NUMERO: 645

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Conversano

MATERIA: Geometria + Esercizi + Formulari

Prof. Beccari

VETTORI

- ORDINARIO
- GEOMETRICO

Si operano ~~...~~ nello spazio.

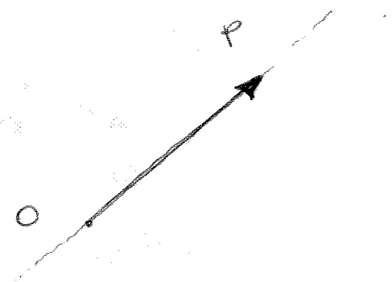
~~Cos'è un vettore?~~

~~È rappresentato come~~

~~segmenti orientati~~

VETTORI DELLO SPAZIO APPLICATO IN UN PUNTO FISSO O

<u>VETTORE</u> =def SEGMENTO ~~OP~~ ORIENTATO da O a P



per differenziare il vettore da un numero si usano le seguenti notazioni

$\vec{u}$ $\bar{v}$ $\underline{w}$

<u>MODULO</u> del VETTORE = lunghezza del segmento

$\Rightarrow$ <u>modulo</u> di un vettore $\bar{v} = OP$

$|\bar{v}| = |OP| =_{def}$ la lunghezza di OP rispetto ad una unità di misura per i segmenti fissata (una volta per tutte)

Si dice

<u>VERSORE</u> un vettore di modulo 1

- Se $\bar{u}$ e $\bar{v}$ sono // e concordi, si dice che formano angolo 0 ($\hat{\bar{u}\bar{v}} = 0$);
- Se // e discordi, si dice che il loro angolo è π ($\hat{\bar{u}\bar{v}} = \pi$)

In generale: $0 \leq \hat{\bar{u}\bar{v}} \leq \pi$

Se $\hat{\bar{u}\bar{v}} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$ i vettori si dicono ORTOGONALI

OPERAZIONI SUI VETTORI

SOMMA DI VETTORI

PRODOTTO SCALARE

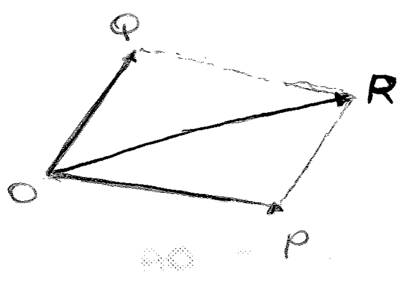
PRODOTTO VETTORIALE

$\boxed{\text{SOMMA}}$

$\bar{u} = OP$; $\bar{v} = OQ$: $\bar{u} + \bar{v}$

Caso generale: ($\bar{u}, \bar{v}$ NON PARALLELI)

(1) REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA



per def: $OP + OQ = OR$

PRODOTTO

Prodotto $a\bar{v}$ di un numero reale per un vettore: con $a \in \mathbb{R}$, $\bar{v}$

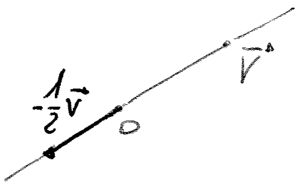
- Caso generale: $a \neq 0$ $\quad \bar{v} \neq 0$
  - $a\bar{v}$ è // e <u>CONCORDE</u> con $\bar{v}$ se a è > 0
  - $a\bar{v}$ è // e <u>DISCORDE</u> con $\bar{v}$ se a è < 0

con <u>MODULO</u> $\quad |a\bar{v}| = |a| \cdot |\bar{v}|$

Se $a = 0$ oppure $\bar{v} = \phi \longrightarrow$ per def $a\bar{v} = a\bar{0} = \bar{0}$

ovvero se $a = 0$
oppure $\bar{v}$ è <u>NULLO</u> per def il prodotto <u>$a\bar{v}$ è NULLO</u>

es



$a = -\frac{1}{2}$

OSSERVAZIONI

- $1\,\bar{u} = \bar{u}$
- $(-1)\,\bar{u} = -\bar{u}$ $\quad \longleftarrow$ (è opposto di $\bar{u}$)

Proprietà

1) $b(a \cdot \bar{v}) = (b \cdot a)\bar{v}$ $\quad$ con $a, b \in \mathbb{R}$

2) $a(\bar{u} + \bar{v}) = a\bar{u} + a\bar{v}$ $\quad$ con $a \in \mathbb{R}$ $\quad$ [se si moltiplica un numero ad una somma si moltiplica il numero ad entrambi i membri e dopo si fa la somma dei due vettori]

3) $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ $\quad$ con $a, b \in \mathbb{R}$

PRODOTTO SCALARE di due vettori

Per indicare il prodotto scalare tra 2 vettori si possono usare le seguenti notazioni:

$\bar{U} \cdot \bar{V}$ più usata

oppure

$(\langle U, V \rangle ; \langle \bar{U} | \bar{V} \rangle ; \ldots)$

Il prodotto scalare di due vettori è il prodotto tra due vettori che produce **UN NUMERO**

Def.

