NUMERO: 644

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Conversano

MATERIA: Analisi Matematica I + Formulari

Prof. Pandolfi_Cordoves

PROPRIETA' VALORE ASSOLUTO

SUCCESSIONI

Grafico di $y = |f(x)|$

(1) $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{per i valori di } x \text{ per cui è } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{" " " " " è } f(x) < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ i valori della funzione $y = |f(x)|$

sono <u>POSITIVI</u> o <u>NULLI</u>

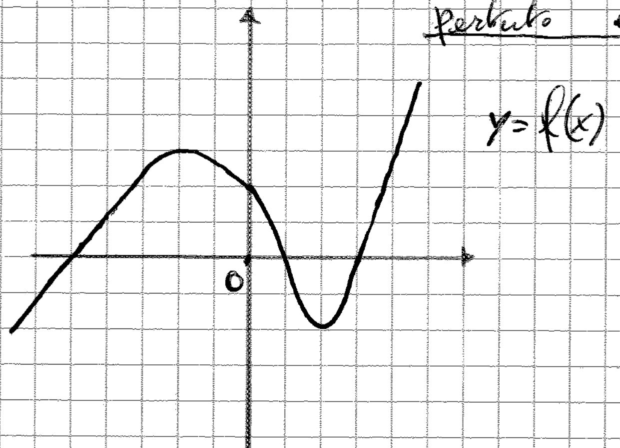
apparterrà al semipiano delle ordinate positive o nulle

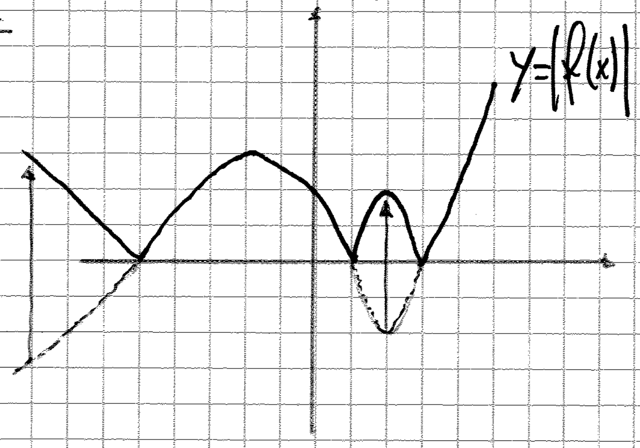
Dalla (1) si deduce che, in corrispondenza ai valori di x per cui $f(x)$ assume valori negativi, il grafico di $y = |f(x)|$ coincide con quello di $y = -f(x)$.

Come è noto, il grafico di $y = -f(x)$ è il simmetrico, rispetto all'asse x, di quello di $y = f(x)$.

Si conclude che, per tracciare il grafico di $y = |f(x)|$, basta tracciare il grafico di $y = f(x)$ e sostituire alle parti del grafico i cui punti hanno ordinata negativa le loro simmetriche rispetto all'asse x

<u>perduto estremo</u>





COME DEFINIRE UNA SUCCESSIONE

Supponiamo che per definire una successione sia possibile specificare un'espressione analitica del tipo

$$a_n = f(n)$$

che consente, mediante un numero finito di operazioni matematiche, DI CALCOLARE UN QUALSIASI TERMINE a_n della successione a partire dal VALORE DI n

1 → 1° DEFINIZIONE DI SUCCESSIONE

la SUCCESSIONE così sarà DEFINITA ANALITICAMENTE

→ In tal caso, si supporrà che l'insieme di definizione della successione sia costituito di tutti i valori di [redacted] $n \in N$ per cui ha senso l'espressione di a_n data

Es. da pag. 6 libro scolastico

la funzione $f: n \longrightarrow \frac{1}{n}$

definisce una successione il cui termine generale è $a_n = \frac{1}{n}$

Tale espressione ha senso per $n \neq 0$, così che l'insieme di definizione di tale successione è $N_0 = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$

Pertanto gli elementi della successione sono

$a_1 = 1$ $\quad a_4 = \frac{1}{4}$

$a_2 = \frac{1}{2}$ $\quad a_5 = \frac{1}{5}$

$a_3 = \frac{1}{3}$ $\quad a_n = \frac{1}{n}$

2 → 2ª DEFINIZIONE DI SUCCESSIONE

Un altro modo per ~~definire~~ individuare una successione è la **DEFINIZIONE RICORSIVA** di una **SUCCESSIONE**

- Si definisce il 1° TERMINE della SUCCESSIONE (di solito a_0 o a_1) e
- Si stabilisce una regola che permette, dato un termine della successione, di calcolarne il successivo.

In tal caso la successione è stata definita **RICORSIVAMENTE** o **PER RICORSIONE**

Es → pag. 8 DEL LIBRO SCOLASTICO

① CONSIDERIAMO LA SUCCESSIONE il cui 1° TERMINE è 1 e in cui ogni termine è il DOPPIO del precedente

abbiamo cioè

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$

A partire da a_0 possiamo determinare tutti i termini della successione:

$a_1 = 2a_0 = 2 \cdot 1 = 2 \longrightarrow a_1 = 2$

$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 2 = 4 \longrightarrow a_2 = 4$

$a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 4 = 8 \longrightarrow a_3 = 8$

I termini della successione saranno allora $1, 2, 4, 8, \dots$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 575

p 10 → libro scolastico

SUCCESSIONI

LIMITATE

Una successione può essere:
- → LIMITATA SUPERIORMENTE ① $\forall n \quad a_n \leq L$
- → LIMITATA INFERIORMENTE ② $\forall n \quad a_n \geq l$
- → LIMITATA ③ $\forall n \quad l \leq a_n \leq L$

① LIMITATA SUPERIORMENTE

quando tutti i termini di una successione risultano MINORI (o EGUALI) di un numero reale L, ossia se è

$$\forall n \quad a_n \leq L$$

② LIMITATA INFERIORMENTE

quando tutti i termini di una successione risultano MAGGIORI (o EGUALI di un numero reale L, ossia se è

$$\forall n \quad a_n \geq l$$

③ LIMITATA

quando è limitata sia SUPERIORMENTE sia INFERIORMENTE, ossia se esistono due numeri reali l_1 e L tali che

$$\forall n \quad l \leq a \leq L$$

Osservazione: se una certa proprietà è soddisfatta non da tutti i termini della successione, MA SOLO DA QUELLI CON INDICE $n > n_0$, ossia da tutti i termini che seguono un certo termine, si dice che tale proprietà è soddisfatta **DEFINITIVAMENTE**

Perciò se la $i<j \Rightarrow a_i<a_j$ (1)

e la $i<j \Rightarrow a_i>a_j$ (2)

SONO SODDISFATTE per

$\boxed{i>n_0}$ e $\boxed{j>n_0}$

si parla di SUCCESSIONE

DEFINITIVAMENTE CRESCENTE

DEFINITIVAMENTE DECRESCENTE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 575

DEFINIZIONI DI LIMITE PER LE SUCCESSIONI

LIMITE FINITO

Consideriamo il numero decimale periodico 8,333...,
la cui frazione generatrice è $\frac{25}{3}$

I valori di tale numero, troncati alla ennesima cifra decimale, costituiscono una successione i cui elementi sono $8\ ;\ 8,3\ ;\ 8,33\ ;\ 8,333\ ;\ \dots$

Tale successione può essere definita in questo modo

$$a_n = 8,\underbrace{33\dots3}_{n\text{-cifre}}$$

Gli elementi a_n di tale successione sono APPROSSIMAZIONI PER DIFETTO di $\frac{25}{3}$ e tali approssimazioni, al crescere di n, si avvicinano sempre più al valore esatto.

