NUMERO: 638

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Sandrone

MATERIA: Analisi Matematica I
Prof. Serra

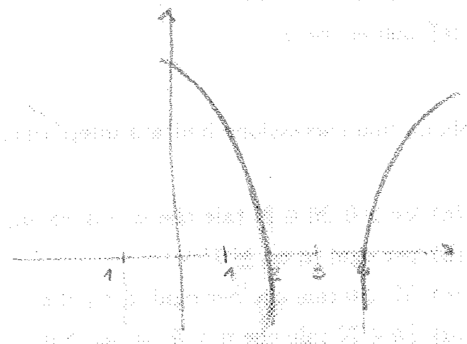
Simulazione di test completo

1. Il dominio della funzione $f(x) = \log(\sqrt{x-2} - 3)$ è

(a) $[2, 3]$
(b) $[11, +\infty)$
(c) $(5, +\infty)$
(d) $(11, +\infty)$ V
(e) $[3, +\infty)$

2. La funzione $f(x) = |\log(x-3)|$?

(a) è invertibile sull'intervallo $[3, +\infty)$
(b) è invertibile sull'intervallo $[4, +\infty)$ 6
(c) è invertibile sull'intervallo $(0, +\infty)$
(d) non è invertibile su alcun intervallo NO
(e) è invertibile sull'intervallo $(3, 5)$



3. Sia $z = 1 - 2i$. Allora $|z^2 + \overline{z}|$ vale

(a) $2\sqrt{2}$ V
(b) 8
(c) 4
(d) $4\sqrt{2}$
(e) 2

$z = 1-2i \quad \bar{z} = 1+2i$

$|(1-2i)^2 + 1 + 2i| =$

$|1 - 4i - 4 + 1 + 2i| =$

$|-2 - 2i| \quad i^2 = -1 \quad 4i^2 = -4$

$\sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$z = x + iy$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

4. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-2x} - 2x + \cos x}{\underset{\to 0}{e^{-x}} + 3x - 3\sin x}$$

(a) vale -2
(b) vale -1
(c) vale 2
(d) vale 0
(e) vale $-2/3$ V

5. Per $x \to 0$, sia $f(x) \sim x^2 \cos x$ e $g(x) \sim e^x - 1$. Allora si ha

(a) $\lim_{x\to 0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1/2$
(c) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ V
(d) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
(e) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2 \cos x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{e^x - 1} = 1$

$\lim_{x\to 0} f(x) = x^2 \cos x \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = e^x - 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{e^x - 1} = \frac{x^2(1 - \frac{1}{2}x^2)}{x - 1}$

$\frac{x^2 - \frac{1}{2}x^4}{x-1} = \frac{0}{1} = 0$

11. Il polinomio di McLaurin di ordine 6 della funzione $f(x) = e^{\cos x^3}$ è

(a) $1 + \frac{1}{2}x^6$
(b) $e - \frac{e}{2}x^6$ V
(c) $2 + \frac{1}{2}x^6$
(d) $1 - \frac{e}{2}x^6$
(e) $1 + \frac{1}{6}x^6$

$f(x) = e^{1-\frac{1}{2}x^6+o(x^6)} = e^1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^6+o(x^6)} =$
$= e\cdot\left(1-\frac{1}{2}x^6+o(x^6)\right)$
$= e - \frac{e}{2}x^6$

12. Siano f, g e h tre funzioni tali che $f = o(g)$ e $g \sim h^3$ per $x \to +\infty$. Allora

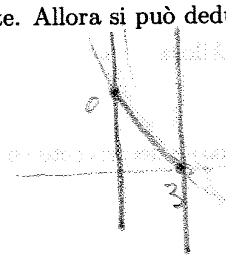
(a) $f = o(g^3)$
(b) $f \sim g^3$
(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)^3}{f(x)} = 0$
(d) nessuna delle altre risposte
(e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)^3} = 0$ V

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = 0$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{g}{h^3} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} g = h^3$

13. Sia $f : [0,3] \to \mathbf{R}$ una funzione continua e decrescente. Allora si può dedurre che

(a) $f([0,3])$ è un intervallo aperto
(b) $f((0,3))$ è un intervallo aperto
(c) $f([0,3])$ contiene almeno due punti
(d) $f([0,3)) = [f(0), f(3))$
(e) nessuna delle altre risposte è corretta V



14. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile tale che $f(0) = f(1) = 0$. Ponendo $g(x) = f(x)^4$, allora

(a) la derivata $g'(x)$ si annulla almeno tre volte
(b) la derivata $g'(x)$ si annulla esattamente due volte NO
(c) la derivata $g'(x)$ si annulla esattamente tre volte
(d) la derivata $g'(x)$ non si annulla mai
(e) la derivata $g'(x)$ si annulla almeno quattro volte

$g'(x) = 4f(x)\cdot f'(x)^3$

$f'(x) = 0$ se $f(x) = 0$

$f(0)$ $\quad f(1)$

15. La parte principale (rispetto a $\varphi(x) = x$) per $x \to 0^+$ di $f(x) = 3x + \sqrt{4x^2 + 2x^3}$ è

(a) $5x$ V
(b) $x^{3/2}$
(c) $\sqrt{2}x^{3/2}$
(d) $3x$
(e) $3x + o(x)$

$\sqrt{4x^2+2x^3} \sim \sqrt{4x^2}$

$\lim_{x\to0} \frac{3x+2x}{x^\alpha} = \frac{5x}{x^\alpha} = \frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}} = 5$

$5x^{\alpha=1} = 5x$

MATEMATICA Prof. Enrico Serra enrico.serra@polito.it

7/10

vale una certa proprietà

$A = \{ x \in X / P(x) \}$

$A = \{ x / x$ è dispari $\}$

$P(x)$ = proposizione → enunciato vero o falso — $4>2$ vera, $4<2$ falsa

variabile

Proposizioni LECITE → si può associare il valore vero o falso.

$4+2$ non è una prop.

Se c'è una variabile? $x>2$ è vera o è falsa?

Non si può dire perché non si conosce x → si QUANTIFICANO le variabili

Quantificatori: $\forall$ qualunque, per ogni; $\exists$ esiste, per qualche → rendono le prop ammissibili dal punto di vista logico

$\exists x \quad x>2$ → è vera

$\forall x \quad x>2$ → è falsa

Tutte le variabili devono essere quantificate.

$Q(x,y)$ 2 variabili

$Q(x,y)$: $x+y=1$ Le variabili non sono quantificate, non si può dire se è vera o falsa.

$\exists x \ \forall y \quad x+y=1$ falsa

$\underline{\forall x} \ \exists y \quad x+y=1$ vera

dipende dal primo

NEGAZIONE di una proposizione

$P(x)$ → $\underbrace{\text{NOT}\,P(x)}_{\text{negazione}}$ vera se e solo se $P(x)$ è falsa

Negazione delle proposizioni quantificate:

$\forall P(x)$

NOT $(\forall x \ P(x))$ — $\exists x$ NOT $P(x)$

NOT $(\exists x \ P(x))$ — $\forall x$ NOT $P(x)$

il quantificatore cambia e il NOT va davanti alla prop.

ES: tutti i banchi sono occupati → esiste almeno un banco libero

- $\mathbb{R}$ numeri REALI

0,4000 razionale

$0,\overline{273}$ "

0,123456 ... espans. decimali illimitate e non periodiche

→ IRRAZIONALI

$\sqrt{2} = 1,4142...$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ → irrazionali

1

0,999 stessa cosa

$0,\overline{9}$

$x = 0,999...$ $\quad 10x = 9,999...$ $\quad 10x = 9 + 0,999...$

$10x = 9 + x$ $\quad 9x = 9$ $\quad x = 1$

$7,46999 \rightarrow 7,47$

Espansioni decimali proprie: non finiscono con ∞ 9

Es: dimostrare che fra 2 numeri reali cade sempre un razionale ...