1) caso generale: con $\bar{U} \neq 0$, $\bar{V} \neq 0$

$$\bar{U} \cdot \bar{V} = |\bar{U}| \cdot |\bar{V}| \cos \widehat{\bar{U}\bar{V}}$$

2) se $\underset{\text{zero}}{\bar{U} = \bar{0}}$, oppure $\underset{\text{zero}}{\bar{V} = \bar{0}}$, $\bar{U} \cdot \bar{V} =_{def} \underset{\text{zero}}{0}$

OSSERVAZIONE

a) $\bar{U} \cdot \bar{V} = 0 \iff \bar{U}$ e $\bar{V}$ sono ORTOGONALI

b) se $\bar{U} = \bar{V}$, $\bar{U} \cdot \bar{V} = |\bar{U}|^2$

[se $\bar{U}$ vettore è uguale a $\bar{V}$ vettore il loro prodotto scalare è uguale al modulo di $\bar{U}$ al quadrato]

PRODOTTO VETTORIALE

di due vettori

Notazioni usate:

$\bar{U} \wedge \bar{V}$ e, nel contesto anglosassone, $(\bar{U} \times \bar{V})$

Lode usare

Def. ⓐ Se $\bar{U}$ e $\bar{V}$ <u>NON SONO PARALLELI</u>

$\bar{U} \wedge \bar{V}$ è il vettore avente modulo

$$|\bar{U} \wedge \bar{V}| = |\bar{U}|\,|\bar{V}| \operatorname{sen} \widehat{\bar{U}\bar{V}}$$

che appartiene alla retta per 0 ORTOGONALE

al piano individuato dai vettori $\bar{U}, \bar{V}$

e verso definito dalla

REGOLA DELLA MANO DESTRA dove

pollice = 1° vettore a sx del se[gno]
indice = 2° vettore a dx del segn[o]
medio = il vettore che risulta

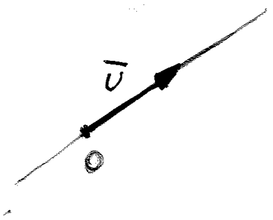
ⓑ Se $\bar{U}$ e $\bar{V}$ <u>SONO PARALLELI</u>

$\bar{U} \wedge \bar{V} =_{def} 0$ ovvero il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è NULLO

VETTORI E COMPONENTI

I) Consideriamo i vettori $\bar{v}$ appartenenti ad una retta r fissata e sia

$\bar{v}_2$ uno dei due vettori, non nu

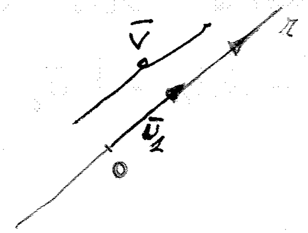


Possiamo definire una *corrispondenza BIUNIVOCA (C. b.)* tra i vettori di r e i numeri reali

$a \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \bar{v} = a\bar{v}_1$

Viceversa

$\bar{v}$ su r, esiste $a \in \mathbb{R}$, per cui $\bar{v} = a\bar{v}_1$



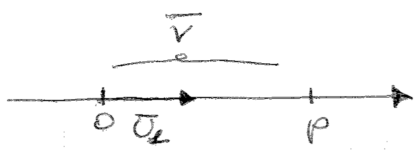
se ciò è vero risulta che

$|a|$ valore assoluto sia uguale a i valori assoluti di $|\bar{v}|$ fratto $|\bar{v}_1|$ $\Rightarrow$ $|a| = \dfrac{|\bar{v}|}{|\bar{v}_1|}$

Pensando agli estremi ($\neq 0$) dei vettori è definita una (*) corrispondenza biunivoca (c. b.) tra numeri reali e punti di r.

Sia $\bar{v}_1$ un versore $(|\bar{v}_1| = 1)$

allora $|a| = |\bar{v}|$



a è l'ascissa di P nel riferimento cartesiano

Corrispondenza biunivoca = è una relazione tra due insiemi A e B tale che ad $\forall$ elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B

III) Siano U_1, U_2, U_3 vettori non complanari.

