



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 642

DATA: 07/10/2013

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Girardi

MATERIA: Meccanica Strutturale + Esercizi

Prof. Somà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Per studiare un MODELLO si devono compiere delle SEMPLIFICAZIONI GEOMETRICHE:

- OLONOMI
  - BILATERALI
  - FISSI
  - PERFETTI
  - PRIVI DI ATTRITO
  - PUNTIFORMI
- VINCOLI ideali → sono delle incognite, sono gli obiettivi di progetto.
- FORZE e CARICHI ideali e applicati in un pto.
- FORZE: forze / momenti
    - SUPERFICIE → agiscono sulle superf.
    - VOLUME → agiscono sui punti interni
- DEFORMAZIONI TRASCURABILI rispetto alle dimensioni iniziali
- EQ. STATICO o EQ. QUASI STATICO.

**CORPO RIGIDO** nello spazio **6GdL**:  $\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$  + rotazione intorno ai 3 ASSI

↳ nel piano:  $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$  **3GdL**  
 ROTAZIONE intorno a z

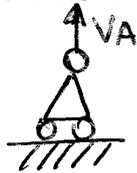
**CORPO VINCOLATO**: le sue possibilità di movimento sono parzialmente o totalmente impediti dai VINCOLI

Nei punti di vincolo nascono le REAZIONI VINCOLARI (=incognite)

- CORPO
- ISOSTATICO: vincoli = GdL
  - IPERSTATICO: vincoli > GdL
  - LABILE: vincoli < GdL
- SEMPLICI: **1GdL**
  - COMPOSTI: **2GdL**

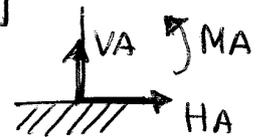
I VINCOLI DEVONO ESSERE EFFICACI → ciascun vincolo deve impedire quello concesso dagli altri

CARRELLO 1GdL

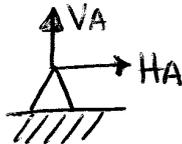


**3N<sub>corpi</sub> = N<sub>vincoli</sub>**

INCASTRO 3GdL



CERNIERA 2GdL



BIPENDOLO 2GdL



Per collegare più c.r. ho bisogno dei **GIUNTI** → eliminano dei GdL

**EQUILIBRIO**

Eq. di equilibrio:

SPAZIO:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & \sum M_x &= 0 \\ \sum Y &= 0 & \sum M_y &= 0 \\ \sum Z &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

PIANO:

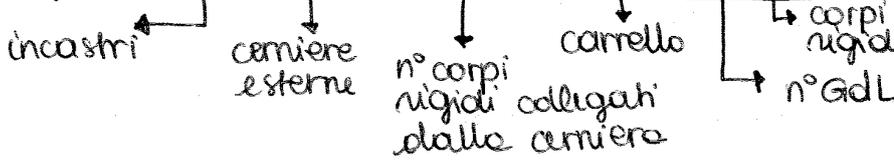
$$\begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

TRAVE: corpo in cui le dimensioni trasversali sono molto maggiori di quella longitudinale.

# GRADI DI LIBERTÀ

- $G=0 \rightarrow$  sist. isostatico
- $G < 0 \rightarrow$  sist. labile
- $G > 0 \rightarrow$  sist. iperstatico

$$G = 3i + 2ce + 2(r-1) + a - m \cdot n$$

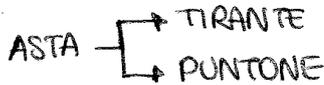


# GRADO DI IPERSTATICITÀ

VEDI SLIDE!

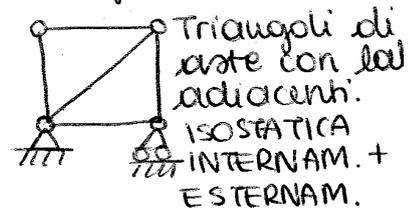
TRAVATURA RETICOLARE  $\rightarrow$  struttura molto ideale in cui tutte le aste sono collegate da cerniere interne e i carichi sono distribuiti solo sui nodi. Le ASTE ammettono reazioni vincolari o forze che hanno direzione solo assiale.

ST. RETICOLARE ISOSTATICA

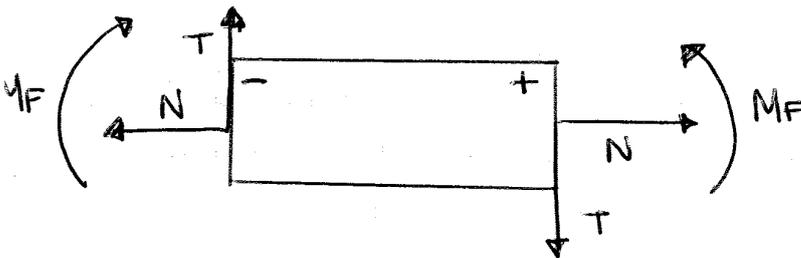


$$a + 3 = 2G$$

$\downarrow$  n° aste       $\downarrow$  n° nodi



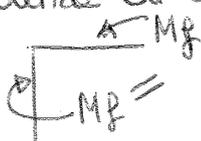
## CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE:



- il carico determina la concavità del momento con il proprio segno.
  - le discontinuità del taglio si trovano in corrispondenza di carichi o reazioni vincolari
- VEDI DIMOSTRAZIONE

$$q = \frac{dT}{dt} \quad T = \frac{dM_F}{dt} \quad q = \frac{d^2M_F}{dt^2}$$

- $\rightarrow q=0 \rightarrow$  taglio costante
- $\rightarrow$  Dove c'è una reazione vincolare, nel grafico di MF ho una discontinuità, nel taglio ho un salto (= al valore della reazione vincolare)
- $\rightarrow$  MF è come se fosse preso al contrario. (VENTO CHE GONFIA LE VELE)
- $\rightarrow$  Dove il taglio vale zero, in MF ho un max o un minimo.
- $\rightarrow$  Una cerniera interna ha momento nullo.  $\rightarrow$  MF deve passarci.
- Ho bisogno di una sezione ogni volta che c'è una discontinuità di carico, di forza o un vincolo ( $\rightarrow$  reazioni vincolari), o una coppia  $\uparrow c$  o una variazione geometrica
- $\rightarrow$  In corrispondenza di uno spigolo MF deve avere lo stesso valore



- In corrispondenza degli zeri del taglio, nel momento flettente ho MAX o MINIMO (x la concavità devo guardare il segno del carico). ricordarmi che è al contrario! ①

MOMENTO STATICO di figure sovrapposte = somma dei momenti statici delle singole aree (o sottrazione).

MOMENTI DI INERZIA DI UNA SUPERFICIE  
(parametri che forniscono il contributo quadratico rispetto ad un asse).  $\neq$  massa

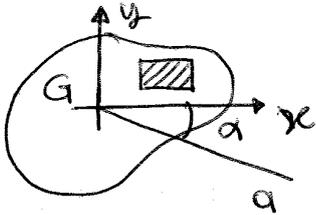
$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

sono sempre POSITIVI

MOMENTI DI INERZIA RISPETTO ad un ASSE

MOMENTO DI INERZIA della SUPERFICIE A rispetto ad una RETTA



$$I_a = \int_A d^2 \cdot dA$$

MOMENTO DI INERZIA POLARE (rispetto ad un polo)

$$I_p = \int_A r^2 dA$$

MOMENTO DI INERZIA CENTRIFUGO O MISTO

$$I_{xy} = \int_A xy \cdot dA$$

MOMENTI DI INERZIA RETTANGOLO

NON BARICENTRICO:

$$\begin{cases} I_x = \frac{bh^3}{3} \\ I_y = \frac{b^3h}{3} \end{cases}$$

BARICENTRICO:

$$\begin{cases} I_x = \frac{bh^3}{12} \\ I_y = \frac{b^3h}{12} \end{cases}$$

MOMENTI DI INERZIA CERCHIO

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int r^2 (2\pi r dr) = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \quad I_p = I_x + I_y, \quad I_x = I_y$$

$$I_d = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_x = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$\frac{I_p}{2} = I_x$$

MOMENTO STATICO RETTANGOLO

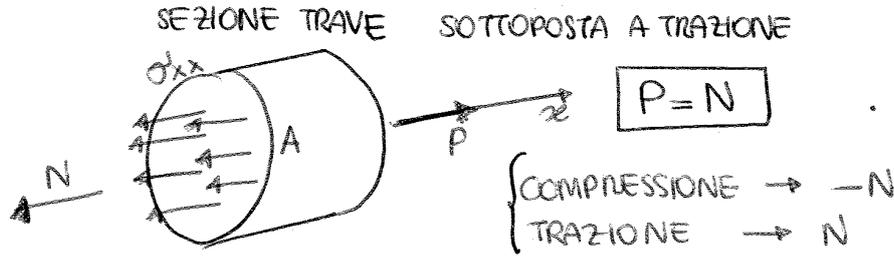
$$S_x = \frac{bh^2}{2}$$

$$S_y = \frac{b^2h}{2}$$

# SOLLECITAZIONI SEMPLICI

## TRAZIONE

TRAZIONE: un carico che determina uno sforzo normale non nullo, mentre tutte le altre caratteristiche di sollecitazione sono nulle



$N =$  risultante delle tensioni interne che si creano a causa dell'allungamento dovuto al carico.

## TRAVE OMOGENEA

definisce lo stato di tensione

valore del carico per unità di area

→ TENSIONE UNITARIA O INTERNA

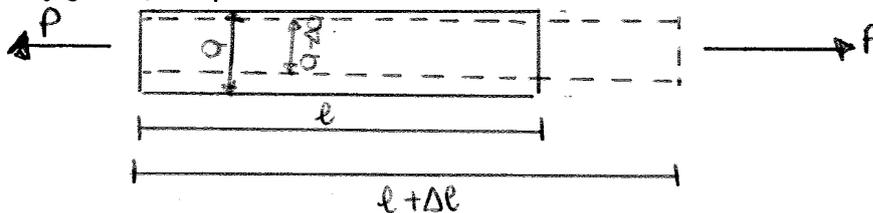
$$[\sigma_{xx}] = \frac{[N]}{[mm^2]} = MPa$$

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A}$$

↓ direzione delle TENSIONE  
↓ direzione delle normali alla sezione

## LEGGE DI HOOKE

Durante la compressione-trazione variano le dimensioni della trave:



$\Delta l =$  allungamento assoluto della trave.

ALLUNGAMENTO RELATIVO o DEFORMAZIONE  
allungamento subito dalla trave sotto un carico  $P$ , di lunghezza unitaria

$$E_{xx} = \frac{\Delta l}{l}$$

↓ adimensionale

LEGGE DI HOOKE ( $F = kx$ ) → x allungamenti piccoli

stabilisce una proporzionalità tra  $E_{xx}$  e  $\sigma_{xx}$

$$\sigma_{xx} = E E_{xx} \quad [E] = \frac{[N]}{[mm^2]} = MPa$$

MODULO DI ELASTICITÀ NORMALE o MODULO DI YOUNG

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} \quad E_{xx} = \frac{\Delta l}{l} \quad \rightarrow \quad \frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l} \quad (N=P) \quad \rightarrow \quad \Delta l = \frac{Pl}{AE}$$

$$k = \frac{AE}{l} \rightarrow \text{RIGIDEZZA ASSIALE}$$

$\sigma_p \rightarrow$  limite di proporzionalità, oltre non vale più Hooke

$\sigma_s \rightarrow$  limite o tensione di snervamento, la deformazione cresce senza variazione sensibile del carico. se non c'è la zona di snervamento

$\sigma_s \Rightarrow$  corrispondenza di  $\epsilon_{res} = 0.002$  ( $\epsilon_r = 0.2\%$ )  $\rightarrow$  quando non si ha la zona di snervamento

$\sigma_R = R_m \rightarrow$  limite o tensione di rottura



$A_R =$  ALLUNGAMENTO RELATIVO A ROTTURA (8%)  
(lunghezza di D)

$\left. \begin{array}{l} \rightarrow < 5\% \rightarrow \text{MATERIALI FRAGILI} \\ \rightarrow > 5\% \rightarrow \text{MATERIALI PLASTICI} \end{array} \right\}$



MATERIALI METALLICI  $\rightarrow$  omogenei  
 $\rightarrow$  isotropi  
(leghe alluminio, titanio, bronzo, ferro-carbonio, magnesio)

**VEDI SLIDES**

$$\sigma_{MAX} < \sigma_{AMMISSIBILE} (=k)$$

TENSIONE AMMISSIBILE  $\rightarrow$

$$k = \frac{\sigma_L}{S} = \frac{\text{carico limite}}{\text{coeff. di sicurezza}}$$

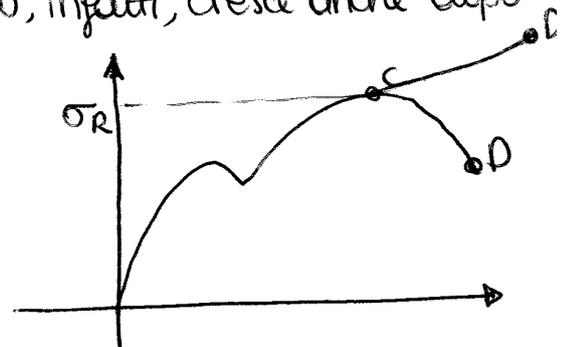
( $S > 1$ )  
 { più è grande  
 { più siamo ignoranti  
 { più è piccolo  
 { più siamo sicuri

S  $\rightarrow$  MATERIALI DUTTILI (si deformano ma non si rompono).  $\sigma_L = \sigma_s \rightarrow$  limite di snervamento  
 $\rightarrow$  MATERIALI FRAGILI  $\sigma_L = \sigma_R \rightarrow$  limite di rottura

$\rightarrow$  tiene conto delle condizioni di lavoro, delle pr. del materiale

### CURVA "INGEGNERISTICA" e CURVA "REALE"

Quando si definiscono  $\sigma$  e  $\epsilon$  in termini "INGEGNERISTICI" si usano come parametri l'area e la lunghezza iniziali del provino, ipotizzando che durante la prova non variano. In realtà, si nota che dopo le prove di trazione, il provino subisce il fenomeno della strizione e quindi area e lunghezza variano. Il valore della  $\sigma$ , infatti, cresce anche dopo avere raggiunto la ( $\sigma_R = C$ ) e il cedimento avviene al valore REALE D',  $\neq$  da quello INGEGNERISTICO D.



