NUMERO: 649

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Scanu

MATERIA: Dinamica dei Sistemi Meccanici
Prof. Fasana

DINAMICA DEI SISTEMI MECCANICI

04-10-2011

ALESSANDRO FASANA alessandro.fasana@polito.it

TEL 011 090 3397

MODALITÀ ESAME SCRITTO 1.5 ORE

TRE DOMANDE → ESERCIZI + TEORIA (DIMOSTRAZIONI)

LIBRI DI TESTO → - MALVANO - VATTA DINAMICA DELLE MACCHINE

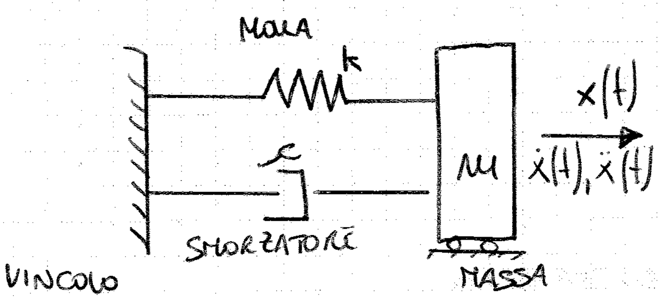
- VATTA - VIGLIANI IL ROTORE DI JEFFCOTT

- FASANA - MARCHESIELLO MECCANICA DELLE VIBRAZIONI

SISTEMI AD UN GRADO DI LIBERTÀ - OSCILLAZIONI

studiati in quanto i sistemi a più gradi di libertà possono essere ridotti a sistemi ad un grado di libertà

ELEMENTI FONDAMENTALI



x È DI QUANTO SI SPOSTA LA MASSA A PARTIRE DALLE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO STATICO

- $F_{MOLLA} = kx$ (MOLLE LINEARI)
- $F_{SMOR.} = c\dot{x}$ $\quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$

Tutta la massa è assegnata agli oggetti, non alla molla non allo smorzatore

$$\boxed{s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}}$$ POLI DEL SISTEMA

$s_{1,2}$ DIPENDONO DA c, k, m CARATTERISTICHE FISICHE DEL SISTEMA

PONENDO

$$\boxed{\omega_n \doteq \sqrt{\frac{k}{m}}}$$ PULSAZIONE NATURALE $\left[\frac{rad}{s}\right]$

$\left(\omega = 2\pi f \quad f = \text{FREQUENZA} \quad T = \frac{1}{f} \quad \text{PERIODO} \right)$

$$\boxed{\zeta \doteq \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n}}$$ FATTORE DI SMORZAMENTO $(\%)$ ≥ 0

POSSO SCRIVERE

$$\boxed{s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

- CASO 1

$\zeta > 1$ SISTEMA SOVRASMORZATO (SOSPENSIONI AUTO - C MOLTO ELEVATO)

$s_{1,2}$ SONO SOLUZIONI REALI, ENTRAMBE NEGATIVE

$$\boxed{s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} < 0$$

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

AL PASSARE DEL TEMPO LO SPOSTAMENTO x DIVENTA SEMPRE PIÙ PICCOLO

UTILIZZANDO LE FORMULE DI EULERO PER I NUMERI COMPLESSI

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[A_1\left(\cos\omega_d t - i\sin\omega_d t\right) + A_2\left(\cos\omega_d t + i\sin\omega_d t\right)\right]$$

$\downarrow$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[\left(A_1 + A_2\right)\cos\omega_d t + i\left(A_2 - A_1\right)\sin\omega_d t\right]$$

IMPONENDO LE CONDIZIONI INIZIALI (DERIVO TROVANDO $\dot{x}(t)$)

$$\dot{x}(t) = -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\left[\left(A_1 + A_2\right)\ldots + i\left(A_2 - A_1\right)\ldots\right] +$$
$$+ e^{-\zeta\omega_n t}\left[-\omega_d\left(A_1 + A_2\right)\sin\omega_d t + i\omega_d\left(A_2 - A_1\right)\cos\omega_d t\right]$$

$$\begin{cases} x(t=0) = A_1 + A_2 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = -\zeta\omega_n\left(A_1 + A_2\right) + i\omega_d\left(A_2 - A_1\right) = v_0 \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ i\omega_d\left(A_2 - A_1\right) = v_0 + \zeta\omega_n x_0 \end{cases} \longrightarrow i\left(A_2 - A_1\right) = \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}$$

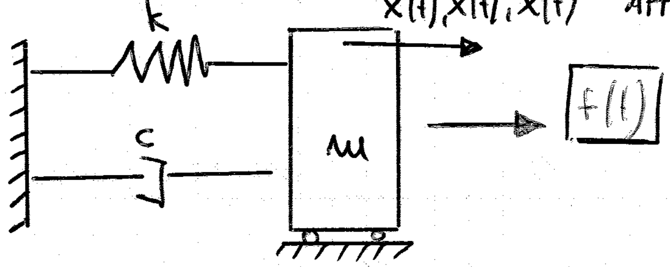
SOSTITUENDO ALL'EQUAZIONE INIZIALE

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}}_{\text{DECRESCE CON } t}\underbrace{\left[x_0\cos\omega_d t + \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right]}_{\text{FUNZIONE ARMONICA REALE}}}$$

5

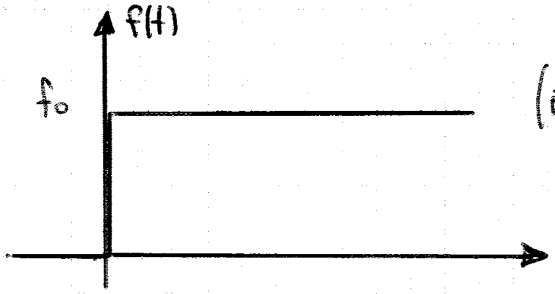
CASO 2 - RISPOSTA IN PRESENZA DI UNA FORZANTE

$x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$ APPLICAZIONE DI UNA FORZA $f(t)$



$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)}$$

• CASO 2.1 - RISPOSTA A GRADINO



(FUNZIONE GRADINO)

la soluzione sarà data dalla somma di

- INTEGRALE OMOGENEA ASSOCIATA
- INTEGRALE PARTICOLARE SOLUZIONE COMPLETA (DIPENDE DA $f(t)$)

Poiché $\boxed{f_0 = \text{COSTANTE}}$, allora l'integrale della soluzione completa sarà costante

$f_0 = \text{COSTANTE} \longrightarrow x(t) = \text{COSTANTE} \longrightarrow \dot{x} = 0$

$\ddot{x} = 0$

$kx = f_0 \longrightarrow x = \frac{f_0}{k}$ (SPOSTAMENTO STATICO)

QUINDI, PER UN SISTEMA SOTTOSMORZATO $(\zeta < 1)$

$$\boxed{x(t) = \frac{f_0}{k} + e^{-\zeta \omega_n t}\left(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t\right)} \quad (A_1 = a \quad A_2 = b)$$

- INTEGRALE PARTICOLARE → SOLUZIONE A REGIME
- INTEGRALE GENERALE → TRANSITORIO

il transitorio generalmente dura pochissimo per cui viene spesso trascurato nella soluzione completa

ESEMPIO - PASSAGGIO RAPIDO A REGIME

$\omega_n = 20 \ rad/s$

$\zeta = 4\% = \frac{4}{100}$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 19{,}98 \ rad/s$

il tempo impiegato per passare dal max dell'oscillazione al 5% del max $t^* \simeq 3{,}74 \ s$ → $\simeq 12$ oscillazioni

- CASO 2.2 - FORZANTE VARIABILE

$f(t) = f_0 \sin \Omega t$

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \sin \Omega t} \quad (f_0 \cos \Omega t)$$

Ω rappresenta la <u>PULSAZIONE DI ECCITAZIONE</u> legata alla forza applicata dall'ESTERNO

posso trattare $f(t)$ sia in cui sia presente $\sin \Omega t$ o $\cos \Omega t$ secondo le formule di Eulero

$$f_0 e^{i\Omega t} = f(t) \begin{cases} \text{PARTE REALE} \rightarrow f_0 \cos \Omega t \\ \text{PARTE IMM.} \rightarrow f_0 \sin \Omega t \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 326

$$\boxed{A = \frac{f_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\zeta r}{1-r^2}}$$

riprendendo $x(t) = X e^{i\Omega t}$ con $X = A e^{i\varphi}$

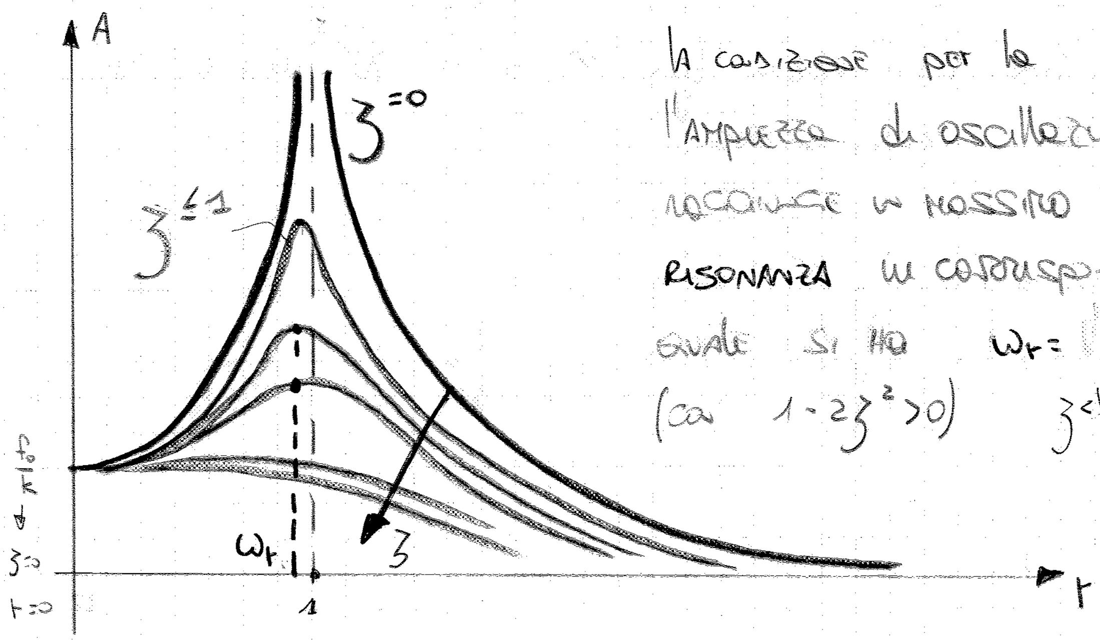
$$x(t) = A e^{i(\Omega t + \varphi)}$$

- se $f(t) = f_0 \cos \Omega t = f_0 \operatorname{Re}\left[e^{i\Omega t}\right]$

$$\boxed{x(t) = \operatorname{Re}\left[A e^{i(\Omega t+\varphi)}\right] = A\cos(\Omega t + \varphi)}$$