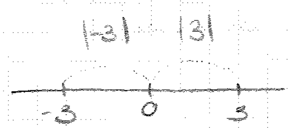
VALORE ASSOLUTO $\quad |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$|3| = 3$

$|-3| = 3$

$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se } x-3 \geq 0 \quad x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{se } x-3 < 0 \quad x < 3 \end{cases}$

! $|x|$ = distanza di x da 0



$|x-y|$ = distanza di $x-y$ da 0 → dist. di x da y

$|x-1| < 4$ gli x che distano da 1 meno di 4

! $|x-x_0| < \delta$ punti che distano da x_0 meno di δ

$B = \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3 \dots \right\}$ è limitato! 1 è maggiorante, 2 anche
0 è un minorante

Se A è limitato sup e inf. è un insieme limitato.

2) <u>Def: un numero $M \in A$ si chiama MASSIMO di A se è un maggiorante</u> (il massimo sta nell'insieme). (max A)
Il minorante che sta nell'insieme si chiama MINIMO

es: $A = [-3, 5]$ $\max A = 5$
- 5 è un maggiorante
- $5 \in A$? sì $\Rightarrow$ 5 è il massimo di A

Un insieme non può avere 2 massimi.

M_1, M_2 2 massimi

$M_1 \leq M_2$
$M_2 \leq M_1$
$M_1 = M_2$ 1 solo massimo

$[-3, 5)$ non ha massimo (il massimo deve essere un maggiorante ma in questo caso nessuno dei maggioranti sta nell'insieme)
Quest'insieme è limitato dall'alto ma non ha massimo

3) <u>Def $A \subset \mathbb{R}$ limitato sup. Il minimo dei maggioranti di A, cioè il più piccolo, si chiama ESTREMO SUPERIORE di A</u> (sup A)

es: $[-3, 5)$ max A non esiste
$\sup A = 5$ perchè i maggioranti sono i numeri dell'int. $[5, +\infty)$. Il più piccolo di questi numeri è 5.

Se $\sup A \in A$ allora $\sup A = \max A$ $\rightarrow$ si dice che il sup è assunto
es: $[-3,5]$ maggiorante $[5, +\infty)$ $\sup [-3,5] = 5 \in [-3,5]$
$\rightarrow 5 =$ massimo

! $\in$ appartiene rapporto $\frac{\text{elemento}}{\text{insieme}}$

$\subset$ contenuto " $\frac{\text{sottoinsieme}}{\text{insieme}}$

$\frac{n}{n+1} > x \Rightarrow n > xn + x \Rightarrow n - xn > x \Rightarrow n(1-x) > x \Rightarrow n > \frac{x}{1-x}$

$\Rightarrow$ se $n > \frac{x}{1-x}$ allora $\frac{n}{n+1} > x$ $\quad x < 1$

$\Rightarrow \frac{n}{n+1} > 1$ $\quad$ 1 è il più piccolo dei maggioranti $\Rightarrow \sup A = 1$

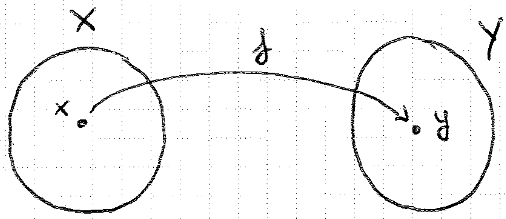
Completezza di $\mathbb{R}$

<u>Prop</u>: Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato sup. ha l'estremo sup.
L'insieme dei maggioranti ha sempre il minimo.

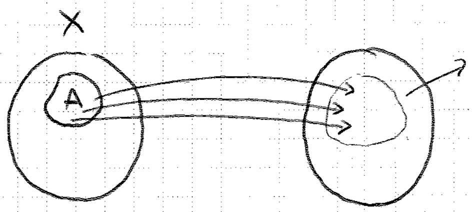
Questa prop non vale per l'insieme $\mathbb{Q}$

$\{ q \in \mathbb{Q} \ / \ q^2 < 2 \}$ non c'è il sup. (sarebbe $\sqrt{2}$, ma non è razionale) es: $f(x) = x^2$

$f(3) = 9$ → immagine di 3
(o valore)
↳ nei casi numerici



Prendo $A \subset X$

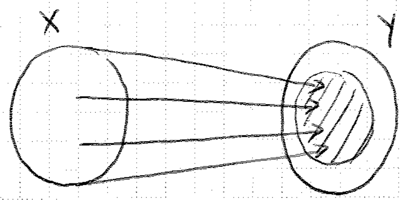


raccolgo le immagini di punti presi in A
$f(A)$ = immagine di A tramite f

$$f(A) = \{ y \in Y \mid \exists x \in A,\ f(x) = y \} = \{ f(x) \in Y \mid x \in A \}$$

Insieme dei punti di Y che sono immagine di qualche elem. di A

$f(X)$ immagine di f



$Im(f)$

GRAFICO

$f: X \to Y$ il grafico è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $(X \times Y$

Def astratta di grafico $\Gamma(f) = \{ (x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X \}$

gamma maiuscolo

$f(x) = x^2$

$(2,4) \in \Gamma(x^2)$

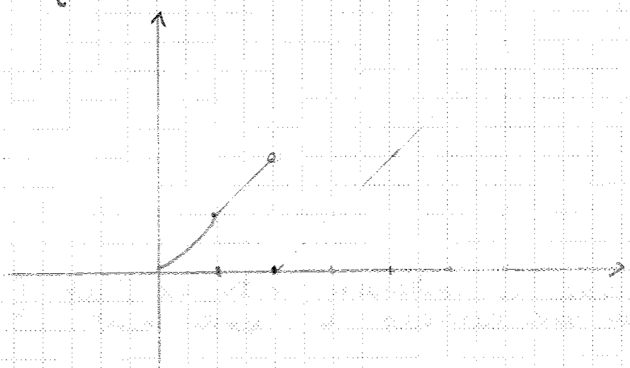
Se $X = Y = \mathbb{R}$ $\quad X \times Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^2)$

↳ $\mathbb{R}$ cartesiano $\mathbb{R}$ → sono i punti del piano. x es 1 coppia di numeri che si interpreta come le coordinat dei punti del piano

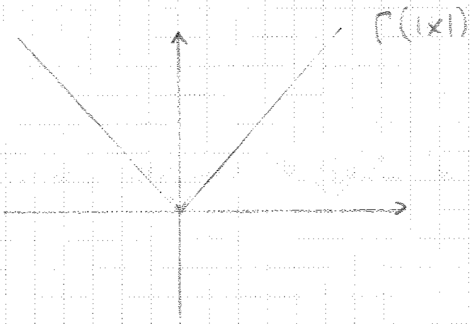
Funzioni definite a tratti

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [0,1] \\ x & \text{se } x \in (1,2) \\ x-2 & \text{se } x \in [2,+\infty) \end{cases}$$

$\mathrm{dom}(f) = [0,+\infty)$



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

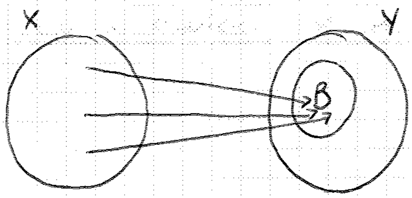


$f: X \to Y$

$f(a) = b$ b è l' IMMAGINE di a

a è CONTROIMMAGINE di b

$B \subset Y$ voglio prendere tutti gli elementi di X che hanno immagine in B



controimmagine di B $f^{-1}(B)$

$f^{-1}(B)$ $\{x \in X \,/\, f(x) \in B\}$

Estremo superiore di f su A è $\sup f(A)$

$f(x) = x^2 \qquad A[1,2]$

$\sup\limits_{x \in A} f(x)$ o $\sup\limits_{A} f(x)$ → estremo sup di f su A

$\sup\limits_{x \in [1,2]} x^2 = 4 \qquad f(A) = [1,4]$

se $\exists x \in A \,/\, f(x) = \sup\limits_{A} f$ → $f(x)$ si chiama MASSIMO di f su A