### ACCIAI

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

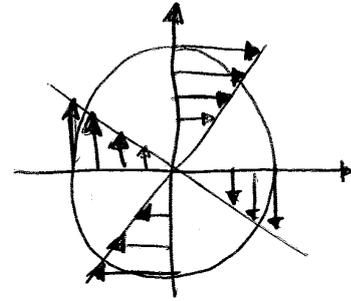
$$\nu = 0.3$$

$$E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_0 \rightarrow 260 \pm 18 \text{ MPa}$$

ANGOLO DI TORSIONE:

$$\vartheta = \frac{M_e L}{G J_p}$$



ANGOLO DI TORSIONE UNITARIO:

$$\vartheta_u = \frac{M_e}{G J_p}$$

$\tau = G \frac{\vartheta}{L} r$  → sostituendo

$$\tau = \frac{M_e r}{J_p}$$

→  $\tau$  (stato di tensione) non dipende dal materiale  
 → è una retta  $\tau \propto r$  prop. al raggio  
 quindi ha il max per

$$r = \frac{d}{2}$$

cioè sulla superficie

→ è sempre tg alla circonferenza e quindi è perpendicolare al braccio.

$$\tau_{max} = \frac{M_e r}{J_p} = \frac{M_e d}{2 J_p}$$

MODULO DI RESISTENZA TORSIONALE

$$W_\tau = \frac{J_p}{d/2}$$

Per una sezione circolare piena:  
 $W_\tau = \frac{\pi d^3}{16}$

$$\tau_{max} = \frac{M_e}{W_\tau}$$

Per una sezione vuota:  
 $W_\tau = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D}$

LAVORO DI DEFORMAZIONE TORSIONALE

$$L = \frac{1}{2} M_e \cdot \vartheta$$

→  $(L = \frac{1}{2} \cdot \text{sollecitazione} \cdot \text{variazione})$   
 ↳ angolare  
 ↳ lineari



$$L = \frac{1}{2} G \frac{\vartheta}{L} J_p \cdot \vartheta = \frac{1}{2} \left( \frac{G J_p}{L} \right) \vartheta^2$$

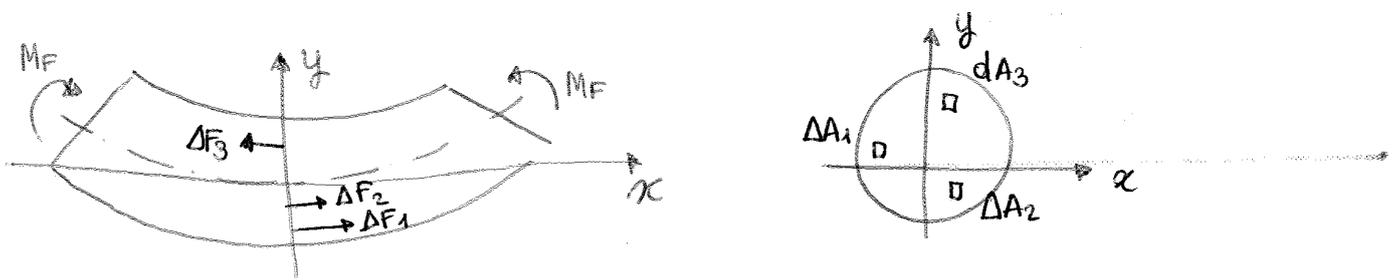
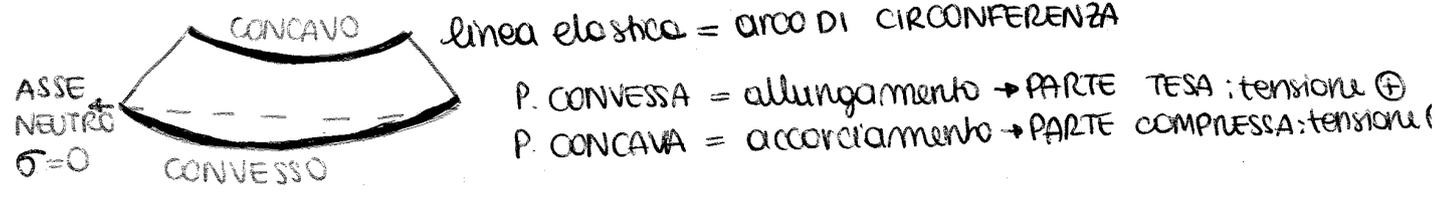
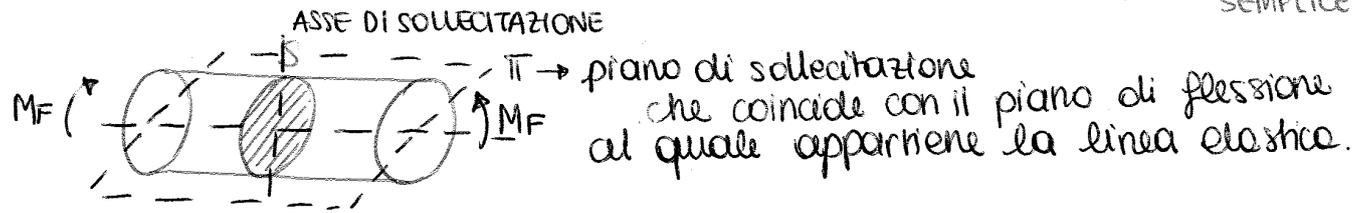
↓  $K$ : RIGIDEZZA TORSIONALE della TRAVE

$$K = \frac{G}{L} J_p$$

TRAVE A SEZIONE non CIRCOLARE → non vale l'ipotesi delle sezioni piane. Le sezioni si ingobbano e occorre usare dei metodi indiretti → ANALOGIA IDRODINAMICA → recipiente con fondo orizzontale e contorno = a quello delle trave → diretta proporzionalità tra la velocità del liquido e la sollecitazione  $\tau$  di torsione in un deter. punto. (se i punti hanno  $\vec{v} = 0$  allora anche  $\tau = 0$ ).

# FLESSIONE

FLESSIONE: un carico che si riduce al solo momento flettente → FLESSIONE PURA.  
 Di solito è accompagnata da sollecitazioni di taglio → FLESSIONE SEMPLICE



SU OGNI  $\Delta A$  agisce una  $\Delta F$ :

$$\Delta F_1 = \sigma_1 \Delta A_1$$

$$\Delta F_2 = \sigma_2 \Delta A_2$$

$$\Delta F_3 = \sigma_3 \Delta A_3$$

Per garantire l'equilibrio:

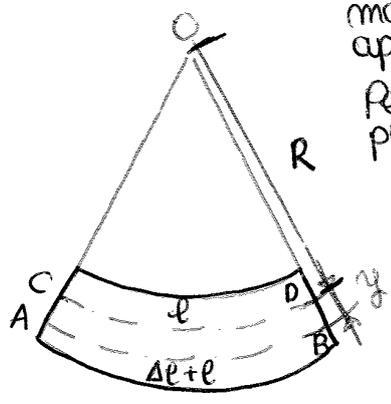
$$\sum_{i=1}^N \Delta F_i = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta A_i = 0 \rightarrow \int_A \sigma \Delta A = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \Delta M_i = M_F \rightarrow - \sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta A_i y_i = M_F \rightarrow - \int_A \sigma y \Delta A = M_F$$

↑ momento applicato

$\sigma = E \epsilon$

Per l'area elementare di distanza  $y$  dall'asse neutro  $e$ , può essere calcolato Per similitudine di  $\hat{A}OB$  e  $\hat{C}OD$



$$\frac{l + \Delta l}{e} = \frac{R + y}{R}, \text{ essendo } \epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

si ha:  $E = -\frac{y}{R}$  →  $\sigma = -E \frac{y}{R}$

EQUILIBRIO:

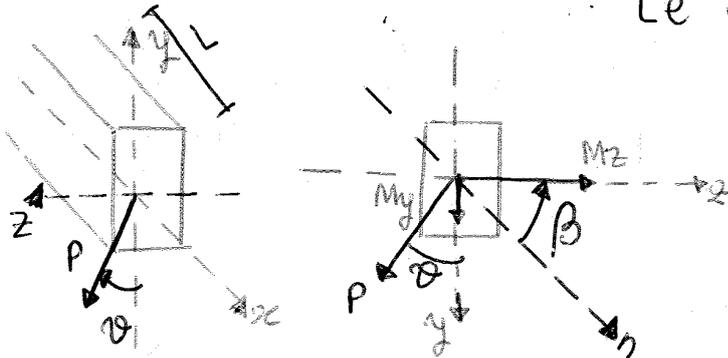
$$\frac{E}{R} \int_A y \, dA = 0$$

MOMENTO INERZIA =  $J$  → rispetto all'asse uscente dalla sezione

$$\frac{E}{R} \int_A y^2 \, dA = M_F$$

MOMENTO STATICO → essendo = 0, l'asse neutro è un asse baricentrico

FLESSIONE DEVIATA:



Le azioni interne riferite agli assi principali sono:

$$M_z = -P x \cos \theta$$

$$M_{y'} = -P x \sin \theta$$

La tensione e' data dalla sovrapposizione degli effetti:

$$\sigma_x = -\frac{M_{y'} z}{J_{y'}} - \frac{M_z y}{J_z} \rightarrow \text{sovrapposizione degli sforzi}$$

dall'orientazione dei momenti

L'asse neutro e' baricentrico, quindi  $\sigma_x = 0$

$$\boxed{-\frac{M_{y'} z}{J_{y'}} - \frac{M_z y}{J_z} = 0} \rightarrow \text{eq. retta dell'asse NEUTRO}$$

INCLINAZIONE dell'asse neutro

$$\tan \beta = \frac{y}{z} = \frac{M_{y'} J_z}{M_z J_{y'}}$$

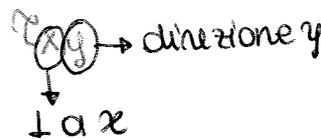
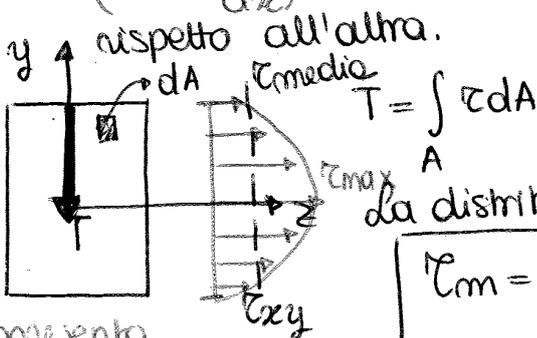
$$\tan \theta = \frac{M_{y'}}{M_z} \rightarrow \tan \beta = \frac{J_z}{J_{y'}} \cdot \tan \theta$$

angolo del momento RESULTANTE

In genere  $\beta \neq \theta$  cioè l'asse neutro non e' l'asse di sollecitazione (quello di P) tranne che per  $\theta = 0^\circ$  → CASO DI SEZIONI CIRCOLARI O QUADRATE  
 $\theta = 90^\circ$

TAGLIO

TAGLIO: e' soggetta al solo sforzo di taglio quando la risultante di tutte le forze esterne giace nel piano della sezione. Si parla di taglio PURO se il momento flettente, che accompagna sempre il taglio ( $T = \frac{dM}{dz}$ ) vale zero. Indica lo scivolamento di una sezione



la distribuzione delle tensioni NON e' uniforme:

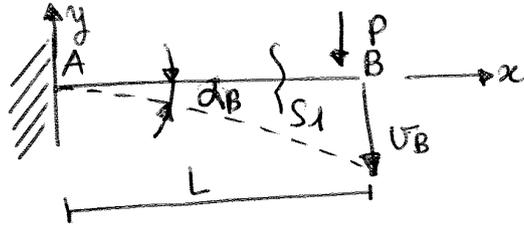
$$\tau_{cm} = \frac{T}{A} \text{ STATO DI TENSIONE medio}$$

si rappresenta RIBALTATO x la sezione sgombra la sezione

1° Integrazione  $EJ_z \frac{dv}{dx} = \int_0^x M_p(x) dx + C_1$  → COSTANTI DI INTEGRAZIONE CHE DIPENDONO DAL VINCOLO

2° Integrazione  $EJ_z v(x) = \int_0^x \left[ \int_0^x M_p(x) + C_1 \right] dx + C_2$

TRAVE INCASTRATA

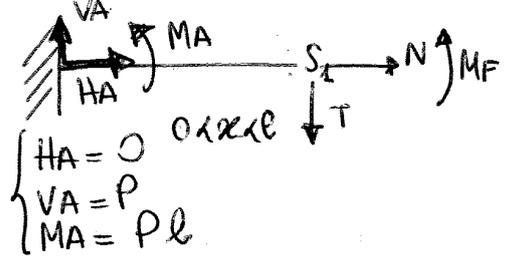


B)  $M_F(x) = -Px$

$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Px}{EJ_z}$

$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{P}{EJ_z} x^2 + C_1$

$v(x) = -\frac{1}{6} \frac{P}{EJ_z} x^3 + C_1 x + C_2$



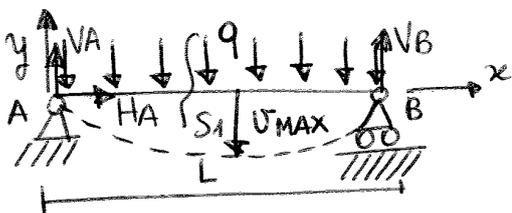
$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = P \\ M_A = Pl \end{cases}$

$v_B = -\frac{PL^3}{3EJ}$

$\alpha_B = \frac{Pl^2}{2EI}$  → considerare verso orario/antiorario

LIANGOLO SI RICAVALA DALLA 1° DERIVATA

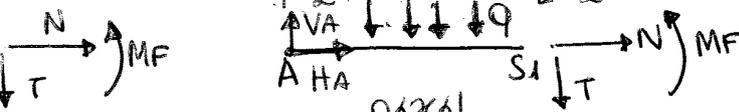
CARICO DISTRIBUITO



$H_A = 0$

$V_A + V_B - qL = 0 \rightarrow V_A = \frac{qL}{2} - qL = -\frac{qL}{2}$

$V_B \cdot L - q \frac{x^2}{2} \rightarrow V_B = \frac{q}{L} \frac{L^2}{2}$



$\begin{cases} N = H_A = 0 \\ T = V_A - qx \\ M_F = V_A x - q \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$v_A = \frac{qL^4}{8EI}$   
 $\alpha_A = \frac{qL^3}{6EI}$

$M_F = \frac{1}{2} L q x - \frac{1}{2} q x^2$

se ho un CARICO DISTRIBUITO LA FRECCIA ha al max un polinomio di 4° grado!

SI PUO' USARE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI  
 CONDIZIONI CONTORNO

- $x=0 \rightarrow v=0$  (se ho un vincolo)
- $x=L \rightarrow v=L$  (se ho un vincolo)

se spezzo la struttura, nel pto devo avere continuita di  $v$  e  $\theta$ .

Per calcolare la FRECCIA MASSIMA pongo  $\frac{dv}{dx} = 0 \rightarrow$  ricavo un valore della  $x$  e lo sostituisco nella formula di  $v$ .

SCHEMA DI CALCOLO DI VERIFICA

- 1) Calcolo REAZIONI VINCOLARI
- 2) Traccio CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE
- 3) Individuo SEZIONI PIU' SOLLECITATE
- 4) Calcolo TENSIONI SEMPLICI nella sezione + sollecitata
- 5) Cerco il pto PIU' SOLLECITATO (tra gli  $\infty$  pti della sezione + sollecitata)
- 6) Verifico la struttura nel pto piu' sollecitato confrontando la  $\sigma_{MAX}$  con  $\sigma_{AMM}$  attraverso il coeff. di sicurezza = S.

TENSIONE UNITARIA  
INTERNA

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A}$$

$\epsilon_{xx}$  = allungamento relativo  
 $\epsilon_{yy}$  = contrazione trasversale

DI ELASTICITA' NORMALE  
MODULO DI YOUNG  $E$   
 $\epsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l}$   
 $\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$   
 $\epsilon_{yy} = \nu \epsilon_{xx}$   
MODULO DI POISSON

LAVORO

$$L = \frac{1}{2} P \Delta l = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx}$$

MOMENTO  
TORCENTE

MODULO DI ELASTICITA' TANGENZIALE  
 $\tau = G \gamma$   
 $\gamma = r \frac{\theta}{l}$

$J_p$  = inerzia polare  
 $\gamma$  = angolo di scorrimento  
 $\theta$  = angolo di torsione

$$M_z = G \frac{\theta}{l} J_p$$

$$\tau = \frac{M_z}{J_p} r$$

$$\theta = \frac{M_z}{G J_p}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$L = \frac{1}{2} M_z \theta$$

MODULO DI RESISTENZA TORSIONALE

$$W_z = \frac{J_p}{d/2}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{M_z}{W_z}$$

MOMENTO  
FLETTENTE

$$\sigma_f = \frac{E}{R} y$$

$$M_F = \frac{E}{R} J_z$$

$$\sigma_f = \frac{M_F}{J_z} y$$

MODULO DI RESISTENZA FLESSIONALE

$$W_z = \frac{J_z}{y}$$

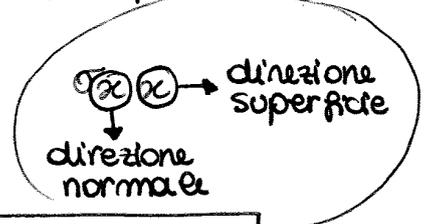
$$\sigma_{f,MAX} = \frac{M_F}{W_z}$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

x conoscere il vettore delle tensioni in un pro basta conoscere i vettori delle tensioni su 3 superfici + per quel punto

matrice " TENSORE delle TENSIONI "

$$\{t\} = [\sigma] \{n\}$$



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

TENSORE

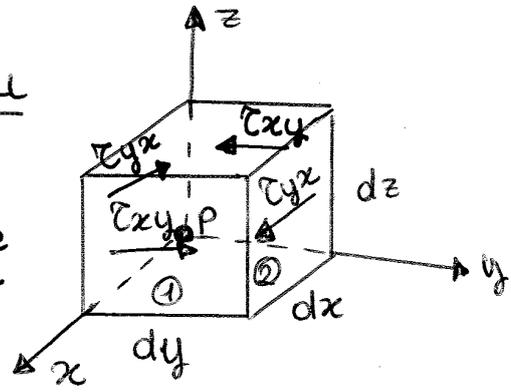
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

COMPONENTI NORMALI  $\rightarrow \sigma$   $\rightarrow$  si riferisce alle 3 facce DAVANTI  
 COMPONENTI TANGENZIALI  $\rightarrow \tau$   $\rightarrow$  matrice SIMMETRICA

TEOREMA DELLA RECIPROCAITA' O DI MAXWELL

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per essere in equilibrio si considerano anche le 3 facce DIETRO.