→ Per esprimere tale fatto si usa dire che

al tendere di n a $+\infty$, il valore di a_n tende a $\frac{25}{3}$

o anche che

$\frac{25}{3}$ è il limite della successione avente per termine generale a_n

Si scrive così $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{25}{3}}$

Diamo la

DEFINIZIONE

La successione di elementi

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

ha per limite l, al tendere di n a più infinito, quando, prefissato un numero ε positivo, arbitrariamente piccolo, è possibile trovare, in corrispondenza ad esso, un numero n_ε (non necessariamente intero) tale che, per ogni numero naturale $n > n_\varepsilon$, ~~sia~~ sia verificata la relazione

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

In tal caso la successione si dice **CONVERGENTE**

e si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

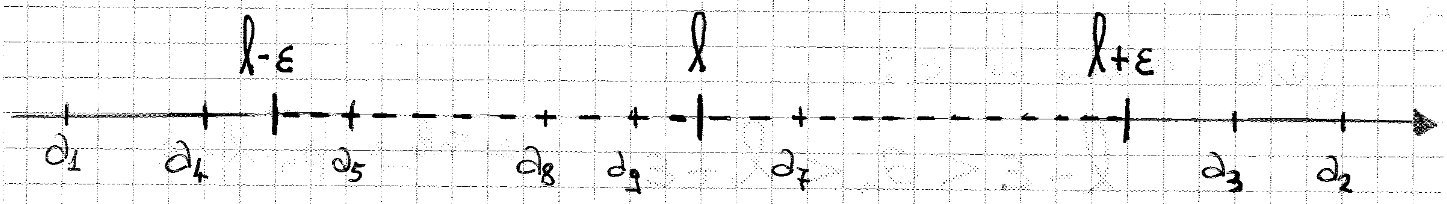
e si legge limite di a con n, per n che tende a $+\infty$, uguale ad l

La disuguaglianza

$$l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$$

può essere interpretata geometricamente:

essa significa, che, per quanto piccolo sia ε, i termini della successione con indice maggiore di n_ε cadono tutti nell'intervallo $(l-\varepsilon; l+\varepsilon)$



dove $n_\varepsilon = 4$

E così verificata la condizione della definizione.

Tutti i termini della successione con indice maggiore di $n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ verificano la disequalianza

$$|a_n - 1| < \varepsilon \quad \text{cioè} \quad 1-\varepsilon < a_n < 1+\varepsilon$$

verificata da

$$\left\{ |a_n - l| < \varepsilon \rightarrow l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon \right\}$$

Si può affermare così che $\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

Definizione di SOTTOSUCCESSIONE:

↳ Consideriamo una successione strett. crescente da
$\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$
che a $k \in \mathbb{N}$ ASSOCIA UN ALTRO NATURALE n_k

così dalla successione $a_n \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$n \{\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}\}$

così è la successione che estrae gli indici

1° VOCE → 1 (NUMERO)
2° " → 3
3° " → 5
4° " → 7

così di questi indici prendo solo quelli DISPARI

1° → 1
2° → 4
3° → 9
4° → 16

così di questi indici prendo solo quelli che sono QUADRATI PERFETTI

Dovremmo ora avere uno strumento per affermare che una $f(x)$ NON AMMETTE LIMITE

$\boxed{1° \text{ CASO}}$ per $x \to$ ad un valore limite (DX) e (SX) sono $\neq$ e $\Rightarrow$ POSSIAMO DIRE che IL LIMITE NON ESISTE

$\boxed{2° \text{ CASO}}$ $\to$ + difficile per (es.)

come fa la funzione SENO all'infinito

$\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$

la f. seno NON AMMETTE LIMITE poiché avendo le OSCILLAZIONI ~~non~~ I VALORI DELLA FUNZIONE NON SI AVVICINANO e NESSUN VALORE FINITO NON DIVERGONO (NE) A $+\infty$ (NE) A $-\infty$

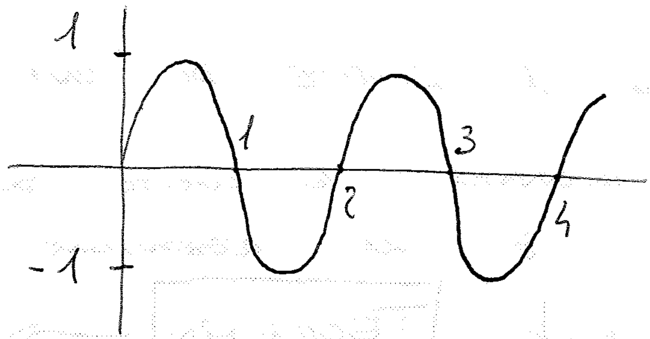
$\Downarrow$

quando una funzione NON HA LIMITE?

È DIMOSTRATO CHE NON È VERO

Esempio

$\sin(\pi x)$



è la funt. $\sin x$ sottoposta a cambiamento di variabile

→ si annulla in tutti i valori INTERI

$\sin(\pi x)$ NON AMMETTE LIMITO INFINITO MA ASSUME I VALORI DA $\underline{1}$ a $\underline{-1}$

LA SUCCESSIONE CHE GLI CORRISPONDE È

$\sin(\pi n) = 0 \quad \forall n$

per $n \to +\infty$ $\Rightarrow$ $\underline{\sin(\pi n) \to 0}$

Pertanto se la successione tende a 0 anche la FUNZIONE TENDE A ZERO MA CIO' NON È VERO

poiché NOI ABBIAMO SOLO PRESO ALCUNI VALORI, OVVERO I VALORI DEGLI INTERI I QUALI SI ANNULLANO IN ZERO.

QUINDI PERTANTO L'ERRORE STA' NEI VALORI CHE ABBIAMO SCELTO

QUESTO RISULTATO
ovvero che

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = \lim_{y\to\lambda} g(y)$$

$\downarrow$ ∇ dà

CRITERIO DI NON ESISTENZA DEL LIMITE

TEOREMA: Se esistono 2 ~~...~~ succ.

