



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 643

DATA: 07/10/2013

APPUNTI

STUDENTE: Girardi

MATERIA: Analisi Dei Segnali

Prof. Visintin

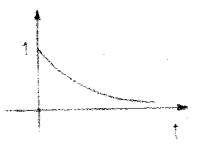
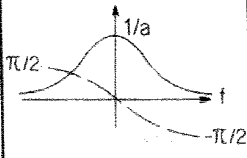
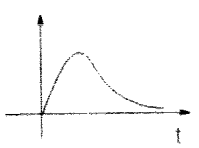
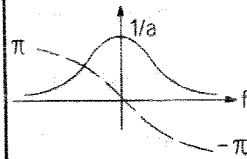
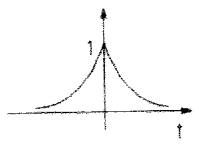
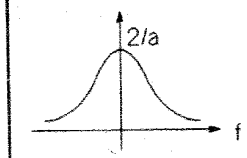
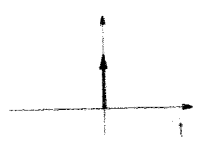
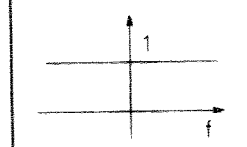
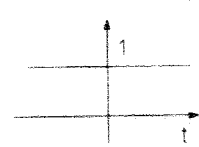

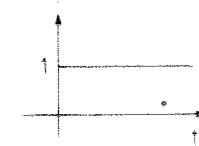
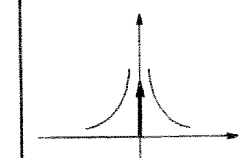
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

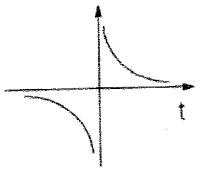
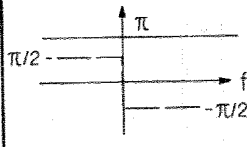
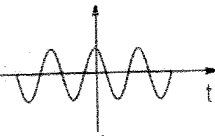
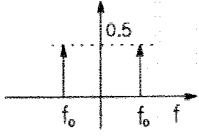
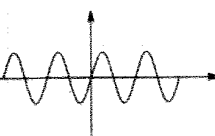
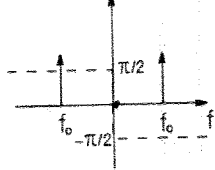
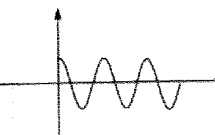
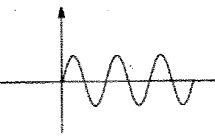
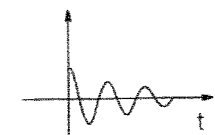
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

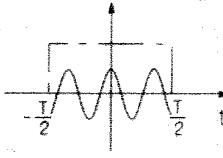
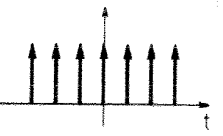
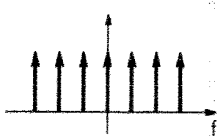
Sequenza $x(n)$	$X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	$\forall z \in C$
$\delta(n - N), N > 0$	z^{-N}	$z \neq 0$
$\delta(n + N), N > 0$	z^{+N}	$ z < \infty$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u(-n - 1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
$\alpha^n u(n)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha $
$-\alpha^n u(-n - 1)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z < \alpha $
$n\alpha^n u(n)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
$(n + 1)\alpha^n u(n)$	$\frac{1}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
$n\alpha^{n-1} u(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
$(n - 1)\alpha^n u(n)$	$\frac{2\alpha z^{-1} - 1}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
$n^2 \alpha^n u(n)$	$\frac{\alpha z^{-1}(1+\alpha z^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})^3}$	$ z > \alpha $
$-n\alpha^n u(-n - 1)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z < \alpha $
$\sin(\omega_o n)u(n)$	$\frac{\sin(\omega_o)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_o)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z > 1$
$\cos(\omega_o n)u(n)$	$\frac{1-\cos(\omega_o)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_o)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z > 1$
$\alpha^n \sin(\omega_o n)u(n)$	$\frac{\alpha \sin(\omega_o)z^{-1}}{1-2\alpha \cos(\omega_o)z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}$	$ z > \alpha$
$\alpha^n \cos(\omega_o n)u(n)$	$\frac{1-\alpha \cos(\omega_o)z^{-1}}{1-2\alpha \cos(\omega_o)z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}$	$ z > \alpha$
$\alpha^n [u(n) - u(n - N)]$	$\frac{1-\alpha^N z^{-N}}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z > 0$
$\frac{1}{n}u(n - 1)$	$\ln\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$	$ z > 1$

Tabella 6.2 Trasformate zeta di sequenze elementari.

Funzione del tempo $x(t)$		Funzione della frequenza $X(f)$	
1		$e^{-at}u(t) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$ 
2		$ate^{-at}u(t) \quad (a > 0)$	$\frac{a}{(a + j2\pi f)^2}$ 
3		$e^{-a t } \quad (a > 0)$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$ 
4		$\delta(t)$	1 
5		1	$\delta(f)$ 
6		$\delta^{(n)}(t)$	$(j2\pi f)^n$
7		$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}$ 

Proprietà della trasformata di Fourier

Funzione del tempo $x(t)$		Funzione della frequenza $X(f)$	
15		$\frac{1}{t}$	$\frac{\pi}{j} \operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} -j\pi, & f < 0 \\ 0, & f = 0 \\ j\pi, & f > 0 \end{cases}$ 
16		t^{-m} m intero ≥ 0	$\frac{(-j)^m \pi (2\pi f)^{m-1} \operatorname{sgn}(f)}{(m-1)!}$
17		$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$ 
18		$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$ 
19		$u(t) \cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{jf}{2\pi(f_0^2 - f^2)^+} + \frac{1}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
20		$u(t) \sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{f_0}{2\pi(f_0^2 - f^2)^+} + \frac{1}{4j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
21		$u(t)e^{-at} \cos(2\pi f_0 t),$ $a > 0$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$

Funzione del tempo $x(t)$		Funzione della frequenza $X(f)$	
29	 $p_T(t) \cos(2\pi f_0 t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t), & t < T/2 \\ 0, & t > T/2 \end{cases}$	$\frac{T}{2} \{ \text{Sinc} [(f - f_0)T] + \text{Sinc} [(f + f_0)T] \}$	
30	$t^n e^{\mp j 2\pi f_0 t},$ $n \text{ intero} > 0$	$\frac{j^n \delta^{(n)}(f \mp f_0)}{(2\pi)^n}$	
31	$t^n \sin(2\pi f_0 t),$ $n \text{ intero} > 0$	$\frac{j^{n-1}}{2(2\pi)^n} \{ \delta^{(n)}(f - f_0) - \delta^{(n)}(f + f_0) \}$	
32	$t^n \cos(2\pi f_0 t)$ $n \text{ intero} > 0$	$\frac{j^n}{2(2\pi)^n} \{ \delta^{(n)}(f - f_0) + \delta^{(n)}(f + f_0) \}$	
33	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$	
34	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(nT) \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G\left(f - \frac{n}{T}\right)$	
35	 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$	

Funzione del tempo $x(t)$		Funzione della frequenza $X(f)$	
43	$\cosh(2\pi\alpha t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f + j\alpha) + \delta(f - j\alpha)]$	
44	$t^n e^{2\pi\alpha t}$	$\frac{j^n}{(2\pi)^n} \delta^{(n)}(f + j\alpha)$	
45	$e^{\alpha t} u(t),$ α reale o complesso $\mathcal{R}\{\alpha\} > 0$	$\frac{1}{j2\pi f - \alpha} + \frac{\delta(f + j\frac{\alpha}{2\pi})}{2}$	

Macelleria di Girardi Andrea **DATA REGISTRAZIONI: Venerdì 13/08/10**

FIRMA RESP. AUTOCONTROLLO  FIRMA RESP. RINTRACCIABILITA' 

HACCP - Ricevimento merci:

Per l'elenco delle merci consegnate in data odierna, vedere il Documento di Trasporto e/o la fattura accompagnatoria.

Nome fornitore	Merchi	Temp.	Scad.	Conf.	Accett.
Vallino s.r.l	Merchi deperibili	+0°C - +4°C	C	C	A
Rovagnati s.r.l	Merchi deperibili	+0°C - +4°C	C	C	A

HACCP – Temperatura di conservazione a freddo:

Nome attrezzatura	Collocazione	T. min.	T.max	T.rilev.
Vetrina espositiva (0/+4°C) (1)	Bancone (macelleria + gastronomia)	0°C	+4°C	+1°C
Vetrina espositiva (0/+4°C) (2)	Bancone (macelleria + gastronomia)	0°C	+4°C	+1°C
Vetrina espositiva (0/+4°C) (3)	Bancone (macelleria + gastronomia)	0°C	+4°C	0°C
Cella frigo – temp. Positiva (4)	Cucina (laboratorio sezionamento)	0°C	+4°C	+2°C
Cella frigo – temp. Positiva (5)	Cucina (laboratorio sezionamento)	0°C	+4°C	0°C
Cella frigo – temp. Positiva (6)	Cucina (laboratorio insaccati)	0°C	+4°C	+2°C
Frigo a colonna – temp. Positiva (7)	Cucina (laboratorio gastronomia)	0°C	+4°C	spento
Frigo a colonna – temp. Positiva (8)	Cucina (laboratorio gastronomia)	0°C	+4°C	+2°C

HACCP – Controllo pulizie superfici e attrezzature:

La registrazione si riferisce al piano di pulizie di attrezzature e superfici presente nel piano di autocontrollo:

Nome locale	Attrezzature	Superfici	Esito
Area bancone (macelleria + gastronomia)	Affettatrice, segaossa, tritacarne, vetrina espositiva (0/+4°C), vetrina espositiva (0/+4°C), vetrina espositiva (0/+4°C)	Piani espositivi, contenitore per rifiuti, piani di lavoro, lavello pedana	CONF.
Area preparazione (laboratorio sezionamento)	Formatrice per hamburger, sterilizzatore per coltelli, taglieri, cella frigo – temp. positiva, cella frigo – temp. positiva,	pavimento, contenitore per rifiuti, piani di lavoro, lavello, armadietti	CONF.
Area preparazione (laboratorio insaccati)	Insaccatrice, macchina per sottovuoto, taglieri, tritacarne, cella frigo – temp. positiva,	pavimento, contenitore per rifiuti, piani di lavoro, lavello, armadietti	CONF.
Area preparazione (laboratorio gastronomia)	Attrezzature per la preparazione, cappa aspirante, cucina a gas, pentolame e stoviglie, taglieri, frigo a colonna – temp. positiva, frigo a colonna – temp. positiva, forno a gas	pavimento, contenitore per rifiuti, piani di lavoro, lavello, armadietti	CONF.
Servizio igienico uso personale		pavimento, contenitore per rifiuti, rubinetterie e sanitari	CONF.
spogliatoio		pavimento	CONF.
Vendita ed esposizione (negozi)		Pavimento, piani espositivi	CONF.