- se $f(t) = f_0 \sin \Omega t = f_0 \operatorname{Im}\left[e^{i\Omega t}\right]$

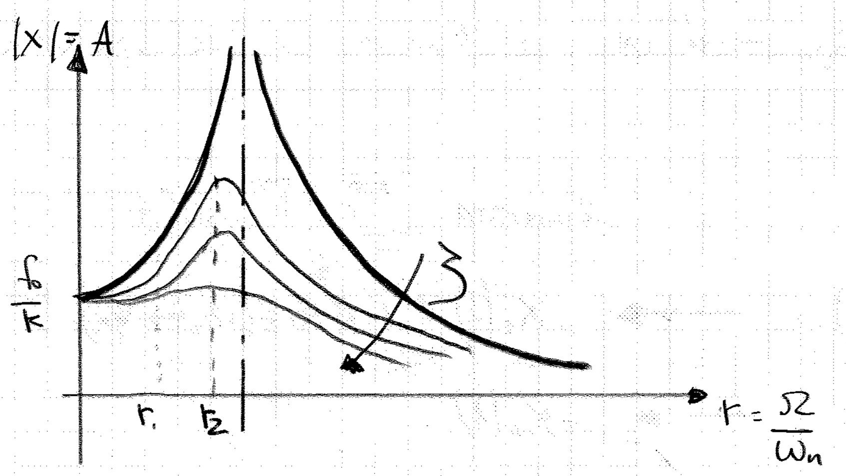
$$\boxed{x(t) = \operatorname{Im}\left[A e^{i(\Omega t+\varphi)}\right] = A\sin(\Omega t + \varphi)}$$



la condizione per la quale l'ampiezza di oscillazione raggiunge un massimo è della RISONANZA in corrispondenza del quale si ha $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$

(con $1-2\zeta^2>0$) $\zeta<\frac{\sqrt{2}}{2}$

5-10-2011



ESEMPIO

- ζ $\boxed{0}$ $\boxed{0.05}$ $\boxed{0.1}$

$r_1 = 0.5 \longrightarrow \frac{A}{f_0/k} = 1{,}317 \ (\zeta = 0)$

$\frac{A}{f_0/k} = 1{,}314 \ (\zeta = 0.05)$ $\frac{A}{f_0/k} = 1{,}305 \ (\zeta = 0.1)$

$\boxed{r_2 = 0{,}95}$ $\frac{A}{f_0/k} = 10{,}3 \ (\zeta = 0)$ $\frac{A}{f_0/k} = 7{,}3 \ (\zeta = 0.05)$

$\frac{A}{f_0/k} = 4{,}7 \ (\zeta = 0{,}1)$

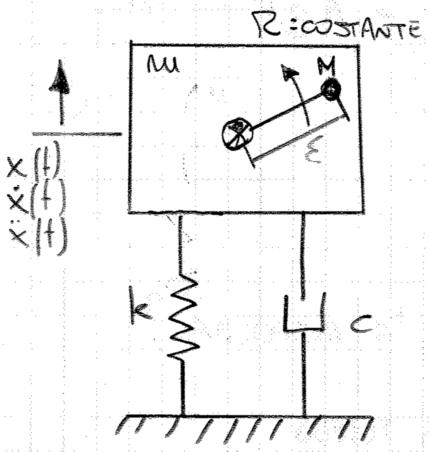
- LA PRESENZA DELLO SMORZAMENTO SI SENTE PER VALORI DI FREQUENZA PROSSIMI ALLA RISONANZA, CON L'AMPIEZZA DI SOLLECITAZIONE CHE AUMENTA E DIVENTA CICLICA COMPORTANDO PROBLEMI SULLA RESISTENZA A FATICA

PERCHÉ È STUDIATA PARTICOLARMENTE LA RISPOSTA ALL'EQUAZIONE ?

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \cos \Omega t$$

il concetto relativo alle funzioni periodiche può essere esteso a funzioni che presentano un periodo di oscillazione $T_0 = \infty$ → TRASFORMATA DI FOURIER

ESEMPIO

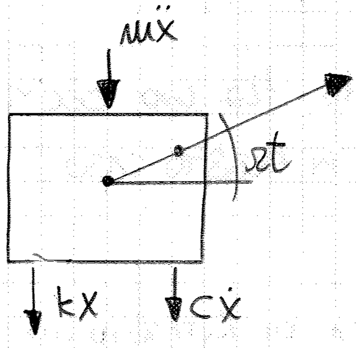


TRASCURO L'EFFETTO DELLA FORZA PESO (CONSIDERO EQUILIBRIO STATICO)

LA CAUSA DEL MOTO È LA PRESENZA DELLA ROTAZIONE DI UNA MASSA M ECCENTRICA DI ε RISPETTO AD UN PERNO (LAVATRICE)

$m > M$

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO



$M\varepsilon\Omega^2$ (FORZA DI INERZIA (CENTRIFUGA))

$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R = 0 \quad (\omega = 0)$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

$\downarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - M\varepsilon\Omega^2 \sin\Omega t = 0$

$\longrightarrow \quad M\varepsilon\Omega^2 \cos\Omega t$ = FATTRITO

SOSTITUENDO

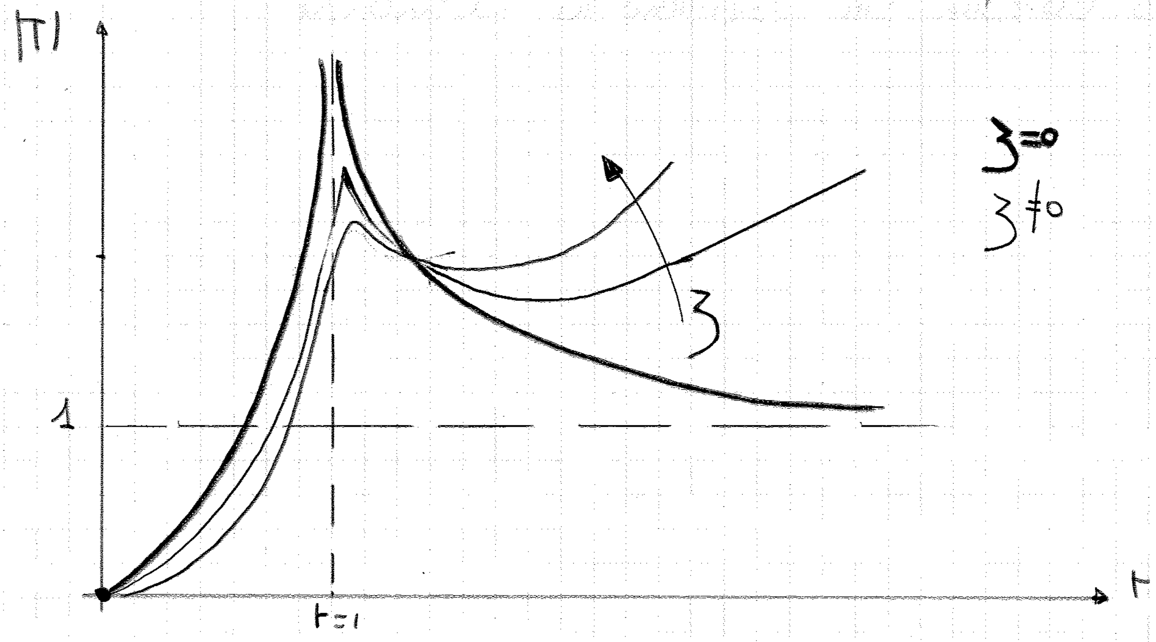
$$T(\Omega) = \frac{(k+i\Omega c)X}{M\varepsilon\omega_n^2} = \frac{(k+i\Omega c)\; M\varepsilon\Omega^2}{M\varepsilon\omega_n^2\left[k-m\Omega^2+i\Omega c\right]}$$

$$k+i\Omega c = k\left(1+i\frac{\Omega c}{k}\right) = k\left(1+i\frac{\Omega}{c}2\zeta\sqrt{km}\right) = k(1+i\,2\zeta r)$$

$$k-m\Omega^2+i\Omega c = k\left(1-r^2+i(2\zeta r)\right)$$

$$T(\Omega) = \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\,\frac{k(1+i2\zeta r)}{k\left[1-r^2+i(2\zeta r)\right]} = \frac{r^2(1+i2\zeta r)}{1-r^2+i(2\zeta r)}$$

$$|T| = r^2\,\frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

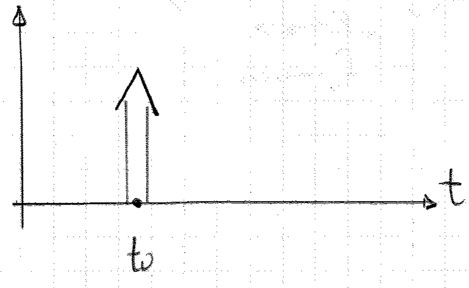


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 326

RISPOSTA RISPETTO AD UNA FORZANTE DELTA DI DIRAC IMPULSO UNITARIO

LA DELTA DI DIRAC $\delta(t)$ È ESPRESSO COME:

$$\begin{cases} \boxed{\delta(t-t_0)=0 \quad \forall t \neq t_0} \\ \boxed{\delta(t-t_0)\rightarrow\infty \quad t=t_0} \end{cases}$$



INOLTRE

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1 \quad + \left(\text{UNITÀ DI MISURA LEGATA A } \delta(t)\right)$$