$a: n \to a_n \qquad b: n \to b_n$

tali da avere lo stesso limite λ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lambda$$

allora se vado a calcolare la funzione g su queste successioni a_n e b_n e per ~~$\lim_{n\to\infty} g(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} g(b_n)$~~ n che tende all'infinito il limite è diverso allora NON ESISTE IL LIMITE DELLA FUNZIONE

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} g(b_n)$$

NON $\exists$ limite $g(y)$ ~~...~~ per $y \to \lambda$

Calcolo la funzione seno in questi valori

$\sin(\pi n)$ ⟶ le prime sono gli zeri della FUNZIONE SENO cioè vedo e calcolare i valori del seno in questi punti

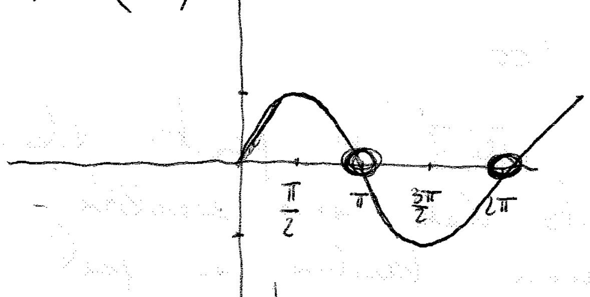
e

$\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$ ⟶ in questi punti la funz. del seno è sempre uguale ad 1 ⟹ la succ. tende ad 1

HO TROVATO 2 MANIERE DI PRENDERE SUCCESS. TENDENTI $+\infty$ e per queste funzioni la funzione seno valutata nella prima, genera una successioni tendente a zero, mentre valutata nella seconda genera una succ. tendente a uno.

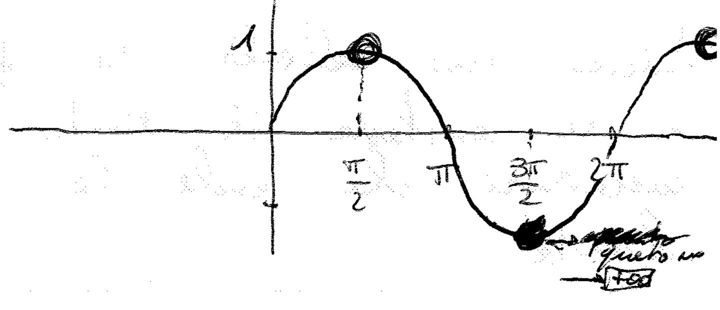
$2 \lim \neq \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ NON ESISTE

$\sin(\pi n) \to 0$



in $\pi(n)$ tende a zero

$\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$



FUNZIONI → PARI

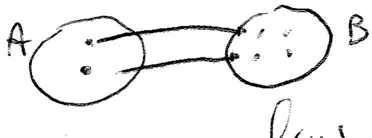
se $\forall x \in D$, si ha $f(-x) = f(x)$

con diagramma simmetrico rispetto all'asse y

→ DISPARI

se $\forall x \in D$, si ha $f(-x) = -f(x)$

con diagramma simmet. risp. all'origine ~~degli~~ assi cartesiani

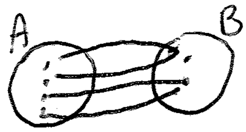


FUNZIONE INIETTIVA

Se scelti $x_1, x_2 \in A$ allora

$x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ oppure $x_1 = x_2 \longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

~~oppure~~



FUNZIONE SURIETTIVA

definita da un insieme A e un insieme B

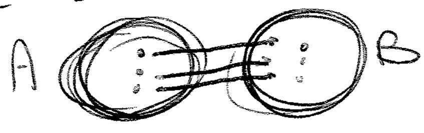
se $f(A) = B$ se il codominio di f coincide con B

oppure se $\forall B$ è immagine di almeno un A

FUNZIONE BIUNIVOCA

se $f: A \longrightarrow B$ ed è sia INIETTIVA sia SURIETTIVA

se $\forall B$ ha una e una sola controimmagine in B



4) il logaritmo

se $\log_a b$ argomento → $b > 0$

base → $a > 0$

$a \neq 1$

5) l'ESPONENZIALE

con base (costante) POSITAVA

∃ se ∃ l'esponente (variabile)

es 4^x esiste se x esiste

6) la POTENZA

→ con base (variabile) ed esponente (costante irrazion. positivo)

si considera solo per i valori POSITIVI e NULLI della base

es. x^4 per $x \geq 0$

→ con base ed esponente (variabili)

si considera solo per valori positivi della base

es x^{2x} solo per $x > 0$

VALORI DI X PER CUI $f(x)$ È CONTINUA

$f(x)$		D
k		$\forall x \in \mathbb{R}$
x		$\forall x \in \mathbb{R}$
$\sqrt[n]{x}$	n pari	$x \geq 0$
$\sqrt[n]{x}$	n dispari	$\forall x \in \mathbb{R}$
a^x	$a>0$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\log_a x$	$a>0$, $a \neq 1$	$x > 0$
$\operatorname{sen} x$		$\forall x \in \mathbb{R}$
$\cos x$		$\forall x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$		$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\operatorname{cotg} x$		$x \neq k\pi$
$\operatorname{arc\,sen} x$		$-1 \leq x \leq 1$
$\arccos x$		$-1 \leq x \leq 1$
$\operatorname{arctg} x$		$\forall x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arc\,cotg} x$		$\forall x \in \mathbb{R}$

TIPOLOGIA 4

$$\boxed{f(a^x) = 0}$$

porre $a^x = t \Longrightarrow$ risolvere $f(t) = 0$

Esempio

$$2^{2-x} - 2^{3-x} + 2^x = 0$$

$$2^2 \cdot 2^{-x} - 2^3 \cdot 2^{-x} + 2^x = 0$$

$$(2^2 - 2^3) \cdot 2^{-x} = -2^x$$

Sostituzione $t = 2^x$

$$\frac{2^2 - 2^3}{t} = -t$$

$$t^2 = (2^3 - 2^2) = 8 - 4 = 4 = 2^2$$

$$2^{2x} = 2^x$$

$$2x = 2$$

$$\boxed{x = 1}$$

LOGARITMO

$\log_a x$ con $a > 0$, $a \neq 1$

$\ln x$ = logaritmo naturale = $\log_e x$ con $\boxed{e = 2{,}718}$

Proprietà

1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^z = z \log_a x$

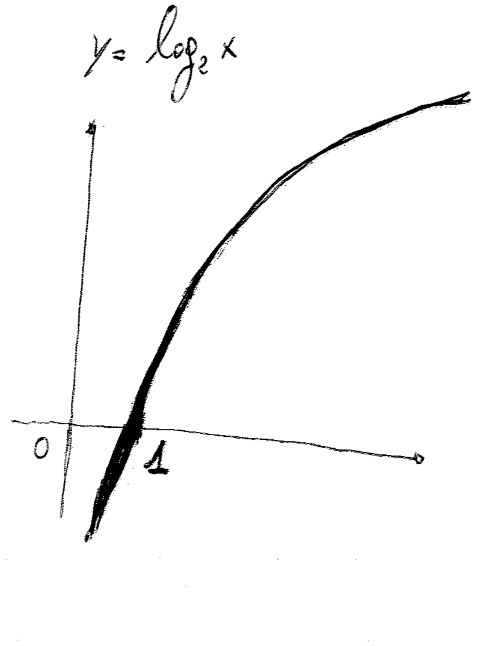
4) CAMBIAMENTO DI BASE: $\dfrac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b x$