Si può definire una c.b. tra terne ordinate (a, b, c) di numeri reali e vettori dello spazio

$$(a, b, c) \rightsquigarrow \vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3$$

Viceversa

dato $\vec{v}$, esiste a, b, c per cui

$$\vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3$$

Operazioni in Componenti

$\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ $\qquad \bar{v} = a'\bar{i} + b'\bar{j} + c'\bar{k}$

SOMMA

$$\bar{u} + \bar{v} = (a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}) + (a'\bar{i} + b'\bar{j} + c'\bar{k}) =$$

$$= (a\bar{i} + a'\bar{i}) + (b\bar{j} + b'\bar{j}) + (c\bar{k} + c'\bar{k})$$

$$= (a + a')\bar{i} + (b + b')\bar{j} + (c + c')\bar{k}$$

$\Rightarrow \bar{u} + \bar{v}$ ha componenti $(a + a', b + b', c + c')$

PRODOTTO
per numeri reali

$\chi \in \mathbb{R}$ $\qquad \bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$

$$\chi\bar{u} = \chi(a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}) =$$

$$= \chi(a\bar{i}) + \chi(b\bar{j}) + \chi(c\bar{k}) =$$

$$= (\chi a)\bar{i} + (\chi b)\bar{j} + (\chi c)\bar{k} =$$

$\Rightarrow$ Le componenti di $\chi\bar{u}$ sono $\chi a, \chi b, \chi c$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a_{11} = NUMERO IN PRIMA RIGA E PRIMA COLONNA $\Rightarrow$ 1 - 1

a_{12} = NUMERO IN PRIMA RIGA E SECONDA COLONNA $\Rightarrow$ 1 - 2

a_{32} = NUMERO IN TERZA RIGA E SECONDA COLONNA $\Rightarrow$ 3 - 2

Il determinante di A è il numero che si può ottenere così

$$\det A = \left| \quad \right| =$$

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

...etticamente per calcolarsi il det si deve togliere le righe e le colonne del numero che viene messo fuori e scrivono all'interno del det i 4 numeri restanti e si calcola ~~det~~ risolvendo il det di 2° grado.

$$A = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Longrightarrow a_{11}$$

faccio uscire fuori

cancello le colonne e le righe a cui appartiene il numero

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$$

$$\bar{v} = a'\bar{i} + b'\bar{j} + c'\bar{k}$$

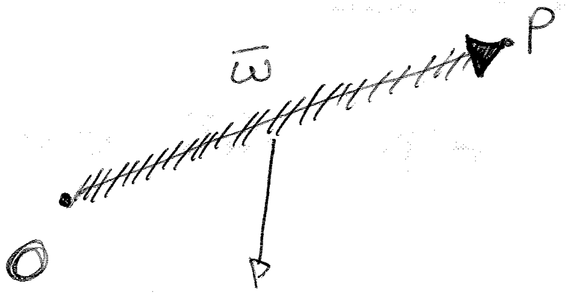
$$\bar{w} = a''\bar{i} + b''\bar{j} + c''\bar{k}$$

$$\bar{v} \wedge \bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$(a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}) \cdot \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}\bar{k} =$$

$$= a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

- Vettori che partono dall'origine



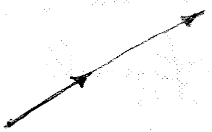
- $\overrightarrow{OP}$, $\overline{\omega}$ vettori

- MODULO OP
- DIREZIONE
- VERSO

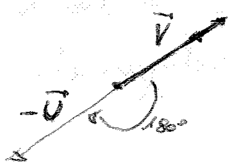
3 le caratteristiche dei vettori

VETTORI PARALLELI (V //)

(PERPENDICOLARI) ↳ forma α di 90°



OPPOSTI

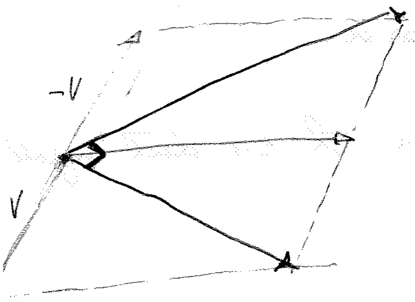


$\overline{V} = -\overline{U}$

$\overline{V} // \overline{W} \Longrightarrow \overline{V} \wedge \overline{W} = \overline{0}$

due vettori sono paralleli quando il loro prodotto vettoriale è NULLO

Devo dimostrare che $u-v \underset{perpend.}{\perp} u+v \Longleftrightarrow |u| = |v|$