RINTRACCIABILITA' – Registro utilizzo materie prime:

In data odierna sono terminate le seguenti materie prime:

Fornitore	Alimenti
Vallino s.r.l	Carne suina fresca
Rovagnati s.r.l	Salumi interi

RINTRACCIABILITA' – Registro lotti di produzione:

In data odierna sono stati prodotti i seguenti lotti (N.B: per le linee di produzione vedere diagrammi di flusso)

Alimento	Lotto
Rolata di carne	L13/08/10
Polpette	L13/08/10
Tasca ripiena	L13/08/10
	L13/08/10

RINTRACCIABILITA' - Registro utilizzo materie prime:

In data odierna sono terminate le seguenti materie prime:

Fornitore	Alimenti
Biessetti s.r.l	Carne avicola fresca, carne avicola sottovuoto
Azienda Agricola Naturalmente	Carne coniglio fresca

RINTRACCIABILITA' - Registro lotti di produzione:

In data odierna sono stati prodotti i seguenti lotti (N.B: per le linee di produzione vedere diagrammi di flusso)

Alimento	Lotto
Antipasto a base di uovo	L 22/08/16
Carne marinata	L 22/08/16
Lasagne	L 22/08/16
Hamburger	L 22/08/16
Lingua bovina	L 22/08/16
Maionese	L 22/08/16
Polpette	L 22/08/16
Rolata di carne	L 22/08/16
Vitello tonnato	L 22/08/16

PROPRIETA' DELTA DI DIRAC:

$$\begin{aligned} \alpha(t) * \delta(t-t_0) &= \alpha(t-t_0) \\ \alpha(t) \cdot \delta(t-t_0) &= \alpha(t_0) \delta(t-t_0) \\ \int \alpha(t) \cdot \delta(t-t_0) &= \alpha(t_0) \\ \alpha(t) * \delta(t) &= \alpha(t) \\ \alpha(t) \cdot \delta(t) &= \alpha(0) \delta(t) \\ \int \alpha(t) \cdot \delta(t) &= \alpha(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha[n] * \delta[k-n] &= \alpha[k-n] \\ \alpha[n] \cdot \delta[k-n] &= \alpha[k] \delta[k-n] \\ \sum_n \alpha[n] \cdot \delta[k-n] &= \alpha[k] \end{aligned}$$

ENERGIA:

$$\mathcal{E}_x = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha(t)|^2 dt \rightarrow \text{Joule}$$

↳ coefficiente correttivo x ottenere sempre Joule.

PROPRIETA' AUTOCORRELAZIONE



- $R_x(0) = \mathcal{E}_x$

- $\text{MAX } R_x(\tau) \rightarrow \tau = 0$

- **PARITA'** $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$

- $0 \leq \left| \int \alpha(t) \alpha(t+\tau) dt \right|^2 \leq \underbrace{\int |\alpha(t)|^2 dt}_{\mathcal{E}_x} \cdot \underbrace{\int |\alpha(t+\tau)|^2 dt}_{\mathcal{E}_x}$

Macelleria di Girardi Andrea **DATA REGISTRAZIONI: Sabato 29/08/10**

FIRMA RESP. AUTOCONTROLLO  FIRMA RESP. RINTRACCIABILITA' 

HACCP - Ricevimento merci:

Per l'elenco delle merci consegnate in data odierna, vedere il Documento di Trasporto e/o la fattura accompagnatoria.

Nessuna merce consegnata in data odierna

HACCP – Temperatura di conservazione a freddo:

Nome attrezzatura	Collocazione	T. min.	T.max	T.rilev.
Vetrina espositiva (0/+4°C) (1)	Bancone (macelleria + gastronomia)	0°C	+4°C	+1°C
Vetrina espositiva (0/+4°C) (2)	Bancone (macelleria + gastronomia)	0°C	+4°C	+1°C
Vetrina espositiva (0/+4°C) (3)	Bancone (macelleria + gastronomia)	0°C	+4°C	0°C
Cella frigo – temp. Positiva (4)	Cucina (laboratorio sezionamento)	0°C	+4°C	+2°C
Cella frigo – temp. Positiva (5)	Cucina (laboratorio sezionamento)	0°C	+4°C	0°C
Cella frigo – temp. Positiva (6)	Cucina (laboratorio insaccati)	0°C	+4°C	+2°C
Frigo a colonna – temp. Positiva (7)	Cucina (laboratorio gastronomia)	0°C	+4°C	spento
Frigo a colonna – temp. Positiva (8)	Cucina (laboratorio gastronomia)	0°C	+4°C	spento

HACCP – Controllo pulizie superfici e attrezzature:

La registrazione si riferisce al piano di pulizie di attrezzature e superfici presente nel piano di autocontrollo:

Nome locale	Attrezzature	Superfici	Esito
Area bancone (macelleria + gastronomia)	Affettatrice, segaossa, tritacarne, vetrina espositiva (0/+4°C), vetrina espositiva (0/+4°C), vetrina espositiva (0/+4°C)	Piani espositivi, contenitore per rifiuti, piani di lavoro, lavello pedana	CONF.
Area preparazione (laboratorio sezionamento)	Formatrice per hamburger, sterilizzatore per coltelli, taglieri, cella frigo – temp. positiva, cella frigo – temp. positiva,	pavimento, contenitore per rifiuti, piani di lavoro, lavello, armadietti	CONF.
Area preparazione (laboratorio insaccati)	Insaccatrice, macchina per sottovuoto, taglieri, tritacarne, cella frigo – temp. positiva,	pavimento, contenitore per rifiuti, piani di lavoro, lavello, armadietti	CONF.
Area preparazione (laboratorio gastronomia)	Attrezzature per la preparazione, cappa aspirante, cucina a gas, pentolame e stoviglie, taglieri, frigo a colonna – temp. positiva, frigo a colonna – temp. positiva, forno a gas	pavimento, contenitore per rifiuti, piani di lavoro, lavello, armadietti	CONF.
Servizio igienico uso personale		pavimento, contenitore per rifiuti, rubinetterie e sanitari	CONF.
spogliatoio		pavimento	CONF.
Vendita ed esposizione (negozi)		Pavimento, piani espositivi	CONF.

RINTRACCIABILITA' – Registro lotti di produzione:

In data odierna sono stati prodotti i seguenti lotti (N.B: per le linee di produzione vedere diagrammi di flusso)

Alimento	Lotto
Rolata di carne	L 29/08/10
Polpette	L 29/08/10
Tasca ripiena	L 29/08/10
Salsiccia	L 29/08/10
Spiedini	L 29/08/10
Hamburger	L 29/08/10

ETICHETTATURA DELLE CARNI BOVINE

Regolamento CE n° 1760/2000 e n° 1825/2000

Le carni in vendita appartengono al seguente bovino:

Nato in FRANCIA

Allevato in FRANCIA - ITALIA

Macellato in ITALIA Macellato n° 2766/M CEE

Asl n° TO 5 Regione Piemonte

N° di macellazione oppure marca auricolare

1413 / FR3211900961

LA CONVOLUZIONE GODE DELLA PR. COMMUTATIVA:

$$\left[\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \end{aligned} \right] \begin{array}{l} \text{TEMPO} \\ \text{CONTINUO} \end{array}$$

$$\left[\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] \\ y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k] \end{aligned} \right] \begin{array}{l} \text{TEMPO} \\ \text{DISCRETO} \end{array}$$

TEMPO DISCRETO $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]$

$$x[n] \delta[n-k] = x[k] \delta[n-k]$$

$$\sum_k x[k] \delta[n-k] = x[n]$$

TEMPO CONTINUO $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$

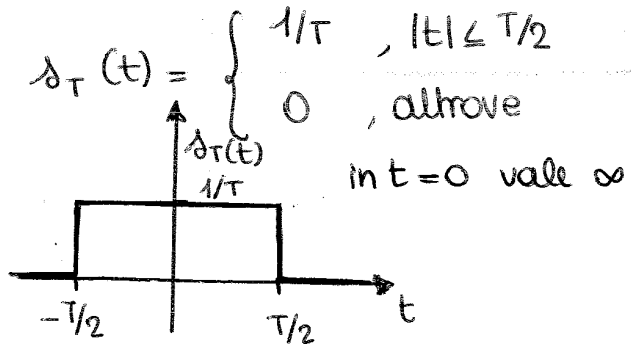
$$x(t) \delta(t-k) = x(k) \delta(t-k)$$

$$\int x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t)$$

DELTA DI DIRAC

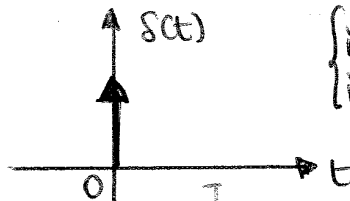
$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \delta_T(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$



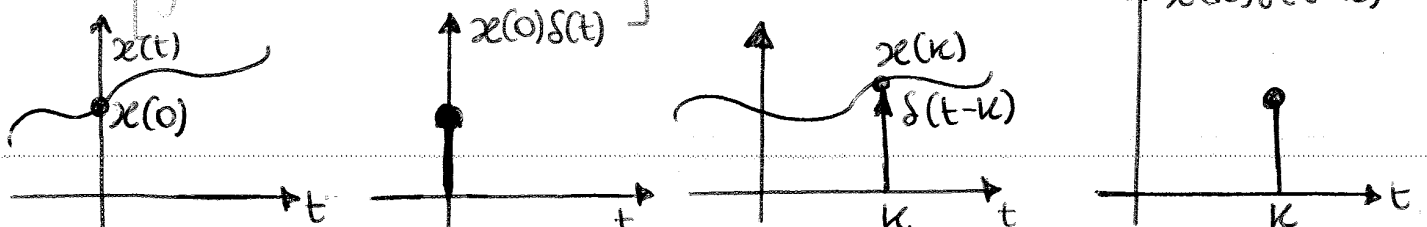
Facendo tendere $T \rightarrow 0$ il rettangolo si avvicina sempre di più ad avere una base infinitesima e un'altezza infinita. L'AREA RIMANE COSTANTE!

GRAFICO $\delta(t)$



$$\begin{cases} \text{in } t=0 & \delta(t) \rightarrow \infty \\ \text{in } t \neq 0 & \delta(t) = 0 \end{cases}$$

N.B. $x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \delta(t)$
 $\int x(t) \cdot \delta(t) dt = x(0)$



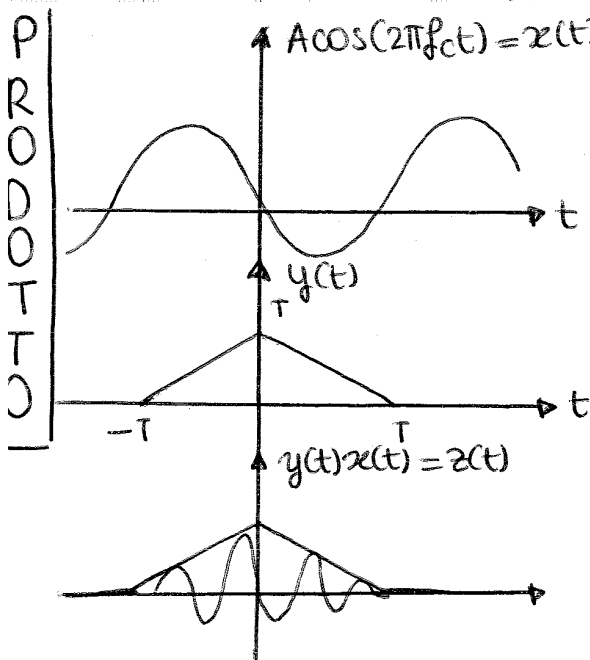
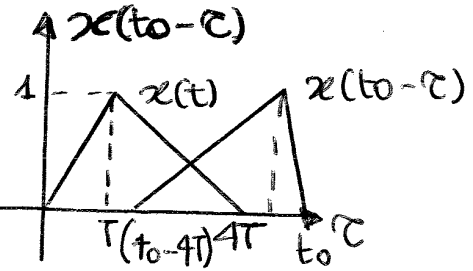
N.B. $x(t-\tau) \delta(\tau) = ?$ devo trovare quel valore di τ per cui si abbia $\delta(0) \rightarrow \boxed{\tau=0}$

$$x(t-\tau) \delta(\tau) = x(\tau) \delta(\tau)$$

se $t < 0 \rightarrow h(t) = 0$ Per i sistemi casuali fisicamente
 se $\exists h(t) < 0 \rightarrow$ sist. non fisicamente realiz. realizzabili!

I segnali si disegnano sempre in funzione della loro variabile

$x(t_0 - \tau) \rightarrow$ (in funzione di τ)
Ribalto e lo faccio avanzare di t_0 .