OPPURE

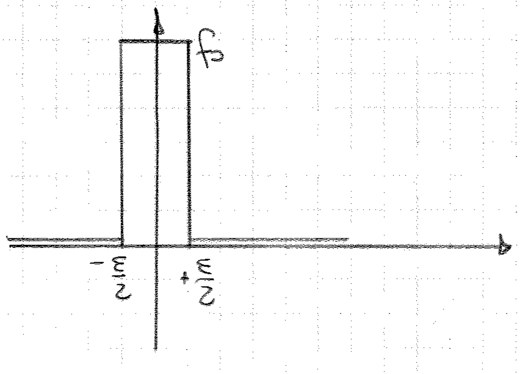
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, f(t)\, dt = f(t_0)$$

nel caso di forzante delta di Dirac, se volessi studiare la risposta del sistema, con impulso applicato in $t_0=0$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\delta(t)\ (=\infty) \qquad t_0=0$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \qquad t>0$$

la prima equazione è risolta definendo l'impulso come



impulso nullo $t \neq 0$
per $t=0$ l'impulso vale f_0
nell'intorno $\left(-\frac{\varepsilon}{2} ; \frac{\varepsilon}{2}\right)$

11-10-2011

la funzione di Dirac è nulla ovunque e vale 1 nell'intervallo

Consideriamo il sistema

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx$$

sottoposto alla funzione $\delta(t)$

IPOTESI: Prima che agisca la forza il sistema è a riposo

si ha che

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \longrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < t \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ed anche

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \longrightarrow t > \frac{\varepsilon}{2}$$

le condizioni dell'ipotesi sono

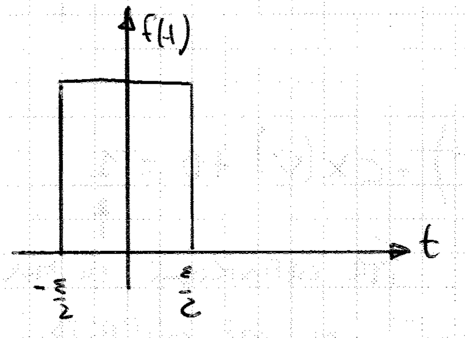
$$\begin{cases} x\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) = 0 \\ \dot{x}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

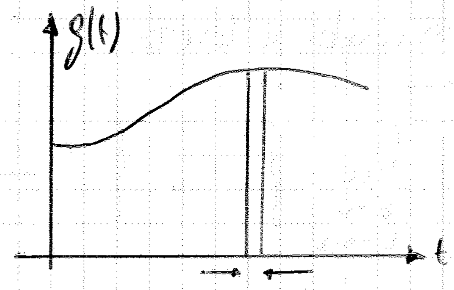
integrando l'equazione del moto in un intervallo di tempo a nostra scelta

$$\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx)\,dt = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} f_0\,dt \qquad -\frac{\varepsilon}{2} < \tau < \frac{\varepsilon}{2}$$

a sinistra riconducendo all'impulso

il secondo membro, poiché è un'area, con $\varepsilon \to 0$ e $f_0 \to \infty$ va a zero





il secondo membro è una quantità limitata. Allora anche il primo membro lo dovrà essere $\longrightarrow$ il primo termine non potrà andare ad ∞.

Allora se $m\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ non va ad ∞, che tutto l'integrale si riduce così:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} m\, x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = m\, x(0^+) = 0 \qquad \boxed{x(0^+) = 0}$$

Anche dopo che l'impulso è cessato la massa non si è mossa.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x\left(+\frac{\varepsilon}{2}\right) = x(0^+) = 0$$

Abbiamo determinato una condizione iniziale per la II equazione.

Inoltre interessa sapere quanto vale la velocità.

Ripetendo l'integrazione

$$\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx)\,dt = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} f_0\,dt \longrightarrow$$

le costanti A B sono trovate imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} A = 0 \\ B\,\omega_d = \dfrac{1}{m} \end{cases}$$

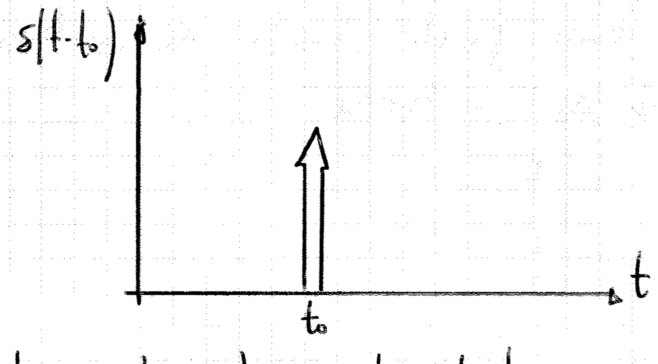
da cui, sostituendo

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{m\,\omega_d} \sin \omega_d t \, e^{-\zeta \omega_n t}}$$

In generale, qualsiasi sistema avrà una risposta all'impulso per l'equazione del moto diversa scritta con $h(t)$

RISPOSTA ALL'IMPULSO $= h(t)$

per un impulso all'istante $t = t_0$ si indica la funzione $\delta(t-t_0)$ significa che è spostato di t_0 sull'asse dei tempi



il tempo t indica la distanza temporale tra l' [illegible] dell'impulso e lo stato iniziale

Supponendo che ognuno di questi rettangolini sia un impulso
se l'area $f_0 \cdot \Delta\tau = 1$ allora corrisponderebbe alla
funzione Delta di Dirac. Non è detto che sia così.

Se agisse solamente l'impulso $f_0 \cdot \Delta\tau$ la risposta $h(t)$
del sistema sarebbe

$$x_1(t) = \underbrace{h(t)}_{\text{risposta all'impulso unitario}} \cdot \underbrace{f_0 \Delta\tau}_{\text{intensità impulso}} \longrightarrow \text{AREA} > 1 \text{ AMPLIFICAZIONE AREA}$$

supponendo ci sia solo l'impulso $f_1 \cdot \Delta\tau$

$$x_2(t) = \underbrace{h(t - \Delta\tau)}_{\text{causa spostamento verso destra di } \Delta\tau} \cdot f_1 \Delta\tau$$

se ci fosse solo $f_2 \cdot \Delta\tau$

$$x_3(t) = h(t - 2\Delta\tau) \cdot f_2 \Delta\tau$$

e così via.

Poiché il sistema è lineare vale il principio di sovrapposizione degli effetti, le risposte del sistema sono:

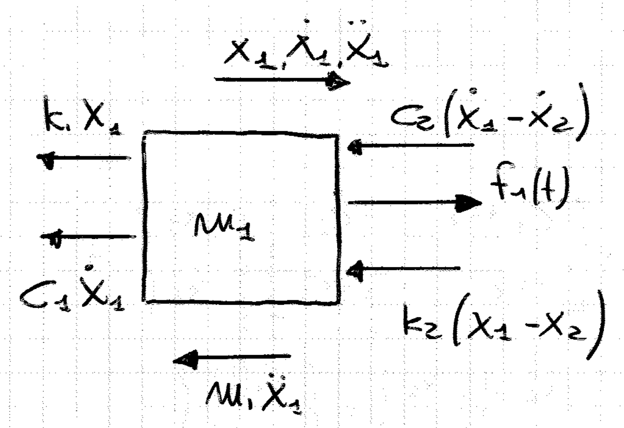
$$x(t) = x_1 + x_2 + \dots + x_N$$

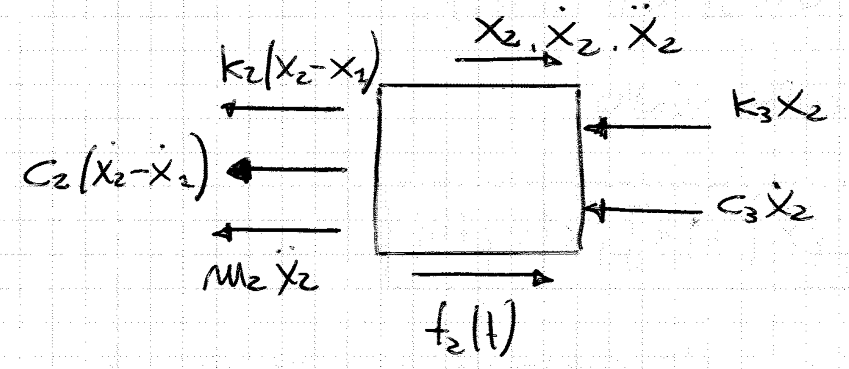
$$\downarrow$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=0}^{N} f(n\Delta\tau)\, h(t - n\Delta\tau)\, \Delta\tau}$$

12-10-2011

SISTEMI A MOLTI GRADI DI LIBERTÀ





EQUAZIONE DEL MOTO

$$\leftarrow \quad m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2) + k_1x_1 + k_2(x_1-x_2) - f_1(t) = 0$$

$$\leftarrow \quad m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) + c_3\dot{x}_2 + k_2(x_2-x_1) + k_3x_2 - f_2(t) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1+c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2+c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 = f_2(t) \end{cases}$$

Si ottengono 2 equazioni del moto in 2 incognite: x_1, x_2 e le loro derivate $\longrightarrow$ EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

Si dice che il <u>SISTEMA</u> È ACCOPPIATO <u>SE LE EQUAZIONI DEL MOTO NON SONO INDIPENDENTI</u>

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 326

Come posso disaccoppiare?