~~perpendicolare~~

$$(u-v)\cdot(u+v) = u\cdot u + u\cdot v - v\cdot u - v\cdot v =$$

$$= |u|^2 + u\cdot v - u\cdot v - |v|^2 =$$

$$= |u|^2 - |v|^2 = 0$$

QUINDI È DIMOSTRATO

Proprietà utile: $u\cdot u = |u|^2$

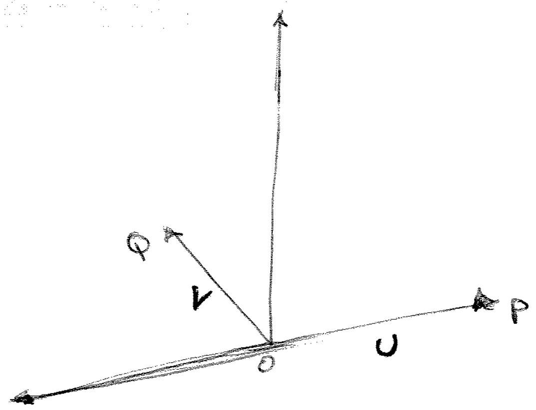
$$u\cdot v = v\cdot u$$

Esercizi

1) $u = i - k \longrightarrow OP$

$v = i + j \longrightarrow OQ$

Trovare i vettori complanari con u e v ed ortogonali a $u+v$



Un piano passa per due punti

$$w = au + bv$$
$$= ai - ak + bi + bj$$
$$= (a+b)i + bj - ak =$$

(*) dopo eq. successive

$$= (a - a)i + (-a)j - ak =$$
$$= aj - ak \longrightarrow aj + ak$$

$u + v = i - k + i - j$

$= 2i + j - k = (2, 1, -1)$

si può scrivere anche così tanto sono in ordine $|i, j, k|$

Esercizio 1

Dati 3 vettori

$u = i + j - k \quad v = i - j \quad w = i + 3j - 2k$

Dire se sono V o F

a) ~~[illegible]~~ U È UN VERSORE $\Rightarrow$ MODULO DI UN VETTORE = PRODOTTO SCALARE PER SE STESSO

U NON È UN VERSORE

dimostrare modulo di u

$u = i + j - k$

$|u^2| = |i|^2 + |j|^2 + |k|^2 = 3 \Rightarrow |u| = \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ NON È UN VERSORE

$u \cdot u = (i + j - k) \cdot (i + j - k)$

$= i \cdot i + i \cdot j - i \cdot k + j \cdot i - j \cdot j - jk$

e) ~~U è una COMBINAZIONE LINEARE di V e W~~

f) $\left.\begin{array}{l} U+V \\ U-V \\ U\wedge V \end{array}\right\}$ sono complanari ?

$U+V \longrightarrow \pi$

$U-V \longrightarrow \pi$

$U\wedge V \longrightarrow \perp \pi$

↳ questo di sicuro non è complanare

FALSO

g) $|U\wedge V| = |U||V|$

poiché U e V sono ORTOGONALI

VERO

d) $\nexists$ t.c. per cui

$$\begin{cases} U \\ 2U+3V \\ U \wedge V \end{cases}$$ sono complanari

U è su un piano (sta sullo stesso piano)

2U e 3V definiscono un piano (stanno nello stesso piano)

$U \wedge V$ escono fuori dal piano $\Rightarrow$ NON SONO COMPLANARI

Esercizio di riepilogo

$\vec{u} = (2, 1, 1)$ $\qquad \vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$\vec{v} = (0, 3, -1)$ $\qquad \vec{v} = 3\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{w} = (-1, 4, 0)$ $\qquad \vec{w} = -\vec{i} + 4\vec{j}$

1) Calcolare $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$

(a) Verificare che $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ è complanare con $\vec{u}$ e $\vec{v}$

ed

(b) esprimerlo come combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\left[(1 \cdot (-1)) - 1 \cdot 3\right] + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$= -4\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

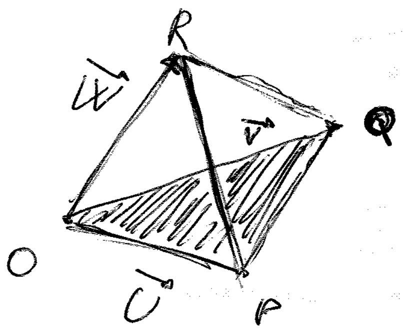
$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -24\vec{i} - 6\vec{j} - 14\vec{k}$$