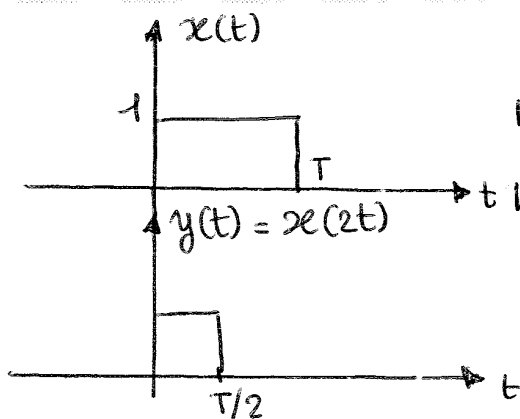
OSSERVAZIONE:

Per trovare gli zeri di una funzione (seno ad esempio):

dove $\text{sen}(\pi f T) = 0$?

ho gli zeri se $\pi f T = \pi$

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$



SEGNALE

$k > 1$ STRINGE

$k < 1$ ALLARGA

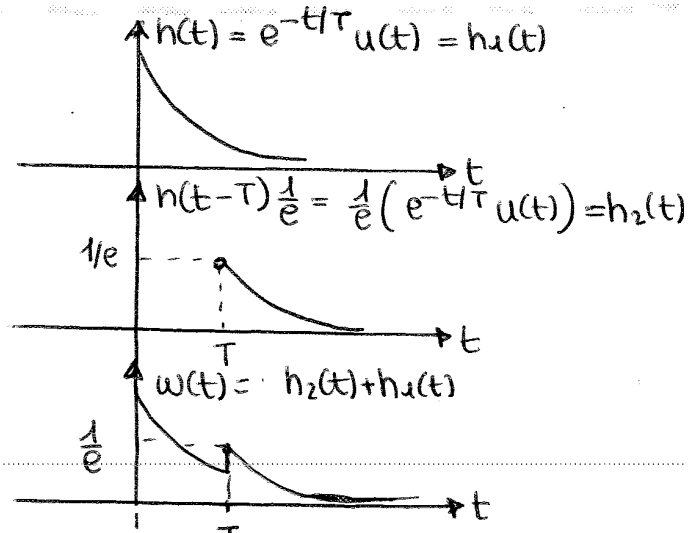
$\mathcal{C}\{x(t)\}$

ALLARGA

STRINGE

N.B.
 La convoluzione di 2 segnali
 RETTANGOLI di PARI DURATA (T)
 e' un triangolo di BASE = 2T
 e altezza = T.

S
O
M
M
A



• Integrazione : $H(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{S(f)}{2}$

Imponendo $x(0) = 0$

$$H(f) = \frac{1}{j2\pi f}$$

Non è un sistema STABILE!

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \longrightarrow \text{integrazione} \longrightarrow Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

• Derivazione ennesima:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right\} = (j2\pi f)^n X(f)$$

$$H(f) = (j2\pi f)^n$$

Il blocco derivata n-esima si può intendere come un sistema a cascata di n-derivatori.

• Sfasamento :

$$\mathcal{F} \{ x(kt) \} = \frac{1}{|k|} X\left(\frac{f}{k}\right)$$

Quando ho la convoluzione tra 2 segnali:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

Devo considerare \neq intervalli di integrazione.

$$t < 0 \rightarrow \boxed{y(t) = 0} \quad (\times \text{ essere fisicamente realizzabile})$$

e poi considero come estremi tutti quei punti in cui il prodotto dei due segnali è \neq da zero.

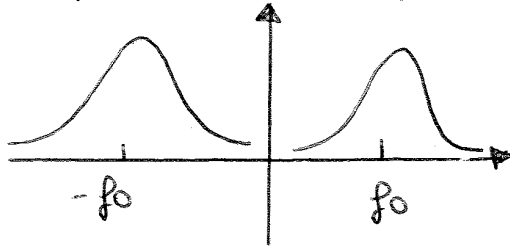
Immagino di tenere fermo un segnale e di muovere l'altro mano a mano che il tempo scorre.

$$x(t) \delta(t-\tau) = x(\tau) \delta(t-\tau)$$

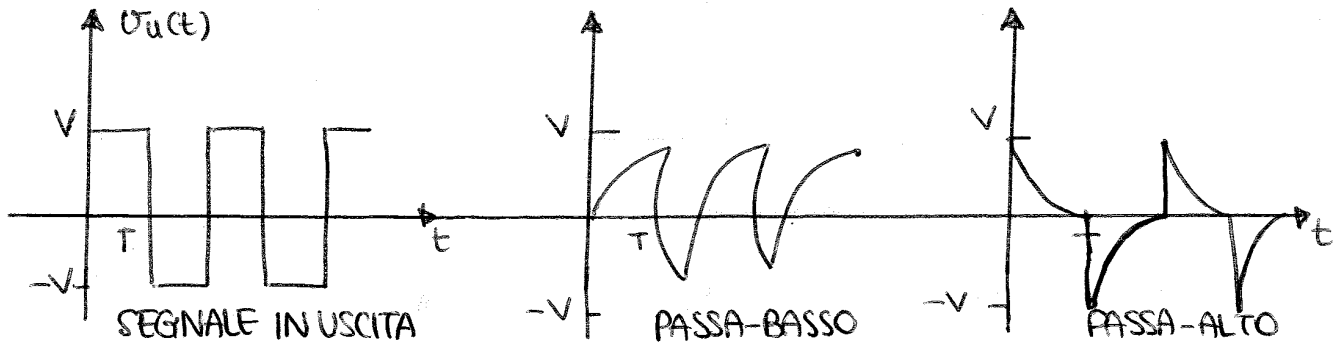
$$X(f) * \delta(f-f_0) = X(f-f_0)$$

FILTRO PASSA-BANDA

lascia passare le frequenze attorno ad f_0 .



Si riconosce dalla presenza di un coseno o un seno.



$$\mathcal{F}\{y^2(t)\} = \mathcal{F}\{y(t) \cdot y(t)\} = Y(f) * Y(f)$$

CIRCUITO FISICAMENTE REALIZZABILE $\rightarrow h(t) = 0, t < 0$
 $\rightarrow h(t)$ deve essere reale

STABILITÀ B.I.B.O. \rightarrow se $|x(t)| \leq A < \infty$ allora $|y(t)| \leq B < \infty$] se l'entrata è limitata in ampiezza anche l'uscita deve esserlo

L'integratore non è stabile in senso B.I.B.O.

CONDIZIONI EQUIVALENTI per avere stabilità BIBO:

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < C < \infty$$

oppure

$$\rightarrow |H(f)| < \infty, \forall f$$

+ VEDI ESEMPIO circuito INTEGRATORE NON STABILE

Energia di un segnale

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

↳ termine correttivo per ottenere sempre Joule

Energia assorbita in un intervallo di tempo:

$$\mathcal{E}_x = \int_{T_0}^{T_1} p(t) dt$$

, $p(t) = \text{potenza istantanea} = v(t) \cdot i(t)$

$P = \text{potenza media di } p(t)$

I segnali a ENERGIA FINITA hanno $\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$

L'ENERGIA NON PUO' ESSERE NEGATIVA!

$$\mathcal{E}_x > 0$$

TEOREMA DI PARSEVAL

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

DIM: pongo $y(t) = x^2(t) = x(t) \cdot x(t)$, $x(t) \in \mathbb{R}$

$$Y(f) = X(f) * X(f) = \int X(u) X(f-u) du$$

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int y(t) dt = Y(0) = \int X(u) X(-u) du$$

↳ posso togliere i | | perche $x(t) \in \mathbb{R}$

$$X(-u) = X^*(u)$$

$$\mathcal{E}_x = Y(0) = \int X(u) \cdot X^*(u) du = \int |X(u)|^2 du = \int |X(f)|^2 df$$

$$* Y(0) = \int y(t) \underbrace{e^{-j2\pi \cdot 0 \cdot t}}_1 dt$$

PROPRIETA' FUNZIONE DI AUTO CORRELAZIONE

$$R_x(\tau) = \int x(t)x(t+\tau)dt = \mathcal{F}^{-1} \{ |X(f)|^2 \}$$

1) DISUGUAGLIANZA SCHWARTZ

$$|R_x(\tau)|^2 \leq \left| \int x(t)x(t+\tau)dt \right|^2 \leq \int |x(t)|^2 dt \int |x(t+\tau)|^2 dt \leq E_x^2$$

le MAX \rightarrow $R_x(0) = \int |x(t)|^2 dt = E_x$

2) PARITA'

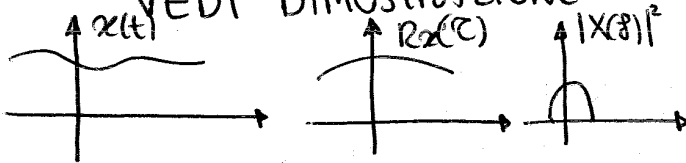
$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

SEGNALE DIFFERENZA (\approx errore)

$$e(t) = x(t) - x(t+\tau)$$

$$E_e = 2(E_x - R_x(\tau)) \rightarrow \text{piccola se } E_x \approx R_x(\tau)$$

VEDI DIMOSTRAZIONE



- $x(t)$ e' LENTO:
- $\rightarrow R_x(\tau)$ decade lentamente
 - \rightarrow Trasnf. di Fourier stretta
 - \rightarrow Spettro di Energia banda stretta

MUTUA CORRELAZIONE

$$z(t) \triangleq \alpha x(t) + \beta y(t)$$

$$R_z(\tau) = \alpha^2 R_x(\tau) + \beta^2 R_y(\tau) + \underbrace{\alpha\beta R_{xy}(\tau) + \alpha\beta R_{yx}(\tau)}_{\text{funzioni di mutua correlazione}}$$

$$R_{xy}(\tau) = \int y(t)x(t+\tau)dt$$

$$R_{yx}(\tau) = \int x(t)y(t+\tau)dt$$

SPETTRI MUTUI

$$S_z(f) = |Z(f)|^2 = Z(f) \cdot Z^*(f) =$$

$$= \alpha^2 S_x(f) + \beta^2 S_y(f) + \underbrace{\alpha\beta S_{xy}(f) + \alpha\beta S_{yx}(f)}_{\text{spettri mutui}}$$

$$S_{xy}(f) = X(f) Y^*(f) = \mathcal{F} \{ R_{xy}(\tau) \}$$

$$S_{yx}(f) = X^*(f) Y(f) = \mathcal{F} \{ R_{yx}(\tau) \}$$

$$\langle \Psi_k(t), \Psi_e(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k(t) \Psi_e^*(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi k \frac{t}{T}} e^{-j2\pi e \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(k-e)\frac{t}{T}} dt$$

$$k=e \rightarrow \langle \Psi_k(t), \Psi_e(t) \rangle = \frac{1}{T} \cdot T = 1$$

$$\rightarrow \langle \Psi_k(t), \Psi_k(t) \rangle$$

$$k \neq e \rightarrow \langle \Psi_k(t), \Psi_e(t) \rangle = 0$$

$B = \{ \Psi_k(t) \}_{k=-\infty}^{+\infty}$ \rightarrow Insieme dei segnali B costituiscono una base ORTONORMALE : $\begin{cases} \text{modulo 1} \\ \text{e } \perp \text{ agli altri} \end{cases}$

\downarrow
 È UNITARIA
 + tra di loro

$$\langle \Psi_k(t), \Psi_e(t) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } k=e \\ 0 & \text{se } k \neq e \end{cases} \rightarrow \text{ } \delta \text{ di Kronecker}$$

La base B è completa per i segnali $x(t)$.

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \Psi_k(t)$$

$x(t)$ è scrivibile come \sum di una combinazione dei segnali di B .