GEOMETRICAMENTE

$$\Delta F_1 = \tau_{xy} \cdot (dy \cdot dz) \quad \Delta F_2 = \tau_{yx} \cdot (dx \cdot dz)$$

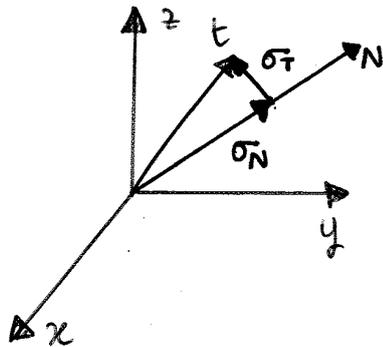
$$P) \tau_{xy} \cdot (dy \cdot dz) \cdot dx - \tau_{yx} \cdot (dx \cdot dz) \cdot dy = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

TENSORE + SEMPLICE

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

COMPONENTE  $\sigma_N$  e  $\sigma_T$



$\sigma_N$  = proiezione di  $\{t\}$  su  $\{n\}$   $\rightarrow$  scalare

$$\sigma_N = \{t\}^T \cdot \{n\} = \{n\}^T \cdot \{t\} = \{n\}^T \cdot [\sigma] \{n\} = \sigma_N$$

Pitagora: riga colonna numero

$$\sigma_N^2 + \sigma_T^2 = t^2 \rightarrow \sigma_N^2 + \sigma_T^2 = \{t\}^T \cdot \{t\} = \sigma_T$$

## CERCHI DI MOHR

Rappresentazione bidimensionale  $\sigma_T$  e  $\sigma_N$  dello stato di tensione in 1 pro.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Si parte dal sistema di riferimento PRINCIPALE e da  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ordinate in maniera CRESCENTE.

Mettendo a sistema:

$$\begin{cases} \{n\}^T \cdot \{n\} = 1 \\ \sigma_T^2 + \sigma_N^2 = \{t\}^T \cdot \{t\} \\ \sigma_N = \{n\}^T [\sigma] \{n\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{(\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} & (a) \\ n_2^2 &= \frac{(\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} & (b) \\ n_3^2 &= \frac{(\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_1) + \sigma_T^2}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1)} & (c) \end{aligned}$$

Essendo  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ :

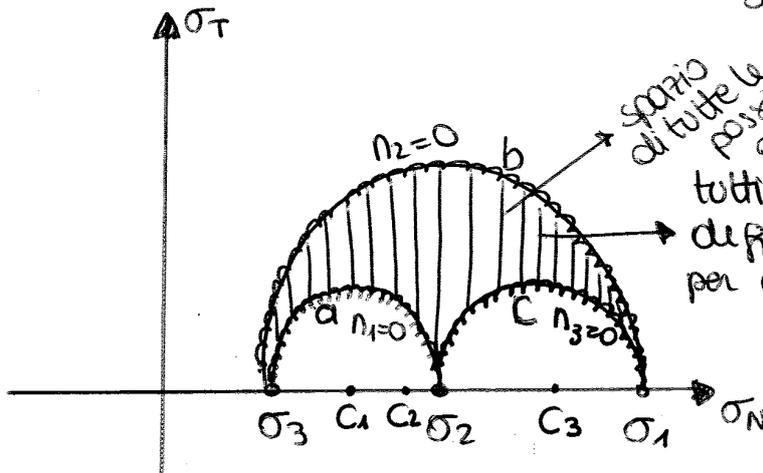
- a.  $(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) > 0$
- b.  $(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) \leq 0$
- c.  $(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1) > 0$

e quindi:

- a.  $(\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2 \geq 0$
- b.  $(\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2 \leq 0$
- c.  $(\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_1) + \sigma_T^2 \geq 0$

$C_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$	$R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$
$C_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$	$R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$
$C_3 = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}$	$R_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$

→ rappresentano i punti che giacciono o sono esterni alle circonferenze (a)(c) o interni alla circonferenza (b) SONO I 3 CERCHI DI MOHR



spazio di tutte le possibili orientazioni del tensore  
tutti i possibili pti che definiscono lo stato di tensione per qualunque direzione di P.

$$C_2 = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}$$

R → Pitagora

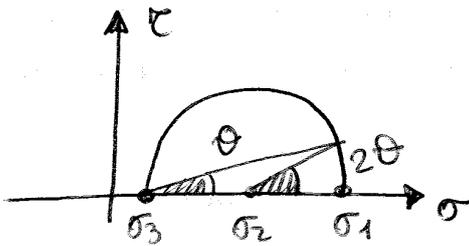
$$\begin{cases} \sigma_1 = C + R \\ \sigma_3 = C - R \end{cases}$$

Conoscendo una direzione principale, tutte le altre stanno su una circonferenza.

In genere nelle travi si ricava che una tensione principale è sempre uguale a zero. Infatti

TORSIONE	$\tau_{xy}, \tau_{xz}$	} →	$\sigma_{yy} = 0$
TAGLIO	$\tau_{xy}, \tau_{xz}$		$\sigma_{zz} = 0$
FLESSIONE	$\sigma_{xx}$		$\tau_{yz} = 0$
SFORZO NORMALE	$\sigma_{xx}$		

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{xx} \pm \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\tau_{xz}^2} \right)$$



angolo al centro = 2 · angolo alla circonferenza



### MECCANICA del CONTINUO

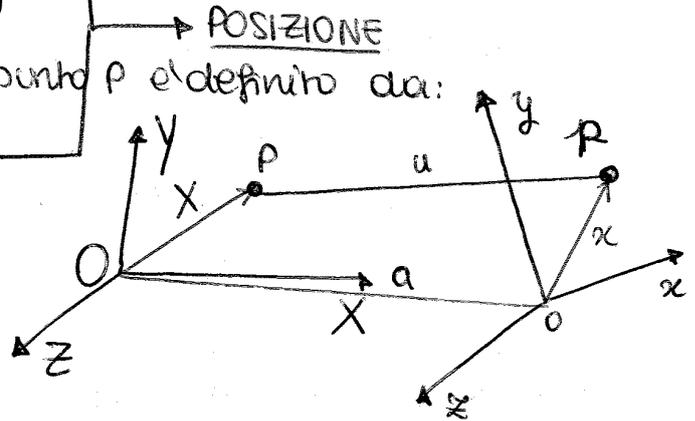
#### Stato di deformazione

Nella configurazione INDEFORMATA il punto P è definito da:

$$\{X\}^T = \{X \ y \ z\}$$

Nella configurazione DEFORMATA il punto P è definito da:

$$\{x\}^T = \{x \ y \ z\}$$



Lo spostamento sarà:

$$\bar{u} = (\bar{p} - \bar{o}) - (\bar{P} - \bar{O}) + (\bar{o} - \bar{O})$$

cioè:  $\bar{u} = \{x\} - \{X\} + \{a\}$

e se hanno la stessa origine i 2 sistemi di riferimento: ( $\{a\} = 0$ )

$$\boxed{\{\bar{u}\} = \{x\} - \{X\}}$$

La MECCANICA vuole ottenere la posizione di un pto al tempo t conoscendo la posizione iniziale e la legge del moto, quindi:

$$\boxed{\{x\} = f(\{X\}, t)} \rightarrow \text{approccio LAGRANGIANO} \quad (10)$$

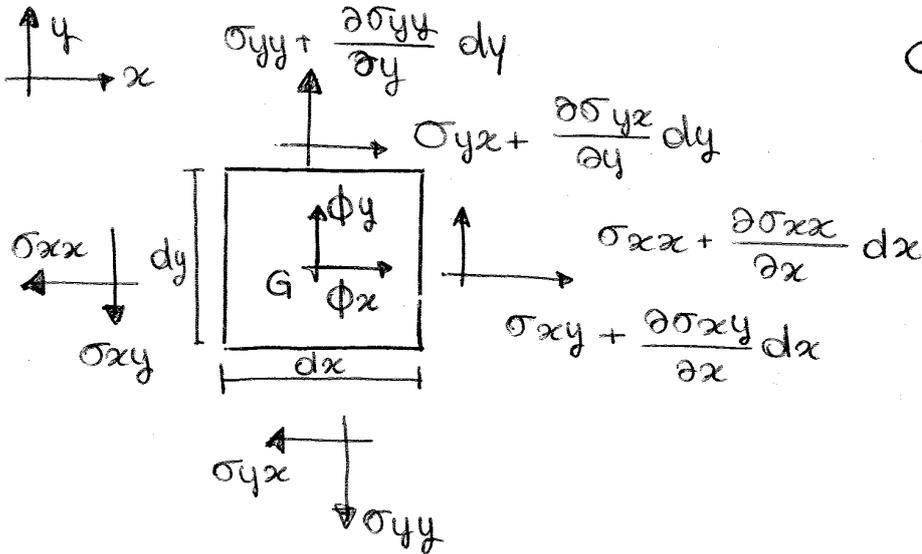


## EQUAZIONI DIFFERENZIALI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

Nell'intorno del pto P, immaginando di valutare un intorno infinitesimo in direzione x, la funzione

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y, z) = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$$

può essere approssimata al 1° ordine e fare la stessa cosa per y.



$\phi_y, \phi_x \rightarrow$  COMPONENTI FORZE DI VOLUME (si applicano in G)  
 Si considerano le variazioni delle funzioni componenti del tensore delle tensioni nel piano xy per una vista del cubetto elementare di lato dx dy dz.

### EQUILIBRIO ASSE X:

$$\left(-\sigma_{xx} + \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dy + \left(-\sigma_{yx} + \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy\right) dx + \phi_x dx dy = 0$$

Se si considerano anche i contributi nella 3° dimensione:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dy dz + \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz + \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy + \phi_x dx dy dz = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \phi_x = 0}$$

Facendo la stesse cose anche per le altre componenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \phi_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \phi_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \phi_z = 0 \end{cases}$$

EQ. DIFFERENZIALI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

Legame differenziale tra spostamenti e deformazioni:

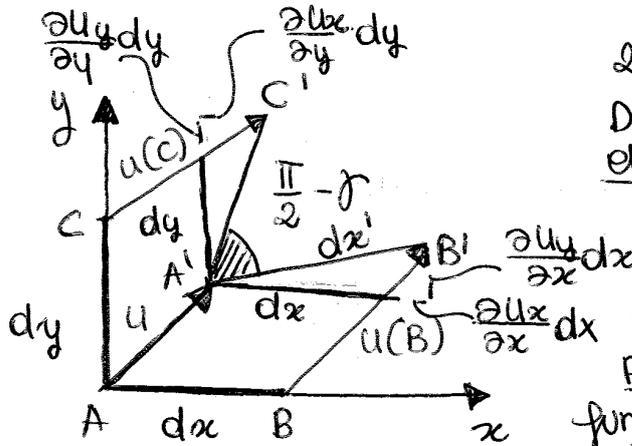
La funzione SPOSTAMENTO ELASTICO  $u$  nella direzione  $x$  (se si considera un intorno infinitesimo in direzione  $x$ ) è approssimata al primo ordine:

$$u_x(x, y, z) = u_x(P) + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz$$

STESSA COSA per  $u_y(x, y, z)$  e  $u_z(x, y, z)$ .

$u$  = SPOSTAMENTO ELASTICO

PICCOLI SPOSTAMENTI



2 segmenti:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ .  
Dopo uno spostamento elastico diventano:  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$ .

se gli spostamenti sono PICCOLI la variazione delle funzioni di spostamento si limita al primo ordine.

$$\overline{A'B'}^2 = (d\epsilon')^2 = \left(dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} dx\right)^2$$

$$(d\epsilon')^2 = dx^2 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} dx^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 dx^2$$

$$(d\epsilon')^2 = dx^2 \left(1 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)$$

ordine superiore

$$d\epsilon' = \sqrt{dx^2 \left(1 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)} = dx \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)$$

se gli spostamenti sono piccoli, lo sono anche le derivate e quindi si può approssimare al primo ordine

Sostituendo in  $e = \frac{|dX| - |dx|}{|dx|} \rightarrow \epsilon_x = \frac{d\epsilon' - dx}{dx}$

Facendo la stessa cosa anche per  $z$  e  $y$ :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\epsilon_x \approx \frac{dx \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) - dx}{dx}$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Legame differenziale deformazioni dilatazioni e contrazioni

(11)

## LEGGI COSTITUTIVE DEL MATERIALE

Le equazioni costitutive per un solido in campo lineare elastico legano tra loro il tensore delle tensioni e il tensore delle deformazioni tramite la LEGGE di HOOKE ( $\sigma = E \cdot \epsilon$ )

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl}$$

21 = numero delle costanti INDIPENDENTI nel caso di un materiale anisotropo qualsiasi.

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$E = \frac{1}{E} \sigma \rightarrow E = D \cdot \sigma$  (81 componenti)  $\rightarrow$  36 x simmetria dei tensori delle tensioni e delle deformazioni

MATERIALE ANISOTROPO:

$$\{\epsilon\} = [D] \{\sigma\}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

MATERIALE ORTOTROPO: (ammettono 3 piani mutuamente ortogonali)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_3} & \frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

MATERIALI ISOTROPI:

$$\{\epsilon\} = [D] \{\sigma\}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_{ii} = \frac{1}{E} [\sigma_{ii} - \nu (\sigma_{jj} + \sigma_{kk})]$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{G} \tau_{ij} = \tau_{ij} \cdot \frac{2(1+\nu)}{E}$$

Legame tensioni/deformazioni per i materiali isotropi omogenei elastici. (12)

## CRITERI DI CEDIMENTO STATICO

CEDIMENTO STRUTTURALE (o ROTTURA): ogni cambiamento di dimensione forma o proprietà del materiale di un componente o di una struttura che li rende inadeguati ad assolvere alle funzioni e le quali erano stati progettati.

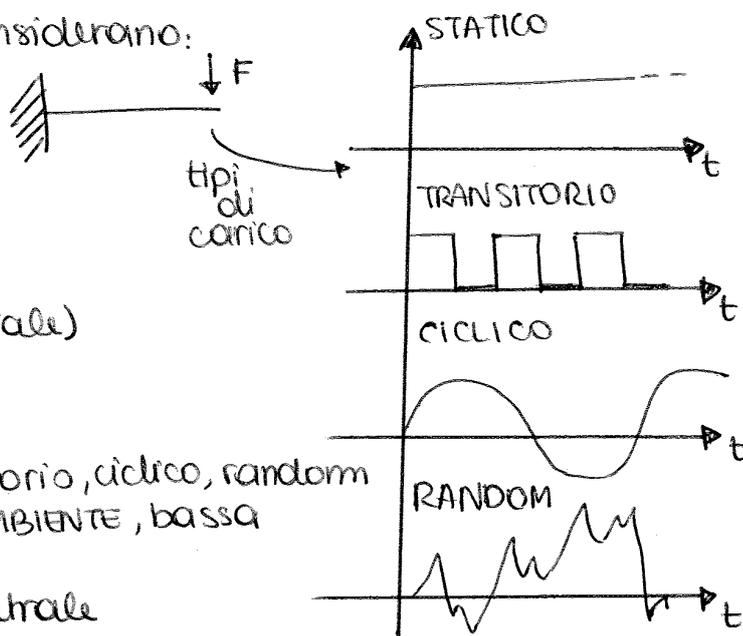
Per controllare il CEDIMENTO si considerano:

• TIPO DI CEDIMENTO:

- per def. PLASTICA
- per def. ELASTICA
- per frattura
- (modifica del materiale)

• FATTORI INFLUENZANTI

- carico: STATICO, transitorio, ciclico, random
- temperatura: alta, AMBIENTE, bassa
- tempo: breve, lungo
- ambiente: chimico, neutrale



• COLLOCAZIONE ROTTURA

- interna
- superficiale

IPOTESI DI ROTTURA: occorre predire la capacità di un elemento strutturale di resistere ad un determinato carico e scegliere un adeguato COEFFICIENTE DI SICUREZZA

→ REGOLE o CRITERI MATEMATICI DI VERIFICA o PROGETTO

- (caso: - def. PLASTICA o FRATTURA  
 - carico STATICO  
 - temperatura AMBIENTE)

↓  
 devono valere per qualunque tipo di struttura!

devono stabilire un' "EQUIVALENZA" tra lo stato MONOASSIALE del provino di riferimento e lo stato TRIASSIALE qualsiasi di un qualunque elemento del progetto.