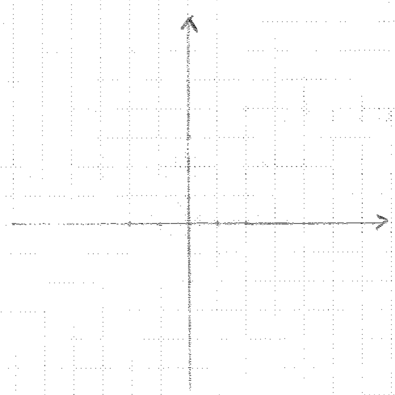
Esiste un punto dove la f vale il sup (4 nell'esempio) → massimo

Esercizio:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

dominio, immagine, est. sup e inf, min, max.

dom(f) : $\mathbb{R}$



$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$
Dato y trovo x / $x^2 = y$
$x = \sqrt{y}$ l'uguaglianza è vera solo se $y \geq 0$ $\Rightarrow f$ non è suriettiva

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$

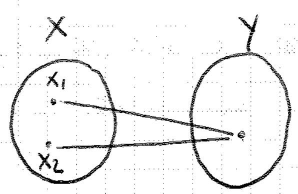
$Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$ non è suriettiva

$\frac{1}{x} = y \Rightarrow 1 = yx \Rightarrow x = \frac{1}{y}$ se $y \neq 0$

Una funzione può sempre essere resa suriettiva $\Rightarrow$ devo modificare il codominio. Se al posto del codominio Y metto $Im(f) \subset Y \Rightarrow f$ è suriettiva (per costruzione, perchè elimino tutti i punti che non sono imm. di x) $f: X \to Im(f)$ è suriettiva

$f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è suriettiva
$f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ è suriettiva

Def: $f: X \to Y$ si dice INIETTIVA se $\forall x_1, x_2 \in X$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
$\Rightarrow$ punti $\neq$ hanno immagini $\neq$



non è iniettiva 2 punti $\neq$ hanno lo stesso valore

$f(x) = x^2$
$f(2) = 4$
$f(-2) = 4$ $\Rightarrow$ non è iniettiva

schema che si usa x dire che f è iniettiva

$f(x) = 2x + 3$ se $\boxed{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$
$f(x_1) = 2x_1 + 3$
$f(x_2) = 2x_2 + 3$
$\cancel{2}x_1 + \cancel{3} = \cancel{2}x_2 + \cancel{3} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ è iniettiva

Altro modo per dire che f è iniettiva $f: X \to Y$ iniettiva se $\forall y \in Y$ $f^{-1}(y)$ contiene al più un punto

insieme delle controimm. di y

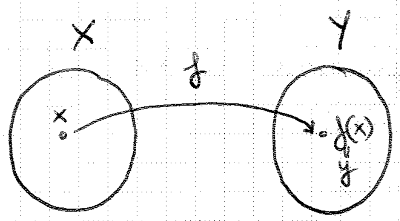
Se ho $\underbrace{x^3-4\sqrt{x}+2x^7}_{f(x)}=5$ devo trovare $x \,/\, f(x)=5$

$f(x)=\alpha$ $\quad \alpha\in\mathbb{R}$
parametro reale

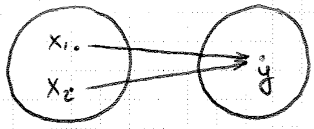
- dire che f è suriettiva significa che l'eq ha almeno 1 soluz. $(\forall\alpha)$. Trovo sempre una $x \,/\, f(x)=\alpha$ $\rightarrow$ problema dell'ESISTENZA
- f è iniettiva $\rightarrow$ l'eq ha al più una soluzione $\rightarrow$ probl. dell'UNICITÀ

Se f è iniettiva e suriettiva si dice che è BIIETTIVA (o è una biiezione). Ogni elemento del codominio ha una controimmagine
$f: X\rightarrow Y \quad \forall y\in Y \;\exists$ un unico $x\in X \,/\, f(x)=y$

$f(x)=x^3$ è biiettiva
$x^3=\alpha$ ha esattamente 1 soluzione x ogni α



Riesco a definire una funzione che faccia il contrario di f?



f non è iniettiva, è difficile tornare indietro

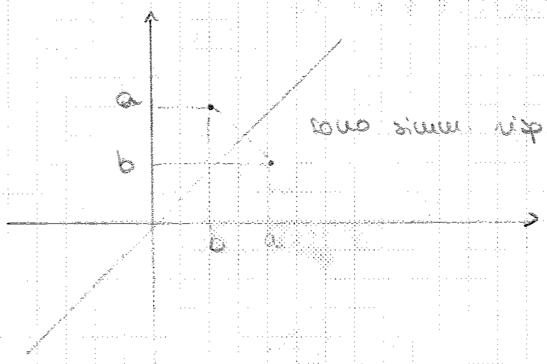
Se f è iniettiva $\forall y\in Y$ ha al più una controimmagine (che si chiama x e che dipende da y). Emerge la possibilità di definire una funzione sull'insieme Y che faccia il contrario di f.

f DEVE essere iniettiva

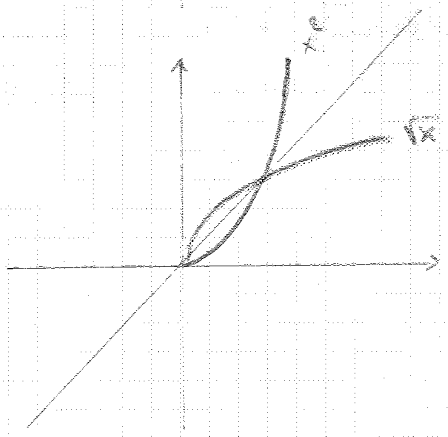
Def: $f: X\rightarrow Y$ iniettiva. La funzione che ad ogni $y\in \mathrm{Im}(f)$ associa l'unico $x \,/\, f(x)=y$ si chiama FUNZIONE INVERSA di f (f^{-1})

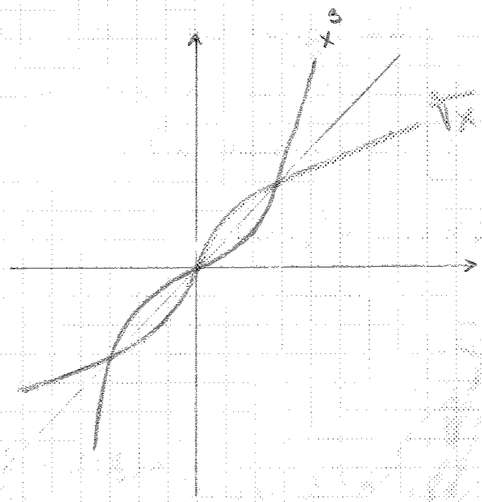
$$f^{-1}(y)=x$$

$f(x)=x^3$ è iniettiva
$f(2)=8$ Prendo 8. C'è un unico elemento $x \,/\, x^3=8 \Rightarrow x=2$
$f^{-1}(-27)=3$ $\quad f^{-1}=\sqrt[3]{\;}$ $\rightarrow$ funz. inversa del cubo



sono simm. risp. alla bisett. del I quadrante





19/10

$f(x) = \sqrt[5]{x^3-1}$

$f^{-1}(y) \Rightarrow$ devo trovare l'unico $x \,/\, f(x) = y$

$$\sqrt[5]{x^3-1} = y \Rightarrow x^3-1 = y^5 \Rightarrow x^3 = y^5-1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y^5-1}$$

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y^5-1}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\quad -1}$