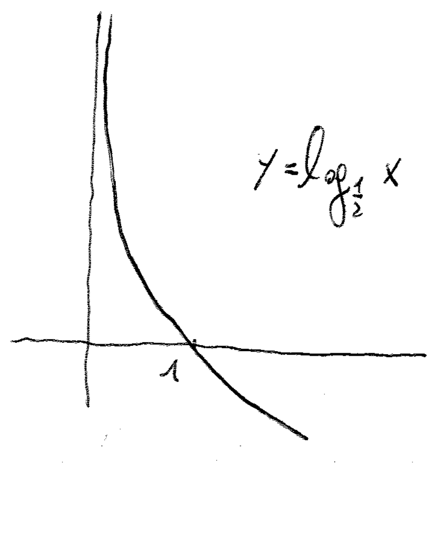
se $b \in$ NUMERI REALI POSITIVI

$\log_a f(x) = b$ con $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$

quando $\boxed{f(x) > 0}$

$f(x) = a^b$





TIPOLOGIA 2

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

Sol $\rightarrow$ quando $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ $\Longrightarrow$ $f(x) = g(x)$

Esempio $\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} (x-1) = 3$ $\qquad D = (1, +\infty)$

$\log_2 x = \log_2 (x-1) + 3$

$2^{\log_2 x} = 2^{\log_2 (x-1) + 3}$

$x = (x-1)2^3$

$x = 8x - 8$

$7x = 8 \qquad x = \frac{8}{7} \qquad$ (valida)

TIPOLOGIA 3

$$f(\log_a x) = 0$$

Sol porre $\log_a x = t$ $\Longrightarrow$ risolvere $f(t) = 0$

Esempio $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$ $\qquad D = (0, +\infty)$

sostit. $t = \log_2 x$

$\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$
$t^2 - 2t - 3 = 0$
$(t-3)(t+1) = 0$
$t = -1 \text{ o } 3$
$\log_2 x = -1 \text{ o } 3 \qquad x = \frac{1}{2}$ oppure $x = 8$

LIMITI

I 3 CASI POSSIBILI DI LIMITICITÀ

T. DI UNICITÀ DEL LIMITE

T. DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

T. DEL CONFRONTO

T. DI SOSTITUZIONE

LIMITE DELLA SOMMA ALGEBRICA

LIMITE DEL PRODOTTO DI 2 FUNZIONI

LIMITE DELLA POTENZA

LIMITE DEL RECIPROCO

LIMITE DEL QUOZIENTE

LIMITE FUNZ. RAZIONALI INTERE

LIMITE FUNZ. RAZIONALI FRATTE

+ ASINTOTI

LIMITI NOTEVOLI

9 CASI

$$\left.\begin{array}{l} ①\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ ②\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ ③\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \end{array}\right\} \text{per } x \to -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} ④\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ ⑤\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ ⑥\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty \end{array}\right\} \text{per } x \to +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} ⑦\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty \\ ⑧\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \\ ⑨\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \end{array}\right\} \text{per } x \to \infty$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 575

$\boxed{T_2}$ TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Se per $x \to c$ la $f(x)$ definita in I_c in cui c è escluso tende al limite finito l $\neq$ da ZERO

$\exists$ un intorno di c per tutti i punti del quale, escluso c, i VALORI della funzione

HANNO LO STESSO SEGNO DEL LIMITE

- Il $\boxed{T_2}$ vale anche per $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$ e vale se $l = +\infty$, $= -\infty$, ma non se $l = \infty$

- Il $\boxed{T_2}$ può essere invertito dai seguenti teoremi

① se in un intorno del punto c, escluso al più $x=c$, la

$\to f(x)$ È POSITIVA o NULLA e ammette limite finito l per $x \to c$ $\to l \geq 0$

$\to f(x)$ È NEGATIVA o NULLA e " " " " " " $\to l \leq 0$

QUESTI TEOREMI SI POSSONO ESTENDERE AI LIMITI INFINITI nel seguente modo:

- Se una $f(x)$ ha LIMITE INFINITO per $x \to c$ e in $\forall$ i punti dell' $I_c \setminus \{x=c\}$ risulta

ⓐ $f(x) \geq 0 \to \lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ ⓑ $f(x) \leq 0 \to \lim_{x \to c} f(x) = -\infty$

TEOREMA DI SOSTITUZIONE

Supponiamo che $\exists$ (finito o infinito)

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

Sia g FUNZ. definita in I di $l \setminus \{l\}$
tale che

① se $l \in \mathbb{R}$, g è CONTINUA in l

② se $l = +\infty$ ~~oppure~~ $l = -\infty$

$\exists$ (finito o infinito) $\lim_{y \to l} g(y)$

Allora esiste il limite per $x \to c$
della funzione COMPOSTA $g \circ f$ e si ha

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = \lim_{y \to l} g(y)$$

• LIMITE DEL PRODOTTO DI DUE FUNZIONI

① Lim del prodotto di una costante (k) per un lim finito è uguale al prodotto della costante per il limite della f(x)

$$\boxed{\lim_{x \to c} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \to c} f(x) = k \cdot l}$$

→ conseguente

2 funzioni e 2 costanti

$$\lim_{x \to c} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] = k_1 l_1 + k_2 l_2$$

② Lim del prodotto di due f(x) che ammettono lim finito è uguale al prodotto dei lim delle f(x).

$$\boxed{\lim_{x \to c} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = l_1 \cdot l_2}$$

$$0 \cdot l = 0$$

$$\infty \cdot l = \infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$[0 \cdot \infty]$ FORMA INDETERMINATA