Quindi il segnale errore

$$e(t) = x_T(t) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \Psi_k(t) = 0$$

I due segnali coincidono.

$$c_k = \langle x_T(t), \Psi_k(t) \rangle$$

Infatti:

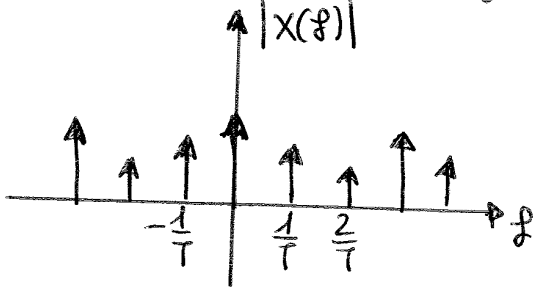
$$\langle x_T(t), \Psi_e(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) \Psi_e^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \Psi_k(t) \right] \cdot \Psi_e^*(t) dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k(t) \cdot \Psi_e^*(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta_{k,e} = \boxed{c_e}$$

TRASFORMATA DI 1 SEGNALE PERIODICO

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum \mu_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}\right\} =$$

$$= \sum \mu_k \mathcal{F}\left\{e^{j2\pi k \frac{t}{T}}\right\} \Rightarrow \boxed{\sum \mu_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = X(f)}$$



Un segnale periodico da uno

→ "SPETTRO A RIGHE"

Le δ si muovono a multipli di $\left(\frac{1}{T}\right)$

FREQUENZA FONDAMENTALE del segnale

$$\mu_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-j2\pi 0 \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt \rightarrow \text{VALOR MEDIO di } x(t)$$

Utile per controllare i calcoli

$$X(f) = \frac{1}{T} X_T(f) \underbrace{\sum \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)}_{\text{TRENO DI DELTA}}$$

TRASFORMATE IMPORTANTI

SEGNALE SINUSOIDALE

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

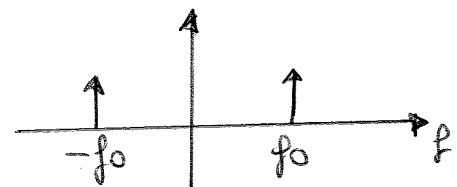
$$T = \frac{1}{f_0}$$

$$x(t) = \sum \mu_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}} = \mu_1 e^{j2\pi \frac{t}{T}} + \mu_{-1} e^{-j2\pi \frac{t}{T}} =$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{A}{2} e^{j\theta} e^{j2\pi \frac{t}{T}} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-j2\pi \frac{t}{T}}}$$

FORMULA DI EULERO

$$X(f) = \mu_1 \delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \mu_{-1} \delta\left(f + \frac{1}{T}\right)$$



SIMMETRIE

PARITÀ:

1-1

$$X_T(-f) = X_T^*(f)$$

$$|X(f)| \rightarrow \text{FUNZ. PARI}$$

$$\angle X(f) \rightarrow \text{FUNZ. DISPARI}$$

$$\rightarrow \begin{cases} |M_k| = |M_k| \\ \angle M_{-k} = -\angle M_k \end{cases}$$

POTENZA DI 1 SEGNALE PERIODICO

$$\begin{aligned} P_{\text{re}} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \sum_k M_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \cdot \sum_N M_N^* e^{-j2\pi N \frac{t}{T}} dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_k \sum_N \underbrace{\int_{-T/2}^{+T/2} e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \cdot e^{-j2\pi N \frac{t}{T}} dt}_{\delta_{N,k} = \begin{cases} T & \text{se } k=N \\ 0 & \text{se } k \neq N \end{cases}} = \frac{1}{T} \sum_k \sum_N \delta_{k,N} T M_k M_N^* = \\ &= \sum_k M_k M_k^* = \sum_k |M_k|^2 \end{aligned}$$

$$P_{\text{re}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_k |M_k|^2$$

POTENZA SENO ω $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) =$

$$\frac{A}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)} =$$

Il tuo seno non è di certo potente!

$$= \underbrace{\frac{A}{2} e^{j\theta}}_{M_1} e^{j2\pi f_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2} e^{-j\theta}}_{M_{-1}} e^{-j2\pi f_0 t}, \quad f_0 = \frac{1}{T}$$

$$= M_1 e^{j2\pi \frac{t}{T}} + M_{-1} e^{j2\pi \frac{t}{T}}$$

$$P_{\text{re}} = \sum_k |M_k|^2 = |M_1|^2 + |M_{-1}|^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{A^2}{2} = P_{\text{re}}}$$

Potenza di un segnale che oscilla tra $-\frac{A}{2}$ e $\frac{A}{2}$

$$x(t) = \sum_k M_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$$

$$R_{xe}(\tau) = \sum_k |M_k|^2 e^{j2\pi k \frac{\tau}{T}}$$

$$X(f) = \sum_k M_k \delta(f - \frac{k}{T}) = \frac{1}{T} X_T(f) \sum_k \delta(f - \frac{k}{T})$$

$$G_{xe}(f) = \sum_k |M_k|^2 \delta(f - \frac{k}{T})$$

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

Per passare da segnali a tempo continuo a segnali a tempo discreto.

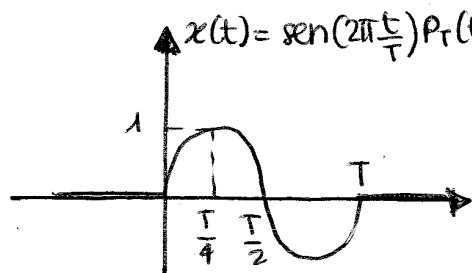
$$x(t) \longrightarrow x(nT_s)$$

Il campionatore preleva il segnale ogni T_s secondi.

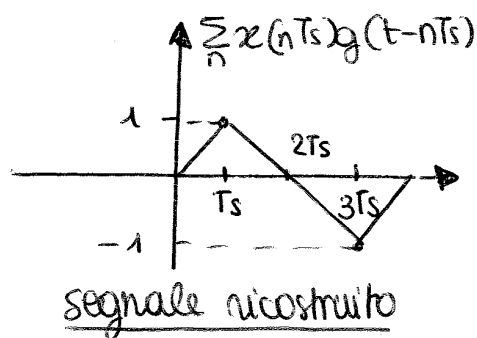
T_s = INTERVALLO di campionamento
 $f_s = \frac{1}{T_s}$ → FREQUENZA di campionamento (campioni / secondo)

INTERPOLAZIONE LINEARE:

$$x(t) = \sum_n x(nT_s) g(t - nT_s)$$



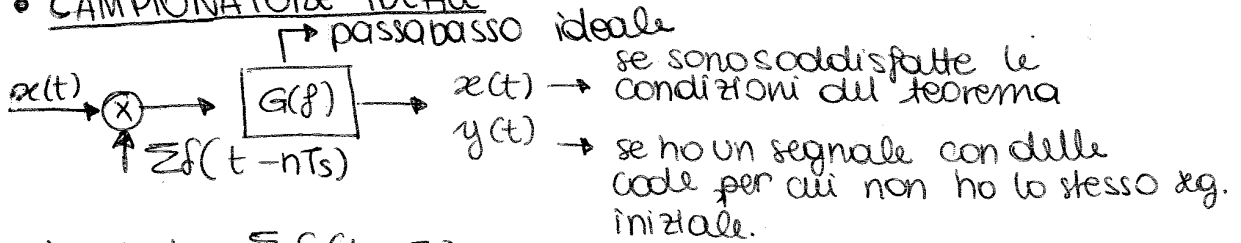
formula x ricostruire il segnale nel dominio del tempo → è un'APPROSSIMAZIONE perché si ottengono tanti più punti quanto è piccolo T_s .



n	$x(nT_s)$
-1	0
0	0
1	1
-2	0
2	0
-3	0
+3	-1

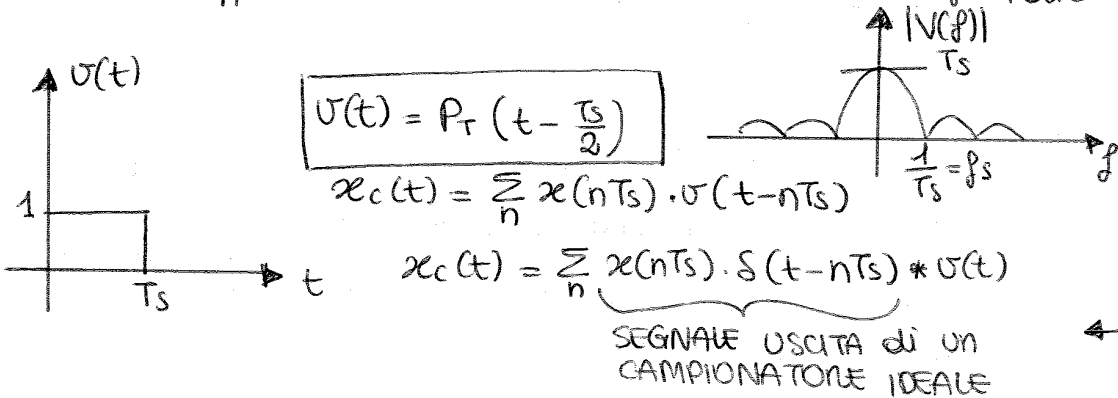
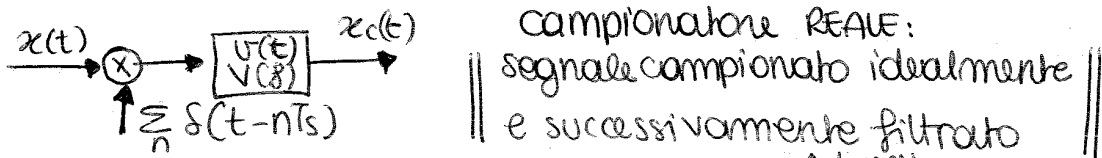
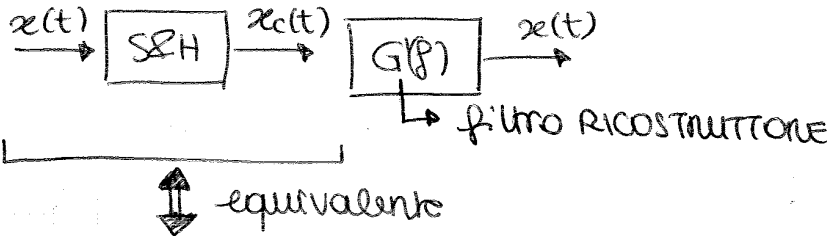
$$T_s = \frac{\pi}{4}$$

• CAMPIONATORE IDEALE



In laboratorio non ho $\sum_n \delta(t - nT_s)$ quindi:

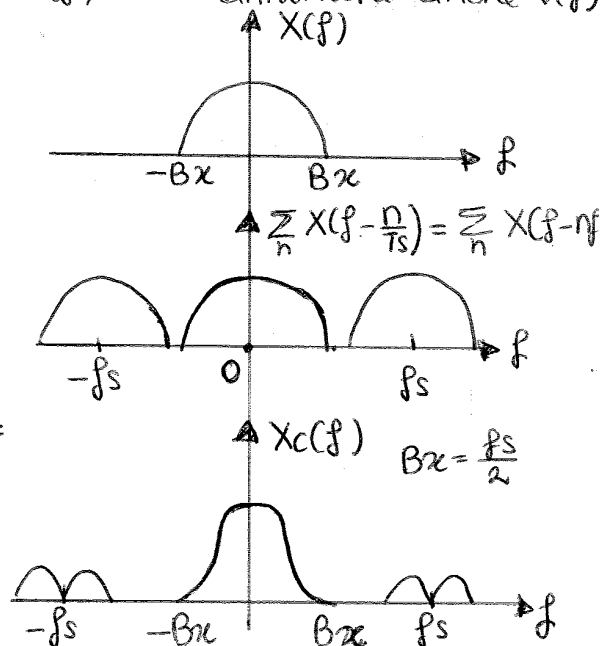
• CAMPIONATORE REALE : "SAMPLE & HOLD" (S&H) ("campiona e mantiene")



