psi$ sono perpendicolari.

# Formalismo complesso dei moti a potenziale

$$z = x + iy = r e^{i\theta} = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

Proprietà delle funzioni analitiche:

$$f(z) = \mathrm{Re}[z] + i\,\mathrm{Im}[z]$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{Re}[f]}{\partial x} &= \frac{\partial \mathrm{Im}[f]}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{Re}[f]}{\partial y} &= -\frac{\partial \mathrm{Im}[f]}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad \text{CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN}$$

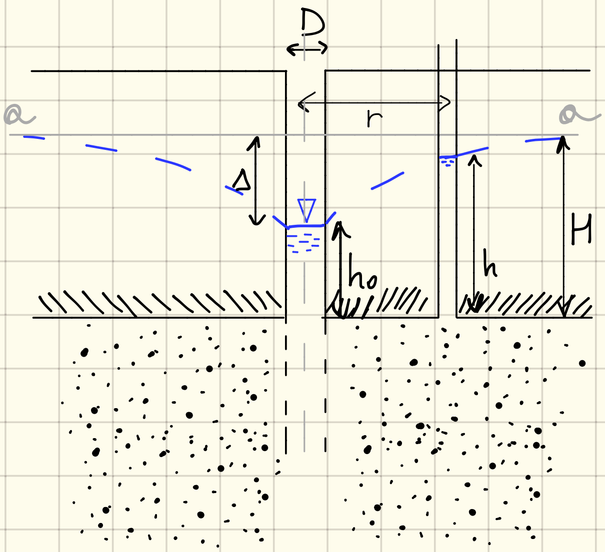
Introduco quindi la funzione:

$$\boxed{w(z) = \varphi(x,y) + i\,\Psi(x,y)} \quad \text{POTENZIALE COMPLESSO DELLE VELOCITÁ}$$

$$\frac{dw(z)}{dz} = \frac{d\varphi + i\,d\Psi}{dx + i\,dy} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y}dy\right)}{dx + i\,dy}$$

$$= \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cancel{(dx + i\,dy)}}{\cancel{dx + i\,dy}} + \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cancel{(dy - i\,dx)}}{\cancel{dx + i\,dy}}\,\frac{(-i)}{\cancel{(-i)}}$$

$$\frac{dw(z)}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} = u - iv$$




$$Q = 2\pi r^2 v = 2\pi r^2 k J = 2\pi r^2 K \frac{\partial h}{\partial r}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{r^2} = \dfrac{2\pi k}{Q} dh \\ r = D/2 \rightarrow h = h_0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{D} - \frac{1}{r}\right) = \frac{2\pi k}{Q}\left(h - h_0\right)$$

$$h - h_0 = \frac{Q}{2\pi k}\left(\frac{2}{D} - \frac{1}{r}\right)$$

$$\Delta = \frac{Q}{2\pi k}\left(\frac{2}{D} - \frac{1}{r}\right)$$

$$Q = \Delta \, 2\pi k D$$