DEFINIZIONE:

Si ha cedimento di un componente quando il valore del MODULO selezionato nello stato di tensione PLURIASSIALE diventa  $> 0 =$  al MODULO che causa il collasso in uno stato di tensione MONOASSIALE. (cioè diventa  $> 0 =$  al valore dello stesso modulo che provoca il cedimento in una prova di trazione).

MODULO è un parametro ricavabile dalle matrici  $K_{ik}$  e loro solo con fronte non basta.

↳ tensione ideale equivalente

L'energia TOTALE può essere scritta:

$$U_T = U_{\text{volumica}} + U_{\text{deviatorica}}$$

Energia di DEFORMAZIONE = LAVORO

$$U_T = \frac{1}{2} [ \epsilon_{xx} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + 2\epsilon_{xy} \tau_{xy} + 2\epsilon_{xz} \tau_{xz} + 2\epsilon_{zy} \tau_{zy} ]$$

In un sist. di riferimento principale:  $[\tau=0] + [\gamma=0]$

$$U_T = \frac{1}{2} [ \sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3 ]$$

ENERGIA VOLUMICA  $\rightarrow U_V = \frac{1}{2} \sigma_m \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) \frac{\Delta V}{V}$

se il sist. di riferimento è principale:

$$\left( \epsilon = \frac{\Delta e}{e} \right) \xrightarrow{3D} \left( \epsilon = \frac{\Delta V}{V} \right)$$

$$U_T = \frac{1}{2} [ (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) ]$$

Dalla legge di Hooke:

$$\epsilon_i = \frac{1}{E} [ \sigma_i - \nu (\sigma_k + \sigma_j) ]$$

CEDEMENTO: quando la  $U_0$  del componente raggiunge o supera la  $U_0$  del provino.

$$U_T = \frac{1}{2} [ \sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3 ] =$$

$$= \frac{1}{2} [ \sigma_1 \left[ \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)) \right] +$$

$$+ \sigma_2 \left[ \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu (\sigma_1 + \sigma_3)) \right] +$$

$$+ \sigma_3 \left[ \frac{1}{E} (\sigma_3 - \nu (\sigma_2 + \sigma_1)) \right] ] =$$

$$U_T = \frac{1}{2E} [ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3) ]$$

$$U_V = \frac{1}{2} \sigma_m \frac{\Delta V}{V}, \quad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad \epsilon_m = \frac{1}{E} \cdot [ \sigma_m - 2\nu \sigma_m ]$$

$$\hookrightarrow U_V = \frac{1}{2} \sigma_m \cdot 3 \epsilon_m = \frac{1}{2E} \sigma_m ( \sigma_m - 2\nu \sigma_m ) = \frac{1-2\nu}{2E} 3\sigma_m^2 = U_V$$

L'energia di distorsione si ottiene per differenza:

$$U_0 = U_T - U_V \rightarrow U_0 = \frac{1+\nu}{6E} [ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 ]$$

**TRAVI** → 1 tensione PRINCIPALE e' SEMPRE uguale a zero

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\tau_{xz}^2}) \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\tau_{xz}^2}) \end{cases}$$

**Eq. TRESCA**  
 $\sigma_{id} = \max \begin{cases} |\sigma_1 - \sigma_3| \\ |\sigma_2 - \sigma_3| \\ |\sigma_3 - \sigma_1| \end{cases} \geq \sigma_L \rightarrow |\sigma_1 - \sigma_3| = \left| \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau}) - \frac{1}{2} (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau}) \right|$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_L$$

**Eq. Von MISES**

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sigma_L$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_L$$

### COEFFICIENTE DI SICUREZZA

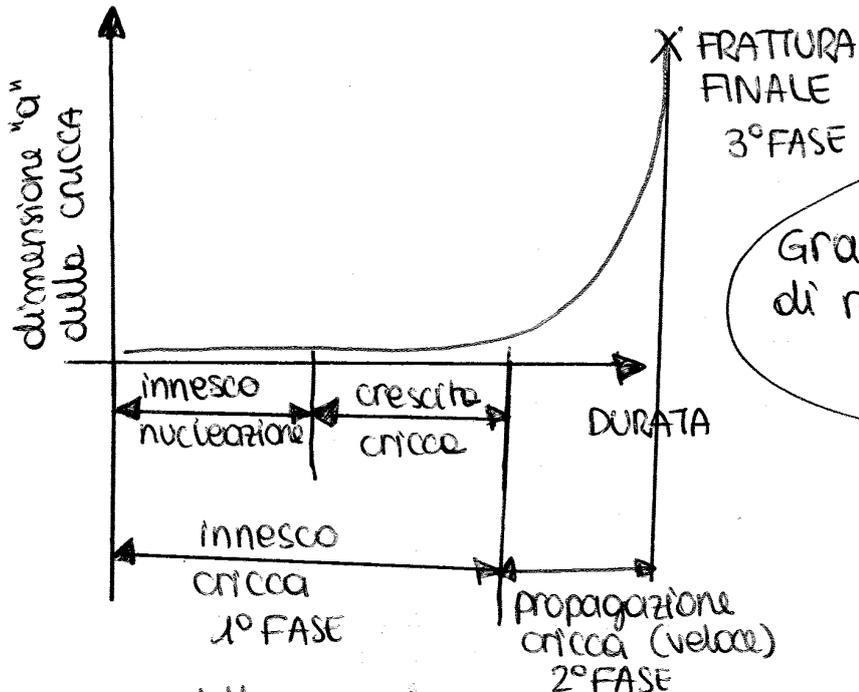
Dipende da:

- livello di approssimazione del modello + materiale
- vincoli e carichi del componente

COEFFICIENTE sempre > 1 → indica la nostra ignoranza riguardo il modello

$$\sigma_{id} \leq \frac{\sigma_L}{s}$$

+ spendo  
 + conosco i carichi  
 + i modelli sono accurati }  $\downarrow$  s



METODI DI ISPEZIONE → MOLTO COSTOSA  
 della CRUCCA:  
 - microscopio  
 - raggi X  
 - ultrasuoni

PREDIZIONE della durata a fatica:

MODELLO DI PREDIZIONE DELLA DURATA

se conosco la CRUCCA SUBCRITICA posso predire la durata del materiale prima che la CRUCCA diventi CRITICA. Ho bisogno di conoscere:

- fattori ambientali e di produzione
- dati del materiale
- dati del carico
- condizioni di tensione e/o deformazione locale

APPROCCI: CRITERI DI PROGETTAZIONE

SAFE LIFE: la rottura non può mai avvenire perché si è sovradimensionato il componente. In un intervallo di tempo pari alla vita complessiva del componente o tra 2 interventi di manutenzione, nessun difetto preesistente può crescere a tal punto da provocare la rottura.

FAIL SAFE: il componente è ritirato prima che avvenga la rottura. La struttura deve avere una ridondanza di elementi o componenti specifici sufficiente da assicurare una rottura sicura che non comporti la rottura dell'intera struttura.

DEAMAGE TOLERANCE: devo conoscere il tempo di propagazione tra cricca subcritica e critica e possedere quindi degli strumenti di ispezione accurati.

Esistono diverse tipi di PROVE DI FATICA con le quali si sollecita un provino standard a ricorrenza di DATI DI FATICA DI BASE. Una tra queste è la

## FLESSIONE ROTANTE

↓  
i risultati sono rappresentati nei diagrammi di Wohler o  $\sigma-N$ .

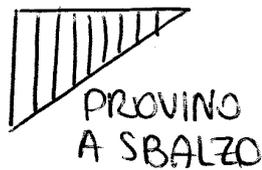
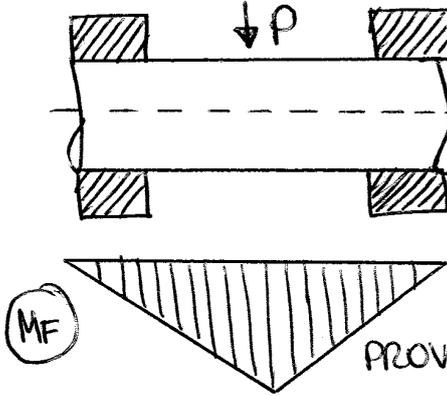
Oltre a - TRAZIONE - COMPRESSIONE  
- FLESSIONE PIANA  
- TORSIONE

→ SISTEMA MACCHINA A FLESSIO

cuscinetti di supporto  
ω = velocità di un motore che fa ruotare l'albero

X trazione-compressione si possono usare le stesse macchine usate x le prove statiche, purché abbiano dei buoni sistemi di controllo xk si ha a che fare con carichi importanti, + costose xk si hanno 2 macchine in 1.

PROVINI DI TRAZIONE POSSONO ESSERE FILETTATI O SPALETTATI

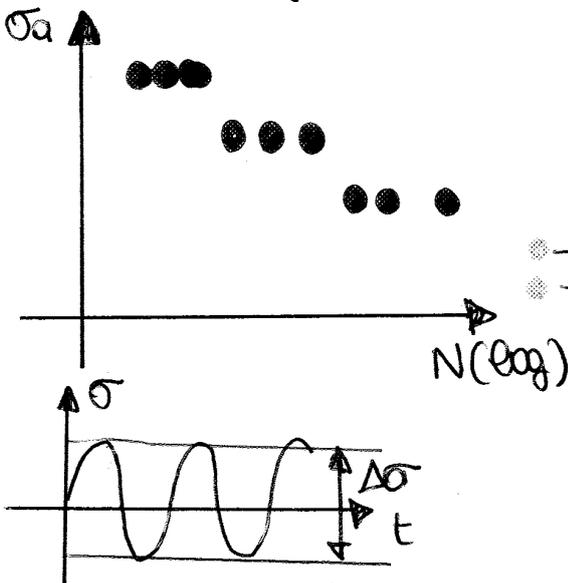


## CURVE $\sigma-N$

Raccogliamo i dati di fatica di BASE, indicano il comportamento nel tempo del materiale.

ASCISSA: numero dei cicli in scala logaritmica decimale (xk si ha a che fare con N molto grandi alle volte)

ORDINATA: la sollecitazione applicata, in scala lineare o logaritmica.



- Il numero di cicli aumenta con il diminuire del carico e i dati si disperdono sempre di più

○ → RUN OUTS: provini che escono dalle prova integri → POSSONO AVERE DURATA INFINITA.

ACCIAI  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_D \cong \frac{1}{2} \sigma_R, \sigma_R < 1400 \text{ MPa} \\ \sigma_D = \text{cost} = 700 \text{ MPa}, \sigma_R > 1400 \text{ MPa} \end{array} \right.$

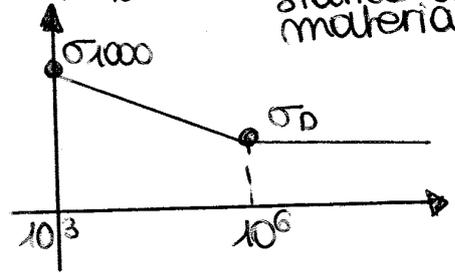
$0,9 \sigma_R \cong \sigma_{1000}$

Determinare le caratteristiche a fatica comportate da uno sforzo speri mentale in termini di costo e tempo, quindi si è cercata una relazione che legasse resist. a fatica e una proprietà statica del materiale.

STIMA X LA CURVA  $\sigma-N$

- utilizzare i dati del test se possibile
- in un diagramma log-log i dati tendono a una retta
- si può quindi usare:

$$\sigma_N = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{coeff. del materiale}}}{A} \cdot (N)^{\underset{\downarrow}{b}}$$



$$\log \sigma_N = \log A + b \log N$$

$$A = \frac{\sigma_{1000}^2}{\sigma_D}$$

$$b = \frac{\log \sigma_D - \log \sigma_{1000}}{\log 10^6 - \log 10^3} = -\frac{1}{3} \log \left( \frac{\sigma_{1000}}{\sigma_D} \right) = b$$

FORMULA INVERSA: (x ricavare N)

$$\log \sigma_N = \log A + b \log N$$

$$\log \sigma_N - \log A = b \log N$$

$$\log \left( \frac{\sigma_N}{A} \right) = b \log N$$

$$\frac{1}{b} \log \left( \frac{\sigma_N}{A} \right) = \log N$$

$$10^{\frac{1}{b} \log \left( \frac{\sigma_N}{A} \right)} = N$$

Per calcolare il numero di cicli imposti alla struttura in un certo numero di ore:

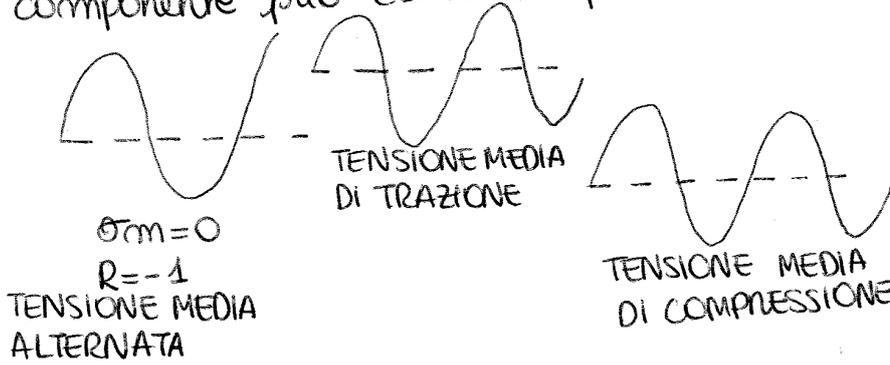
$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$N_{giri} = f \cdot \underbrace{3600 \cdot h}_{\text{secondi}}$$

# FATICA DEI MATERIALI

## EFFETTO DELLA TENSIONE MEDIA

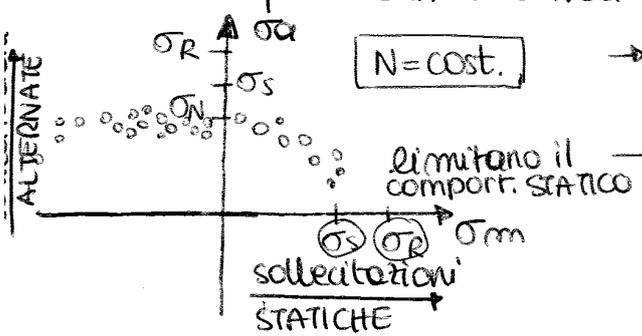
Un componente può essere sottoposto a  $\neq$  tipi di carico:



Questo perché nella pratica succede spesso che le sollecitazioni cicliche siano caratterizzate da una  $\sigma_m \neq 0$  di TRAZIONE o di COMPRESSIONE.

Bisogna valutare l'effetto di una  $\sigma_m \neq 0$  sovrapposta ad una  $R = -1$ , la quale è una curva di Wohler.