Per ottenere lo stesso segnale dell'entrata, $G'(f)$ deve annullare anche $V(f)$

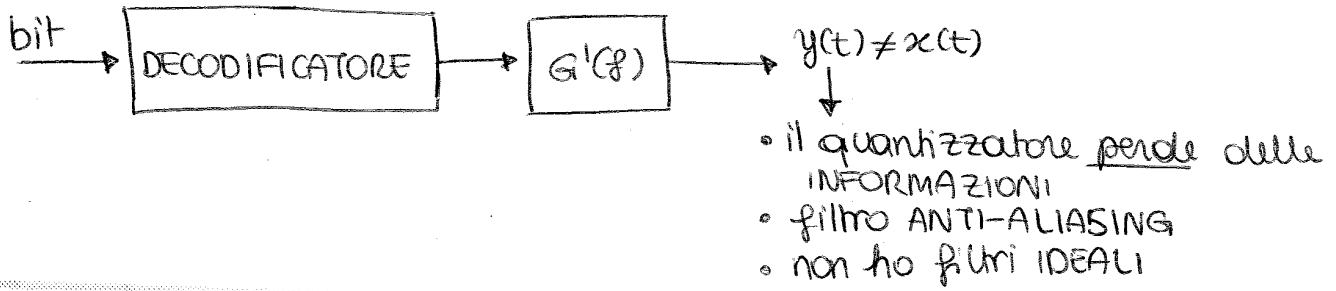
$$G'(f) = \frac{G(f)}{V(f)}$$

$$\begin{aligned} X_c(f) &= \mathcal{F} \left\{ \left[\sum_n x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) \right] * v(t) \right\} = \\ &= \mathcal{F} \left\{ \sum_n x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) \right\} \cdot \mathcal{F} \{ v(t) \} = \\ &= \left[\mathcal{F} \{ x(t) \} * \mathcal{F} \left\{ \sum_n \delta(t - nT_s) \right\} \right] \cdot V(f) = \\ &= \left[X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_n \delta(f - \frac{n}{T_s}) \right] \cdot V(f) = \\ X_c(f) &= \left[\frac{1}{T_s} \sum_n X(f) * \delta(f - \frac{n}{T_s}) \right] \cdot V(f) = \end{aligned}$$

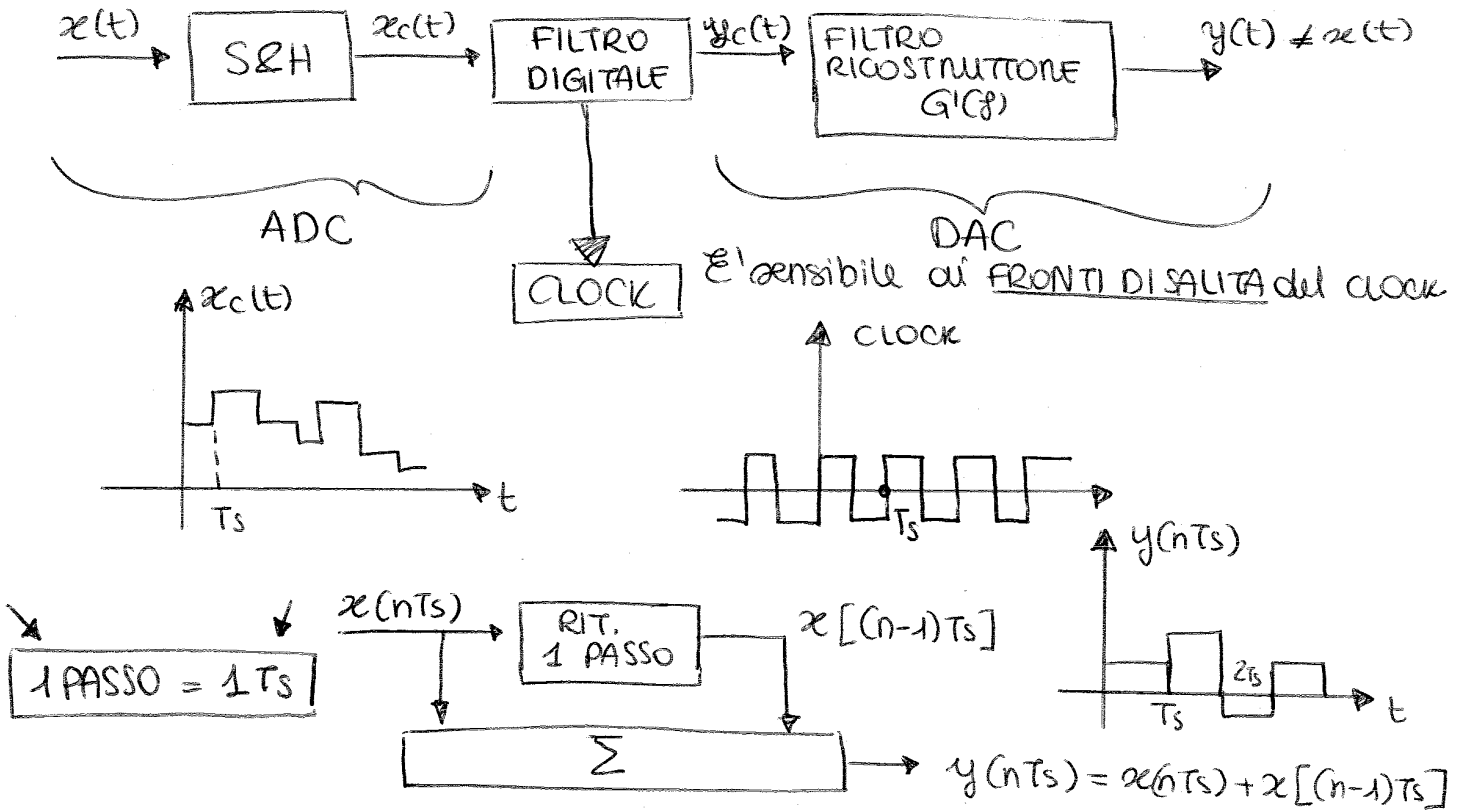


→ $V(f)$ aggiunge degli zeri sulle repliche
 → $V(f)$ deforma $\sum_n X(f - \frac{n}{T_s}) * k$ la

DAC → Digital to Analogue Converter



FILTRI DIGITALI (non considero quantizzazione e codifica)



FILTRI DIGITALI \neq FILTRI ANALOGICI (resistenze, condensatori)

AUTOCORRELAZIONE

• energia finita:

$$R_x(m) = \sum x^*[n] x[n+m]$$

↓ RITARDO

• periodico:

$$R_x(m) = \frac{1}{M} \sum_{N=0}^{M-1} x^*[n] x[n+m]$$

AUTOFUNZIONE

$$x[n] = \sum_k x[k] \delta[n-k]$$

Cerco $w[n]$ tale che:

$$\sum_k w[k] h[n-k] = \lambda w[n]$$

soluzione: $w[n] = z^n$, con $z \in \mathcal{R}$

$$\sum_k w[k] h[n-k] = \sum_k h[k] w[n-k] = \sum_k h[k] z^{(n-k)} =$$

$$\Rightarrow z^n \underbrace{\sum_k h[k] \cdot z^{-k}}_{\lambda}$$

$$\lambda = H(z) = \sum_k h[k] \cdot z^{-k}$$

- FUNZIONE DI TRASFERIMENTO del SISTEMA
- TRASFORMATA ZETA di $h[n]$
- (è l'analogo di $H(s)$ = trasformata di Laplace).

In generale:

$$X(z) = \sum_k x[n] z^{-n}$$

• TRASFORMATE NOTEVOLI: \exists region

• $\mathcal{Z}\{ \delta[n] \} = 1$

• $\mathcal{Z}\{ \delta[n-1] \} = z^{-1}$

• $\mathcal{Z}\{ \delta[n-M] \} = z^{-M}$

• $\mathcal{Z}\{ P_M[n] \} = \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}}$

• $\mathcal{Z}\{ u[n] \} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$

• $\mathcal{Z}\{ u[n] \} = \frac{z}{z-1}$

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{n=0}^{(N-1)} \alpha^n = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}$$

$$z^{-M} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha}$$

$$\alpha = z^{-1}$$

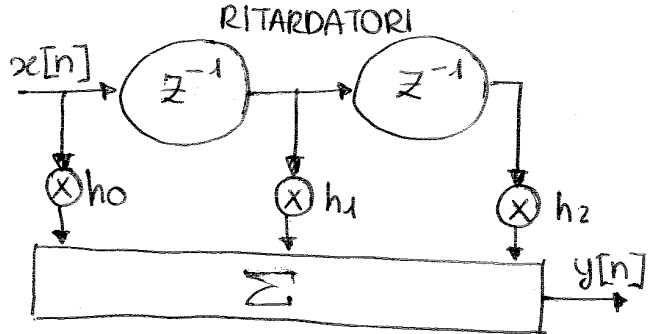
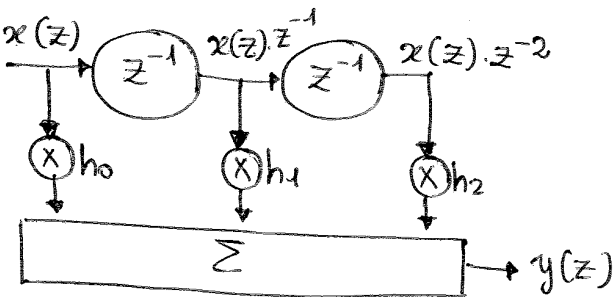
ROC = regione di convergenza
 delle trasformate
 ZETA.
 $|z| > 1$

$$\begin{aligned} \cdot \mathcal{Z}\{n \alpha^n u[n]\} &= -\mathcal{Z} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-\alpha} \right) = -z \left[\frac{(z-\alpha) - z \cdot 1}{(z-\alpha)^2} \right] = \\ &= -z \left[\frac{z-\alpha-z}{(z-\alpha)^2} \right] = \boxed{\frac{z\alpha}{(z-\alpha)^2}} \end{aligned}$$

$$\cdot \mathcal{Z}\{n \alpha^{n-1} u[n]\} = \frac{z}{(z-\alpha)^2}, \quad |z| < |\alpha| \text{ ROC}$$

SEMPLICE, non ricorsivo **SISTEMI**

Conosco $x(z) \rightarrow$ calcolo $y(z)$



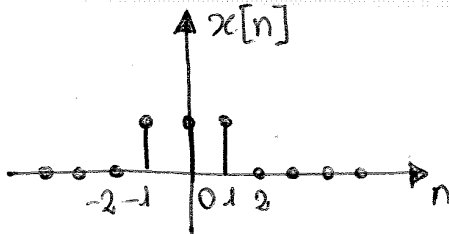
$$\begin{aligned} X_0(z) &= h_0 X(z) \\ X_1(z) &= h_1 X(z) \cdot z^{-1} \\ X_2(z) &= h_2 X(z) \cdot z^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= h_0 X(z) + h_1 X(z) \cdot z^{-1} + h_2 X(z) \cdot z^{-2} = \\ Y(z) &= \underbrace{(h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2})}_{H(z)} X(z) \end{aligned}$$

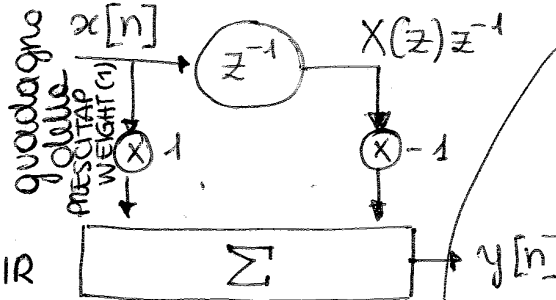
$$\boxed{Y(z) = H(z) X(z)}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} \rightarrow \text{somma pesata di potenze di zeta}$$

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{h_0 \cdot 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}\} = h_0 \delta[n] + h_1 \delta[n-1] + h_2 \delta[n-2]$$



Disegno il sistema a blocchi di un sistema FIR



FEED FORWARD
 \Downarrow
 non retroazionale
 \Downarrow
FIR
 \Downarrow
 Finite Impulse Response
NON RICORSIVO!