! $(f^{-1})^{-1} = f$

Devo fare in modo che $f(x)$ appartenga al dom(g)

$f(x) \in \text{dom}(g) = [0, +\infty)$

$\frac{x+2}{|x-1|} \in [0, +\infty)$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{x+2}{|x-1|}}_{\text{sempre positivo}} \geq 0 \qquad x+2 \geq 0 \qquad x \geq -2$

$x \in \text{dom}(f) \overset{\text{equivale a}}{\Longleftrightarrow} x \neq 1$

$f(x) \in \text{dom}(g) \Leftrightarrow x \geq -2$

devono valere contemporaneamente

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$\text{dom}(g \circ f) = [-2, 1) \cup (1, +\infty)$ opp $[-2, +\infty) \setminus \{1\}$

$\frac{1}{x^2}$ calcolata in $x = 4$

- $4^2 \quad 16 \quad (x^2)$
- $\frac{1}{4^2} \quad \frac{1}{16} \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)$

$f(x) = x^2$

$g(y) = \frac{1}{y}$

$g(f(x)) = \frac{1}{x^2}$

! $(g \circ f)$ non è detto che si possa calcolare $f \circ g$

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(y) = -2 + \text{sen}\, y$

$g(f(x)) = -2 + \text{sen}\sqrt{x}$

$f(g(x)) = \sqrt{\underbrace{-2 + \text{sen}\, x}_{<0}}$ imp!

punti ≠ hanno imm ≠

⇓

Se ho 2 funzioni f e g iniettive, allora $(g \circ f)$ è iniettiva

$\Rightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ Applico la funz. g

$\Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ anche la funzione composta è iniettiva

$\Rightarrow$ posso calcolare $(g \circ f)^{-1} = \boxed{f^{-1} \circ g^{-1}} \Rightarrow$ FUNZIONE INVERSA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

è giusto che siano invertiti

es scarpa:

prima la metto poi la allaccio,

prima la slaccio poi la tolgo

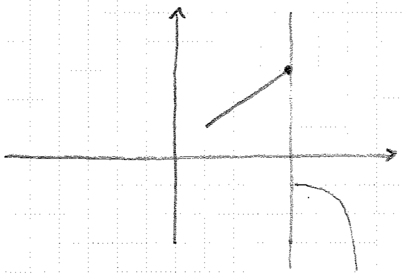
Proprietà

- f strettamente monotona su A $\overset{\text{implica}}{\Rightarrow}$ f è iniettiva

  $x_1 \neq x_2 \quad x_1 < x_2$ (x es) $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

  $f(x_1) \neq f(x_2)$

- f iniettiva $\Rightarrow$ strettam. monotona? no



f è iniettiva ma non è strettam. monotona

$f(x) = \frac{1}{x} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ iniettiva ma non sh. monotona

- f invertibile

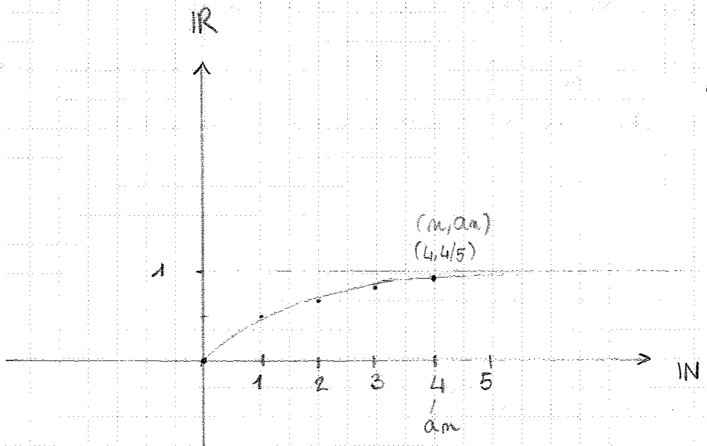
  $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

  $f^{-1}(f(x)) = x$

  $f(f^{-1}(x)) = x$

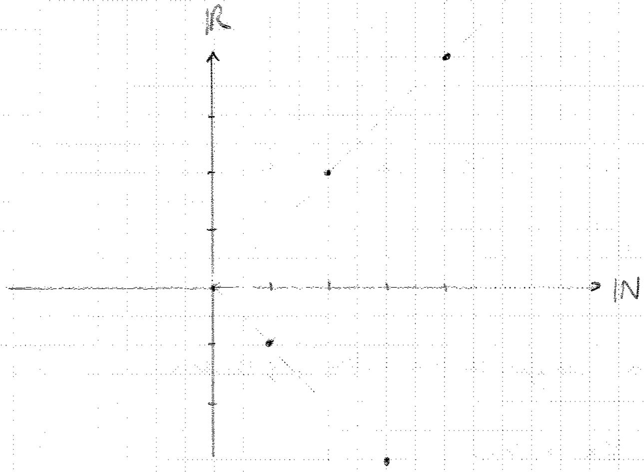
FUNZIONE IDENTICA o IDENTITÀ $I(x) = x$

$(f^{-1} \circ f) = I \Rightarrow$ identità

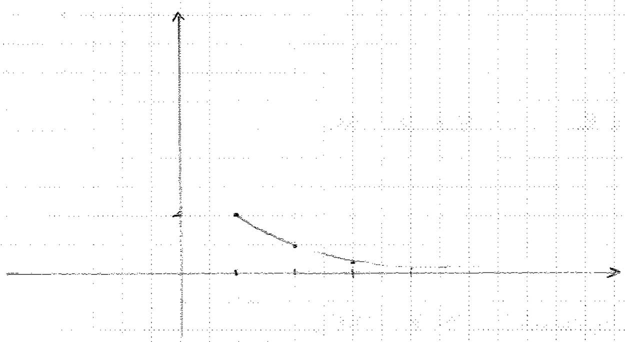


$a_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \dots$

sono numeri sempre più vicini a 1



$a_n = (-1)^n n \qquad 0, -1, 2, -3, 4 \dots$

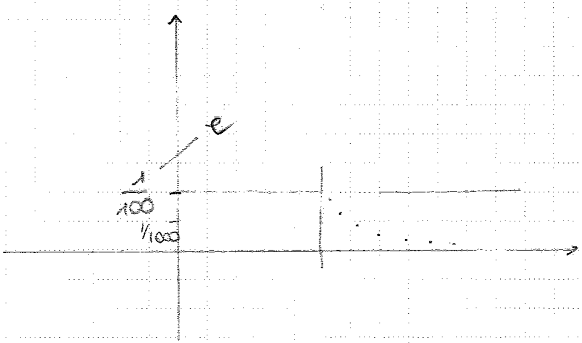


$a_n = \frac{1}{n} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \qquad n \geq 1$

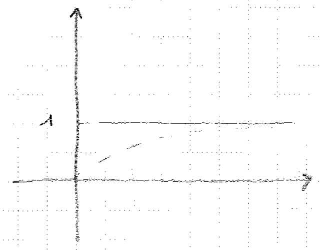
i numeri "diventano sempre più piccoli", si avvicinano a 0

a_n è piccolo $\qquad \frac{1}{100} \qquad a_n < \frac{1}{100}$ per n grandi, per tutti gli n grandi

Da un certo punto in poi tutti i punti sono più piccoli di $\frac{1}{100}$, poi di $\frac{1}{1000}$ ...



$a_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$



Def $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \quad \ell \in \mathbb{R}$

distanza di a_n da ℓ $\quad |a_n - \ell|$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \ / \ |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Fisso $\varepsilon > 0$. È vero che trovo n_ε / $|a_n - 1| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$?

$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \Rightarrow \left|\frac{\cancel{n}-\cancel{n}-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$ la distanza dell'ennesimo termine da 1 è $\frac{1}{n+1}$

È vero che questa distanza è < 1 ?

$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ se $n \geq n_\varepsilon$?