Considerando sistema a 2 GdL, supponiamo

- $k_1 = k_2 = k_3$
- $c_1 = c_2 = c_3$
- $m_1 = m_2$ ~~= m_3~~

allora le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 + 2kx_1 - kx_2 = f_1 \\ m\ddot{x}_2 - c\dot{x}_1 + 2c\dot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = f_2 \end{cases}$$

sommando le equazioni

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + c\dot{x}_1 + c\dot{x}_2 + kx_1 + kx_2 = f_1 + f_2$$

$$\Downarrow$$

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + c(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + k(x_2 + x_1) = f_1 + f_2$$

sottraendo le due equazioni

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + 3k(x_1 - x_2) = f_1 - f_2$$

ponendo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \eta_1 \\ x_1 - x_2 = \eta_2 \end{cases}$$

Allora

$$\begin{cases} m\ddot{\eta}_1 + c\dot{\eta}_1 + k\eta_1 = f_1 + f_2 \\ m\ddot{\eta}_2 + 3c\dot{\eta}_2 + 3k\eta_2 = f_1 - f_2 \end{cases}$$

È possibile che ogni masso si muova con ampiezze diverse, ma tutte con la stessa legge di moto. Ciò implica che $\{A\}$ è un vettore costante non nullo, $g(t)$ funzione generica del tempo $\{A\}^{n \times 1}$ $\{A\}^{T\ 1 \times n}$

Derivando e sostituendo

$$[m]\{A\}\ddot{g} + [k]\{A\}g = \{0\}$$

Premoltiplicando per $\{A\}^T$

$$\underbrace{\{A\}^T[m]\{A\}}_{\text{scalare}}\ddot{g} + \underbrace{\{A\}^T[k]\{A\}}_{\text{scalare}}g = \underbrace{\{A\}^T\{0\}}_{\text{scalare}} = 0$$

dividendo per $\{A\}^T[m]\{A\}$

$$\ddot{g} + \frac{\{A\}^T[k]\{A\}}{\{A\}^T[m]\{A\}}g = 0 \qquad \{A\}^T[k]\{A\} \geq 0 \quad \{A\}[m]\{A\} > 0$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\ddot{g} + \omega^2 g = 0}$$

la soluzione è un'armonica del tipo

$$g(t) = g_1 \cos\omega t + g_2 \sin\omega t$$

da cui si ricava

$$\boxed{\{x(t)\} = \{A\}(g_1 \cos\omega t + g_2 \sin\omega t)}$$

18-10-2011

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$$

$$\{x\}=\{A\}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$([k]-\omega^2[m])\{A\}=\{0\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\det([k]-\omega^2[m])=0\\ [k]\{A\}=\omega^2[m]\{A\}\end{array}\right\}\text{AUTOPROBLEMA}$$

Se il sistema ha n gdL porre il $\det=0$ significa ottenere gli autovalori

$\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ AUTOVALORI [DIPENDONO SOLO DA k, m]

$\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ PULSAZIONI NATURALI (≥ 0)

ordinate in modo crescente tale che

$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$

il numero di pulsazioni naturali coincide con gli n GdL del sistema $\longrightarrow$ sistema 2gdl $\Rightarrow$ 2 pulsazioni naturali

Se il sistema, privo di smorzamento, è lasciato muovere, questo lo fa con una delle n pulsazioni naturali

le pulsazioni naturali derivano dal determinante di $[k]-\omega^2[m]$: dipendono dall'inerzia del corpo e dalla rigidezza $[k]$ e non dipendono dall'eventuale presenza di forze

LA MATRICE $[\psi]$ È DETTA MATRICE MODALE

CON MATLAB

[VETTORI. VALORI] = EIG(K, M); RISOLVE IL PROBLEMA AGLI AUTOVALORI

SI OTTIENE

↓

- MATRICE AUTOVETTORI $[\psi]$
- MATRICE AUTOVALORI ⟶ $\begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$

- IMPORRE $\det[\ \dots\ ]=0$ SIGNIFICA DIRE CHE LE EQUAZIONI CHE COMPONGONO QUELLA MATRICE SONO LINEARMENTE DIPENDENTI TRA LORO ⟶ GLI AUTOVETTORI SONO DEFINITI A MENO DI UNA COSTANTE ARBITRARIA

CONSIDERANDO PER ESEMPIO

$$\psi_r = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix} \cdot 10^{12}$$

I NUMERI PRESENTI ALL'INTERNO DELL'AUTOVETTORE NON SONO ASSOCIATI AD ALCUNA UNITÀ DI MISURA. GENERALMENTE IL PRIMO ELEMENTO È POSTO UGUALE A 1.

DATE $[\psi]$ E MATRICE AUTOVALORI VOGLIO FARE IN MODO CHE LE n EQUAZIONI DEL MOTO ACCOPPIATE TRA LORO POSSANO ESSERE RISOLTE L'UNA INDIPENDENTE DALL'ALTRA

POICHE $[k]$ $[m]$ SONO MATRICI SIMMETRICHE,

$[k]^T = [k]$ $\quad$ $[k]$ SEMIDEFINITA POSITIVA

$[m]^T = [m]$ $\quad$ $\left(A^T [m] A \neq 0 \right)$ DEFINITA POSITIVA

per cui

$$\boxed{\{\psi_s\}^T [k] \{\psi_r\} = \omega_s^2 \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\}}$$

sottraendo dalla prima equazione la 2 equazione risulta

$$0 = \underbrace{(\omega_r^2 - \omega_s^2)}_{\text{SCALARE}} \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\}$$

- $r \neq s$ $\quad (\omega_r^2 - \omega_s^2) \neq 0$ per cui
  $\{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\} = 0$
- $r = s$ $\quad \omega_r^2 - \omega_s^2 = 0$
  $\{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\} = m_r > 0$

PRINCIPIO DI ORTOGONALITA DEGLI AUTOVETTORI RISPETTO A $[m]$

Gli autovettori sono ortogonali rispetto alla matrice $[m]$

- m_r è detto MASSA MODALE: la sua unità di misura non è definita, non è possibile associare ad essa una unità di misura

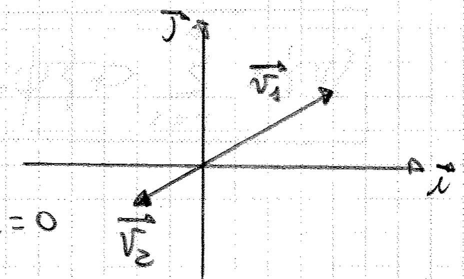
Per dimostrare che gli autovettori sono linearmente indipendenti procediamo per assurdo:

- supponiamo che gli autovettori siano linearmente dipendenti

$$c_1\{\psi_1\}+c_2\{\psi_2\}+\dots+c_n\{\psi_n\}=\{0\}$$

e dimostro che questo non è possibile.

$$c_1\vec{v_1}+c_2\vec{v_2}=0$$



Per fare questo sfrutto il principio di ortogonalità (rispetto ad $[m]$)

$$\{\psi_r\}^T[m]\cdot\left(c_1\{\psi_1\}+\dots+c_n\{\psi_n\}\right)=\{\psi_r\}^T[m]\{0\}$$

$$\downarrow$$

$$c_1\{\psi_r\}^T[m]\{\psi_1\}+\dots+c_n\{\psi_r\}^T[m]\{\psi_n\}=0$$

$$\downarrow$$

$$c_1\cdot 0+c_2\cdot 0+\dots+c_r m_r+\dots+c_n\cdot 0=0$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{c_r\cdot m_r=0}$$

ma poiché $m_r>0$ allora $\boxed{c_r=0}$ $\quad r=1,2,\dots,n$

affinché la somma sia uguale a zero $c_r=0$, questo non è possibile $\longrightarrow$ autovettori linearmente indipendenti

19-10-2011

$$\{v\} = c_1\{\psi_1\} + c_2\{\psi_2\} + \dots + c_n\{\psi_n\}$$

GLI AUTOVETTORI SONO UNA BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI.
I COEFFICIENTI c_i POSSONO ESSERE CALCOLATI ATTRAVERSO $\{v\}$ sfruttando il principio di ortogonalità

$$\{\psi_r\}^T[m]\{v\} = c_1\{\psi_r\}^T[m]\{\psi_1\} + \dots + c_r\{\psi_r\}^T[m]\{\psi_r\} + \dots + c_n\{\psi_r\}^T[m]\{\psi_n\}$$

vale $\{\psi_r\}^T[m]\{\psi_1\} = 0$

da cui

$$\boxed{c_r = \frac{\{\psi_r\}^T[m]\{v\}}{m_r}}$$

FATTORI DI PARTECIPAZIONE MODALE

ANALOGAMENTE al caso statico, posso scrivere

$$\boxed{\{x(t)\} = \sum_{r=1}^{n}\{\psi_r\}\,\eta_r(t)}$$

$\eta_r(t)$ COORDINATE MODALI

$\eta_r(t)$ è utilizzato per passare da n EQUAZIONI accoppiate a n EQUAZIONI disaccoppiate

Si parla di TRASFORMAZIONE MODALE

$$\{\psi_s\}^T[m]\sum_{r=1}^{n}\{\psi_r\}\ddot{\eta}_r+\{\psi_s\}^T(\alpha[m]+\beta[k])\sum_{r=1}^{n}\{\psi_r\}\dot{\eta}_r+\{\psi_s\}^T[k]\sum_{r=1}^{n}\{\psi_r\}\eta_r=$$
$$=\{\psi_s\}^T\{0\}=0 \quad (\text{scalare})$$

- $\{\psi_s\}^T[m]\sum_{r=1}^{n}\{\psi_r\}\ddot{\eta}_r = 0 \quad \text{se} \quad s \not\equiv r$
  $= m_r\ddot{\eta}_r \quad \text{se} \quad s \equiv r$

- $\{\psi_s\}^T[k]\sum_{r=1}^{n}\{\psi_r\}\eta = k_r\eta_r \quad \text{se} \quad s\equiv r$

- $\{\psi_s\}^T(\alpha[m]+\beta[k])\sum_{r=1}^{n}\{\psi_r\}\dot{\eta}_r = \alpha m_r\dot{\eta}_r+\beta k_r\dot{\eta}_r \quad s\equiv r$

quindi $(\alpha m_r+\beta k_r)\dot{\eta}_r = c_r\dot{\eta}_r$ c_r smorzamento modale

da cui

$$\boxed{m_r\ddot{\eta}_r+c_r\dot{\eta}_r+k_r\eta_r=0}$$

determinata la soluzione rispetto a η_r ri applico la trasformazione modale per ottenere le soluzioni reali $\{x\}$

$$\left.\begin{aligned}\{\eta_0\} &= [\psi]^{-1}\{x_0\}\\ \{\dot\eta_0\} &= [\psi]^{-1}\{v_0\}\end{aligned}\right\} C.I.$$

in realtà è difficile, impraticabile calcolare l'inversa di una matrice

-2 una soluzione più efficiente è data considerando

$$\{x\} = \sum_{r=1}^{n} \{\psi_r\}\eta_r$$

$$\{\dot x\} = \sum_{r=1}^{n} \{\psi_r\}\dot\eta_r$$

calcolo $x(t=0)$, $\dot x(t=0)$ e altrettanto faccio per η_r $\dot\eta_r$

$$\left.\begin{aligned}\{x_0\} &= \sum_{r=1}^{n}\{\psi_r\}\cdot\eta_0 = \sum_{r=1}^{n}\{\psi_r\}a_r\\ \{v_0\} &= \sum_{r=1}^{n}\{\psi_r\}\dot\eta_0 = \sum_{r=1}^{n}\{\psi_r\}(-\zeta_r\omega_r\cdot a_r + \omega_{dr}b_r)\end{aligned}\right\} C.I.$$

sfruttando l'ortogonalità degli autovettori

$$\{\psi_s\}^T[m]\{x_0\} = \{\psi_s\}^T[m]\sum_{r=1}^{n}\{\psi_r\}a_r$$

$$= a_r m_r \longrightarrow \boxed{a_r = \frac{\{\psi_r\}^T[m]\{x_0\}}{m_r}} \quad s=r$$

$$\boxed{b_r = \frac{\{\psi_r\}[m]\{v_0\}}{m_r\,\omega_{dr}} + \frac{\zeta_r\,\omega_r\,a_r}{\omega_{dr}}}$$

26-10-2011

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f(t)\}$$

Data l'equazione del moto e il vettore delle forze che agiscono sul sistema come calcoliamo $\{x(t)\}$?
Dobbiamo trovare una soluzione semplice.