2) Verificare che

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

$(2, -2, -2)$

3) Verificare che $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ non sono complanari e calcolare il volume del tetraedro avente come (3) spigoli i tre vettori



$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (-4, 2, 6) \cdot (-1, 4, 0) = 12 \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ NON SONO COMPLANARI

Il prodotto misto in valore assoluto è indipendente dall'ordine dei tre vettori (Proprietà ANTICOMMUTATIVA) $\rightarrow$ al max cambia di segno

DETERMINANTI

Ad ogni matrice "quadrata" si può associare un numero;

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ → ho una matrice $\mathbb{R}$ con un numero n di colonne e di righe → numero di righe e colonne UGUALI → infatti MATRICE QUADRATA

$n = 3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33}) - a_{11}(a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33}) - (-a_{12})(a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13}(a_{21} \cdot a_{2}$$
$$- a_{13}(a_{22} \cdot a_{3}$$

=

$a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} -$ [illegible]

1° TEOREMA DI LAPLACE

Data $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

il determinante di A è la somma dei prodotti degli elementi di ~~A~~ una riga (colonna) per i rispettivi complementi algebrici.

Se la riga scelta è la i-esima ~~colonna~~

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

Se si sceglie la J-esima colonna

$$\det A = a_{1J} A_{1J} + a_{2J} A_{2J} + \dots + a_{nJ} A_{nJ}$$

MATRICE TRASPOSTA

Def. Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

Si dice trasposta di A la matrice $n \times m$ ottenuta da A con lo scambio ordinato delle righe con le colonne.

Simbolo: ${}^tA$

Es. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

3×2

Proprietà: Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$\det A = \det {}^tA$

REGOLA DI SARRUS PER IL CALCOLO DEL DET. DI 3° ORDINE

① riscrivi e fuori le prime 2 colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33}$$

1) SOMMA DI MATRICI $A+B$

Siano A, B matrici $m \times n$

$C = A + B$ è sempre $m \times n$

se $A = (a_{ij})$ $\quad i = 1 \dots m$

$B = (b_{ij})$ $\quad j = 1 \dots n$

$C = (c_{ij})$; $\quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

~~Proprietà~~

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & \dots \\ -1 & 1\dots \end{pmatrix}$$

Proprietà

$A + B = B + A$

$(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3)$

Matrici NULLE sono le matrici con elementi TUTTI NULLI

Simbolo: O

Proprietà $A + O = O + A = A$

PRODOTTO PER SCALARI

Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$A = (a_{ij}) \quad i = 1, \dots, m \; ; \quad j = 1, \dots, n$

$k \in \mathbb{R}$

per def $\quad kA = (k \cdot a_{ij})$

Es. $3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 6 & 12 & 21 \end{pmatrix}$

Proprietà

1) $1A = A$
2) $h(kA) = (hk)A$
3) $k(A+B) = kA + kB$
4) $(h+k)A = hA + kA$

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esistono AB e BA e sono matrici 2x2

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq AB$$

$$\Downarrow$$

In generale non $\exists$ proprietà commutativa

a meno che ~~AB = BA~~ $A = B$

Proprietà

1) $(AB)C = A(BC)$

2) $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

3) $(A_1 + A_2)B = A_1 B + A_2 B$

TEOREMA DI BINET

Siano A, B matrici $n \times n$.
Si ha
$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

MATRICI INVERTIBILI

Sia A una matrice $n \times n$

Def A si dice invertibile se esiste una matrice B $n \times n$ tale che

$$\boxed{AB = BA = I_n}$$

$I =$ matrice identica

Es 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ è invertibile}$$

Infatti se

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ si ha } AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>sono invertibili</u>

perciò

Se A è invertibile,
l'unica matrice B per cui vale $AB = BA = I_n$
si chiama MATRICE INVERSA DI A
e si indica con A^{-1}

$$\left(AA^{-1} = A^{-1}A = I\right)$$

<u>Proposizione 2</u>:

Siano P, Q matrici $n \times n$ invertibili.