• LIMITE DEL RECIPROCO DI UNA FUNZIONE

Se per $x \to c$

le $f(x) \to l \neq 0$

le $\dfrac{1}{f(x)} \longrightarrow$ al limite $\dfrac{1}{l}$

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}} \quad (l \neq 0)$$

• FUNZIONI RAZIONALI INTERE

ossia una $f(x)$ la cui espressione analitica sia costituita da un POLINOMIO DI GRADO n

es $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$

con $(a_0 \neq 0)$

tale funzione è continua per $\forall x \in \mathbb{R}$

[1] il limite, per $x \to c$, (con c finito), è uguale al valore per $x = c$

e quindi è $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

[2] il limite, per $x \to \infty$, di una funzione razionale intera è uguale al limite del suo TERMINE DI GRADO MASSIMO

$$\left(\lim_{x \to \pm\infty} \left(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n \right) = \boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \left(a_0 x^n \right)} \right)$$

a) Limite di una funzione che tende ad un valore $\boxed{\text{finito}}$ per $x \to c$

$\boxed{1}$ $Q(c) \neq 0$

$f(x)$ È CONTINUA PER $x = c$

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

$\boxed{2}$ $\overset{\text{DENOMINATORE}}{Q(c)} = 0 \wedge \overset{\text{NUMERATORE}}{P(c)} \neq 0$ → VALORE FINITO $\neq 0$

Si ha il limite del rapporto di due funzioni di cui quella al numeratore $(f_1(x))$ tende a un valore FINITO $\neq$ da 0 mentre quella al denominatore $(f_2(x))$ tende a 0 perciò si ha

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)} = \frac{l}{0} \text{ con } l \neq 0 = \infty$$

perciò $\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = \infty}$

$\boxed{3}$ $Q(c) = 0 \quad \wedge \quad P(c) = 0$

Il limite si presenta nella FORMA INDETERMINATA $\left[\frac{0}{0}\right]$

per eliminare l'indeterminazione si ricordi che in questo caso per il (*) TEOREMA DEL RESTO entrambi i polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ sono divisibili per $(x-c)$. Si deve procedere scomponendo in FATTORI tali polinomi e dividendo N e D per il fattore $(x-c)$. Si considera poi il limite della funzione razionale fratta, così ottenuta, che coincide, per $x \neq c$, con la funzione data.

(*) TEOREMA DEL RESTO: il resto della divisione di un polinomio $P(x)$ per un binomio del tipo $(x-c)$ è dato da $P(c)$

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{a_0}{b_0} \cdot x^{m-n} \right)}$$

Essendo a_0 e b_0

delle costanti NON NULLE

basterà CALCOLARE il $\lim_{x \to \pm\infty} x^{m-n}$

che dipende dall'esponente $m-n$

Si possono pertanto presentare 3 CASI:

$\boxed{1}$ Se $\boxed{m > n}$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{m-n} = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} x^{m-n} \begin{cases} +\infty & \text{per } m-n \text{ PARI} \\ -\infty & \text{per } m-n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

IL LIMITE RICHIESTO È $\boxed{\pm\infty}$
(IL SEGNO DIPENDERÀ ANCHE DAI SEGNI DI a_0 e b_0)

$\boxed{2}$ Se $\boxed{m = n}$

$x^{m-n} = x^0 = 1$ perciò $\lim_{x \to \infty} 1 = 1$

IL LIMITE RICHIESTO DIPENDERÀ QUINDI DA $\boxed{\frac{a_0}{b_0}}$

$\boxed{3}$ Se $\boxed{m < n}$

$\lim_{x \to \infty} x^{m-n} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{n-m}}$, con $n-m > 0$, perciò $\lim_{x \to \infty} x^{m-n} = 0$

IL LIMITE RICHIESTO È $\boxed{0} \to$ ZERO

LIMITI NOTEVOLI

→ poiché da essi si calcolano alcune delle derivate importanti

$\boxed{1}$ $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\boxed{2}$ $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e = NUMERO DI NEPERO $= 2,71828 1828\ldots$

$\boxed{3}$ $$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$\boxed{4}$ $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Limiti Notevoli

$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ $\quad \boxed{\alpha > 0}$ $\quad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$

$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$ $\quad \boxed{\alpha < 0}$ $\quad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ $\quad \boxed{\alpha > 1}$ $\quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ $\quad \boxed{\alpha < 1}$ $\quad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ $\quad \boxed{\alpha > 1}$ $\quad \lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ $\quad \boxed{\alpha < 1}$ $\quad \lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_m} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} x^{n-m}$$

- $\lim_{x \to \pm\infty}$ di $\underline{\operatorname{sen} x}$, $\underline{\cos x}$, $\underline{\operatorname{tg} x}$ $\quad$ NON ESISTONO

$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^\pm} \operatorname{tg} x = \mp\infty$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

- $\lim_{x \to \pm 1} \arcsin x = \pm \frac{\pi}{2} = \arcsin(\pm 1)$
- $\lim_{x \to +1} \arccos x = 0 = \arccos(1)$ e $\lim_{x \to -1} \arccos x = \pi = \arccos(-1)$
- $\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm \frac{\pi}{2}$

PARTE 1

LA DERIVATA DI UN PUNTO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 575

Ciò che conta è la VELOCITÀ DI VARIAZIONE

pertanto NON si considera la QUANTITÀ $f(b) - f(a)$

MA il rapporto tra quanto è variata la funzione Δf

fratto

l'incremento Δx che c'è stato nel frattempo tra la variazione della VARIABILE INDIPENDENTE x

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ciò dà l'idea della VELOCITÀ DI VARIAZIONE della FUNZIONE

$\Delta f = f(b) - f(a) \longrightarrow$ INCREMENTO

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ = RAPPORTO INCREMENTALE cioè

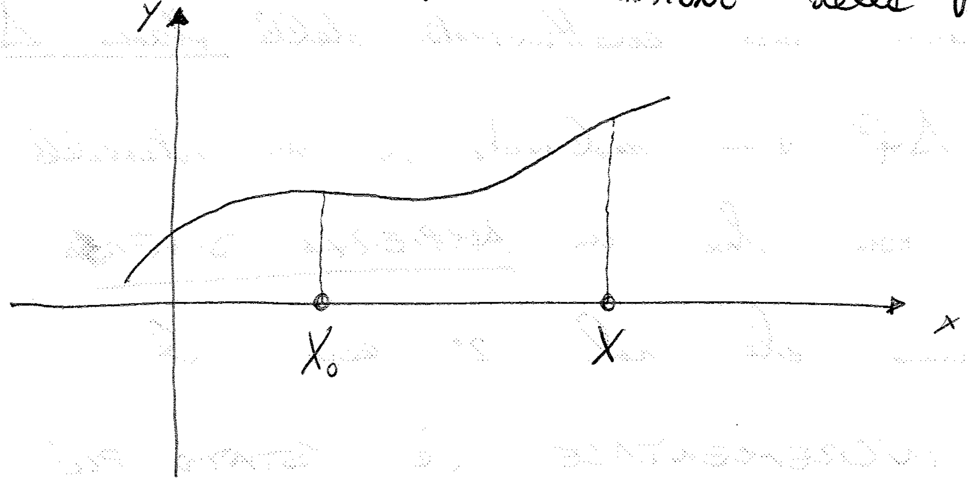
il QUOZIENTE tra la variazione della FUNZIONE

e la corrispondente variazione della VARIABILE INDIPENDENTE

In generale si può considerare un valore X_0 e prendere un punto x

la funzione sarà definita in un certo intervallo che contiene X_0 e X

e andare a considerare il QUOZIENTE tra la VARIAZIONE DELLA FUNZIONE e la VARIAZIONE della VARIABILE x