$\{x(t)\} \longrightarrow$ COORDINATE MODALI

- TRASFORMAZIONE MODALE

$$\{x(t)\}=[\psi]\{\eta\}$$

$$\{\dot{x}(t)\}=[\psi]\{\dot{\eta}(t)\} \qquad \{\ddot{x}(t)\}=[\psi]\{\ddot{\eta}(t)\}$$

SOSTITUISCO $\ddot{x}, \dot{x}\ x$ E PREMOLTIPLICO PER $[\psi]^T$

$$[\psi]^T[m][\psi]\{\ddot{\eta}(t)\}+[\psi]^T[c][\psi]\{\dot{\eta}(t)\}+[\psi]^T[k][\psi]\{\eta(t)\}=$$

$$=[\psi]^T\{f\}$$

$$\underset{n\times n}{[\psi]^T}\underset{n\times n}{[m]}\underset{n\times n}{[\psi]} \qquad [\psi]=[\{\psi_1\},\{\psi_2\},\dots\{\psi_n\}]$$

$$\hookrightarrow = [\ ]_{n\times n}$$

VALE CHE

$$[\psi]^T[m][\psi]=\mathrm{diag}(m_r)=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & & 0 \\ 0 & m_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}$$

($m_1\ m_2\ m_3 \dots m_n$ MASSE MODALI)

$h_r(t)$ È la risposta all'impulso $\longrightarrow \zeta < 1$ $\quad \boxed{h_r(t) = \frac{1}{m_r \omega_{dr}} e^{-\zeta_r \omega_r t} \sin \omega_{dr} t}$

supponiamo $\boxed{\{f(t)\} = \{f_0\} e^{i\Omega t}}$

conoscere la risposta con forzante di tipo armonico!

- tutte le forzanti possono essere scritte come somma di armoniche

$\{f_0\} \longrightarrow$ Ampiezza e fase di una singola forzante

$\{f_0\}$ può essere costruito come

$$\{f_0\} = \begin{cases} F_1 e^{i\varphi_1} \\ F_2 e^{i\varphi_2} \\ \vdots \\ F_n e^{i\varphi_n} \end{cases} \longrightarrow \{f(t)\} = \begin{cases} F_1 e^{i\varphi_1} e^{i\Omega t} \\ F_2 e^{i\varphi_2} e^{i\Omega t} \\ \vdots \\ F_n e^{i\varphi_n} e^{i\Omega t} \end{cases}$$

considerando l'equazione del moto

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f_0\} e^{i\Omega t}$$

quanto vale $\{x(t)\}$?

Seguiamo un'altra strada, anziché usare I convoluzione

Se impongo che tutto si muova ad una certa frequenza, la risposta $\{x\}$, a regime, presenterà la stessa frequenza, dipendente dalla forzante

$$\{x(t)\} = \{X\} e^{i\Omega t} \longrightarrow \text{a regime} \quad \text{Integrale Particolare}$$

SUPPONIAMO

$f_k \neq 0 \qquad f_e = 0 \quad \forall\, e \neq k$

$\to \quad X_J = \alpha_{Jk} f_k \longrightarrow \boxed{\alpha_{Jk}(\Omega) = \dfrac{X_J}{f_k}}$ COEFFICENTE DI INFLUENZA

il sistema è LINEARE $\longrightarrow$ VALE il PdSE

•

•

•

- le recettanze α_{Jk} si può misurare facilmente
- si dimostra che

$$\boxed{\alpha_{Jk}(\Omega) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\psi_{Jr} \cdot \psi_{kr}}{k_r - m_r \Omega^2 + i\Omega c_r}}$$

il calcolo è molto più facile di invertire la matrice di rigidezza dinamica: è solo prodotto/rapporto/somma tra quantità conosciute.

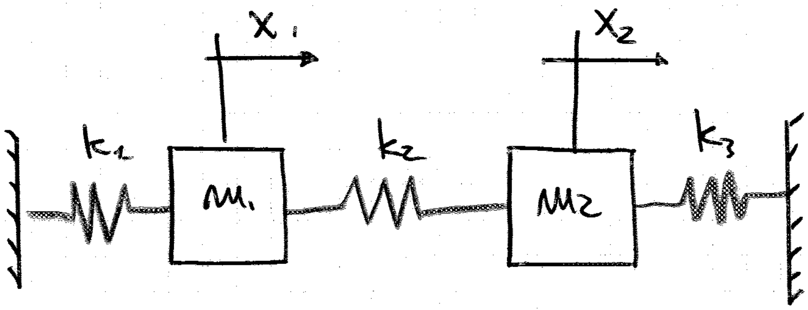
nel caso di 1 sistema a 1 GdL

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 e^{i\Omega t}$$

$$X = \frac{f_0}{k - m\Omega^2 + i\Omega c} \longrightarrow \frac{X}{f_0} = \frac{1}{k - m\Omega^2 + i\Omega c}$$

struttura simile

Equazione di Lagrange



$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

non è detto che debba per forza descrivere tutto in funzione delle coordinate assolute: può darsi che sperimentalmente siano comode x_1, $(x_2 - x_1 = \Delta)$
così facendo posso scrivere

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 \Delta = 0 \\ m_2 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{\Delta} + k_2 \Delta + k_3 x_1 + k_3 \Delta = 0 \end{cases}$$

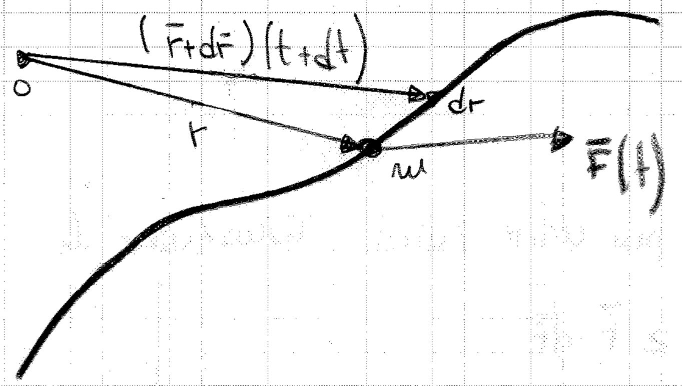
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\Delta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

le matrici <u>non sono simmetriche</u>: a seconda delle coordinate scelte le matrici di massa e di rigidezza cambiano con non pochi problemi (non posso diagonalizzare le matrici non simmetriche con l'ortogonalità)

02-11-2011

MECCANICA ANALITICA

Consideriamo un corpo di massa m che percorre una certa traiettoria C



la posizione del punto in un generico istante t è individuata dal vettore r $r(t)$ rispetto all'origine

Supponiamo che sul punto agisca la risultante delle forze agenti sul corpo $\vec{F}$

Dopo un tempo dt, il punto si sposta sulla traiettoria della quantità dr, occupando la posizione $\bar{r}+d\bar{r}(t+dt)$

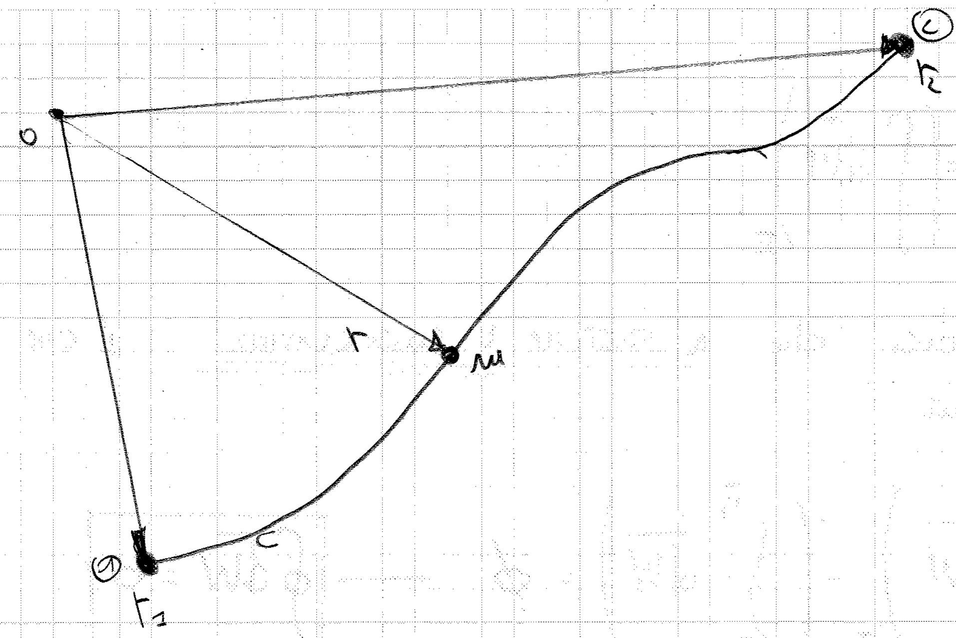
DEFINIAMO

$$dW \doteq \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \text{LAVORO}$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \qquad \text{FORZA}$$ (variazione nel tempo della quantità di moto)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