La <u>MATRICE PRODOTTO</u> È INVERTIBILE e si ha:

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$$

Dimostrazione

<u>calcoliamo</u> $(PQ)(Q^{-1}P^{-1}) \overset{?}{=} I$

$$(PQ)(Q^{-1}P^{-1}) = P(QQ^{-1})P^{-1} =$$

$$PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

Analogamente: $(Q^{-1}P^{-1})(PQ) = I$

CRITERI DI INVERTIBILITA'

Calcolo dell'inversa di una matrice

condizioni necessarie e sufficienti

I) Sia A invertibile

(*) I = matrice identica

$$AA^{-1} = I$$

$$\det(AA^{-1}) = \boxed{\det I}^{(*)},$$

$$(\det A)(\det A^{-1}) = 1$$

ⓐ condizione necessaria affinché A sia invertibile è che $\boxed{\det A \neq 0}$ (**)

ⓑ Se A è invertibile

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

(**) La condizione $\det A \neq 0$ è anche sufficiente

Costruiamo la matrice $A^* = (A_{ij})$

dove A_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t(A^*)$$

dimostrazione:

$$AA' = A\left[\frac{1}{\det A}\,{}^t(A^*)\right] = \frac{1}{\det A}\left(A\,{}^t(A^*)\right) = \frac{1}{\det A}\cdot(c_{ij}) =$$ altra pagina

Esempi

$n = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

A è invertibile se e solo se

$$\boxed{ad - bc \neq 0}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \, {}^t\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

per fare A^{-1}
sulla 1ª diagonale gli scambio
mentre
gli altri li cambio di segno

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

cambio segno

cambio segno

1ª diagonale scambio di posto

dopo si scambia ~~diman~~ la 2ª diagonale

da

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

per fare "trasposta" → bisogna cambiare le righe con le colonne

1

se

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\det A = -13$

$$A^{-1} = -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/13 & 3/13 \\ 4/13 & -1/13 \end{pmatrix}$$

SISTEMI LINEARI

Indichiamo le incognite con x_1, x_2, x_n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sia $A = (a_{ij})$ la matrice dei coefficienti

ad es a_{32} = coeff nella 3^a eq. della 2^a incognita

Si ha: $\boxed{\underset{m\times n}{A}\underset{n\times 1}{X} = \underset{m\times 1}{B}}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Caso particolare: $m = n$, $\det A \neq 0$

$AX = B$ l'Hp ci dice che $\exists$ l'inversa di A, A^{-1}

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \qquad (A^{-1}A)X = A^{-1}B \qquad IX = A^{-1}B$$

$$\boxed{X = A^{-1}B} \longrightarrow \text{FORMA MATRICIALE}$$

es) trovo x_i

= prodotto tra riga iesima e colonna iesima della $\Rightarrow x_i = \frac{1}{\det A}\left(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n\right) = \frac{\det \tilde{A}_i}{\det A}$

TILDE

determinante della matrice che si ottiene da A sostituendo la colonna i con la colonna dei termini noti

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 513

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE (COLONNE) DI UNA MATRICE

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$ (righe m, colonne n) $(\mathbb{C})$

$R_1, R_2, \ldots R_m$ righe di A

- Tre tipi di Trasf. Element. sulle righe

1) $R_i \to R_i + a R_J \quad a \in \mathbb{R} \quad i \neq J$

2) $R_i \longleftrightarrow R_J \quad i \neq J$

3) $R_i \to k R_i \quad k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0$

MATRICE RIDOTTE (per righe)

Def $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice ridotta per righe se in ogni riga non nulla c'è (almeno) un elemento $\neq 0$ e sotto il quale ci sono solo zeri.

Esempio di matrice ridotta

MATRICE 3x4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposizione: data una matrice A è possibile trasformare A in una matrice ridotta A' con un numero finito di trasformaz. elementari.

Def. Se A' è una matrice ottenuta da A con un numero finito di t.e. sulle righe diremo che A' è equivalente ($\sim$) ad A (per righe)

RANGO DI UNA MATRICE A

$$\rho(A) \qquad \text{rank}(A) \qquad \text{rk}(A)$$

I) A ridotta.

Il rango di A è il numero di righe NON NULLE di A

II) In generale.

def. A sia una matrice ed A' una matrice ridotta equivalente ad A.

Si definisce il rango come il rango di A'

$$\rho(A) = \rho(A')$$

OSS. La definizione ha senso perché tutte le matrici A' ridotte equivalenti ad A hanno lo stesso rango

1° CASO Sistemi ridotti

Def un sistema lineare $Ax = B$

si dice RIDOTTO

se (la matrice dei coeffic.) A è ridotta (per righe)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}}_{A} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & \\ \times & \times & \times & \times & b_m \end{array}\right) \quad A \quad B$$

Ricerca testa incognite questa è il rango della matrice.