Il QUOZIENTE lo possiamo scrivere come

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ → una delle due NOTAZIONI

• si può anche scrivere anche come $\boxed{X = X_0 + h}$

h → È L'INCREMENTO che ha avuto la variabile x → sarebbe + proprio indicarlo come VARIAZIONE poiché non è detto sia POSITIVO ⇒ $h \in \mathbb{R}$

infatti si scrive $x = x_0 + h$

oppure

$x = x_0 + \Delta_x$ → sul testo è indicato in questo modo

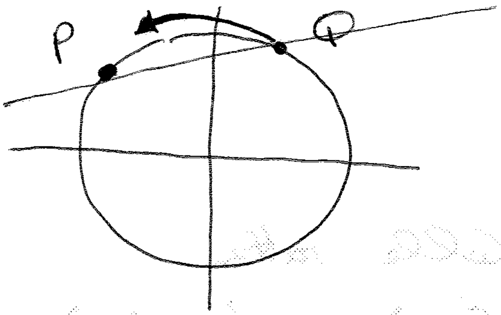
e h può essere sia a $\boxed{DX}$ sia a $\boxed{SX}$ del punto zero ed è questo il rapp. incrementale

Prendendo sempre l'ANALOGIA delle CIRCONFERENZA

Cosa succede quando ~~passo~~ sposto un punto Q e lo porto ed avvicinarsi verso il punto P

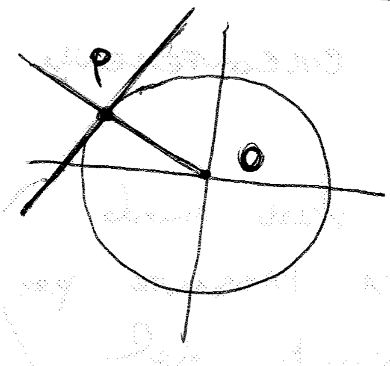
Si ha sempre una retta secante passante per due punti distinti e

la sua posizione limite è quando Q si sovrappone su P



Cosa succede quando voglio generalizzare questo discorso al generico caso di una funzione.

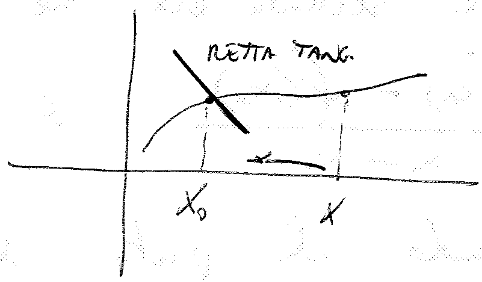
In una CIRCONFERENZA la posizione limite di questa secante diventa la RETTA TANGENTE che in GEOMETRIA EUCLIDEA



è caratterizz. da una PROPRIETÀ ovvero che è ortogonale al raggio che CONGIUNGE il RAGGIO OP. ~~passante~~ Quindi la retta tg è la perpendicolare del raggio OP passante per P

Così come nel caso della CIRCONFERENZA che la POSIZIONE LIMITE della SECANTE P, Q diventa la RETTA TANGENTE IN P

Anche in questo caso quando sposto X verso X_0, la retta passante per i due punti tende ad avvicinarsi ad una retta che è la RETTA TANGENTE.



Di una funzione CONTINUA in un grafico $f(x)$ avrei bisogno di dire che il COEFFICENTE ANGOLARE della RETTA SECANTE tende ad un valore che sarà il COEFFICENTE ANGOLARE della RETTA TANGENTE

Algebricamente questo discorso non lo posso affrontare perché ottengo la FORMA INDETERMINATA $\left[\frac{0}{0}\right]$ pertanto ho necessità di introdurre il CONCETTO DI LIMITE

↳ che nasce pep dello STUDIO DI QUESTI CASI

2° PARTE

DEFINIZIONE DI DERIVATA

T. sulla relazione tra CONTINUITA' e DERIVABILITA' delle FUNZ. IN UN PUNTO

+ DIM + OSSERVAZIONI

PUNTI DI NON DERIVABILITA'

e DEF. di PUNTO ANGOLOSO

CASI DI LIMITE CHE TRATTIAMO ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

D È IL PROLUNGAMENTO PER CONTINUITÀ

Xk il rapporto incrementale

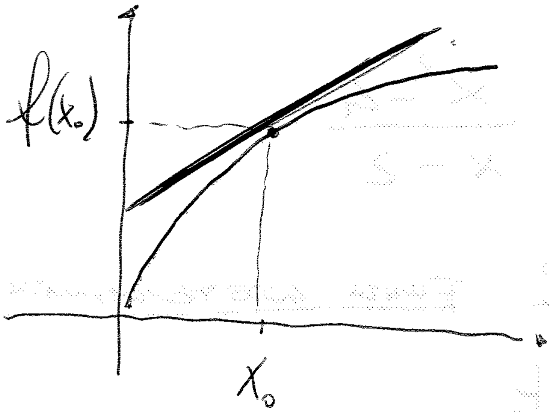
$\exists\ \forall x \neq x_0$ ma non $\nexists$ esiste nel punto X_0

$\Rightarrow$ questa $f(x)$ quando X è $\neq X_0$ è calcolabile

quando $X = X_0$ NON È CALCOLABILE

La QUANTITÀ di $f'(x_0)$ supponendo che $\exists$ finito è il coefficiente angolare della RETTA TANGENTE al grafico

$f'(x_0) \longrightarrow$ RETTA TANGENTE AL GRAFICO



Con la formula della RETTA PASSANTE X UN PUNTO e avente un COEFF. ANGOL. NOTO

avremo
$$y - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{COEF. ANGOLARE}} \cdot (x - x_0)$$

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

RETTA TANG. AL GRAF. NEL PUNTO

Tale retta che passa per il punto $(x_0, f(x_0))$ e ha come coeff. angol. la DERIVATA NEL PUNTO viene chiamata RETTA TANG. AL GRAF. NEL PUNTO