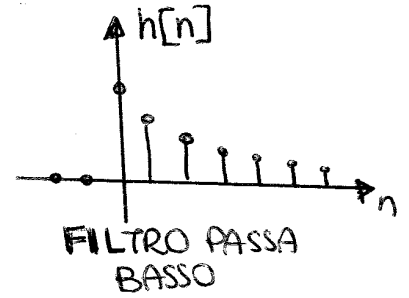
$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] - x[n-1] \quad h[n]/H(z) \\ Y(z) &= X(z) (1 - z^{-1}) \quad \text{FINITA} \end{aligned}$$

Dalle tavole si ha che:

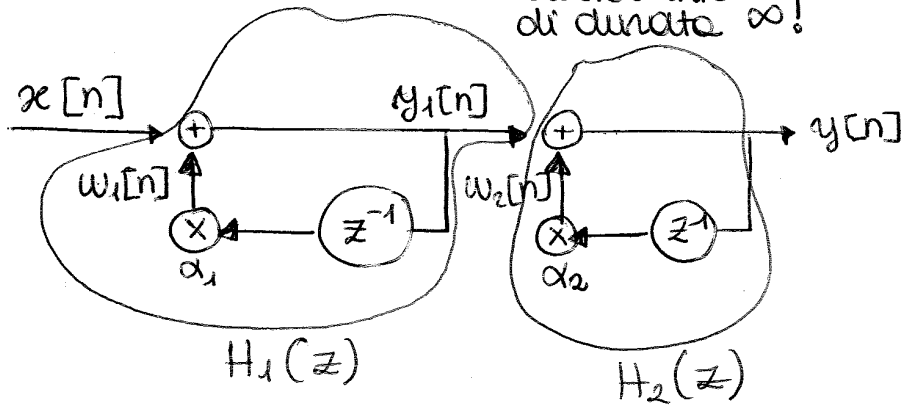
$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha} \rightarrow h[n] = \alpha^n u[n]$$

se $|\alpha| < 1, \alpha \in \mathbb{R}$

esponenziale
decrecente
di durata $\infty!$



Esempio:



$$Y_1(z) = X(z) + W_1(z), \quad W_1(z) = \alpha_1 z^{-1} Y_1(z)$$

$$Y_1(z) = X(z) + \alpha_1 z^{-1} Y_1(z) \rightarrow Y_1(z) = X(z) \frac{1}{1 - \alpha_1 z^{-1}}$$

$$Y(z) = Y_1(z) + W_2(z), \quad W_2(z) = \alpha_2 z^{-1} Y(z)$$

$$Y(z) = \alpha_2 z^{-1} Y(z) + Y_1(z) \rightarrow Y(z) = Y_1(z) \frac{1}{1 - \alpha_2 z^{-1}}$$

$$Y(z) = X(z) \left(\frac{1}{1 - \alpha_1 z^{-1}} \right) \left(\frac{1}{1 - \alpha_2 z^{-1}} \right)$$

$$\boxed{H_1(z) H_2(z) = H(z)} = \left(\frac{z}{z - \alpha_1} \right) \left(\frac{z}{z - \alpha_2} \right) = \frac{z^2}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)}$$

Quindi si ottiene:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z^2 z}{(z-d_1)(z-d_2)z} = \frac{z}{(z-d_1)(z-d_2)} \quad \begin{matrix} \text{(GRADO 1)} \\ \text{(GRADO 2)} \end{matrix}$$

$$= \frac{C_1}{(z-d_1)} + \frac{C_2}{(z-d_2)}$$

$$C_1 = \lim_{z \rightarrow d_1} \frac{H(z)}{z} (z-d_1) = \frac{z}{(z-d_1)(z-d_2)} \cdot \cancel{(z-d_1)} = \frac{z}{z-d_2} = \frac{d_1}{d_1-d_2}$$

$$\boxed{C_1 = \frac{d_1}{d_1-d_2}}$$

$$C_2 = \lim_{z \rightarrow d_2} \frac{H(z)}{z} (z-d_2) = \frac{z}{(z-d_1)(z-d_2)} \cdot \cancel{(z-d_2)} = \frac{d_2}{d_2-d_1}$$

$$\boxed{C_2 = \frac{d_2}{d_2-d_1}}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{d_1}{d_1-d_2} \frac{1}{(z-d_1)} + \frac{d_2}{d_2-d_1} \frac{1}{(z-d_2)} = \frac{d_1}{(z-d_1)(d_1-d_2)} + \frac{d_2}{(z-d_2)(d_2-d_1)}$$

Equazione alle differenze (= antitrasformata): $H(z) \rightarrow h[n]$

$$h[n] = C_1 \cdot d_1^n u[n] + C_2 \cdot d_2^n u[n]$$

$$h[n] = C_1 d_1^n \cdot u[n] + C_2 d_2^n \cdot u[n]$$

$$h[n] = u[n] \cdot (d_1^n C_1 + d_2^n C_2) = n \cdot u[n] \left(\frac{d_1^{n+1}}{d_1-d_2} + \frac{d_2^{n+1}}{d_2-d_1} \right)$$

se $d_1 > 1$, $h[n]$ cresce, diverge e il sistema è INSTABILE

se $d_2 > 1$, $h[n]$ " " " " " "

CONDIZIONE DI STABILITA' del SISTEMA
 Ognuno dei poli deve avere $\boxed{\text{modulo} < 1}$
 delle $H(z)$

Un sistema FIR è intrinsecamente stabile perché la sua $H(z)$ non presenta poli.

SEGNALI PERIODICI A TEMPO DISCRETO

La trasformata zeta di segnali periodici come

$$x[n] = A \cos\left(2\pi \frac{n}{M} + \theta\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

se un segnale è periodico (a tempo discreto) può essere espresso come combinazione lineare dei seguenti segnali discreti:

$$\boxed{\Psi_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{+j2\pi k \frac{n}{N}}}, \quad n=0, \dots, N-1$$

PRODOTTO SCALARE:

$$\langle \Psi_k[n], \Psi_l[n] \rangle = \sum_n \Psi_k[n] \cdot \Psi_l^*[n]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{j2\pi k \frac{n}{N}} e^{-j2\pi l \frac{n}{N}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{j2\pi(k-l) \frac{n}{N}}$$

$$k=l \rightarrow \langle \Psi_k[n], \Psi_l[n] \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1 = 1 \quad (\text{Energia unitaria})$$

$$k \neq l \rightarrow \langle \Psi_k[n], \Psi_l[n] \rangle = 0$$

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}, \text{ posta } a = e^{j2\pi \frac{(k-l)}{N}} \rightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n \frac{(k-l)}{N}} = \right.$$

$$\left. \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi(k-l)}}{1 - e^{j2\pi \frac{(k-l)}{N}}} = 0 \right)$$

$\mathcal{B} = \left\{ \Psi_k[n] \right\}_{k=0}^{k=N-1} \rightarrow$ Base ORTONORMALE di segnali con Energia unitaria e perpendicolari tra di loro

\mathcal{B} è COMPLETA perché M ha rango N (tutte le colonne sono indipendenti) per ogni segnale in ingresso.

$$M = \begin{bmatrix} \Psi_0[0] & \Psi_1[0] & \dots & \Psi_{N-1}[0] \\ \Psi_0[1] & \Psi_1[1] & \dots & \Psi_{N-1}[1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_0[N-1] & \Psi_1[N-1] & \dots & \Psi_{N-1}[N-1] \end{bmatrix}$$

Esempio: $x[n] = A \cos(2\pi \frac{n}{N} + \theta)$, $n \in \mathbb{Z}$
 $x[n] = \frac{A}{2} (e^{+j(2\pi n/N + \theta)} + e^{-j(2\pi n/N + \theta)})$

PERIODO = N

Calcolarne la DFT:

$$X(k) = \text{DFT} \{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}$$

$$X(k) = \text{DFT} \left\{ \frac{A}{2} e^{j(2\pi n/N + \theta)} \right\} + \text{DFT} \left\{ \frac{A}{2} e^{-j(2\pi n/N + \theta)} \right\} =$$

$$= \frac{A}{2} e^{j\theta} \text{DFT} \{ e^{j2\pi n/N} \} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} \text{DFT} \{ e^{-j2\pi n/N} \}$$

$$\text{DFT} \{ e^{j2\pi n/N} \} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n/N} \cdot e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi(k-1)n/N} = \frac{1 - e^{-j2\pi(k-1)N/N}}{1 - e^{-j2\pi(k-1)/N}} = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq 1 \\ N, & \text{se } k = 1 \end{cases}$$

si vede da qua!

$$\text{DFT} \{ e^{-j2\pi n/N} \} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n/N} e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi(k+1)n/N} = \frac{1 - e^{-j2\pi(k+1)N/N}}{1 - e^{-j2\pi(k+1)/N}} = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq N-1 \\ N, & \text{se } k = N-1 \end{cases}$$

$k=0, \dots, N-1 \rightarrow$ quindi $k=-1$ non ESISTE

Per valutare il valore della DFT considero $N-1$ dato che intanto $x[n]$ è periodico di periodo N .

$$\text{DFT} \{ e^{j2\pi n/N} \} = N \delta[k-1] = \begin{cases} N, & \text{se } k=1 \\ 0, & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{DFT} \{ e^{-j2\pi n/N} \} = N \delta[k-(N-1)] = \begin{cases} N, & \text{se } k=N-1 \\ 0, & \text{se } k \neq N-1 \end{cases}$$

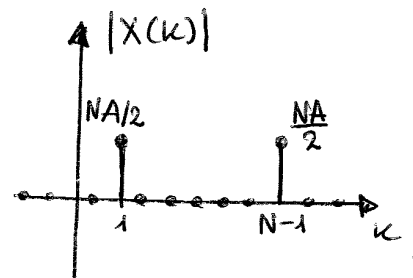
In conclusione

$$X(k) = \frac{A}{2} e^{j\theta} N \delta[k-1] + \frac{A}{2} e^{-j\theta} N \delta[k-(N-1)]$$

Per calcolare la DFT di un segnale

(di solito ho pochi valori da sommare) quindi

considero i vari n e faccio la sommatoria (su un PERIODO)



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] h_N[n-k]$$

\downarrow
 CONVOLUZIONE CIRCOLARE
 $y[n] = x[n] \circledast h_N[n]$

PERIODICIZZAZIONE di $h[n]$
 versione periodizzata della risposta all'impulso.

$$\begin{aligned}
 Y(k) &= \text{DFT} \{y[n]\} = \text{DFT} \left\{ \sum_{s=0}^{N-1} x[s] h_N[n-s] \right\} = \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{s=0}^{N-1} x[s] h_N[n-s] \right) e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} = \\
 &= \sum_{s=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[s] h_N[n-s] \right) e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} = \\
 &= \sum_{s=0}^{N-1} x[s] \sum_{n=0}^{N-1} h_N[n-s] e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \cdot \frac{e^{-j2\pi k \frac{s}{N}}}{e^{-j2\pi k \frac{s}{N}}} = \\
 &= \sum_{s=0}^{N-1} x[s] e^{-j2\pi k \frac{s}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} h_N[n-s] e^{-j2\pi k \frac{(n-s)}{N}} =
 \end{aligned}$$

$$Y(k) = X(k) \cdot H_N(k)$$

$$\left[\begin{aligned}
 Y(k) &= \text{DFT} \{y[n]\} = \text{DFT} \{x[n]\} \cdot \text{DFT} \{h_N[n]\} = X(k) \cdot H_N(k) \\
 y[n] &= \text{IDFT} \{Y(k)\} = \text{IDFT} \{X(k) \cdot H_N(k)\}
 \end{aligned} \right]$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{IDFT} \\ \text{DFT} \end{array} \right.$ si può calcolare anche se il segnale NON è periodico. ($x[n]$)
 Occorre rendere $x[n]$ e $h[n]$ (che non può essere mai periodica, altrimenti il sistema è INSTABILE) PERIODICI con periodo = a quello del segnale in uscita $y[n] = \text{IDFT} \{Y(k)\}$

Se $y[n] = x[n] * h[n]$ avrà periodo $N_y = N_x + N_h - 1$

Quindi devo scegliere $N \geq N_x + N_h - 1$. Calcolo $Y(k) = X(k) \cdot H(k)$

TEORIA DELLA PROBABILITÀ VEDI ESEMPI

Serve per gestire degli esperimenti, i cui risultati sono i possibili EVENTI semplici. Gli EVENTI si definiscono COMPLESSI se sono sottoinsieme dello SPAZIO CAMPIONE → insieme dei possibili EVENTI associati all'esper.