$n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \qquad n > \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} - 1}_{n_\varepsilon}$

$|a_n - 1| < \frac{1}{100} \qquad \varepsilon = \frac{1}{100}$

$\Downarrow$

$\frac{1}{n+1}$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \qquad n+1 > 100 \qquad n > 99$

Dato ε bisogna trovare n_ε. Se c'è è verificata la def. di limite

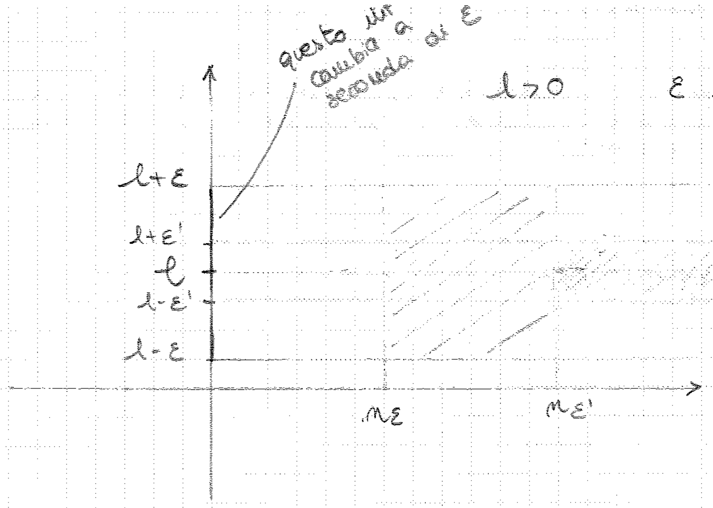
$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2+5n^2} = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \ / \ \left|\frac{3n}{2+5n^2}\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$

tolgo il valore ass. visto che l'argomento è tutto positivo

$\frac{2n}{2+5n^2} < \varepsilon$

voglio valutare se questa quantità è più piccola di ε a partire da un certo valore



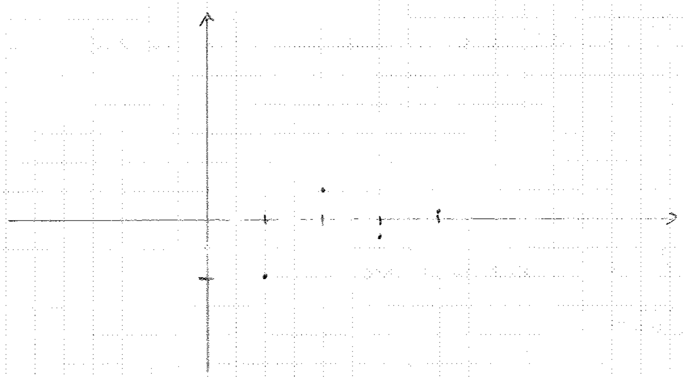
$\ell > 0$ $\quad \varepsilon$ fissato $\quad \varepsilon$ ⊢——⊣ $\quad |x-\ell| < \varepsilon$

ε' ⊢⊣ $\quad \ell-\varepsilon < x < \ell+\varepsilon$

man mano che ε diventa + piccolo i valori si avvicinano sempre di + a ℓ

Da un certo punto in poi (n_ε) i termini della successione cadono nella striscia. Questo si può fare per ogni $\varepsilon > 0$ ($\forall \varepsilon > 0$)

$a_n = (-1)^n \frac{1}{n} \qquad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$



$a_n \to 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\varepsilon = 4$

$|a_n| < 4$ definitivam?

$\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| < 4 \quad \forall n$

è vera per ogni n

$\varepsilon = \frac{1}{5}$

$\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{5}$ definit? è vera per $n > 5$

$\varepsilon = 10^{-6}$

$\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| < 10^{-6}$ definit? sì, a partire da $n > 10^6$

$\Rightarrow \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ definit. è vera per $n > \frac{1}{\varepsilon}$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ / \ |a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$ $\quad \frac{1}{n} \to 0$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ $\quad \ell \in \mathbb{R}$ $\quad a_n$ tende /converge a ℓ $\quad \frac{n}{n+1} \to 1$

  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \ / \ |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $\quad a_n$ diverge a $+\infty$ $\quad n^2 \to +\infty$

  $\forall M > 0 \quad \exists n_M \ / \ \forall n \geq n_M \quad a_n > M$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ $\quad a_n$ diverge a $-\infty$ $\quad -n^3 \to -\infty$

  $\forall M < 0 \quad \exists n_M \ / \ \forall n \geq n_M \quad a_n < M$

Ci sono successioni in cui il $\lim_{n\to\infty} a_n$ non esiste

$a_n = (-1)^n \quad 1, -1, 1, -1 \ldots$

$a_n \to 1$ vorrebbe dire $\forall \varepsilon > 0 \ |a_n - \ell| < \varepsilon$ definitivamente

Dimostriamo che questo non è vero

$\exists \varepsilon'$ tale che non è vero $|a_n - \ell| < \varepsilon'$ definitivam.

$\forall n \ \exists k > n$ → c'è sempre 1 ~~indice per cui~~ è falsa $/ \ |a_k - 1| < \varepsilon$ è falsa

$\forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon \ |a_n - 1| < \varepsilon$ ← bisogna negarla

$\exists \varepsilon' \ \forall n \ \exists k \geq n \ |a_k - 1| \geq \varepsilon$ devo trovare un ε' con questa proprietà

$\varepsilon' = \frac{1}{2}$ devo trovare k arbitrariamente grandi $/ \ |a_k - 1| \geq \frac{1}{2}$

→ distanza di a_k da $1 \geq \frac{1}{2}$

Se prendo k dispari $\Rightarrow a_k = -1$

$$\begin{matrix} 1, & -1, & 1, & -1 & \ldots \\ a_0 & \underline{a_1} & a_2 & \underline{a_3} & \end{matrix}$$

$|a_k - 1| = |-1-1| = 2 \geq \frac{1}{2}$ per questi k la succ. non si sta avvicinando a 1

Se a_n non ha limite si dice che è <u>INDETERMINATA</u>

$a_n = (-1)^n n \quad 0, -1, +2, -3, +4 \ldots$

$a_n = \operatorname{sen}(n)$

26/10

Def Una successione a_n si dice CRESCENTE se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$

→ ogni termine è ≤ del termine successivo

Esempio: $a_n = n^2$ $\quad n^2 \leq (n+1)^2$

Si dice DECRESCENTE se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$

Esempio: $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$

Successione MONOTÓNA → a_n crescente opp. decrescente

a_n si dice limitata se $\exists M \mid |a_n| \leq M$ $\forall n$

$\left|\frac{n}{n+1}\right| \leq 1$ → succ. limitata

Teorema

1) Se a_n è monotona allora il $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste
2) Se in più a_n è limitata allora il limite è finito
   - se a_n è crescente $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n$
   - se a_n è decrescente $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n a_n$
3) Se a_n non è limitata il $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ (crescente → $+\infty$, decr. → $-\infty$)

$a_n = \frac{1}{n}$ $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

1) a_n è decrescente
2) a_n è limitata $\left|\frac{1}{n}\right| \leq 4$

questi termini non superano un certo numero (x es 4)

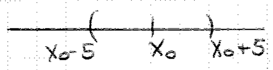
$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n a_n = 0$ è un minorante (≤ di tutti i termini) ed è il più grande dei minoranti

$a_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \dots$

1) a_n è crescente
2) a_n è limitata $\left|\frac{n}{n+1}\right| \leq 1$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n = 1$