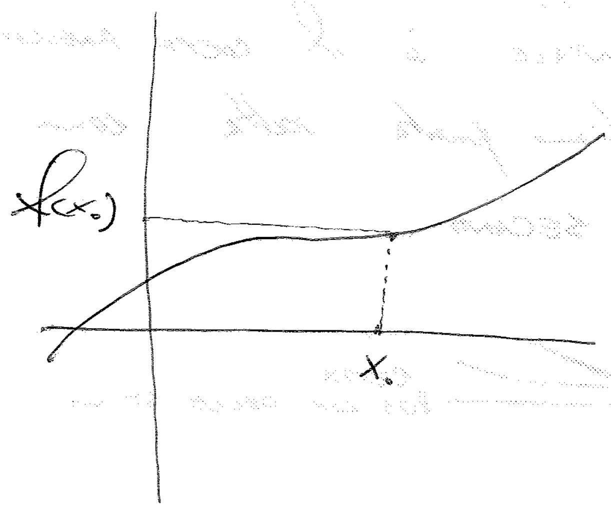
DEFINIZIONE DERIVATA:

$f(x)$ def. in $I(x_0)$

f DERIVABILE in x_0 se e solo se $\exists$ finito il limite del rapp. incrementale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



- il coeff. angolare della RETTA SECANTE è il rapporto incrementale
- il suo limite è il coeff. della RETTA TANG. AL GRAFICO DI EQUAZ. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Dalle (Hp) dobbiamo ricavare la (T)

$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0)$ dobbiamo dimostrare che il lim è zero

noi però di ~~…~~ $f(x) - f(x_0)$ → NON SAPPIAMO NULLA
pertanto dobbiamo utilizzare ciò che abbiamo ovvero

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

per eguagliare l'uguaglianza

ho il limite di 1 prodotto → IL LIM DI UN PRODOTTO È IL PRODOTTO DEI LIMITI QUANDO QUESTI LIMITI ∃ ENTRAMBI FINITI

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \longrightarrow 0$$

rapporto incrementale che tende per (Hp) a $\boxed{f'(x_0)}$

$$= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} =$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

$\boxed{\text{QUESTO DIMOSTRA IL NOSTRO TEOREMA}}$

Studiamo i

PUNTI DI NON DERIVABILITA'

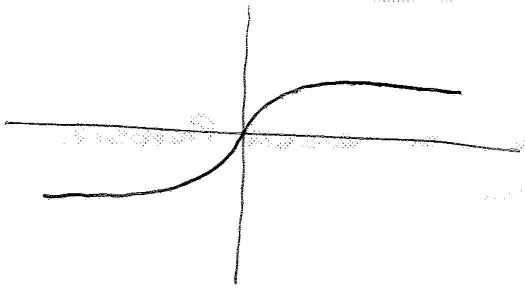
con

- f DEFINITA in $I(x_0)$
- f CONTINUA in x_0

$\boxed{\text{Es. 1}}$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$\in C^0(\mathbb{R})$

CONTINUA IN $\mathbb{R}$



calcolare il $\boxed{\lim_{x \to 0} \text{ del rapp. incrementale}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} =$$

RAD. DISPARI NON CI SONO PROBL.

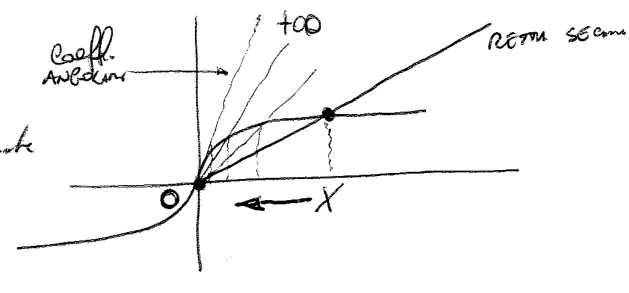
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \text{ per } x \to 0 \quad x^2 \to 0$$

MANTENENDOSI TRA I VALORI POSITIVI
$\Rightarrow$ LA SUA RADICE CUBICA PER VALORI POSITIVI

$+\infty \leftarrow$ $\frac{1}{\text{QUANTITA' CHE TENDE A ZERO MANTENENDOSI POSITIVA}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

graficamente se si prende la retta secante passante per l'origine, ~~...~~ e poi facendo tendere $x \to 0$ il coeff. ANGOLARE TENDE A $+\infty$ ovvero ad una POSIZ. VERTICALE



Pertanto possiamo concludere che

il limite del rapporto incrementale NON ESISTE

però ESISTONO i LIMITI LATERALI del RAPP. INCREM

cioè da $\boxed{SX}$ e da $\boxed{DX}$

$\Downarrow$

se $\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ MA $\exists \lim_{x \to x_0^+}$ delle stesse quantità altro da rapp. incr. $= f'_+(x_0)$

$\exists \lim_{x \to x_0^-}$ $= f'_-(x_0)$

Quando

$f'_+(x_0)$ $\exists$ FINITO

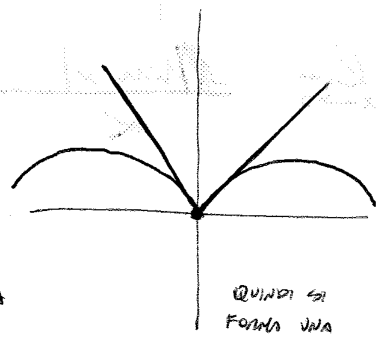
$f'_-(x_0)$ $\exists$ FINITO

ma $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$

altrimenti la funz. sarebbe derivabile

~~___~~ si dice che il PUNTO x_0 è un

PUNTO ANGOLOSO



$f'_+(x_0)$ si chiama DERIVATA DESTRA

$f'_-(x_0)$ " " " SINISTRA

QUINDI SI FORMA UNA RETTA TANG. AL GRAFICO NEL PUNTO ANGOLOSO

$\boxed{\text{RIEPILOGO}}$ → POSSIBILI CASI DI FUNZIONE CONTINUA NEL PUNTO NON DERIVABILE

- f NON CONTINUA $\Longrightarrow$ f NON DERIVABILE

- $\dfrac{f \text{ CONTINUA IN } x_0}{\exists \lim \text{ FINITO del rapp. increm.}}$ $\xRightarrow{\text{definizione di derivabilità}}$ f DERIV. IN x_0

- $\exists$ INFINITO lim del RAPP. INCREM. $\Rightarrow$ f ha un PUNTO a TANG. VERTICALE in x_0

- $\nexists$ lim del Rapp. increm.