Da alcuni esperimenti si è ricavato che, variando  $\sigma_m$  e  $\sigma_a$ :



→ la curva  $\sigma_a$  decrece all'aumentare di  $\sigma_m$  di TRAZIONE

→ la  $\sigma_a$  rimane COSTANTE x un ampio campo di  $\sigma_m$  se la  $\sigma_m$  è di COMPRESSIONE

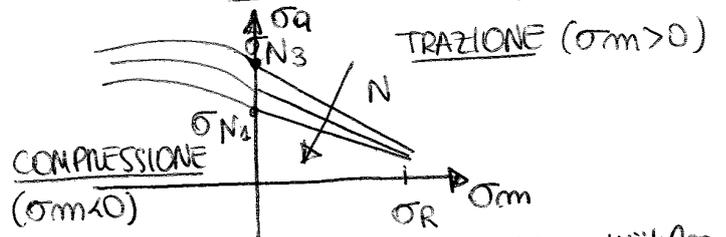
TENSIONI MEDIE di:

- COMPRESSIONE sono favorevoli al comp. a fatica
- TRAZIONE sono dannose x il comp. a fatica

$\sigma_a$  → CONTRIBUTO dinamico/alternato

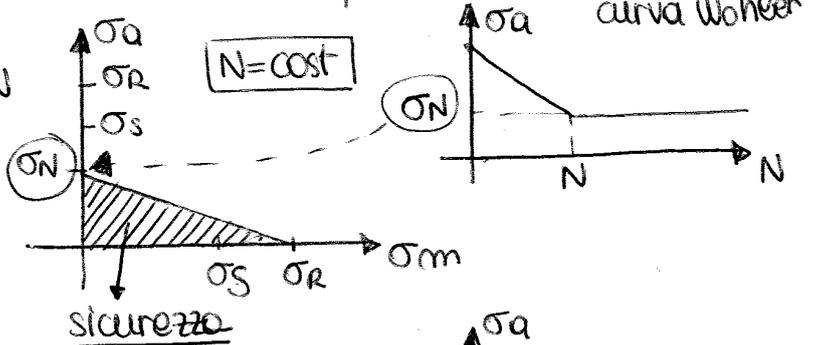
$\sigma_m$  → CONTRIBUTO statico

L'influenza della  $\sigma_m$  è + marcata nella zona di TRAZIONE che in quella di COMPRESSIONE.



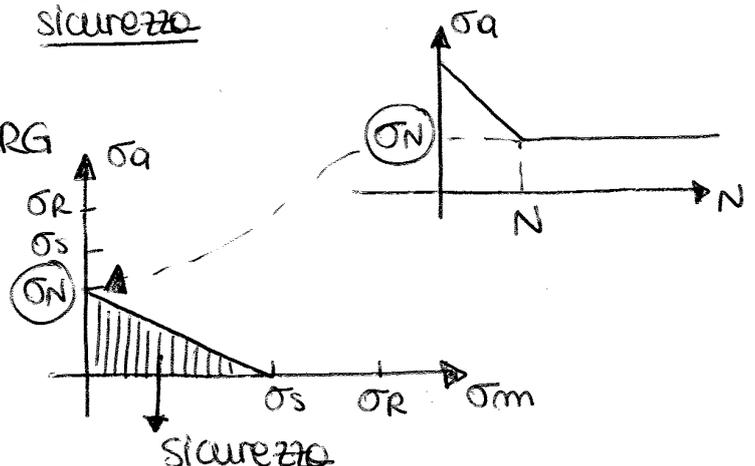
RELAZIONE lineare di GOODMAN

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \frac{\sigma_m}{\sigma_R} = 1$$



RELAZIONE lineare di SODEBERG

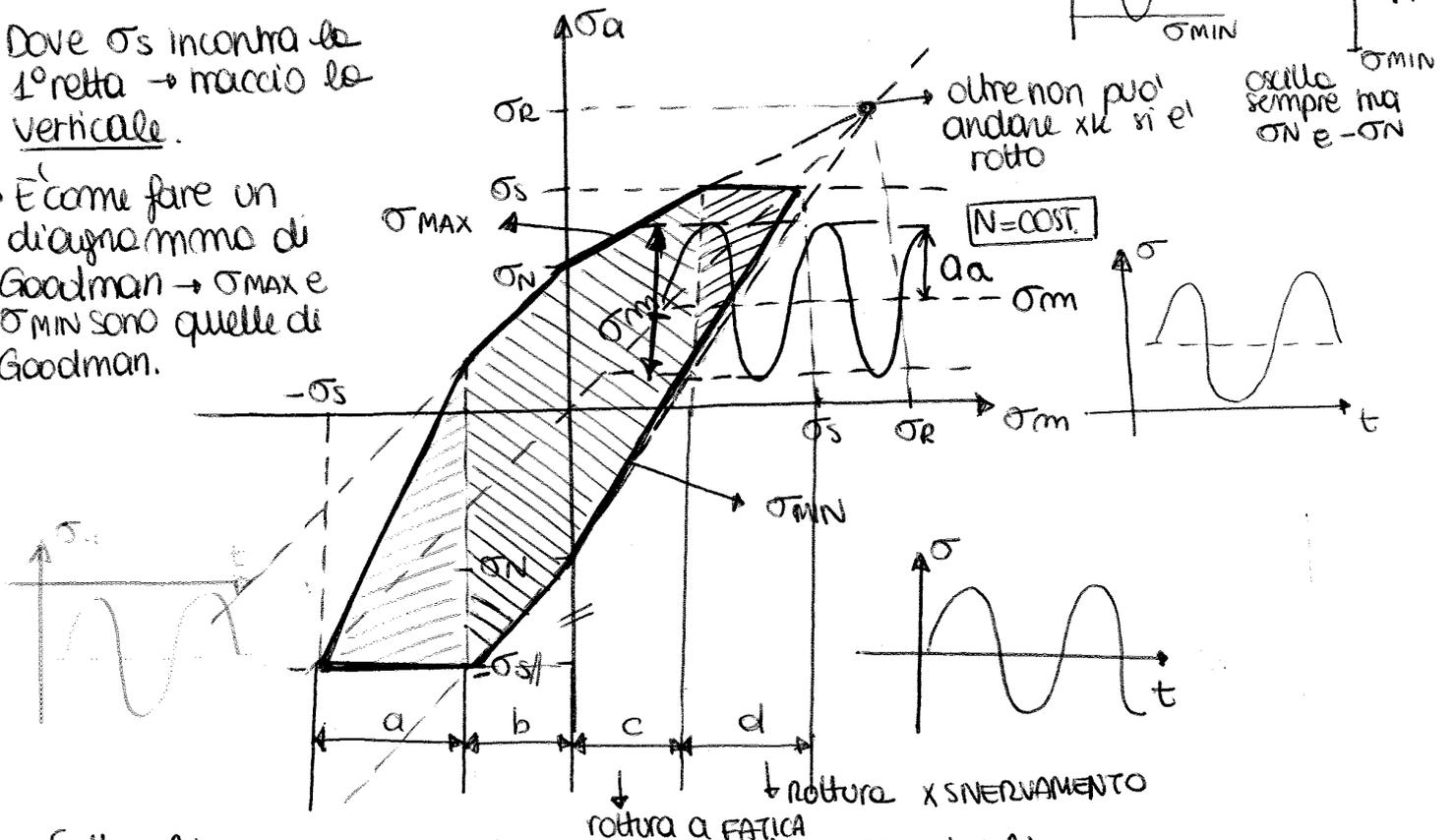
$$\frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \frac{\sigma_m}{\sigma_S} = 1$$



# DIAGRAMMA DI GOODMAN - SMITH

Dove  $\sigma_s$  incontra la 1° retta  $\rightarrow$  maccio la verticale.

È come fare un diagramma di Goodman  $\rightarrow \sigma_{MAX}$  e  $\sigma_{MIN}$  sono quelle di Goodman.



- Sulla linea di bordo il componente dura per N cicli
- Nell'area interna durata maggiore di N cicli.
- All'esterno dell'area durata minore di N cicli

REGIONE	Valori limiti di $\sigma_m$	collasso
a	$-\sigma_s \leq \sigma_m \leq \sigma_N - \sigma_s$	$\sigma_{MAX} - 2\sigma_m \geq \sigma_s$
b	$\sigma_N - \sigma_s \leq \sigma_m \leq 0$	$\sigma_{MAX} - \sigma_m \geq \sigma_N$
c	$0 \leq \sigma_m \leq \frac{\sigma_s - \sigma_N}{1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}}$	$\sigma_{MAX} - \sigma_m \left( \frac{\sigma_R - \sigma_N}{\sigma_R} \right) \geq 0$
d	$\frac{\sigma_s - \sigma_N}{1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}} \leq \sigma_m \leq \sigma_s$	$\sigma_{MAX} \geq \sigma_s$

collasso in zona "a":

$$\sigma_{MIN} = -\sigma_s$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{MAX} + \sigma_{MIN}}{2}$$

$$\sigma_{MIN} = 2\sigma_m - \sigma_{MAX}$$

$$-\sigma_s = 2\sigma_m - \sigma_{MAX}$$

$$\sigma_{MAX} - 2\sigma_m \geq \sigma_s$$

collasso in zona "b":

$$\sigma_{MIN} = \sigma_m - \sigma_N \rightarrow \sigma_{MIN} = 2\sigma_m - \sigma_{MAX}$$

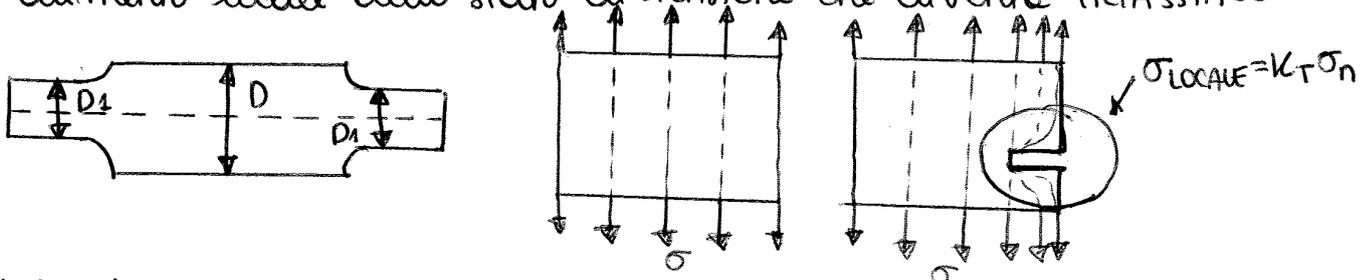
$$\sigma_m - \sigma_N = 2\sigma_m - \sigma_{MAX}$$

$$\sigma_m - \sigma_{MAX} = \sigma_N$$

$$\sigma_{MAX} - \sigma_m \geq \sigma_N$$

## EFFETTO DI INTAGLIO

Una discontinuità geometrica comporta una variazione di sezione  
 → un aumento locale dello stato di tensione che diventa TRIASSIALE.



Le linee di ISOTENSIONE che compaiono sulla piastra, in presenza di un INTAGLIO devono passare tutte x uno stesso punto in prossimità dell'intaglio quindi lo stato di tensione localmente aumenta.

$$\sigma_{\text{LOCALE}} = K_T \cdot \sigma_{\text{NOMINALE}}$$

FATTORE DI INTAGLIO TEORICO

parametro geometrico che dipende dalla forma dell'intaglio e dal tipo di carico (3÷4)

Per quanto possibile si cerca di ridurre al massimo la severità dell'intaglio, grazie ai raggi di RACCONDO, dato che l'intaglio è molto frequente negli organi meccanici

$$K_T = \frac{\sigma_{\text{MAX}}}{\sigma_{\text{NOM}}}$$

→  $\sigma_{\text{locale}}$

→ Nel caso di un foro in una PIASTRA CIRCOLARE vale  $\approx 3$ .

campo STATICO

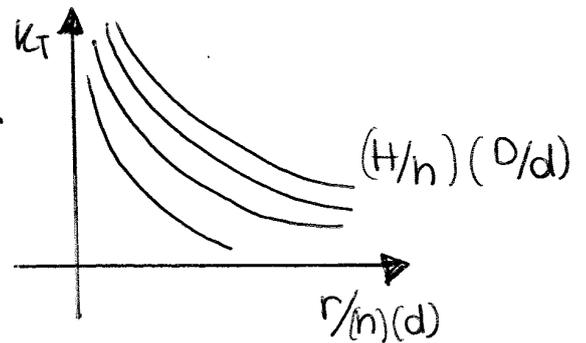
MODELLI X CALCOLARE  $K_T$

- modelli fotoelastici
- estensimetri
- modelli numerici



Per calcolare l'effetto di INTAGLIO si usano i grafici dei fattori di concentrazione delle tensioni (possono essere tracciati sia x i valori netti che x i valori nominali)

si differenziano x la forma e per il carico applicato, cioè dalle caratteristiche di  $K_T$ .



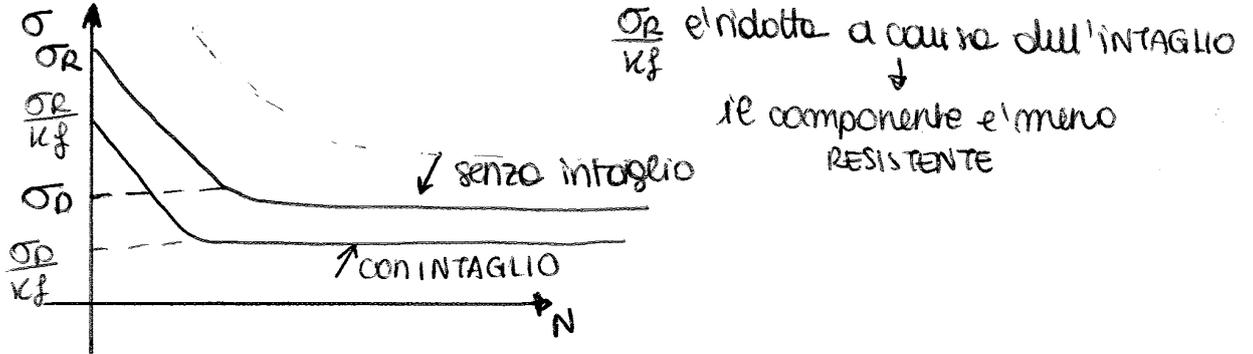
Il comportamento plastico del materiale può ridurre il fattore di CONCENTRAZIONE della tensione →  $K_p < K_T$

$$K_p = 1 + (K_T - 1) \frac{E_s}{E}$$

## DURATA FINITA $\sigma_0$

$$\boxed{(\sigma_0)_{\text{intaglio}} = \frac{(\sigma_0)_{\text{ nominale}}}{k_f}}$$

Applicare  $k_f$  all'intera curva  $\sigma-N$



## COEFFICIENTE DI SICUREZZA, $n$ (Peterson)

- caso: CARICO COSTANTE: ( $\sigma_m \neq 0, \sigma_a = 0$ )

MATERIALE DUTILE:

$$\boxed{n = \frac{\sigma_s}{\sigma_m}}$$

- per torsione (ipotesi di Von Mises):

$$\boxed{n = \frac{\tau_s}{\tau_m} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}\tau_m}}$$

- per carico combinato

$$\boxed{n = \frac{\sigma_s}{\sqrt{\sigma_m^2 + 3\tau_m^2}}}$$

MATERIALE FRAGILE:

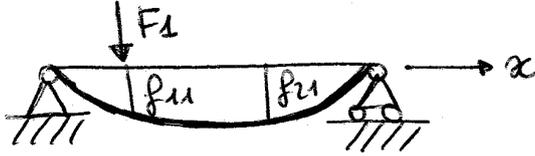
$$\boxed{n = \frac{\sigma_R}{k_f \sigma_m}} \quad (k_f = k_t)$$

- per torsione (ipotesi di Mohr):

$$n = \frac{\sigma_R}{k_f \tau_m} \left[ \frac{1}{1 + \sigma_{JR} / \sigma_{RC}} \right]$$

Considerando la trave, in base al principio di sovrapposizione degli effetti, l'ordine secondo il quale si applicano i carichi non ha alcuna influenza sullo stato finale della trave. Pertanto si può immaginare di ottenere la configurazione finale della trave applicando prima  $F_1$  e poi  $F_2$  o viceversa.