$(x_0 - 5, x_0 + 5)$ Intorno di x_0 $(I x_0)$

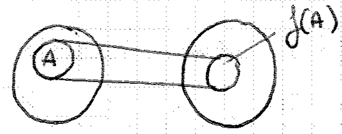


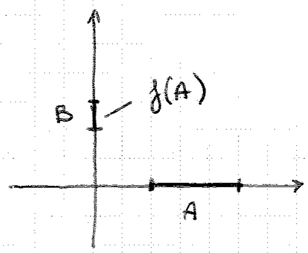
$\{x \,/\, |x - x_0| < 5\}$

5 viene detto "raggio" dell'intorno

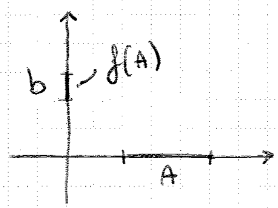
$I_5(x_0)$ $(x_0 - 5, x_0 + 5)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}$ $B \subset \mathbb{R}$ $\underset{\text{immagini dei punti di } A}{f(A)} \subset B$





$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}$ voglio dire che i valori di f su A sono molto vicini a $b \in \mathbb{R}$



I valori di f su A distano da b meno di $\frac{1}{100}$

$f(A) \subset I_{\frac{1}{100}}(b)$

$a_n \in I_\varepsilon(\ell) \Leftrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$

$n \geq n_\varepsilon$ $(n_\varepsilon, +\infty)$

$\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$ $\ell \in \mathbb{R}$

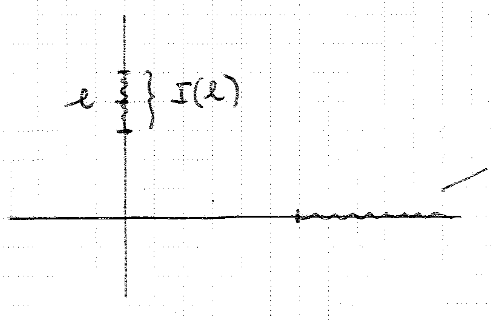
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$ $|a_n - \ell| < \varepsilon$

$n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty)$ $a_n \in I_\varepsilon(\ell)$

qualunque intorno di raggio ε

$\Rightarrow \forall I_\varepsilon(\ell)$ $\exists I_{n_\varepsilon}(+\infty)$ $f(I_{n_\varepsilon}(+\infty)) \subset I_\varepsilon(\ell)$

$\Rightarrow \forall I(\ell)$ $\exists I(+\infty)$ con questa proprietà $f(I(+\infty)) \subset I(\ell)$



da un certo punto in poi i valori cadono nell'intervallo $I(\ell)$

LE FUNZIONI IPERBOLICHE

$\boxed{\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$ seno iperbolico

$\boxed{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$ coseno iperbolico

$\boxed{\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$ tangente iperbolica

Prop $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}} = 1$$

Prop senh x è una funzione DISPARI
cosh x è una funzione PARI

$f(-x) = -f(x)$

$$\operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{senh}(x)$$

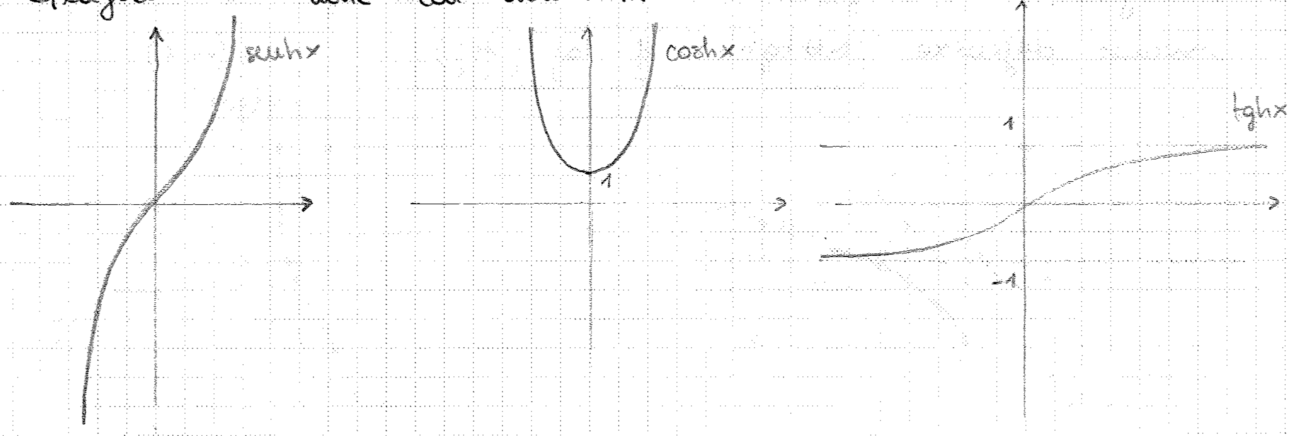
$f(-x) = f(x)$

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

Corollario tgh x è dispari

$$\operatorname{tgh}(-x) = \frac{\operatorname{senh}(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = -\operatorname{tgh}(x)$$

Grafici tutte con dom = IR



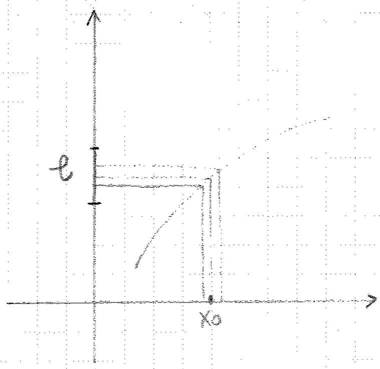
$\cos h\,(\text{sett}\cosh(x)) = x$

$\text{tg}\,h\,(\text{sett}\,\text{tg}h(x)) = x$

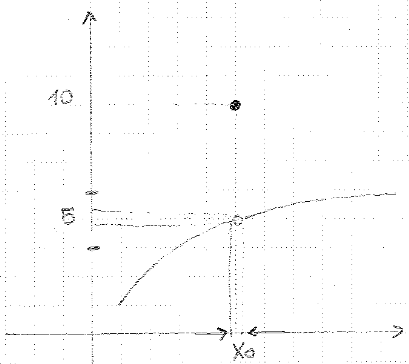
Provare che

a) $\text{senh}\,(a+b) = \text{senh}a \cosh b + \cosh a\, \text{senh} b$

b) $\cosh\,(a+b) = \cosh a \cosh b + \text{senh} a\, \text{senh} b$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 5$$ non considero il punto x_0

$$\lim_{x \to 2} (4x-3) = 5$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \ / \quad 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-5| < \varepsilon$?

$|f(x)-5|$

$|4x-3-5| < \varepsilon$

$|4x-8| < \varepsilon$

$4|x-2| < \varepsilon$

$|x-2| < \frac{\varepsilon}{4}$ δ

Verifica

$|x-2| < \delta \qquad \delta = \frac{\varepsilon}{4}$

$|x-2| < \frac{\varepsilon}{4}$

$4|x-2| < \varepsilon$

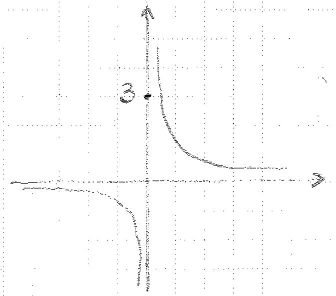
$|4x-8| < \varepsilon$

$|4x-5-3| < \varepsilon \qquad |f(x)-5| < \varepsilon$

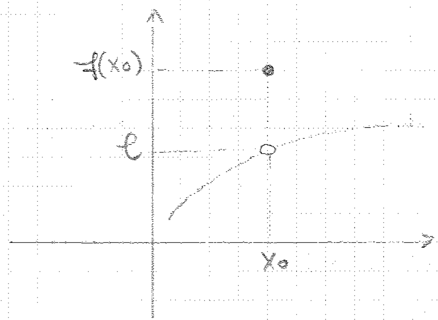
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

definita su $\mathbb{R}$

qualunque cosa metto (C) la f non è mai continua



questa funzione non è continua



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq f(x_0)$$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \ell & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è continua