$\rightsquigarrow 0 = b_m$

NON CI SONO SOLUZIONI QUANDO IL

NUMERO DI RIGHE NULLE DI A $\neq$ NUMERO DI RIGHE NULLE DI B $\Rightarrow$ B ha dei NUMERI

$\Downarrow$

IL PASSAGGIO DA A A B fa... AUMENTARE IL RANGO

Ricaviamo x_2 dalla 2^a equazione

$$x_2 = 3x_3 - x_4$$

dalla prima ricaviamo ~~eq~~ x_1

$$x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 + 1 =$$

$$= -2(3x_3 - x_4) + x_3 - x_4 + 1 = -5x_3 + x_4 + 1$$

Abbiamo ricavato x_1, x_2 in funzione di x_3, x_4 che risultano "libere", cioè possono assumere qualsiasi valore, una volta fissato un valore per x_3 e uno per x_4, si ricava un valore per x_1 e per x_2

Il SISTEMA HA INFINITE SOLUZIONI e si dice che le soluzioni sono ∞^2 dove 2 è il numero delle incognite libere.

Se $k \neq 0$ dalle tre equaz. ricaviamo 3 incognite in funzione della 4^a, il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Viceversa se $\tilde{X}_0$ è soluz. di $(PA)X = PB$,
cioè

$$(PA)\tilde{X}_0 = PB \quad \text{allora}$$

$$P^{-1}(PA)\tilde{X}_0 = P^{-1}(PB)$$

$$(P^{-1}P)(A\tilde{X}_0) = (P^{-1}P)B$$

$$I(A\tilde{X}_0) = IB \qquad \boxed{A\tilde{X}_0 = B}$$

$\tilde{X}_0$ è anche soluz. di $AX = B$

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

Premesse

Lemma Sia A una matrice e A' una matrice equivalente ad A (per righe)

$$\rho(A) = \rho(A')$$

Tenendo conto della situazione dei sistemi ridotti si ha:

Teorema di R. C.:

Sia $AX = B$ un sistema lineare

1) IL SISTEMA È RISOLUBILE cioè ha almeno una soluzione se e solo se il

$$\rho(A) = \rho(A|B)$$

2) Se $AX = B$ è RISOLUBILE la SOLUZIONE è UNICA se e solo se

$$\rho(A) = \rho(A|B) = n$$

dove n è il numero di incognite

3) IL SISTEMA ha INFINITE SOLUZIONI dipendenti da $n - \rho(A)$ parametri se $\rho(A) = \rho(A|B) < n$

+ precisamente, esistono $n - \rho(A)$ incognite "libere".
Per ogni scelta delle incognite libere,
le rimanenti sono definite in MODO UNICO.

Risolviamo il sistema ridotto equivalente

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-\frac{3}{4}z=0 \end{cases} ; \begin{cases} x=-y-z=-\frac{1}{4}z \\ y=-\frac{3}{4}z \end{cases}$$

FORMA MATRICIALE

$$X=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{4}t \\ -\frac{3}{4}t \\ t \end{Bmatrix} , \quad t\in\mathbb{R}$$

<u>Proposizione</u>: Sia A una matrice quadrata $n\times n$. Sono <u>equivalenti</u> le seguenti affermazioni

1) A è invertibile . (riguarda matrici)
2) $\rho(A)=n$ (" rango)
3) I sistemi $AX=B$ hanno una e una sola soluzione $\forall B$ (" sistemi)
4) $\det A\neq 0$ (" determinanti)

4 cose che valgono quando una sola di queste vale

$\boxed{\text{CASO 3}}$

considerando che

$AB \neq BA$

NON SONO COMMUTABILI

$(AB)^2 = A \cdot B \cdot A \cdot B$

$A^2 \cdot B^2 = A \cdot A \cdot B \cdot B$

$\boxed{a, b \in \mathbb{R}}$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ → questo NON è vero per le matrici

$\neq$

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

esempio

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 + 2AB + B^2$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

- $BA =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

$(AB)^n \neq A^n \cdot B^n$

Esercizi

1)
$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ -1 & -1 \\ -7 & 21 \end{pmatrix}$$

[redacted]