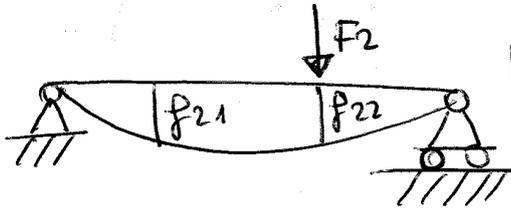
CASO A:



$$L_I = \frac{1}{2} F_1 f_{11} + \frac{1}{2} F_2 f_{22} + F_1 f_{12}$$

$f_{11}$ : spostamento in 1 dovuto a  $F_1$   
 $f_{22}$ : " in 2 " a  $F_2$   
 $f_{12}$ : " in 1 " a  $F_1$

CASO B:



$$L_{II} = \frac{1}{2} F_2 f_{22} + \frac{1}{2} F_1 f_{11} + F_2 f_{21}$$

Uguagliando  $x$  la sovrapposizione degli effetti:

$$F_2 f_{21} = F_1 f_{12}$$

se  $F_2 = F_1 \rightarrow f_{21} = f_{12}$ : come dice l'enunciato di Betti  
 PRINCIPIO DI RECIPROCAITÀ DEGLI SPOSTAMENTI.

TEOREMA DI CASTIGLIANO:

La derivata del lavoro di deformazione rispetto ad una forza misura la componente dello spostamento del punto di applicazione della forza nella direzione della forza stessa.

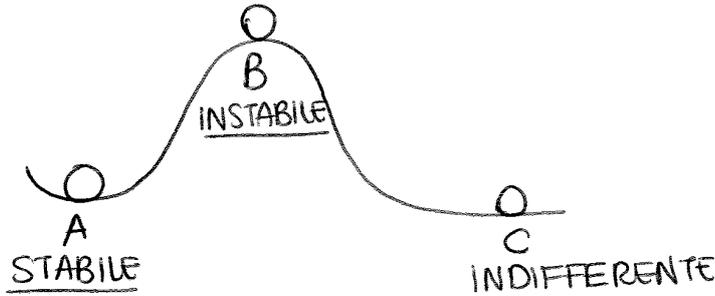
Da Clapeyron:  $L_I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i v_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \theta_i$

Nel caso delle travi inflesse  $\rightarrow L_I = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M(x)^2}{EJ} dx$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M(x)^2}{EJ} dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i v_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \theta_i$$

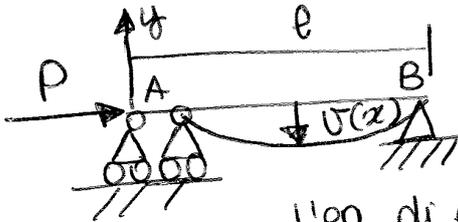
## INSTABILITA' ELASTICA

Stabilità:



Un'asta compressa può assumere una configurazione OMA STABILE in presenza di disturbi laterali oppure raggiungere un carico  $x$  il quale la configurazione di equilibrio diventa instabile anche  $x$  piccole perturbazioni.  $\rightarrow$  la condizione critica di instabilità può essere al di sotto di  $\sigma_s$  o  $\sigma_r$ .

Per studiare il problema si considera una trave, sollecitata da una forza assiale  $P$ :



$v(x)$  è la perturbazione in direzione  $ny$ .

è, l'eq. di equilibrio del calcolo delle linee elastiche

$$EJ_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -Pv(x)$$

ponendo  $\frac{P}{EJ_z} = a$

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + a v(x) = 0$$

La soluzione è del tipo:  $v(x) = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax$   
da cui ponendo le condizioni di vincolo:

$$v(l) = C_1 \sin al = 0$$

si ottiene:

$$\boxed{\frac{P}{EJ_z} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}$$

Carico Euleriano di STABILITA' o carico critico:

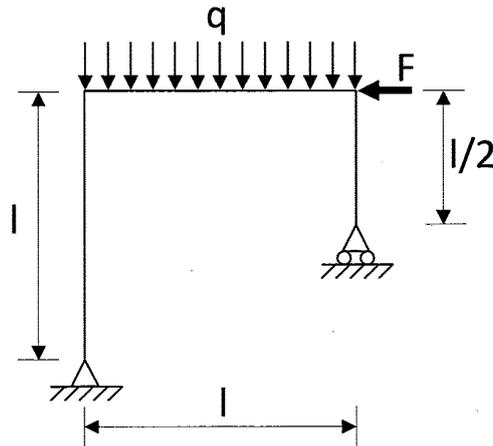
$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2}}$$

## ESERCITAZIONE 1

### “Gradi di libertà e reazioni vincolari”

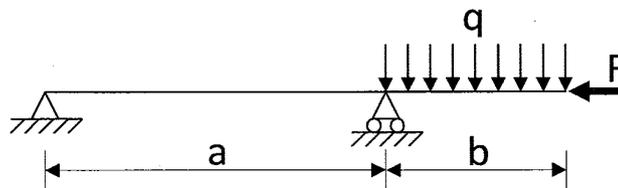
#### ✖ Esercizio 1

- Data la struttura sotto rappresentata ( $l=1\text{m}$ ,  $F=25\text{N}$ ,  $q=70\text{N/m}$ ),  
a - si verifichi l'isostaticità della struttura  
b - si calcolino le reazioni vincolari



#### ✖ Esercizio 2

- Data la struttura sotto rappresentata ( $a=2\text{m}$ ,  $b=1\text{m}$ ,  $F=50\text{ N}$ ,  $q=20\text{N/m}$ ),  
a - si verifichi l'isostaticità della struttura  
b - si calcolino le reazioni vincolari



### ✕ Esercizio 5

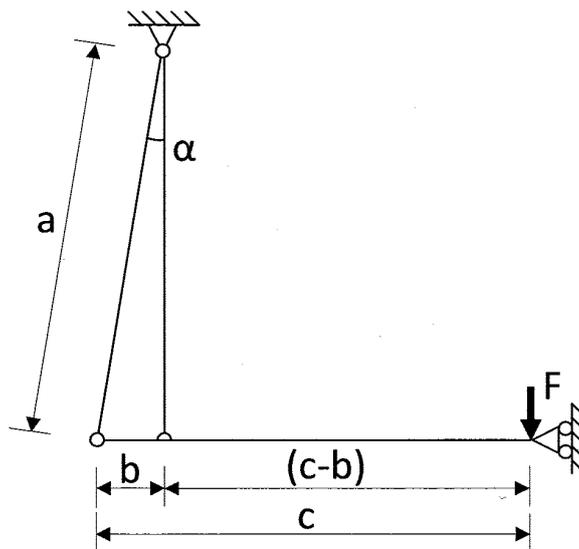
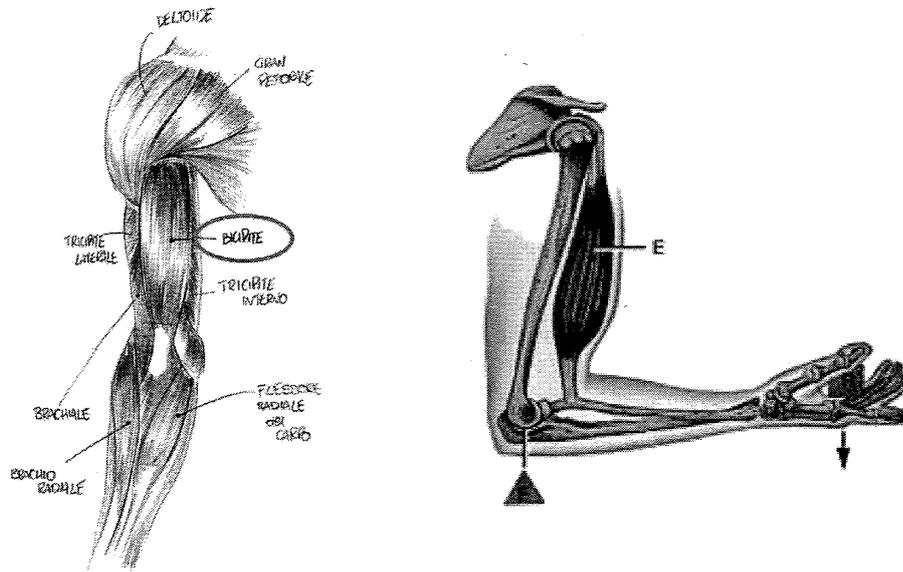
Si consideri il modello strutturale di braccio e avambraccio nella posizione sotto rappresentata, in cui una massa di circa 10kg viene sorretta con la mano. Il modello comprende omero (30cm), ulna-radio (25cm), carpo + metacarpo (7cm) e muscolo bicipite.

Si considerino pertanto le seguenti dimensioni:  $a=30\text{cm}$ ,  $b=5\text{cm}$ ,  $c=(25+7)=32\text{cm}$ ,  $F=100\text{N}$ .

a - si discuta la scelta dei vincoli e si verifichi l'isostaticità della struttura

b - si calcolino le reazioni vincolari mediante scomposizione in strutture semplici

c - si calcolino le reazioni vincolari mediante equazioni ausiliarie



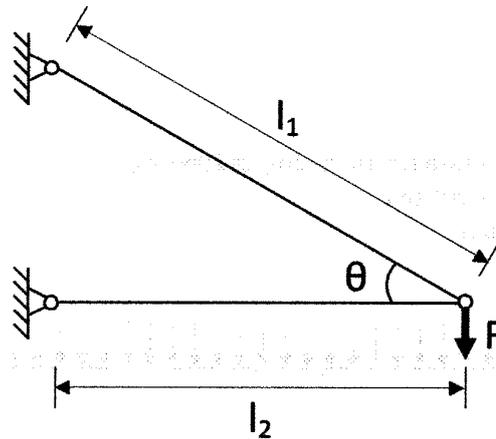
**Esercizio 3**

Data la struttura sotto rappresentata ( $l_2=3\text{m}$ ,  $\theta=30^\circ$ ,  $F=2000\text{N}$ ),

a - si verifichi l'isostaticità della struttura

b - si calcolino le reazioni vincolari

c - si calcolino gli sforzi nei singoli corpi



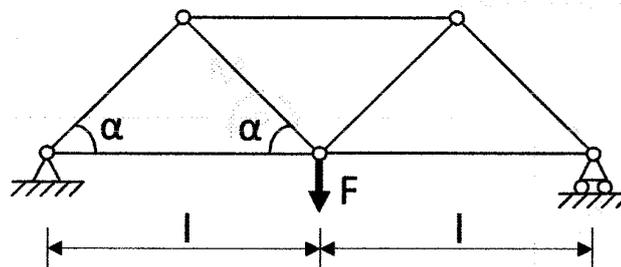
**Esercizio 4**

Data la struttura reticolare sotto rappresentata ( $l=5\text{m}$ ,  $\alpha=45^\circ$ ,  $F=2000\text{N}$ );

a - si verifichi l'isostaticità della struttura

b - si calcolino le reazioni vincolari

c - si calcolino gli sforzi nei singoli corpi



CALCOLARE BENE IL BARICENTRO  
dei vari rettangoli.

→ BARICENTRO → AREA →  
 MOMENTO STATICO parziale.

Attenzione agli spessori s.

Fare il trasporto del  
 momento di INERZIA.

## TAZIONE 4

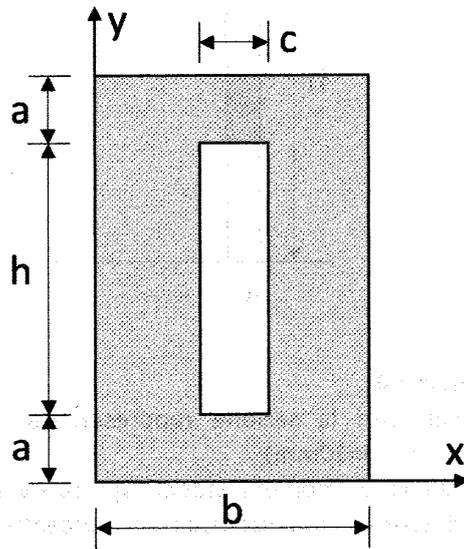
“tria delle aree”

- a - calcolare i momenti statici rispetto x,y  
 e la posizione del baricentro G  
 b - calcolare i momenti d'inerzia rispetto  
 agli assi baricentrici  $x_G, y_G$

$$[S_x=60 \cdot 10^6 \text{ mm}^3, S_y=40 \cdot 10^6 \text{ mm}^3,$$

$$x_G=200 \text{ mm}, y_G=300 \text{ mm}, I_{xG}=6.67 \cdot 10^9 \text{ mm}^4,$$

$$I_{yG}=3.17 \cdot 10^9 \text{ mm}^4]$$



### Esercizio X

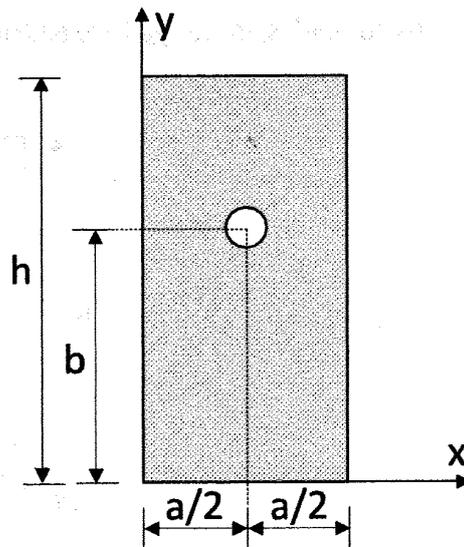
Si consideri la sezione rappresentata in  
 figura ( $a=200 \text{ mm}$ ,  $b=250 \text{ mm}$ ,  $h=400 \text{ mm}$ ,  
 $d=40 \text{ mm}$ );

- a - calcolare i momenti statici rispetto x,y  
 e la posizione del baricentro G  
 b - calcolare i momenti d'inerzia rispetto  
 agli assi baricentrici  $x_G, y_G$

$$[S_x=1.568 \cdot 10^7 \text{ mm}^3, S_y=7.874 \cdot 10^6 \text{ mm}^3,$$

$$x_G=100 \text{ mm}, y_G=199 \text{ mm},$$

$$I_{xG}=1.0634 \cdot 10^9 \text{ mm}^4, I_{yG}=2.6654 \cdot 10^9 \text{ mm}^4]$$

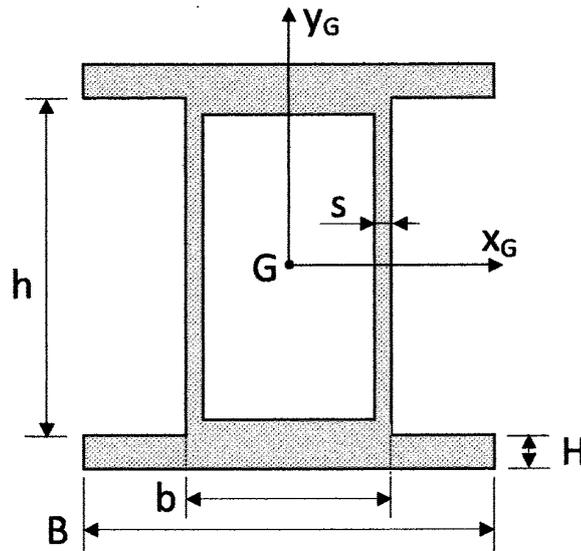


**Esercizio 5**

Si consideri la sezione rappresentata in figura ( $b=120\text{mm}$ ,  $h=200\text{mm}$ ,  $s=10\text{mm}$ ,  $B=240\text{mm}$ ,  $H=20\text{mm}$ );

- a - calcolare i momenti statici rispetto  $x_G, y_G$  e verificare la posizione del baricentro G
- b - calcolare i momenti d'inerzia rispetto agli assi baricentrici  $x_G, y_G$

$[S_x=S_y=0, x_G=y_G=0, I_{xG}=1.4788 \cdot 10^8 \text{mm}^4, I_{yG}=5.988 \cdot 10^7 \text{mm}^4]$



**Esercizio 3**

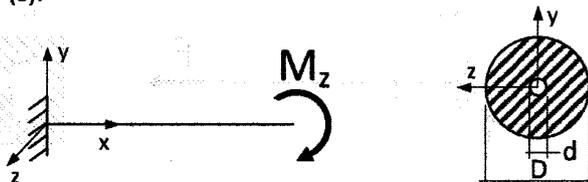
Ripetere l'Esercizio 2 considerando che la trave abbia la sezione ribaltata ( $b = 100 \text{ mm}$ ,  $h = 60 \text{ mm}$ ).