(estensione x continuità)

↳ definire la f in punti dove non lo è e farla diventare definita

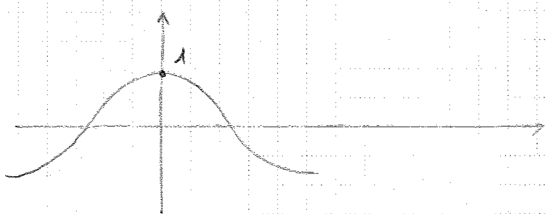
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ questa è definita per $x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Estendo per continuità questa funzione

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua su $\mathbb{R}$



29/10

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$\underbrace{\forall I(+\infty)}_{\text{intorno del limite}} \quad \underbrace{\exists I(x_0)}_{\text{intorno del punto}} \quad / \quad f(I(x_0) - \{x_0\}) \subset I(+\infty)$

si aggiunge per escludere x_0

$\forall M > 0 \quad \exists \delta \ / \ \forall x \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad$ si ha $\quad f(x) > M$

per ogni x che verifica — x sta nell'int. $x_0 - \delta, x_0 + \delta$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ cambia $I(-\infty)$ $(-\infty, M)$ la def. è la stessa

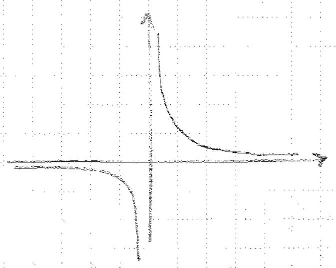
Verificare che $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\forall M > 0$ devo trovare $\delta > 0$ / $x \in (-\delta, \delta)$ e $x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M$

valore ass di x è la distanza di x da 0

$\frac{1}{x^2} > M$ quando $x^2 < \frac{1}{M}$ $\quad |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ δ

$f(x) = \frac{1}{x}$



cosa succede quando $x \to 0$?

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste → f ha comportamenti molto ≠ a seconda che si arrivi da una parte o dall'altra

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

↳ guardo solo gli x positivi → esiste il limite

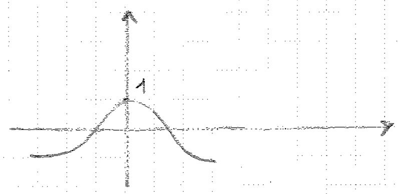
$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$

a_n

$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ allora $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \ell$

$f(x) = \cos x$



$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

$a_n = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \cos \frac{1}{n} = 1$

guardo solo certi punti, ma tutti i punti dell'intorno vengono mandati nell'intorno del limite $\Rightarrow$ il limite è lo stesso

Se <u>ogni</u> successione $a_n \to x_0$ verifica $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \ell$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$

$a_n \to +\infty$

$b_n \to +\infty$

trovo due succ che $\to +\infty$ se $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen}(a_n)$ $\neq$ $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen}(b_n)$ il limite non esiste

$a_n = n\pi \to +\infty$

$\operatorname{sen}(a_n) = \operatorname{sen}(n\pi) = 0 \quad \forall n$

$\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen}(a_n) = 0$

$b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$

$\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen}(b_n) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \underbrace{2n\pi}_{}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ (è il periodo)

Ho trovato 2 successioni che $\to \infty$ per cui i 2 limiti sono $\neq$

$\Rightarrow$ non esiste $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$

$f \to -5 \qquad g \to +\infty \qquad f \cdot g \to -\infty$

$(+\infty)(\pm\infty) = \pm\infty$

$\frac{l}{0} \to \infty$

$\frac{1}{x} = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad f(x) \to 1 \quad$ se $x \to 0$

$\qquad\qquad g(x) \to 0 \quad$ se $x \to 0$

$\frac{f(x)}{g(x)}$ bisogna guardare con che segno va a 0 il denom.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Si dice che $f(x) \to 0^{\pm}$ per $x \to c$

$\lim_{x \to c} f(x) = 0^{\pm}$

se $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ e $\quad f(x) > 0$ / $f(x) < 0$

in un intorno di c

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0^+$

$\lim_{x \to 0} \frac{\overset{\to -3}{x-3}}{\underset{\to 0^+}{x^2}} = -\infty$

2/11 Classificazione delle discontinuità

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

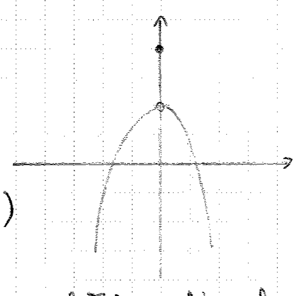
$f(x) = x^2 \quad \lim_{x \to 2} x^2 = (2)^2 = 4$ — quello che vale la f nel punto

(1) Supponiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste ed è finito ma:

- o f non è definita in x_0
- o il limite è $\neq$ da $f(x_0)$

→ si dice che x_0 è una DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$\lim_{x \to 0} (1-x^2) = 1 \neq 4$ (valore di $f(0)$)

il limite esiste ma è $\neq$ dal valore di f in 0

In questo caso non c'è possibilità di estendere f per renderla continua

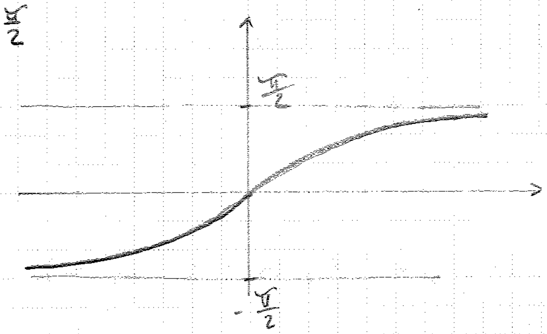
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ma in questo caso ℓ non c'è

$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ $\quad$ dom(f) : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty} = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ arctg$(+\infty)$

discontinuità a salto

$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$



grafico

③ In tutti gli altri casi si dice che f ha una discontinuità di II specie

x es:

- uno dei limiti (o entrambi) sx o dx è ∞

  es $\frac{1}{x}$ (è continua, ma ha una discontinuità di II specie)

- uno dei limiti non esiste

Proprietà dei limiti

$$c = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ x_0^- \\ x_0^+ \end{cases} \qquad \lim_{x \to c} f(x) = \ell$$

$$\forall I(\ell) \quad \exists I(c) \;/\; f(I(c) \setminus \{c\}) \subset I(\ell)$$

$$x \in I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in I(\ell)$$

Tutte le f sono definite in $I(c) \setminus \{c\}$ (questo è il minimo per fare il limite).

Sapere quanto vale la f in un punto non è molto utile, quello che conta è il limite.

Se f è continua in x_0, allora esiste un intorno di x_0 dove f ha lo stesso segno di $f(x_0)(\neq 0)$. Se tolgo la continuità questa affermazione è falsa.

Se f è continua in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\ell}$$

Applico il t. della permanenza del segno

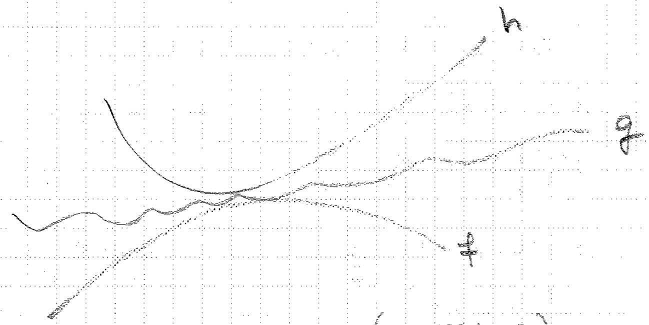
4/11 TEOREMA DEL CONFRONTO

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$x \in I(c) \setminus \{c\}$

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = \ell$

$\Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = \ell$



(squeezing)

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

- basta fare $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

sen x è una funz dispari

x è dispari

$\Rightarrow$ il rapp. di funzioni dispari è una f pari

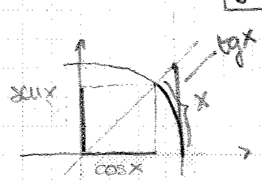
$f(-x) = -f(x)$ f dispari

$g(-x) = g(x)$ g pari

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \lim_{-x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \boxed{\lim_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}$$

- basta considerare $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$



Se f è limitata $|f(x)| \leq M$ $\forall x$ e $g \to 0$ per $x \to c$

allora $\lim_{x\to c} f(x)\,g(x) = 0$

$\lim_{x\to c} |f(x)\,g(x)| = 0$

$0 \leq |f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leq M|g(x)|$

$$\underset{\downarrow\,0}{0} \leq \underbrace{|f(x)\,g(x)|}_{\downarrow\,0} \leq M\,\underset{\downarrow\,0}{|g(x)|}$$

Non è necessario sapere se f ha un limite, sappiamo che è limitata.