LANCIO DADO $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (spazio campione)

EVENTO SEMPLICE = $\{1\}$

EVENTO COMPLESSO = {il dado restituisce un numero pari}

Se non si riesce ad individuare subito un evento complesso, si può studiare l'intersezione tra eventi complessi più semplici.

DEFINIZIONE ASSIOMATICA della PROBABILITÀ

- 1) la probabilità $P\{A\}$ di un evento è sempre ≥ 0 .
- 2) la probabilità $P\{A\}$ di un evento certo è 1.
- 3) se A e B sono 2 eventi MUTUALMENTE ESCLUSIVI ($A \cap B = \emptyset$, non hanno elementi in comune), la $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - 2\{A \cap B\} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{FORMULA} \\ \text{GENERALE} \end{array}$$

$P\{A \cap B\} = P\{A, B\}$ → PROBABILITÀ CONGIUNTA

INDIPENDENZA STATISTICA: se 2 eventi A e B sono statisticamente indipendenti se $P\{A \cap B\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$ → se vale questo sono statisticamente indipendenti.

Se A e B sono mutualmente esclusivi ($\rightarrow A \cap B = \emptyset$) NON sono statisticamente indipendenti.
 $P\{\emptyset\} = 0$

↳ $P\{A \cap B\} = P\{\emptyset\} = 0 \neq P\{A\} \cdot P\{B\}$

Il modo in cui è condotto l'esperimento condiziona il risultato.

$P\{A|B\}$ → "probabilità che si verifichi l'evento A condizionato dal fatto che si sia verificato B" (... supposto che B sia vero).

REGOLA DI BAYES

$P\{A \cap B\} = P\{A|B\} \cdot P\{B\}$

→

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$$

$$P\{A \cap B\} = P\{B|A\} \cdot P\{A\}$$

LO SPAZIO CAMPIONE NON SI RIDUCE MAI.

L'EVENTO CONDIZIONANTE LO DECIDO IO.

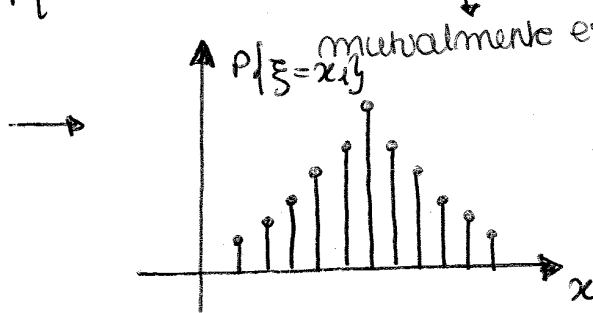
Esempio: lancio 2 dadi

$\xi =$ somma dei 2 risultati $\rightarrow \xi \in \{2, \dots, 12\}$

$P\{\xi = 2\} \rightarrow P\{1^{\circ} \text{ dado} = 1, 2^{\circ} \text{ dado} = 1\} = P\{1^{\circ} \text{ dado} = 1\} \cdot P\{2^{\circ} \text{ dado} = 1\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
statisticamente INDIPENDENTI

$P\{\xi = 3\} \rightarrow P\{1^{\circ} \text{ dado} = 1, 2^{\circ} \text{ dado} = 2\} \cup P\{1^{\circ} \text{ dado} = 2, 2^{\circ} \text{ dado} = 1\} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$
mutualmente esclusivi

$P\{\xi = \dots\}$



DISTRIBUZIONE DI MASSA \rightarrow non sono Sette Sette.

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITA' CUMULATIVA

$F_{\xi}(x) \triangleq P\{\xi \leq x\}, x \in \mathbb{R}$

\rightarrow valide x variabili aleatorie continue o discrete

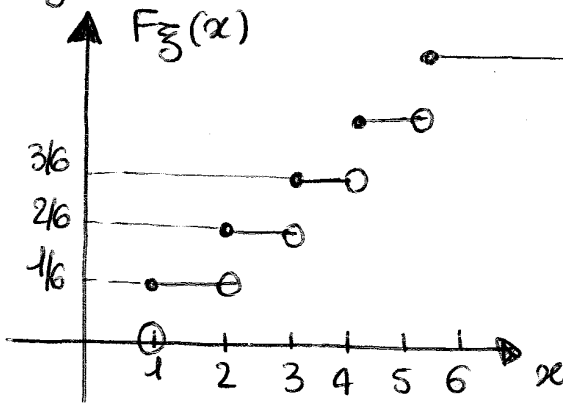
Esempio: lancio dado

$F_{\xi}(0) = P\{\xi \leq 0\} = 0$

$F_{\xi}(1^-) = P\{\xi \leq 1^-\} = 0$

$F_{\xi}(1) = P\{\xi \leq 1\} = 1$ mutualmente esclusivi

$F_{\xi}(2) = P\{\xi \leq 2\} = P\{\xi = 1\} \cup P\{\xi = 2\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$



$0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1 \rightarrow$ per il 1° assioma

$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1$

FUNZIONE A GRADINI $F_{\xi}(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{POSITIVA da } dx \\ \text{CRESCENTE da } 0 \text{ a } 1 \\ \text{DISCONTINUITA da } sx \end{array} \right.$

\downarrow
VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

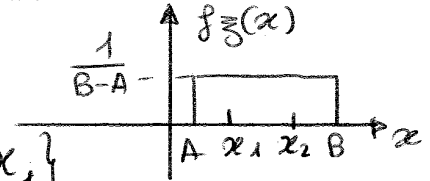
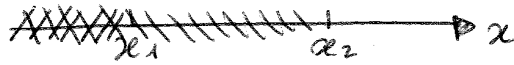
$F_{\xi}(x)$
FUNZIONE CONTINUA $\left\{ \begin{array}{l} \text{POSITIVA DA } 0 \text{ a } 1 \\ \text{MONOTONA} \\ \text{CRESCENTE} \end{array} \right.$

\downarrow
VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

$$P\left\{\xi \in]x_1, x_2]\right\} = \int_{x_1}^{x_2} f_{\xi}(u) du = F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1)$$

$x_1 > A, x_2 < B$

dim:



$$P\left\{\xi \in]x_1, x_2]\right\} = P\left\{\xi \leq x_2\right\} - P\left\{\xi \leq x_1\right\}$$

$$= F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f_{\xi}(u) du - \int_{-\infty}^{x_1} f_{\xi}(u) du = \int_{x_1}^{x_2} f_{\xi}(u) du$$

$$= (x_2 - x_1) \frac{1}{B-A}$$

$P\left\{\xi \in]x_1, x_2]\right\} = 0 \rightarrow$ se $x_1, x_2 \notin]x_1, x_2]$
(se sono negativi, $< A$ o $> B$)

$$P\left\{\xi = 0\right\} = 0$$

$$P\left\{\xi = 1,5\right\} = 0$$

ξ NON ASSUME MAI UN VALORE SPECIFICO!
Ogni valore singolo ha probabilità $\frac{1}{\infty} = 0$ di verificarsi.
La $P\left\{\xi\right\}$ si può calcolare su degli INTERVALLI

MEDIA

MEDIE

E' LINEARE

$$E\left\{\xi\right\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx = \mu_{\xi}$$

\rightarrow MEDIA DI ξ $\left\{ \begin{array}{l} \times \text{ v.g.} \\ \text{continue} \\ \text{e} \\ \text{discrete} \end{array} \right.$

e' un integrale in $x \rightarrow \xi$ e' INCOGNITA e non puoi integrare.

VALORE QUADRATICO MEDIO

$$E\left\{\xi^2\right\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx$$

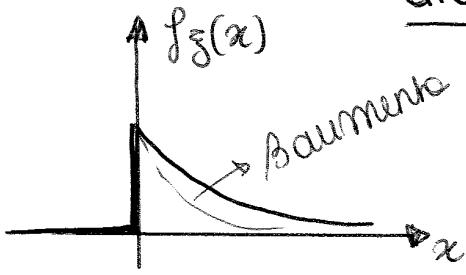
x e' un possibile valore assunto da ξ .

FUNZIONE PARI $\rightarrow E\left\{\xi\right\} = 0$
FUNZIONE DISPARI $\rightarrow E\left\{\xi\right\} \neq 0$

VARIANZA

$$\sigma_{\xi}^2 \triangleq E\left\{\left(\xi - \mu_{\xi}\right)^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_{\xi})^2 f_{\xi}(x) dx$$

d.d.p ESPONENZIALE UNILATERA



$$f_{\xi}(x) = \beta e^{-\beta x} u(x)$$

FUNZIONE DISPARI $E\{\xi\} \neq 0$

$$E\{\xi\} = \int_0^{+\infty} x \beta e^{-\beta x} u(x) dx = \frac{1}{\beta}$$

se β aumenta
 $\rightarrow E\{\xi\}, E\{\xi^2\}, \sigma_{\xi}^2$ DIMINUISCONO

$$E\{\xi^2\} = \int_0^{\infty} x^2 \beta e^{-\beta x} u(x) dx = \sigma_{\xi}^2 + E\{\xi\}^2 = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2}$$

$\downarrow f_{\xi}(x)$
 diventa +
 CONCENTRATA

$$\sigma_{\xi}^2 = \int_0^{\infty} (x - E\{\xi\})^2 \beta e^{-\beta x} u(x) dx = \int_0^{\infty} (x - \frac{1}{\beta})^2 \beta e^{-\beta x} u(x) dx = \frac{1}{\beta^2}$$

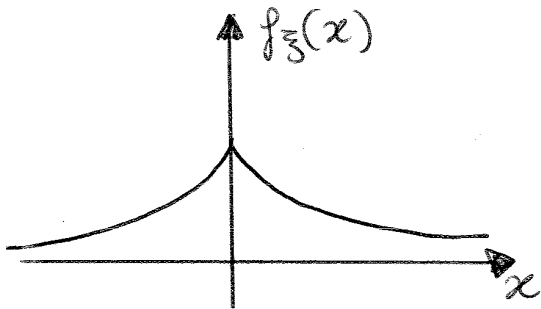
$$E\{\xi^2\} = \sigma_{\xi}^2 + E\{\xi\}^2 = \sigma_{\xi}^2 + \mu_{\xi}^2 \rightarrow E\{\xi^2\} > E\{\xi\}^2$$

$$\sigma_{\xi}^2 \neq 0$$

$$E\{\xi^2\} \neq 0$$

dipendono
 dall'integrale

d.d.p ESPONENZIALE BILATERA o LAPLACE



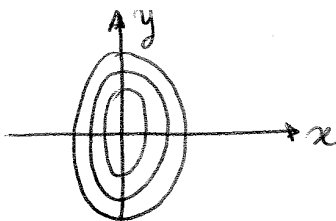
$$f_{\xi}(x) = \frac{\beta}{2} e^{-|x|/\beta}$$

$$\xi \rightarrow | \cdot | \rightarrow r = |\xi|$$

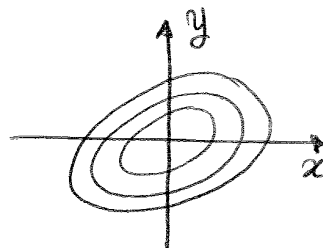
$$\xi \in (0, +\infty)$$

assume solo
 valori positivi

se $\sigma_{\xi}^2 = 1$ e $\sigma_{\eta}^2 = 2$



CASO: coppia di variabili gaussiane STATIST. DIPENDENTI



FUNZIONE CARATTERISTICA DI 1 V.A

$$C_{\xi}(p) \triangleq E\{e^{jP\xi}\}$$

x il teorema fondamentale:

$$C_{\xi}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jPz} f_{\xi}(z) dz = \mathcal{F}\{f_{\xi}(z)\}$$

dim: $\mathcal{F}\{f_{\xi}(z)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(z) e^{-j2\pi z} dz =$ pongo $p = -2\pi z$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(z) e^{jPz} dz = \mathcal{F}\{f_{\xi}(z)\}$$