- a - Calcolare l'andamento delle tensioni normali nella sezione più sollecitata.
- b - Trascurando le tensioni tangenziali, calcolare il valore massimo delle tensioni normali e il loro valore in corrispondenza della quota  $y = 25 \text{ mm}$ .
- c - Calcolare il coefficiente di sicurezza nel punto A.
- d - Confrontare i risultati con quelli dell'Esercizio 2 e commentare le differenze.

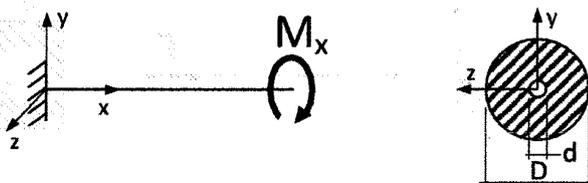
~~Esercizio 4~~

Si consideri una trave di sezione circolare cava ( $D = 60 \text{ mm}$ ,  $d = 10 \text{ mm}$ ,  $l = 400 \text{ mm}$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\sigma_s = 700 \text{ MPa}$ ), incastrata ad un estremo e caricata all'altro estremo.

- ~~X~~ In presenza di momento flettente ( $M_z = 12 \text{ kNm}$ ), calcolare la distribuzione di tensione, il modulo di resistenza a flessione ( $W_z$ ), la tensione massima nella sezione ( $\sigma_{\max}$ ) e il coefficiente di sicurezza ( $s$ ).



- ~~X~~ In presenza di momento torcente ( $M_x = 7 \text{ kNm}$ ), calcolare la distribuzione di tensione, il modulo di resistenza a torsione ( $W_x$ ), la tensione massima ( $\tau_{\max}$ ) e l'angolo di torsione in punta ( $\theta_x$ ).



~~Esercizio 5~~

Una barra piena circolare di diametro  $d = 30 \text{ mm}$  e lunghezza  $l = 1 \text{ m}$  è soggetta ad un momento torcente  $M_x = 160 \text{ Nm}$ . Il materiale è alluminio ( $E = 70 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ).

- a - Calcolare l'angolo di torsione fra le due estremità della barra.
- b - Calcolare la tensione in corrispondenza di tre punti lungo il raggio a distanza rispettivamente 25%, 50% e 100% del raggio dal centro.

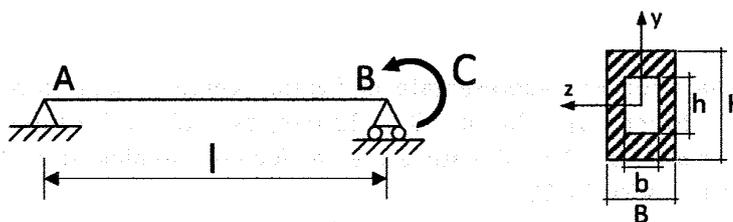
## ESERCITAZIONE 6

### “Linea elastica”

#### Esercizio 1

Si consideri una trave di sezione rettangolare cava ( $B = 10 \text{ mm}$ ,  $H = 20 \text{ mm}$ ,  $b = 6 \text{ mm}$ ,  $h = 16 \text{ mm}$ ,  $l = 0.5 \text{ m}$ ) in polietilene ad alta densità ( $E = 1 \text{ GPa}$ ) vincolata come in figura. All'estremo di sinistra è applicato un momento  $C = 1 \text{ Nm}$ .

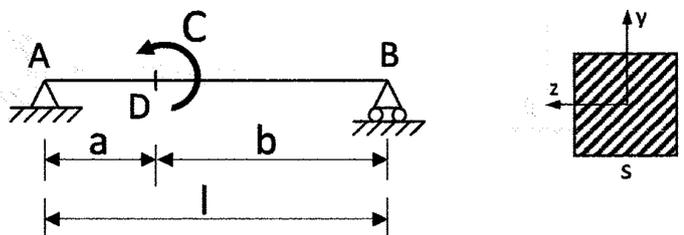
- Scrivere l'equazione della linea elastica.
- Calcolare la rotazione delle sezioni nei punti A e B.
- Calcolare la freccia massima della configurazione deformata.



#### Esercizio 2

Si consideri una trave a sezione quadrata ( $s = 12 \text{ mm}$ ,  $l = 2 \text{ m}$ ) in titanio ( $E = 110 \text{ GPa}$ ) vincolata come in figura. Nel punto D è applicata una coppia concentrata  $C = 10 \text{ Nm}$ .

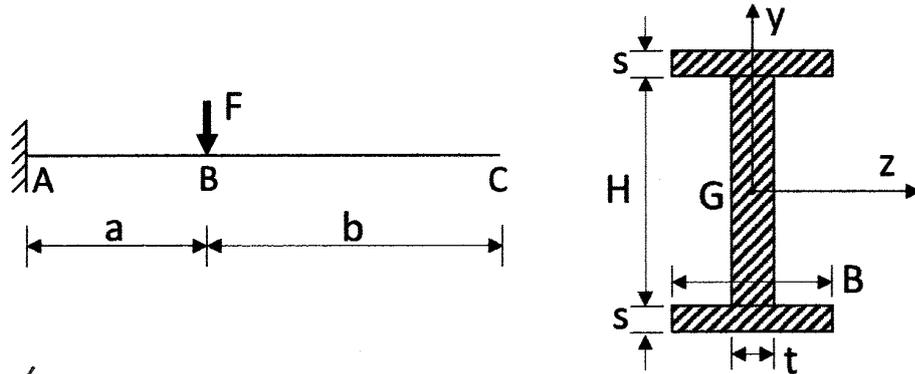
- Scrivere l'equazione della linea elastica.
- Nel caso particolare in cui  $a = b$ , calcolare la rotazione delle sezioni nei punti A, B e D.
- Nel caso particolare in cui  $a = b$ , calcolare la freccia massima della configurazione deformata.



**Esercizio 5**

Si consideri la trave a sbalzo rappresentata in figura ( $a = 1.5 \text{ m}$ ,  $b = 2.5 \text{ m}$ ), realizzata in acciaio ( $E = 210 \text{ GPa}$ ) e caricata con la forza  $F = 500 \text{ N}$ . La sezione ha dimensioni  $B = 40 \text{ mm}$ ,  $H = 70 \text{ mm}$ ,  $s = 6 \text{ mm}$ ,  $t = 10 \text{ mm}$ .

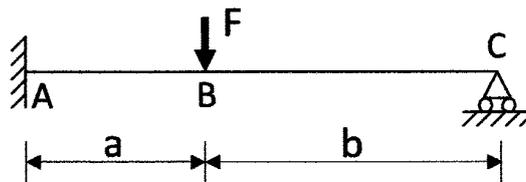
- a - Scrivere l'equazione della linea elastica.
- b - Calcolare la rotazione della sezione e la freccia nel punto C utilizzando la sovrapposizione degli effetti.



**Esercizio 6**

La struttura dell'Esercizio 5 è stata resa iperstatica dall'introduzione di un ulteriore vincolo cinematico come indicato in figura.

- a - Verificare il grado di iperstaticità della struttura.
- b - Utilizzando la sovrapposizione degli effetti applicata al calcolo della linea elastica, determinare il valore della reazione vincolare aggiuntiva.



- c - Determinare l'orientazione  $\delta$  per cui la tensione tangenziale è massima.
- d - Determinare l'orientazione  $\beta$  per cui la tensione tangenziale è pari a 1/4 di quella massima.
- e - Scrivere il tensore delle tensioni per entrambe le orientazioni ottenute.

$$[\sigma_1 = 400 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0, \vartheta = 0^\circ, \delta = 45^\circ, \beta = 7.23^\circ]$$

**Esercizio 4**

In un campo di tensione bidimensionale, una direzione che forma un angolo di  $45^\circ$  con le direzioni principali ha  $\sigma_N = 0$  e  $\sigma_T = 540$  MPa.

- a - Tracciare i cerchi di Mohr.
- b - Determinare le tensioni principali.

$$[\sigma_1 = 540 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -540 \text{ MPa}]$$

**Esercizio 5**

Una barra piena circolare di diametro 30 mm è soggetta a un momento torcente di 160 Nm. In corrispondenza di tre punti lungo il raggio a distanza rispettivamente pari al 100%, 50% e 25% del raggio dal centro:

- a - tracciare i cerchi di Mohr;
- b - determinare le tensioni principali.

$$[\sigma_1 = 30; 15; 7.5 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -30; -15; -7.5 \text{ MPa}]$$

**Esercizio 6**

Dato un modulo elastico  $E = 75$  GPa, un coefficiente di Poisson  $\nu = 0.3$  e un tensore delle tensioni in cui

$$\begin{array}{ll} \sigma_{xx} = 120 \text{ MPa} & \tau_{xy} = -150 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} = 240 \text{ MPa} & \tau_{xz} = 0 \\ \sigma_{zz} = 108 \text{ MPa} & \tau_{yz} = 0 \end{array}$$

- a - calcolare il tensore delle deformazioni.

$$[[\epsilon] = [2 \cdot 10^{-4}, -2.6 \cdot 10^{-3}, 0; -2.6 \cdot 10^{-3}, 2.3 \cdot 10^{-3}, 0; 0, 0, 0]]$$

**Esercizio 7**

Per uno stato di deformazione piana  $\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ , in cui  $E = 75$  GPa e  $\nu = 0.3$ , le componenti note del tensore delle tensioni sono

$$\begin{array}{ll} \sigma_{xx} = 170 \text{ MPa} & \tau_{xy} = -200 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} = 370 \text{ MPa} & \tau_{xz} = 0 \\ & \tau_{yz} = 0 \end{array}$$

- a - Determinare il valore di  $\sigma_{zz}$ .

**ESERCIZI ADDIZIONALI**

**Esercizio 9**

Si consideri il tensore delle tensioni in cui

$$\begin{array}{ll} \sigma_{xx} = 250 \text{ MPa} & \tau_{xy} = 80 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} = 150 \text{ MPa} & \tau_{xz} = 0 \\ \sigma_{zz} = 500 \text{ MPa} & \tau_{yz} = 0 \end{array}$$

- a - Determinare le tensioni principali con procedimento analitico.
- b - Tracciare i cerchi di Mohr e determinare le tensioni principali con metodo grafico.
- c - Determinare l'orientazione del sistema di riferimento principale.

$[\sigma_1 = 500 \text{ MPa}, \sigma_2 = 294 \text{ MPa}, \sigma_3 = 106 \text{ MPa}, \vartheta = 29.0^\circ]$

**Esercizio 10**

Si consideri il tensore delle tensioni in cui

$$\begin{array}{ll} \sigma_{xx} = 120 \text{ MPa} & \tau_{xy} = 100 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} = 20 \text{ MPa} & \tau_{xz} = 0 \\ \sigma_{zz} = 30 \text{ MPa} & \tau_{yz} = 0 \end{array}$$

- a - Tracciare i cerchi di Mohr.
- b - Determinare le tensioni principali con metodo grafico.
- c - Determinare l'orientazione del sistema di riferimento principale.

$[\sigma_1 = 182 \text{ MPa}, \sigma_2 = 30 \text{ MPa}, \sigma_3 = -42 \text{ MPa}, \vartheta = 31.7^\circ]$

**Esercizio 11**

Si consideri il seguente tensore delle tensioni:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 360 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

- a - Tracciare i cerchi di Mohr.
- b - Determinare le tensioni principali con metodo grafico.
- c - Determinare l'orientazione del sistema di riferimento principale.

$[\sigma_1 = 396 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -36 \text{ MPa}, \vartheta = 16.8^\circ]$

**Esercizio 12**

In un solido di de Saint-Venant lo stato di tensione è il seguente:

$$\begin{array}{ll} \sigma_{xx} = 0 & \tau_{xy} = 0 \\ \sigma_{yy} = 0 & \tau_{xz} = 50 \text{ MPa} \\ \sigma_{zz} = 150 \text{ MPa} & \tau_{yz} = 0 \end{array}$$

## ESERCITAZIONE 8

### “Sollecitazioni composte e criteri di rottura”

#### ~~Esercizio 1~~

Una barra di acciaio a sezione circolare piena ( $d = 30 \text{ mm}$ ) è soggetta a un momento torcente  $M_t = 800 \text{ Nm}$ .

- Calcolare la tensione equivalente nel punto più sollecitato secondo le ipotesi di cedimento della tensione tangenziale massima (Tresca) e dell'energia di distorsione (Von Mises).
- Indicare quale ipotesi di cedimento è più restrittiva.
- Scegliere un materiale idoneo in base alla normativa (EN 1993, Eurocodice 3).

$$[\sigma_{eq} = 302 \text{ MPa}, \sigma_{eq} = 261 \text{ MPa}]$$

#### Esercizio 2

Una trave in acciaio Fe 360 (EN 1993, Eurocodice 3) a sezione rettangolare di base  $a$  e altezza  $2a$  è sollecitata da uno sforzo normale  $N = 1000 \text{ N}$  e da un momento flettente  $M_f = 500 \text{ Nm}$ .

- Dimensionare la sezione in modo da garantire un coefficiente di sicurezza  $s = 1.5$  a snervamento.

$$[b = 17 \text{ mm}, h = 34 \text{ mm}]$$

#### Esercizio 3

Una trave incastrata di sezione rettangolare ( $b = 45 \text{ mm}$ ,  $h = 30 \text{ mm}$ ) è soggetta a un carico verticale di  $1200 \text{ N}$  a  $500 \text{ mm}$  dall'incastro.

Si consideri la sezione più sollecitata e tre punti lungo il segmento che unisce l'asse neutro alla base superiore, alle distanze rispettivamente pari al 100%, 50% e 25% del segmento.

- Tracciare i cerchi di Mohr nei punti considerati.
- Calcolare le tensioni principali nei punti considerati.
- Calcolare la tensione equivalente secondo il criterio di Von Mises nel punto più sollecitato.

$$[\sigma_1 = 90; 45; 22.5 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 \cong 0, \sigma_{eq} = 90 \text{ MPa}]$$

### ESERCIZI ADDIZIONALI

#### ~~Esercizio 8~~

Una barra è soggetta a una distribuzione di tensione uniforme  $\sigma_N = 104$  MPa. Le caratteristiche meccaniche del materiale sono:  $R_m = 520$  MPa,  $R_{p0.2} = 355$  MPa, allungamento a rottura  $\epsilon_r = 15\%$ .

- a - Identificare il tipo di cedimento.
- b - Calcolare il coefficiente di sicurezza.

[*duttile,  $s = 3.41$* ]

#### ~~Esercizio 9~~

Una barra circolare è soggetta a una distribuzione di tensione uniforme  $\sigma_N = 65$  MPa. Le caratteristiche meccaniche del materiale sono:  $R_m = 190$  MPa, allungamento a rottura  $\epsilon_r = 4\%$ .

- a - Identificare il tipo di cedimento.
- b - Calcolare il coefficiente di sicurezza.

[*fragile,  $s = 2.92$* ]

#### ~~Esercizio 9~~

Si intende realizzare un componente utilizzando un materiale duttile che, in condizioni di esercizio, nel suo punto più sollecitato mostra il seguente stato di tensione:

$$\begin{array}{ll} \sigma_{xx} = 120 \text{ MPa} & \tau_{xy} = -150 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} = 250 \text{ MPa} & \tau_{xz} = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 & \tau_{yz} = 0 \end{array}$$

La normativa prescrive un coefficiente di sicurezza  $s = 2$  per l'applicazione in questione e si sceglie di utilizzare l'ipotesi dell'energia di distorsione per il dimensionamento.

- a - Calcolare le tensioni principali con metodo analitico.
- b - Identificare quale valore minimo di tensione di snervamento deve avere il materiale.