Calcoliamo il determinante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \det A$$

metodo Sarrus

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \det B$$

$\det A =$

$$\det B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{matrix} = (2 \cdot 3) + (1 \cdot 5 \cdot 4) + (2 \cdot (-1) \cdot 2) -$$
$$-(2 \cdot 4) + (2 \cdot 5 \cdot 2) + (-1 \cdot 1 \cdot 3)$$
$$= 6 + 20 - 4 - 8 - 20 + 3 = -3$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \overset{3-10}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} - 1 \overset{3-4}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} + 4 \overset{5-2}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} =$$

$$= -14 - 1 + 12 = -3$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

INVERSA

- Complemento algebrico $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \underbrace{\left| \begin{matrix} \text{sottomatrice di } A \\ \text{le riga } i \\ \text{e le colonna } j \end{matrix} \right|}_{\text{minore } ij}$

- A^* = matrice del complemento algebrico

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^{T}A^*$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & -2 & 1 \\ 12 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

TRASFORMAZIONE ELEMENTI & EFFETTO SUL DETERMINANTE

1) $R_i \rightarrow R_i + a R_J \quad a \in \mathbb{R}$ → NON CAMBIA IL DETERM.

prendo la 1ª riga + il MULTIPLO DI UN DET

2) $R_i \leftrightarrow R_J$ → IL SEGNO DEL DET. CAMBIA

scambio di due righe ≠

3) $R_i \longrightarrow a R_i$ → DET. MOLTIPLICATO per a

moltiplicate la matrice per a

→ risultato: det è moltiplicato per a^n

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad \rho(A) = ? \qquad \rho({}^{T}A) = ?$$

$$R_3 \to R_3 - 2R_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2a & 0 & a \end{pmatrix}$$

$a = 0 \qquad \rho = 2$

$a \neq 0 \qquad \rho = 3$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 513

2) Se x' è una soluzione anche kx' è soluzione, $\forall k \in \mathbb{R}$

Dimostrazione: $Ax' = 0$ per ipotesi

k = numero

A = matrice

x = incognita

$$A(kx') = k(Ax') = k \cdot 0 = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 513

Generalizzazione

(*) $AX = B$

Sia A $m \times n$, X $n \times p$, B $m \times p$

Supponiamo A, B note e cerchiamo le X che soddisfano l'equazione (*)

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2×2

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \quad 2 \times 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{11} + x_{21} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_{12} + x_{22} = -1 \\ x_{12} + x_{22} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_{13} + x_{23} = 3 \\ x_{13} + x_{23} = 2 \end{cases}$$

$AC_1 = B_1$ $\qquad AC_2 = B_2$ $\qquad AC_3 = B_3$

chiamiamo $X = (C_1, C_2, C_3)$

B_1, B_2, B_3 sono le colonne di B

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI generalizzato

È data l'eq. matriciale $AX = B$

$A_{m \times n}$ $X_{n \times p}$ $B_{m \times p}$

A, B note

1] L'eq. matriciale è risolubile se e solo se
$\rho(A) = \rho(A|B)$

2] • Se $\rho(A) = \rho(A|B) = n$ (numero delle righe di X
la soluzione è l'unica

• Se $\rho(A) = \rho(A|B) < n$ ci sono infinite soluzioni

$n - \rho(A)$ righe di X si possono scegliere arbitrariamente.

Per ogni scelta vengono determinate in modo unico le righe rimanenti.

L'inversa A^{-1} si può trovare col "metodo di riduzione"

Esempi:

$\boxed{\text{METODO 1}}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A \mid I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \underline{R_2 \to R_2 - R}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 = (1 \quad 0) \\ -X_1 = (-1 \quad 1) \end{cases}$$

X_1, X_2 righe di A^{-1}

$$\begin{cases} X_1 = (1 \quad -1) \\ X_2 = (1 \quad 0) - 2(1 \quad -1) = (-1 \quad 2) \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{METODO 2}}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad R_1 \to R_1 + 2R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$X_2 = (-1 \quad 2)$

$X_1 = (1 \quad -1)$

Usiamo il METODO DI RIDUZIONE:

$(A \mid I)$ Con t.e. si arriva ad avere A ridotta.

Si può risolvere un sistema con incognite le righe $X_1, \dots, X_n$ di A^{-1}

Es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\det A = -1 \neq 0$

A è invertibile

↳ se è ≠ da zero è invertibile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2 - R_1$ $\quad R_3 \to R_3 - 2R_1$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

cerca di trasform. una matr. A in identica in modo da ottenere a destra A^{-1}

$\rightarrow$

solo per venire 0 qui

$R_1 \to R_1 + 3R_3$

$R_2 \to R_2 + 3R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow R_1 \to R_1 - 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_3 \to -R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$I \qquad A^{-1}$