Quindi

$$E\{g(\xi, \eta)\} = \iint g(x, y) f_{\xi\eta}(x, y) dx dy$$

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

Indice quanto ξ e η sono correlate tra di loro.

$$\rho_{\xi, \eta} \triangleq \frac{E\{(\xi - \mu_{\xi})(\eta - \mu_{\eta})\}}{\sigma_{\xi} \sigma_{\eta}}$$

(DEVIAZIONE STANDARD > 0)

con $-1 \leq \rho_{\xi, \eta} \leq 1$

SE ξ e η SONO STATISTICAMENTE INDIPENDENTI $\rightarrow \rho_{\xi, \eta} = 0$

dim: $E\{(\xi - \mu_{\xi})(\eta - \mu_{\eta})\} = \iint (x - \mu_x)(y - \mu_y) f_{\xi\eta}(x, y) dx dy =$
 $= \iint (x - \mu_x)(y - \mu_y) f_{\xi}(x) f_{\eta}(y) dx dy = \int (x - \mu_x) f_{\xi}(x) dx \cdot \int (y - \mu_y) f_{\eta}(y) dy = 0$

SE ξ_1 e ξ_2 SONO SCORRELATE

$$\begin{aligned}
 f_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} [x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2] \underbrace{\frac{1}{\sigma_1\sigma_2} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix}\right) = \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} [x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} (x_1 - \mu_1) \\ \frac{1}{\sigma_2^2} (x_2 - \mu_2) \end{bmatrix}\right) = \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma_1^2} (x_1 - \mu_1)^2 + \frac{1}{\sigma_2^2} (x_2 - \mu_2)^2\right]\right) = \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)} = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2}}}_{f_{\xi_1}(x_1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}}}_{f_{\xi_2}(x_2)}
 \end{aligned}$$

$$f_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) = f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2)$$



- solo x le v.a. gaussiane posso dire che se sono SCORRELATE allora sono anche STATISTICAMENTE INDIPENDENTI
- Per altri tipi di v.a. posso solo dire che se sono STATISTICAMENTE INDIPENDENTI allora sono anche SCORRELATE.
NON vale il viceversa!

$$f_y(u_1, u_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_y^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{u_1^2 + u_2^2 - 2\rho u_1 u_2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}$$

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$R_x(t_1, t_2) \triangleq E \{ x(t_1) \cdot x(t_2) \}$$

parametri
esterni

variabili a. in genere
non correlate (dipendono
entrambe da θ). $\rightarrow E\{x(t_1) \cdot x(t_2)\} \neq$
 $E\{x(t_1)\} \cdot E\{x(t_2)\}$

se $t = t_1 = t_2$

$$R_x(t, t) = E\{x(t) \cdot x(t)\} = E\{x^2(t)\} \quad (\text{utile x controllare})$$

La funz. di autocorrelazione diventa
il VALORE QUADRATICO MEDIO. E' UNA FUNZIONE PARI!

PROCESSI STAZIONARI IN SENSO LATO (wide sense stationary WSS)

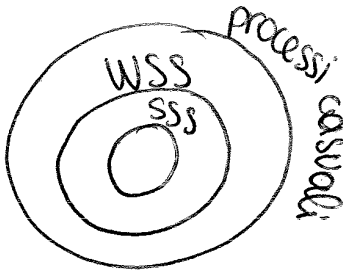
VEDI ESEMPI

$\rightarrow m_x(t) = \text{COSTANTE}$

Anche cambiando classe dei tempi
rimangono STAZIONARI.

$\rightarrow \sigma_x^2 = \text{COSTANTE}$

$\rightarrow R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1) \cdot x(t_2)\} \rightarrow$ dipende solo dalle differenze
dei tempi $(t_1 - t_2)$ o $(t_2 - t_1)$.



PROCESSI STAZIONARI IN SENSO STRETTO (Strict Sense Stationary SSS)

$x(t)$ v.a.: ddp

• Per SSS occorre che $f_{x(t)}(u; t)$ NON dipenda da t .

$x(t_1), x(t_2)$ v.a.:

• $f_{x(t)}(u_1, u_2; t_1, t_2) =$ ddp CONGIUNTA dipende solo dalle differenze
dei tempi. $(t_1 - t_2)$

• $F_{x(t)}(u_1, u_2; t_1, t_2) = P \{ x(t_1) \leq u_1, x(t_2) \leq u_2 \}$

$x(t_1), x(t_2), x(t_3)$ v.a.:

• $f_{x(t)}(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) =$ ddp CONGIUNTA dipende solo dalle
differenze $(t_2 - t_1)$ e $(t_3 - t_1)$

$F_{x(t)}(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) = P \{ x(t_1) \leq u_1, x(t_2) \leq u_2, x(t_3) \leq u_3 \}$

$$R_i(\tau) = E \{ i(t) \cdot i(t+\tau) \}$$

Non sono correlati
SONO V.Q. GAUSSIANE

SONO STATISTICAMENTE INDIPENDENTI

$$R_i(\tau) = E \{ i(t) \cdot i(t+\tau) \} = E \{ i(t) \} \cdot E \{ i(t+\tau) \} = 0$$

$R_i(\tau) = 0$ { ha senso pensare che sia così
fino a $\tau = 10^{-12} s$

Modello matematico

$$R_i(\tau) \rightarrow R_i(0) = E \{ i(t) \cdot i(t) \} = E \{ i(t)^2 \} = \text{v.q.m.}$$

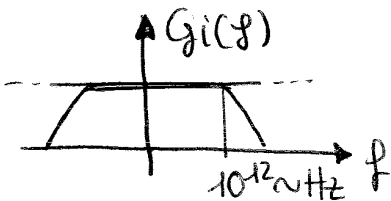
$$\begin{cases} R_i(\tau) = 0, \forall \tau \neq 0 \\ R_i(0) = \infty \rightarrow R_i(\tau) = I_0 \delta(\tau), \tau = 0 \end{cases}$$

↓
dipende dalla temperatura

$$G_i(f) = I_0 = \text{cost}$$

$$G_i(f) = \mathcal{F} \{ R_i(\tau) \} = \mathcal{F} \{ I_0 \delta(\tau) \} = I_0 \mathcal{F} \{ \delta(\tau) \} = I_0 \rightarrow \text{cost}$$

In realtà $G_i(f)$ NON è cost., ma x i calcoli è comodo così

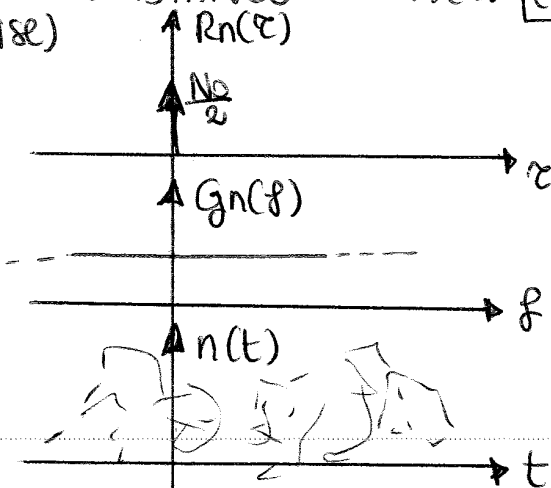


RUMORE BIANCO



BIANCO perché lo spettro della luce contiene tutte le frequenze dei colori ed è costante così come lo spettro $G_i(f)$ è costante perché uguale a I_0 .

RUMORE BIANCO (noise) $\rightarrow n(t)$ (SSS)

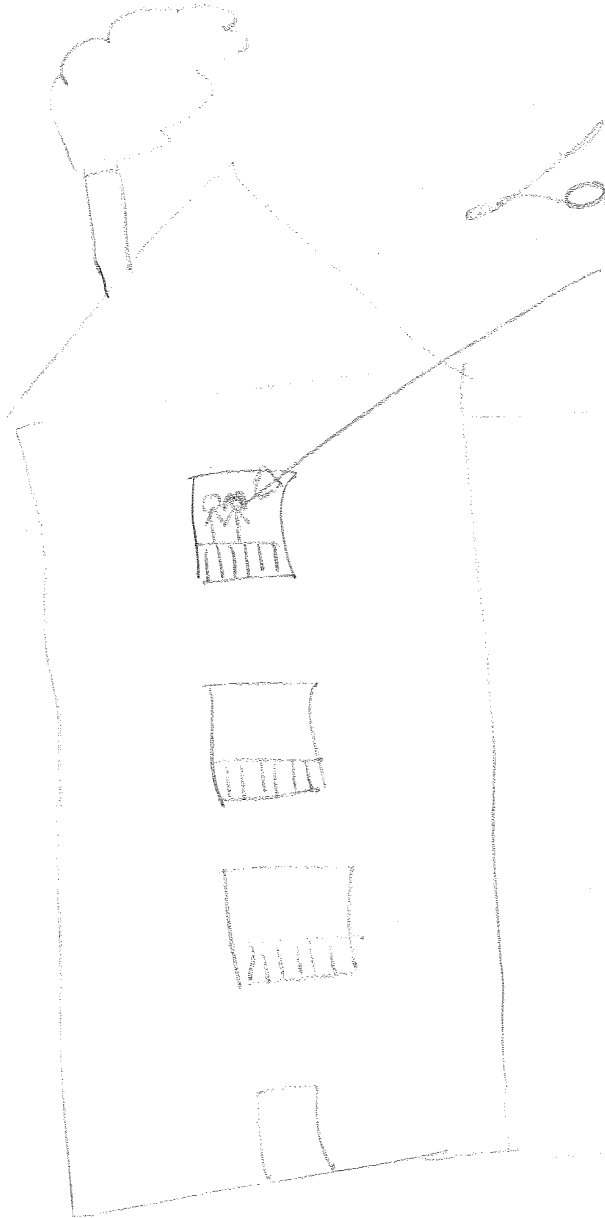


- andamento gaussiano
- valore medio nullo
- $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$
- $G_n(f) = \frac{N_0}{2}$

$\rightarrow \mathcal{F} \{ n(t) \} \rightarrow N(f)$ ~~No!~~

$$\begin{aligned}
 R_Y(\tau) &= E\{y(t) \cdot y(t+\tau)\} = \\
 &= E\left\{ \int h(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 \cdot \int h(\tau_2) x(t+\tau-\tau_2) d\tau_2 \right\} = \\
 &= E\left\{ \iint h(\tau_1) h(\tau_2) x(t-\tau_1) x(t+\tau-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\} = \\
 &= \iint E\{h(\tau_1) h(\tau_2) x(t-\tau_1) x(t+\tau-\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 = \\
 &= \iint h(\tau_1) h(\tau_2) E\{x(t-\tau_1) x(t+\tau-\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 = \\
 &E\{x(t-\tau_1) x(t+\tau-\tau_2)\} = R_X(\cancel{t}-\tau_1 - \cancel{t} + \tau + \tau_2) \\
 &R_X(\tau_2 - \tau_1 - \tau) = R_X(\tau_1 + \tau - \tau_2) \\
 &\quad (\text{funz. pari}) \\
 &= \iint h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau - \tau_2 + \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = \\
 &\quad \text{pongo } \tau_2 - \tau_1 = u \rightarrow \tau_1 = \tau_2 - u \quad d\tau_1 = -du \\
 R_Y(\tau) &= \iint h(\tau_2 - u) h(\tau_2) R_X(\tau - u) d\tau_2 (-du) = \\
 &= - \int R_X(\tau - u) \left[\int h(\tau_2 - u) h(\tau_2) d\tau_2 \right] du = \\
 &= - \int R_X(\tau - u) \cdot R_h(-u) du \\
 &\quad \text{pongo } -u = v \\
 &= - \int R_X(\tau + v) \cdot R_h(v) (-dv) = \\
 &= \int R_X(\tau + v) R_h(v) dv
 \end{aligned}$$

$$\boxed{R_Y(\tau) = R_X(\tau) * R_h(\tau)}$$



La nostra
Casetta!