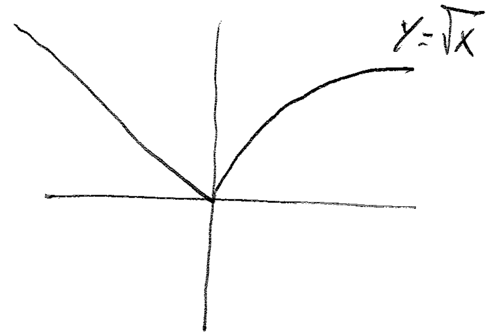
  (PK) $\exists \lim_{x \to x_0^+} \neq \lim_{x \to x_0^-}$ se sono entrambi
  - → FINITI → PUNTO ANGOLOSO
  - → INFINITI → PUNTO CUSPIDALE

Questa classificazione non prende tutto:

<u>Esempio</u>:

$y = \sqrt{x}$ NEI POSITIVI

$y = -x$ NEI NEGATIVI



il rapporto incrementale di questa funzione

per $x \to 0^+$ vale $+\infty$

per $x \to 0^-$ vale -1

poiché non è nei casi presenti la chiameremo

PUNTO DI NON DERIVABILITÀ

CALCOLO DELLA DERIVATA

① DER. FUNZIONI ELEMENTARI

② STUDIO REGOLE DI DERIVAZIONE

1 DERIVATE FUNZIONI ELEMENTARI

- $f(x) = c \Longrightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \sin x \Longrightarrow \cos x$ mentre $f(x) = \cos x \Longrightarrow -\sin x$

derivata funzione trigonometrica

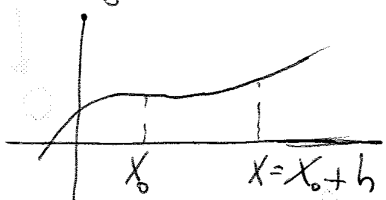
$\boxed{\text{DIMOSTRIAMOLO}}$

$\hookrightarrow x_0 = 0 \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} = 1$

è il limite che ci permette di calcolare la derivata della funz. <u>seno</u> nell'origine (in particolare)

MA SE SI PRENDE un

$\hookrightarrow x_0 \neq 0$. con $\begin{cases} x - x_0 = h \\ x = x_0 + h \end{cases}$



$h = x - x_0$

$\Rightarrow$ il rapp. incrementale diventa:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- DERIVATA FUNZIONE ESPONENZIALE

$f(x) = a^x$

vado a calcolare il rapp. incrementale

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \longrightarrow \text{potenze}$$

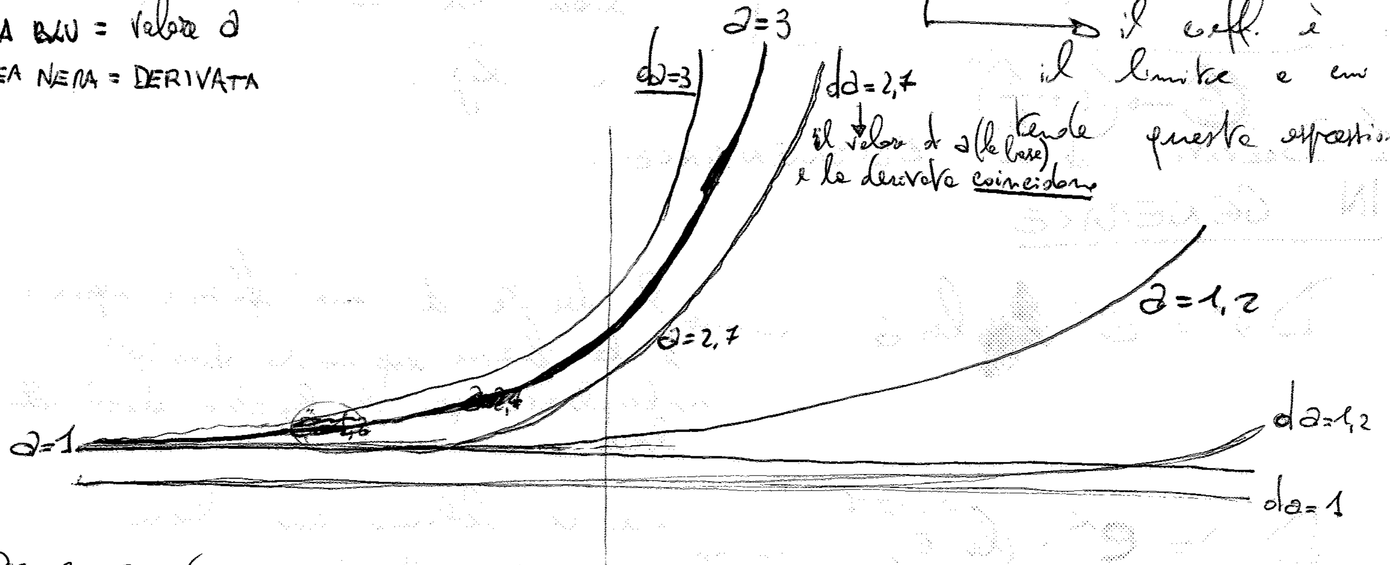
$$\frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

questo risultato mi dice che
• la derivata delle funz. espon. di base a è ancora la funz. espon. di base a moltiplicata eventualmente per un coefficiente

$$D a^x = k \cdot a^x$$

la derivata a^x = al prodotto del coefficiente per a^x → il coeff. è il limite a cui tende questa espressione

LINEA BLU = valore a
LINEA NERA = DERIVATA



PROPRIETA'
⇒ in un determinato valore della base la derivata dell'esponenziale in quella base è uguale alla funzione stessa

2 REGOLE DI DERIVAZIONE

• Proprietà di Linearità

Se prendo una COMBINAZIONE LINEARE ovvero ho 2 funzioni che moltiplico per 2 coefficienti appartenenti ai numeri reali e sommo questi

$$\left(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\right) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

La proprietà di linearità dice che

> LA DERIVATA DI UNA COMBINAZIONE LINEARE È LA COMBINAZIONE LINEARE DELLE DERIVATE

cioè

$$\underbrace{\left(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\right)'}_{\text{COMBINAZ. LINEARE}} = \underbrace{\alpha \cdot f'(x) + \beta \cdot g'(x)}_{\text{DERIVATA DELLA COMBIN. LINEARE}}$$

Scegliendo opportunamente i coefficienti avremo + OSSERVAZIONI:

① $\alpha \neq 0 \; ; \; \beta = 0 \longrightarrow \left[\alpha f(x)\right]' = \alpha f'(x)$

REGOLE DI SOMMA E SOTTRAZIONE

② $\alpha = 1 \; ; \; \beta = 1 \longrightarrow \left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

> LA DERIVATA DI UNA SOMMA È LA SOMMA DI DERIVATE

LO STESSO VALE PER LA ~~SOTTRAZIONE~~ DIFFERENZA

③ $\alpha = 1 \; ; \; \beta = -1 \longrightarrow \left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x)$