[ *$\sigma_1 = 348$  MPa,  $\sigma_2 = 21$  MPa,  $\sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_s = 676$  MPa*]

#### ~~Esercizio 10~~

Un materiale fragile è sollecitato dalla tensione  $\sigma_x = 250$  MPa,  $\sigma_y = 150$  MPa,  $\sigma_z = 500$  MPa,  $\tau_{xy} = 80$  MPa,  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  MPa.

- a - Calcolare quale deve essere la tensione limite minima del materiale per evitare cedimento, in modo tale da garantire un grado di sicurezza almeno pari a 2.

[ *$\sigma_r = 1000$  MPa*]



## ESERCITAZIONE 9

### “Fatica: diagramma di Wöhler”

#### Esercizio ~~1~~

Una trave incastrata a sezione rettangolare ( $b = 15 \text{ mm}$ ,  $h = 30 \text{ mm}$ ) è sollecitata all'estremità libera da un carico di trazione costante  $N = 12 \text{ kN}$  e da un momento flettente variabile nel tempo secondo la legge  $M_f = M_{f0} \cdot \sin(\omega t)$  con  $M_{f0} = 700 \text{ Nm}$  e  $\omega = 125.7 \text{ rad/s}$ . Nel punto più sollecitato della struttura si calcolino:

- la tensione massima ( $\sigma_{\max}$ ), minima ( $\sigma_{\min}$ ), media ( $\sigma_m$ ) e alternata ( $\sigma_a$ );
- il campo di tensione ( $\Delta\sigma$ ), il rapporto di tensione ( $R$ ) e il rapporto di ampiezza ( $A$ );
- il numero di cicli di carico  $N$  imposti alla struttura in 12 ore.

$[\sigma_{\max} = 338 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{\min} = -284 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_m = 27 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_a = 311 \text{ MPa}$ ,  $\Delta\sigma_a = 622 \text{ MPa}$ ,  $R = -0.84$ ,  $A = 11.52$ ,  $N = 8.64 \cdot 10^5 \text{ cicli}]$

#### Esercizio ~~2~~

Si consideri un acciaio avente tensione di rottura  $\sigma_R = 793 \text{ MPa}$ ; si assumano le ipotesi  $\sigma_{1000} \approx 0.9 \sigma_R$  e  $\sigma_D \approx 0.5 \sigma_R$  e rappresentazione della curva di Wöhler secondo legge del tipo  $\sigma_N = A(N)^b$ .

- Calcolare la tensione di resistenza a fatica per  $N = 3 \cdot 10^5$  cicli.
- Calcolare il numero di cicli a rottura con sollecitazione  $\sigma_{N1} = 600 \text{ MPa}$ .

$[\sigma_N = 439 \text{ MPa}$ ,  $N1 = 7685 \text{ cicli}]$

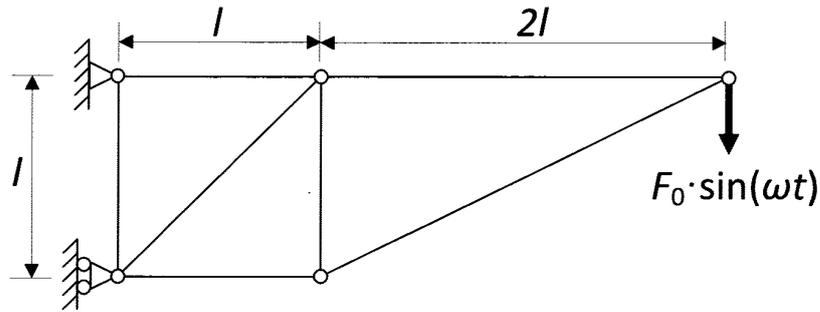
#### Esercizio ~~3~~

Applicando il metodo stair-case ai risultati delle prove di fatica riportati nello schema sottostante (X rottura, O non rottura), si determini:

- il limite di fatica  $\sigma_{D(50\%)}$  e la stima della deviazione standard  $s$ ;
- gli intervalli di confidenza all'80%, 95% e 98%.

**Esercizio 4**

La struttura reticolare in figura è costituita da profilati a sezione circolare piena (diametro  $d$ ) in acciaio con tensione di rottura  $\sigma_R = 650$  MPa. La struttura è sollecitata dal carico  $F = F_0 \cdot \sin(\omega t)$  con  $F_0 = 15$  kN.

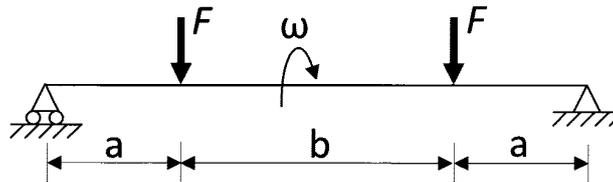


- Calcolare le reazioni vincolari.
- Calcolare le forze assiali presenti negli elementi.
- Dimensionare la sezione degli elementi in modo da garantire alla struttura vita illimitata a fatica con coefficiente di sicurezza  $s = 2$ .

$[F_{max} = 45$  kN,  $d = 18.78$  mm]

**Esercizio 5**

Per realizzare alcune prove a fatica occorre dimensionare tre tipi di provino a flessione rotante, il cui schema è rappresentato in figura; le dimensioni del provino sono  $a = 0.5$  m e  $b = 1$  m, la forza applicata vale  $F = 300$  N e la sezione è circolare piena con diametro  $d$ . Il materiale è acciaio con tensione di rottura  $\sigma_R = 890$  MPa.



- Dimensionare il primo provino per una durata di vita a fatica  $N_1 = 5 \cdot 10^3$  cicli.
- Dimensionare il secondo provino per una durata di vita a fatica  $N_2 = 5 \cdot 10^4$  cicli.
- Dimensionare il terzo provino per una durata di vita a fatica  $N_3 = 5 \cdot 10^5$  cicli.

$[d_1 = 13.0$  mm,  $d_2 = 13.8$  mm,  $d_3 = 14.8$  mm]

a - calcolare il diametro  $d$  limite per garantire la sopravvivenza del provino al numero di cicli indicato.

$$[d > 19.81 \text{ mm}]$$

#### ~~Esercizio 4~~

Si consideri una trave incastrata a sezione circolare cava ( $D = 50 \text{ mm}$ ,  $d = 40 \text{ mm}$ ) in lega di alluminio ( $\sigma_R = 515 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_S = 400 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_N = 130 \text{ MPa}$ , con  $N = 5 \cdot 10^8$  cicli) sollecitata in punta da un carico di trazione costante  $N = 150 \text{ kN}$  e da un momento flettente  $M_f = M_{f0} \cdot \sin(\omega t)$  con  $M_{f0} = 210 \text{ Nm}$ . Utilizzando il corrispondente diagramma di Goodman-Smith,

a - individuare sul diagramma il carico a fatica applicato alla trave;  
b - verificare la resistenza a fatica del componente e determinarne il coefficiente di sicurezza con metodo analitico e con metodo grafico.

$$[s = 2.53]$$

#### ~~Esercizio 5~~

Una trave incastrata a sezione rettangolare ( $b = 20 \text{ mm}$ ) presenta un restringimento di sezione a  $200 \text{ mm}$  dall'estremità ( $H = 120 \text{ mm}$ ,  $h = 80 \text{ mm}$ ), con un raggio di raccordo  $r = 10 \text{ mm}$ . La struttura, realizzata in Fe510 ( $\sigma_R = 510 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_S = 355 \text{ MPa}$ ), è soggetta a un carico di trazione  $F = 64 \text{ kN}$ . Con riferimento alla sezione con intaglio,

a - ricavare il fattore di concentrazione delle tensioni;  
b - calcolare la tensione massima all'intaglio;  
c - calcolare il coefficiente di sicurezza a snervamento.

$$[K_t = 1.95, \sigma_{max} = 78 \text{ MPa}, s = 4.55]$$

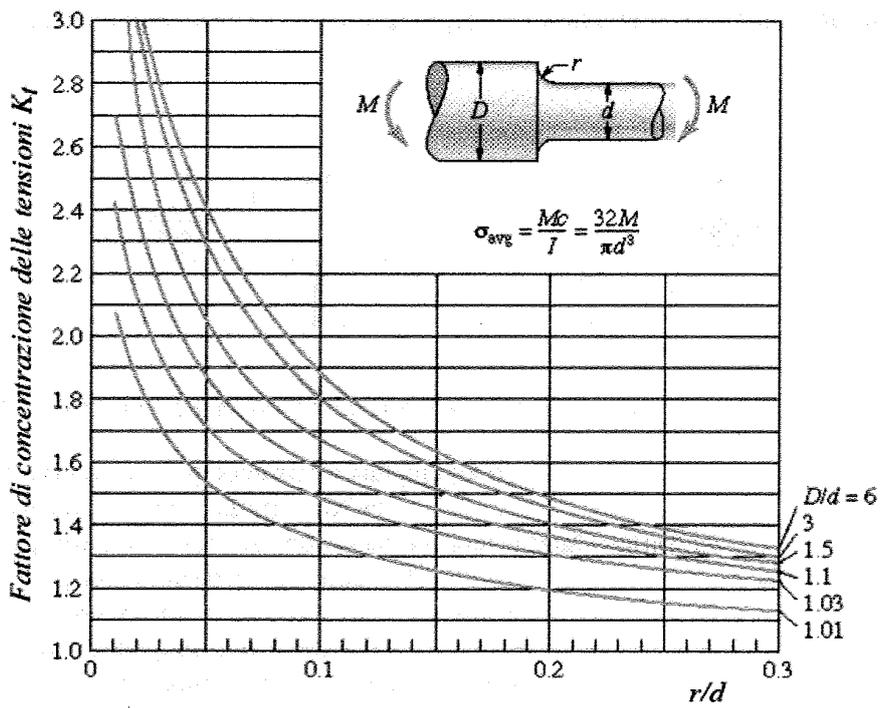
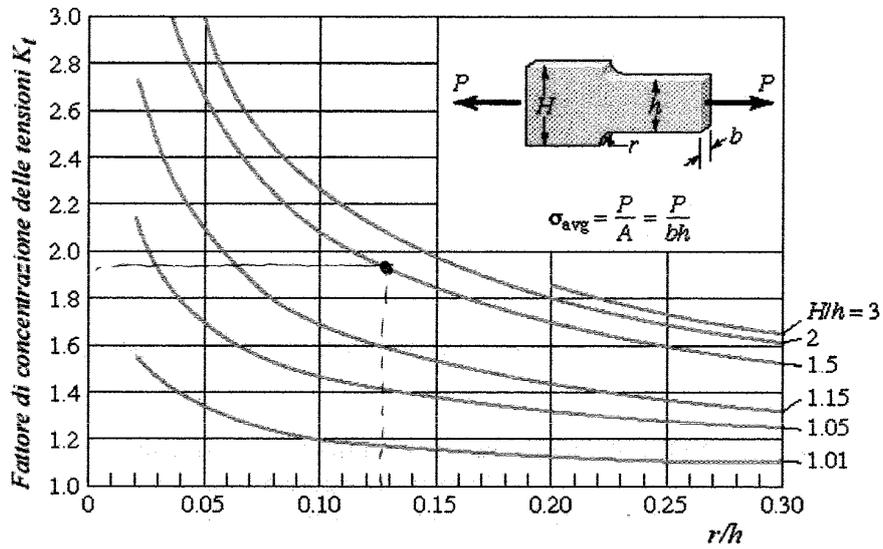
#### ~~Esercizio 6~~

Una trave incastrata a sezione circolare ( $D = 45 \text{ mm}$ ) presenta un restringimento di sezione a  $1.5 \text{ m}$  dall'estremità ( $d = 30 \text{ mm}$ ), con un raggio di raccordo  $r = 4.5 \text{ mm}$ . La struttura è soggetta a un carico verticale in punta  $F = 500 \text{ N}$ . Con riferimento alla sezione con intaglio,

a - ricavare il fattore di concentrazione delle tensioni;  
b - calcolare la tensione massima all'intaglio;  
c - determinare la minima tensione di snervamento del materiale per garantire un coefficiente di sicurezza  $s = 1.7$ .

$$[K_t = 1.51, \sigma_{max} = 427 \text{ MPa}, \sigma_s = 726 \text{ MPa}]$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica  
 Fondamenti di Meccanica Strutturale (09IHRMA) – A.A. 2012/13

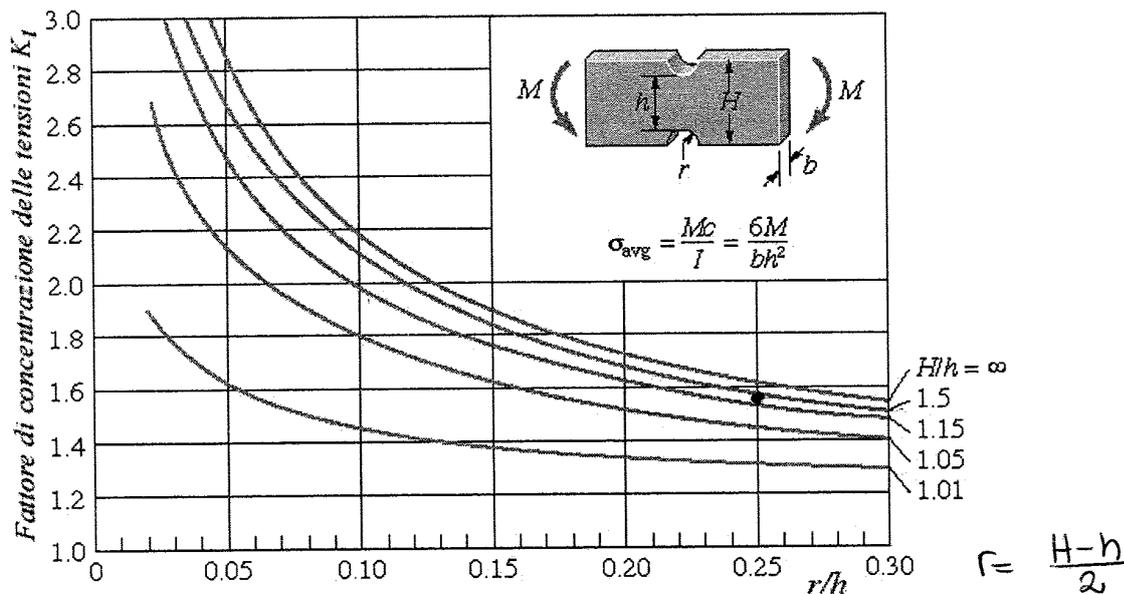


**Esercizio n. 3**

**FATICA e INTAGLIO**

**(punti 8)**

Una barra di lunghezza  $l = 0,5$  m di sezione rettangolare (come in figura) è incastrata ad una estremità. All'estremità libera è soggetta ad una freccia imposta di  $\pm 1$  mm variabile nel tempo secondo la legge  $f = f_0 \cdot \sin(\omega t)$  e  $\omega = 127$  rad/s. La trave ha un restringimento come in figura con un raggio di raccordo ad una distanza di 250 mm dall'incastro.



Verificare a vita infinita con coefficiente di sicurezza  $s = 2$  il componente imponendo i seguenti parametri:  $H = 45$  mm  $b = 20$  mm ;  $H/h = 1,5$  e  $q = 0,9$  ed utilizzando un materiale nel caso di un acciaio ( $E = 210000$  MPa) avente tensione di rottura  $\sigma_R = 600$  MPa; assumendo le ipotesi  $\sigma_{1000} \approx 0,9 \sigma_R$  e  $\sigma_D \approx 0,5 \sigma_R$  e rappresentazione della curva di Wohler secondo legge del tipo

$$\sigma_N = A(N)^b$$

**Quesiti di teoria:**

1. Stati di tensione: quali sono le ipotesi per poter calcolare lo stato di tensione dovuto a torsione nelle sezioni chiuse a parete sottile. Dimostrare la relazione di Bredt per il calcolo dello stato di tensione nelle sezioni chiuse a parete sottile soggette a torsione.
2. Criteri rottura: Descrivere le ipotesi e dimostrare la relazione matematica che permette il calcolo della tensione ideale del criterio di Von Mises partendo dalla definizione di energia di distorsione

3. TRESKA

4. LAVORO DI DEFORMAZIONE NELLE TRAVI (cap. 9)