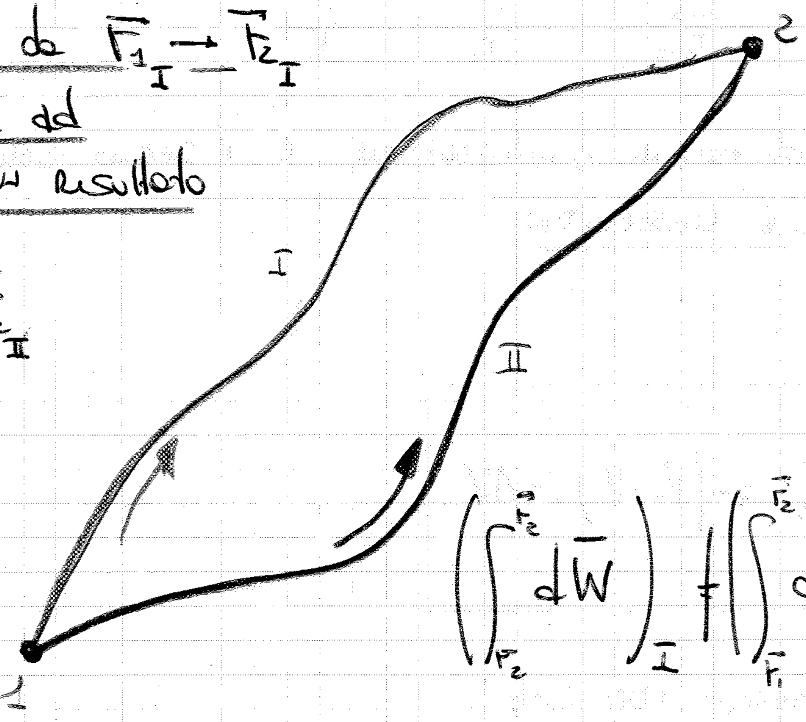
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 326



considerando gli estremi $\vec r_1$ $\vec r_2$ della traiettoria

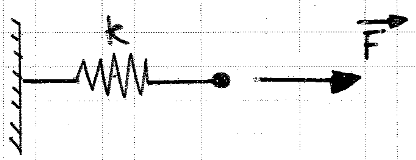
$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\overline{W} = \int_{T_1}^{T_2} dT = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\left(\frac{1}{2}\left(m\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}\right)\right)$$

passare da $\vec r_{1_I} \longrightarrow \vec r_{2_I}$ può portare ad ottenere un risultato diverso da $\vec r_{1_{II}} \longrightarrow \vec r_{2_{II}}$

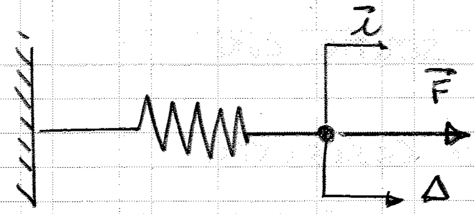


$$\left(\int_{\vec r_2}^{\vec r_2} d\overline{W}\right)_I \neq \left(\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\overline{W}\right)_{II}$$

SE $\vec{F}$ CONSERVATIVA, il lavoro svolto per andare $\vec{r}_1 \to \vec{r}_2$
È uguale alla variazione $-\Delta V = -(V_2 - V_1)$



Calcolo del lavoro W sviluppato dalla REAZIONE ELASTICA della MOLLA



$F_{m} = -k\Delta\vec{l}$

dalla definizione di lavoro

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\bar{W} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -k\Delta\vec{l}\, d\vec{r} \qquad d\vec{r} = d\Delta\vec{l}$$

devo individuare una posizione di riferimento: EQUILIBRIO
IN POSIZIONE DI RIPOSO

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\bar{W} = \int -k\Delta\vec{l}\, d\Delta\vec{l}$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\bar{W} = \int_{\Delta_1}^{0} -k\Delta\, d\Delta - \int_{\Delta_2}^{0} -k\Delta\, d\Delta$$

nel caso in cui non siano presenti $\vec{F}_{NC}$

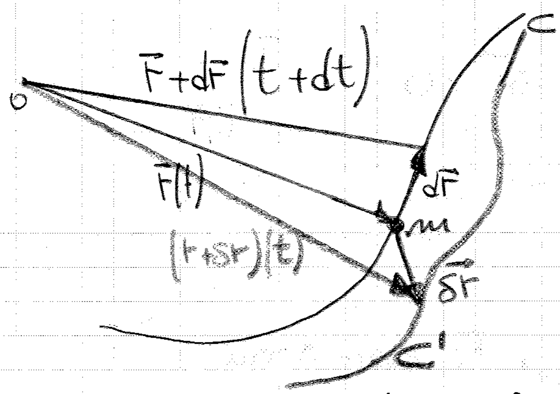
$\vec{F}_{NC} = 0$

$\hookrightarrow \; dW_{NC} = 0 \longrightarrow d(T+V) = 0$

$$\boxed{E \doteq T + V \doteq \text{costante}}$$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI



$d\vec{r}$ spostamento vero nel tempo dt

Definiamo spostamento virtuale $\delta\vec{r}$

- infinitesimo
- non per forza corrisponde alla vera traslazione del corpo
- rispetta i vincoli

- lo spostamento $\delta\vec{r}$ è indipendente dal tempo "t"
- fa occupare la posizione $\vec{r} + \delta\vec{r}$ al tempo t alla massa
- viene percorsa una traiettoria C' differente da quella vera ma compatibile con i vincoli

C' è detto variato - sincrono

IN ASSENZA di FORZE DISSIPATIVE, il LAVORO DELLE FORZE f_i È NULLO

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{f_i} \cdot \vec{\delta r_i} = 0}$$

IN BASE A QUESTE SUPPOSIZIONI, OTTENGO IL COSIDDETTO

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

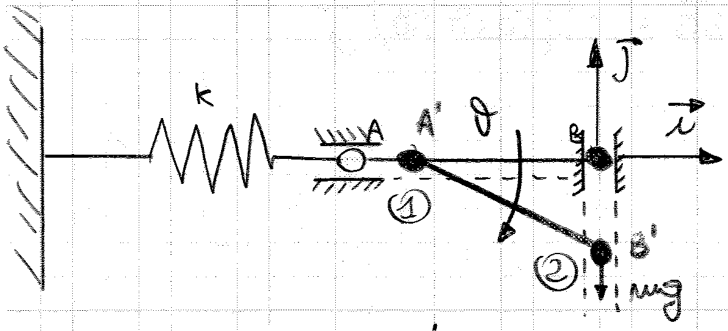
Il LAVORO VIRTUALE SVILUPPATO DA TUTTE LE FORZE ATTIVE SUGLI SPOSTAMENTI VIRTUALI $\vec{\delta r}$ È NULLO

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \cdot \vec{\delta r_i} = 0}$$

NON VENGONO PRESE IN CONSIDERAZIONE LE REAZIONI VINCOLARI NE CONSIDERO SOLO LE FORZE ATTIVE.

8-11-2011

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \, \delta\vec{r}_i = 0 \qquad \text{(STATICA)}$$



CORPO RIGIDO AB DI LUNGHEZZA $AB = L$

A SCORRE SU UNA GUIDA ORIZZONTALE

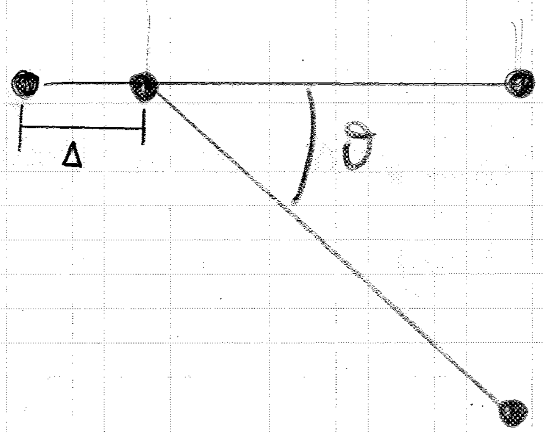
B SCORRE SU UNA GUIDA VERTICALE

B È DOTATO DI MASSA m - CAUSA FORZA PESO IL PUNTO B TRASLA NELLA POSIZIONE B'

$F_1 \longrightarrow$ REAZIONE VINCOLARE MOLLA $\qquad F_1 = -k\Delta\,\vec{i}$

$F_2 \longrightarrow$ FORZA PESO mg $\qquad F_2 = -mg\,\vec{j}$

ESPRIMO Δ IN FUNZIONE DI θ



$$\Delta = (L - L\cos\theta)$$

ANALISI DINAMICA $\longrightarrow$ ACCELERAZIONE DEL CORPO

LEGGE DI NEWTON $\vec{R}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$

$\downarrow$

$\vec{R}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0 \longrightarrow$

- $\vec{R}_i$ risultante forze applicate dall'esterno
- $m_i \ddot{\vec{r}}_i$ può essere considerata come un'ulteriore forza applicata che chiamo FORZA DI INERZIA $\vec{F}_i'$

$$\boxed{\vec{R}_i + \vec{F}_i' = 0}$$

$\longrightarrow$ MI RICONDUCO AD UNA CONFIGURAZIONE STATICA IN CUI AD $\vec{R}_i$ SI AGGIUNGE $\vec{F}_i'$ solo se è presente accelerazione

$\downarrow$

$$\boxed{\vec{E}_i = 0}$$

Attraverso questa operazione applico il principio dei lavori virtuali

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i + \vec{F}_i'\right) \delta\vec{r}_i = 0} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$$

si parla di <u>PRINCIPIO GENERALIZZATO di D'ALAMBERT</u>

Analizziamo lo stesso esempio della leva considerando però non l'equilibrio statico ma un'accelerazione della leva, con la presenza di forze di inerzia

COSA SUCCEDE NEL CASO DI PIÙ VARIABILI? → PROBLEMA

CONSIDERIAMO LE FORZE ATTIVE

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,c} + \vec{F}_{i,NC}$$ → FORZE NON CONSERVATIVE

↓

FORZE CONSERVATIVE

il P. GENERALIZZATO di D'ALAMBERT

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_{ic} + \vec{F}_{iNC} - m_i \ddot{\vec{r}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

↓

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \delta \overline{W}_{ic}}_{\delta \overline{W}_c} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \delta \overline{W}_{iNC}} - \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

PER DEFINIZIONE $\delta \overline{W}_c = - \delta \overline{V}$

il termine $m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i$ lo voglio scrivere in modo da ottenere in qualche modo l'energia cinetica

DERIVO

$$\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) = m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i + m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\delta \vec{r}_i \right) =$$

$$= m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i + m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \left(\frac{d}{dt} \vec{r}_i \right)$$

la derivata di una variazione $\left(\frac{d}{dt} (\delta \ldots) \right)$ è uguale alla variazione della derivata $\delta \left(\frac{d}{dt} \right)$

$$= m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i + m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V) + \int_{t_1}^{t_2} \overline{\delta W_{nc}} = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

$\downarrow$ $(T-V) = L$ FUNZIONE LAGRANGIANA

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_1}^{t_2} \overline{\delta W_{nc}} dt = 0}$$ PRINCIPIO DI HAMILTON

SI PUÒ ANCHE SCRIVERE COME $\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0}$ NEL CASO DI SISTEMA CONSERVATIVO $(\overline{\delta W_{nc}} = 0)$

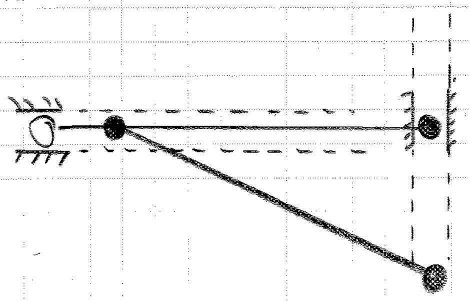
(l'integrale di una variazione è la variazione di un integrale)

inoltre se $\delta \cdot$ l'integrale di una funzione è nullo allora

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \text{STAZIONARIO} \longrightarrow \text{MINIMO O MASSIMO}$$

ESEMPIO

APPLICO IL PRINCIPIO DI HAMILTON



$$\vec{r}_2 = -L \sin\theta \vec{j}$$
$$\dot{\vec{r}}_2 = -L\dot{\theta} \cos\theta \vec{j}$$

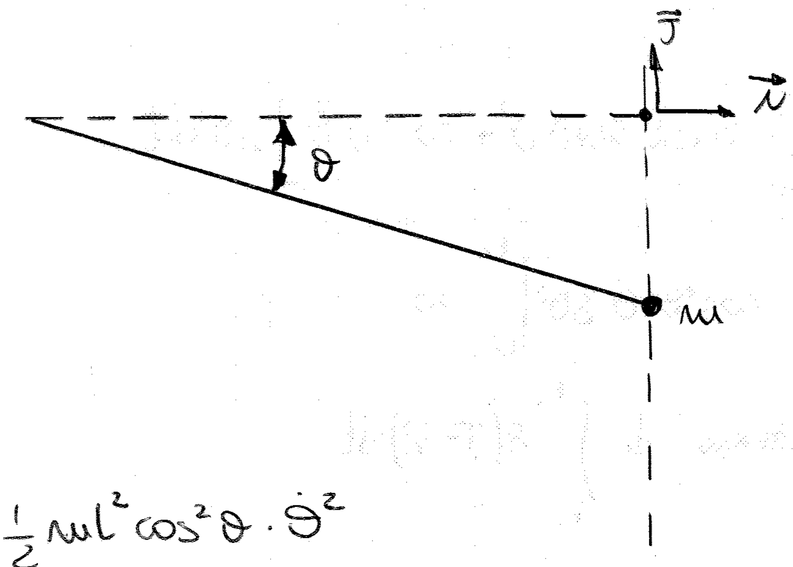
$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_2^{\,2} = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta \\ V = \frac{1}{2} k \Delta^2 - mgL \sin\theta \end{cases}$$

$\overline{\delta W_{nc}} = 0$

$\Delta = L - L\cos\theta$

$$V = \frac{1}{2} k (L - L\cos\theta)^2 - mg \sin\theta$$

15-11-2011



$$T = \frac{1}{2} m l^2 \cos^2\theta \cdot \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k L^2 (1-\cos\theta)^2 - m g L \sin\theta$$

$$\delta T = m L^2 \left(-\sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 \, \underline{\underline{\delta\theta}} + \cos^2\theta \, \dot{\theta} \, \underline{\delta\dot{\theta}}\right)$$

Poiché gli spostamenti virtuali sono arbitrari, li scelgo tali che

$$\delta \vec{r}_i (t = t_1) = \delta \vec{r}_i (t = t_2) = 0$$

$$\delta V = k L^2 (1-\cos\theta) \sin\theta \, \underline{\underline{\delta\theta}} - m g l \cos\theta \, \underline{\underline{\delta\theta}}$$

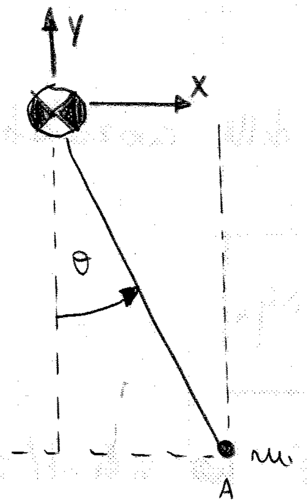
Applico il principio di Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta \overline{W}_{nc}) \, dt = 0 \qquad (L = T - V)$$

Considero il termine in $\delta\dot{\theta}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \cos^2\theta \, \dot{\theta} \, \delta\dot{\theta} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \cos^2\theta \, \dot{\theta} \, \frac{d}{dt}(\delta\theta) \, dt$$

il numero di GdL non coincide con il numero di punti dotati di masse presenti nel sistema !!



per descrivere la posizione di m_1 inizialmente occorrono

$$\left.\begin{matrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{matrix}\right\} 2 \text{ GdL}$$

in realtà $x_1(t) \longleftrightarrow y_1(t)$

$$\sqrt{x_1^2(t) + y_1^2(t)} = L$$

il numero di GdL dipende sia dal numero di corpi ma anche dai vincoli

coordinate { polare, cartesiane, cilindriche } → coordinate generalizzate (lagrangiane) sono le generiche coordinate per descrivere il sistema in un certo istante t.

sono indicate con $q_1 \; q_2 \; \dots \; q_n$ dove n = numero GdL

mediante le coordinate generalizzate i qualunque vettore $\vec{r}_i$ che in un certo sdr definisce la posizione dei punti materiali sarà

$$\boxed{\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2 \dots q_n; t)} \qquad q_k = q_k(t) \qquad k = 1 \dots n$$

le coordinate variano nel tempo, ma sono indipendenti le une dalle altre (per definizione)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 326

riprendo $\vec{r}_i$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots q_n; t)$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt}\vec{r}_i(q_1\ q_2 \dots q_n; t) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\frac{\partial t}{dt}$$

$$\boxed{\dot{\vec{r}}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \;??\longrightarrow \boxed{Q_k = \sum_{i=1}^{N} F_{i\,nc} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k}}$$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i\, \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$\downarrow$$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)$$

$$\downarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_k\dot{q}_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\dot{q}_k \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right]$$

$T_2 \longrightarrow M_{KJ} \quad [kg] \quad [kg\, m^2]$

$T_1 \longrightarrow M_K \quad [kg \frac{m}{s}]$

---

nel caso in cui

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 0 \\ T_0 = 0 \\ T_2 \neq 0 \end{array}\right\} \text{\underline{SISTEMI NATURALI}}$$

si è quindi osservato che

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n;\ t)$$

analogamente

$$V = V(q_1, q_2 \dots q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_n;\ t)$$

consideriamo T_2 $(T_1 = 0 \quad T_0 = 0)$ sistema naturale

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{k} M_{kJ}\, \dot{q}_k \dot{q}_j =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & & & \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\}$$

$[M]$ matrice delle masse

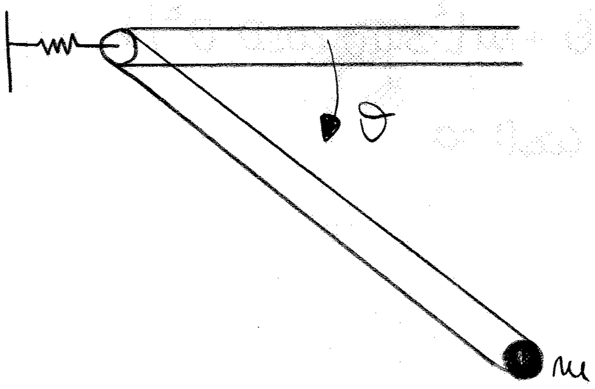
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 326

15-11-2011

EQUAZIONE DEL MOTO DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

ESERCIZIO 1



$$T = \frac{1}{2} m L^2 \cos^2\theta \, \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k L^2 (1 - \cos\theta)^2 - mgL\sin\theta$$

$$\begin{cases} \text{GdL } n = 1 \\ q_1 = \theta \end{cases}$$

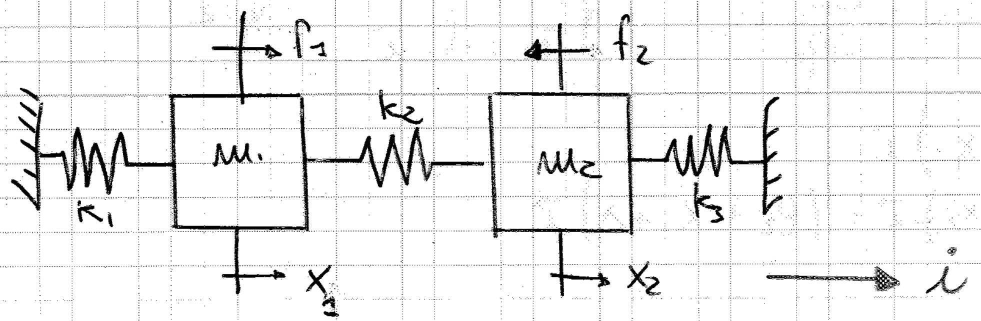
$$T - V = L$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial (T-V)}{\partial \theta} = \frac{1}{\cancel{2}} m L^2 (-\cancel{2}\cos\theta\sin\theta)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{\cancel{2}} k L^2 \cancel{2}(1-\cos\theta)\sin\theta + \\ - mgL\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{\cancel{2}} m L^2 \cos^2\theta \cdot \cancel{2}\dot{\theta}$$

$Q_k \longrightarrow$ FORZE NON CONSERVATIVE : NEL SISTEMA NON AGISCONO FORZE NON CONSERVATIVE $\longrightarrow Q_k = 0$

ESEMPIO 2



$\leftarrow \quad m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) - f_1 = 0$

$\leftarrow \quad m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_3 x_2 + f_2 = 0$

coordinate necessarie per descrivere il moto

$$\begin{cases} x_1 \\ \Delta = x_2 - x_1 \end{cases}$$

coordinate generalizzate $\begin{cases} q_1 = x_1 \\ q_2 = \Delta \end{cases} \quad (x_2 = x_1 + \Delta)$

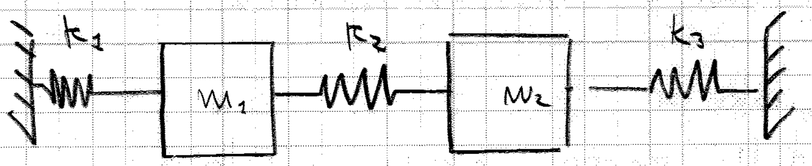
$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2\Delta - f_1 = 0 \\ m_2\ddot{x}_1 + m_2\ddot{\Delta} + k_2\Delta + k_3(x_1+\Delta) + f_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\Delta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ k_3 & k_3+k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ -f_2 \end{Bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2(\dot{x}_1 + \dot{\Delta})^2$$

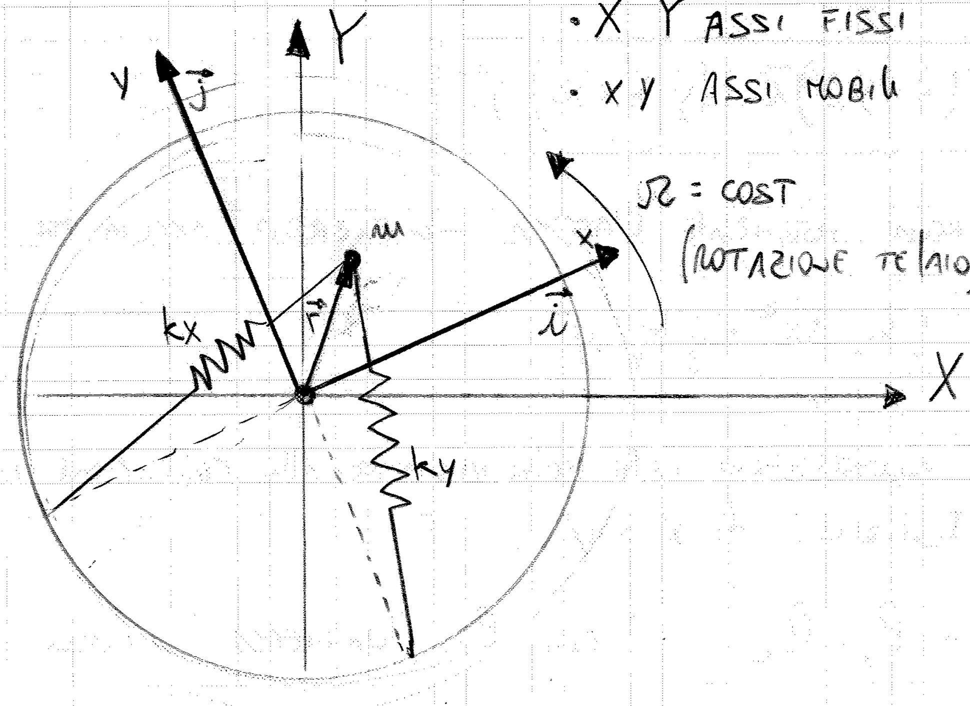
$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \Delta^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_1 + \Delta)^2$$

22-11-2011



Abbiamo analizzato il sistema in 3 modi diversi:
- tutti e 3 i modi porteranno ad ottenere le matrici [m] [k] differenti ma si ottengono le stesse pulsazioni naturali, in quanto il sistema è caratterizzato da quelle frequenze...

ESEMPIO



- X Y ASSI FISSI
- x y ASSI MOBILI

Ω = COST (ROTAZIONE TELAIO)

All'interno del telaio è presente una massa m che può spostarsi: all'istante generico è individuata dal vettore $\vec{r}$

$$r = x\vec{i} + y\vec{j}$$

LA MASSA È VINCOLATA AL TELAIO TRAMITE DUE MOLLE CHE RUOTANO CON IL TELAIO

introduciamo quindi le forze legate allo smorzatore
la F_{cx} sarà diretta lungo la direzione $\vec{i}$: in realtà
considerando le approssimazioni fatte scriviamo

$$\vec{F}_{cx} = -c_x \Delta\dot{x}\,\vec{\lambda} \simeq -c_x \dot{x}\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_{cy} \simeq -c_y \dot{y}\,\vec{j}$$

le due forze di dissipazione di tipo viscoso, producono lavoro e quindi FORZE GENERALIZZATE che scriverò come

$$\boxed{Q_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}}$$

F_i è la risultante di tutte le forze applicate nel punto i-esimo:
analizzando che ho un solo punto (m) F_i sarà la somma delle due forze di tipo viscoso F_{cx} F_{cy}

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{cx} + \vec{F}_{cy} \qquad \vec{r}_i = \vec{r}$$

$$q_k \longrightarrow \begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = y \end{cases} \quad \text{(COORDINATE GENERALIZZATE)}$$

$$Q_1 = \left(\vec{F}_{cx} + \vec{F}_{cy}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(-c_x \dot{x}\,\vec{i} - c_y \dot{y}\,\vec{j}\right) \cdot \vec{i} =$$

$$\boxed{Q_1 = -c_x \dot{x}}$$

$$Q_2 = \left(\vec{F}_{cx} + \vec{F}_{cy}\right) \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(-c_x \dot{x}\,\vec{i} - c_y \dot{y}\,\vec{j}\right) \cdot \vec{j} \qquad \boxed{Q_2 = -c_y \dot{y}}$$

allo stesso risultato arriverei attraverso la FUNZIONE DISSIPATIVA DI RAYLEIGH secondo cui

$$\boxed{Q_k = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}}$$

dove $R = \frac{1}{2} \sum_{jk}^{n} c_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$

$$R_1 = \frac{1}{2} c_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} c_y \dot{y}^2 \longrightarrow Q_k = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}$$

3 CONFIGURAZIONE

introduco una seconda funzione dissipativa di Rayleigh 43'00

$$R_2 = \frac{1}{2} h |\dot{r}|^2$$

$$R_2 = \frac{1}{2} h \left[(\dot{x} - y\Omega)^2 + (\dot{y} + x\Omega)^2 \right]$$

applico quindi l'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

oppure introduco la funzione approssimativa di Rayleigh

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

DERIVANDO

$$\begin{cases} m\ddot{x} - 2m\Omega\dot{y} - m\Omega^2 x + k_x x + c_x\dot{x} + h(\dot{x} - y\Omega) = 0 \\ m\ddot{y} + 2m\Omega\dot{x} - m\Omega^2 y + k_y y + c_y\dot{y} + h(\dot{y} + x\Omega) = 0 \end{cases}$$

in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x + h & -2m\Omega \\ 2m\Omega & c_y + h \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x - m\Omega^2 & -h\Omega \\ h\Omega & k_y - m\Omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

OSSERVIAMO COME LE MATRICI DI SMORZAMENTO E RIGIDEZZA NON SONO SIMMETRICHE!!

la matrice di rigidezza è simmetrica QUANDO il sistema è naturale (compare solo il termine T_2 dell'energia cinetica)

Generalmente si suddivide la matrice di smorzamento e rigidezza in 2 parti

- $\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$ MATRICE MASSA

- $\underbrace{\begin{bmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{bmatrix}}_{\text{SIMMETRICA}}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} h & -2m\Omega \\ +2m\Omega & h \end{bmatrix}}_{\text{ANTIMETRICA}}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$ TERMINE DI SMORZAMENTO

- $\underbrace{\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}}_{\text{SIMMETRICA}}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -m\Omega^2 & -h\Omega \\ +h\Omega & -m\Omega^2 \end{bmatrix}}_{\text{ANTIMETRICA}}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ TERMINE DI RIGIDEZZA

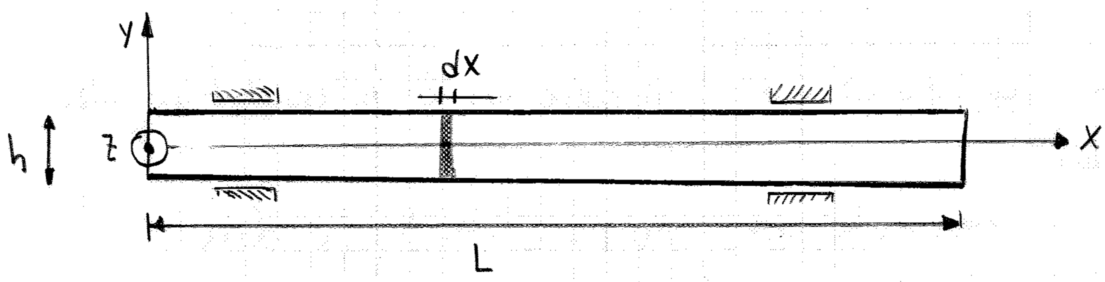
28-11-2011

Sistemi Continui

Gli elementi massa e rigidezza non sono più separati, ma sono collegati tra loro.

Oscillazione assiale di Aste

Corpi in cui due delle tre dimensioni sono molto inferiore rispetto alla terza - i corpi risentono delle forze applicate in direzione dell'asse.

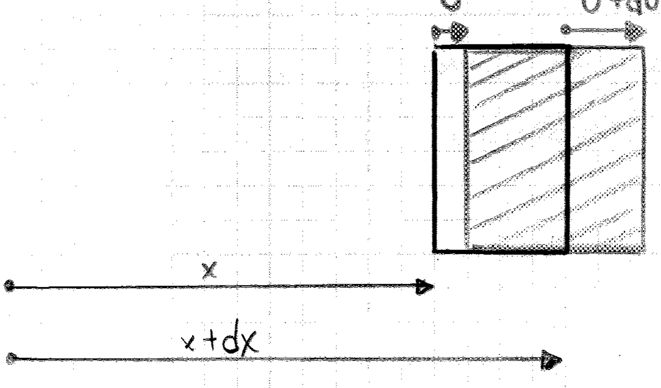


$h \ll L$

$b \ll L$

si trascurano le deformazioni lungo y e z. la deformazione avviene solo lungo x.

l'equazione del moto è scritta isolando un elemento di lunghezza infinitesima, scrivendo forze e spostamenti dell'elemento



x rappresenta la coordinata alla quale avviene lo spostamento u

$u = u(t, x)$