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\operatorname{sen}x}_{\text{è una f limitata}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}x}{x} = 0$

Forme indeterminate : $+\infty - \infty$

non è possibile dare una regola, perché nessuna regola vale (può succedere qualunque cosa)

$\frac{\infty}{\infty}$

$\frac{0}{0}$

$\infty \cdot 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{\to 1}\, \underbrace{\operatorname{sen}x}_{\to 0} = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to+\infty} = +\infty$

$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} 1/x}{\operatorname{sen}x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \underbrace{\frac{x}{\operatorname{sen}x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}_{\text{non ha limite}}$ il limite non esiste

Abbiamo 4 limiti del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ e 4 risultati $\neq$ $\Rightarrow$ non è possibile stabilire una regola

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}}_{\to 1}\, \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$

! $\frac{\operatorname{sen}x}{x} \to 1$ $\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^2 \to 1$ $\log\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right) = 0$ $(\log 1)$ log è una f continua

5/11

Esponenziali

$\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)}$ se $f \to 3$ e $g \to +\infty$ $\Rightarrow f^g \to +\infty$

$f \to 3$ e $g \to 0$ $\Rightarrow f^g \to 1$

Forme esponenziali indeterminate: 1^∞, ∞^0, 0^0

0^∞ non è indeterminata $\quad 0^\infty = \left(\frac{1}{\infty}\right)^\infty = \frac{1}{\infty^\infty} = 0$

0^∞ tende sempre a 0

$$\lim_{x \to +\infty} (e^{-x})^{x^2} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{x^2} = \frac{1}{(e^x)^{x^2}} = \frac{1}{\underbrace{\infty^\infty}_{\to \infty}} = 0$$

LIMITI NOTEVOLI

$\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow$ def. di e

↘ è una succ. crescente e limitata

variabile discreta

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

(e esiste) possiamo dimostrare che questo lim fa e, ma la dim. è complessa, quindi si dà x scontato

prende tutti i valori reali invece che solo quelli interi

$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = (1^\infty) \quad x = ay \quad y = \frac{x}{a} \quad x \to +\infty \quad y \to +\infty \quad (a>0)$

$$\Rightarrow \lim_{y \to +\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{ay} = \lim_{y \to +\infty} \Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}_{\to e}\Big]^a = e^a$$

$$= \left[\lim_{y \to +\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^a = e^a$$

↳ metto il lim dentro all'elevam. ad a (l'elevam. ad a è una f continua)

$$\lim_{x \to c} (f(x))^a = \left(\lim_{x \to c} f(x)\right)^a$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) \quad \text{x def di continuità}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a}$$

Esercizi

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+4x)}{x}$ $\qquad 4x = y \qquad x = \frac{y}{4} \qquad x\to 0 \quad y \to 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+\cancel{4}\frac{y}{\cancel{4}})}{\cancel{4}\frac{y}{\cancel{4}}} \cdot 4 = 4$$

- $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{tgx} - \frac{1}{senx}\right) = (+\infty - \infty)$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\frac{senx}{cosx}} - \frac{1}{senx}\right) = \frac{cosx}{senx} - \frac{1}{senx} =$

$$= \frac{cosx - 1}{senx} = \underbrace{\frac{x}{senx}}_{\to 1} \underbrace{\frac{cosx-1}{x}}_{\to 0} = 0$$

$$\frac{cosx-1}{x} = \underbrace{\frac{cosx-1}{x^2}}_{\downarrow\, -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{x}_{\downarrow\, 0}$$

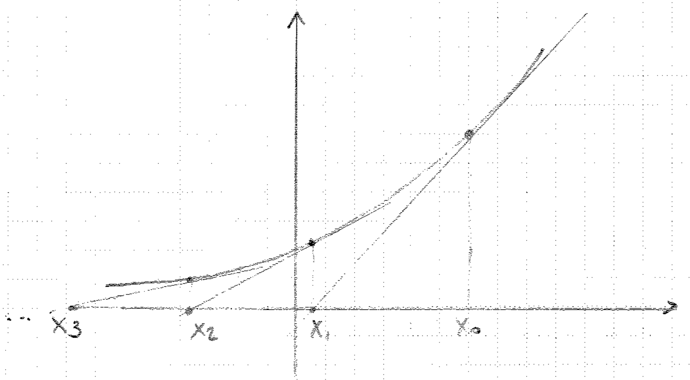
- $\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1 + 1 - 3^x}{x} = \left(\frac{2^x-1}{x} - \frac{3^x-1}{x}\right) = \log 2 - \log 3 = \log\frac{2}{3}$

oppure $\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{x} = \frac{2^x\left(1 - \frac{3^x}{2^x}\right)}{x} = -2^x\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}{x} = -1\left(\log\frac{3}{2}\right) = \log\frac{2}{3}$

! $a^b = e^{b\log a} \quad \forall a > 0$

Bisogna sapere prima che c'è uno zero.

Per esempio e^x non ha zeri



Quando possiamo assicurarci che c'è uno zero?

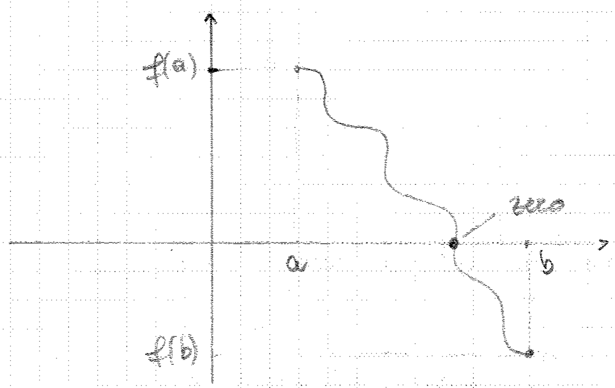
<u>Teorema di esistenza degli zeri</u>

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>continua</u>

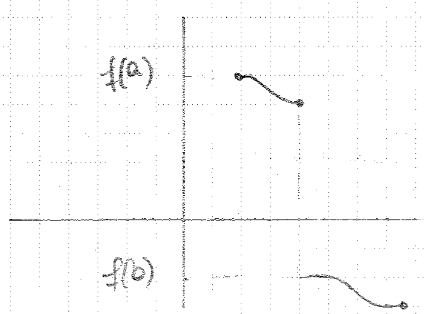
se <u>$f(a)f(b) < 0$</u> $\Rightarrow$ <u>f ha almeno uno zero in (a,b)</u>

<u>se f è strettamente monotona</u> $\Rightarrow$ <u>f ha un unico zero</u>

$f(a)f(b) < 0$ significa che f assume valori di segno opposto in a e in b



Se $f(a)f(b) < 0$ ma f non è continua in un punto, allora il teorema non vale



discontinuità a salto

"f assume il valore ℓ" significa che $\exists x_0 \, / \, f(x_0) = \ell$

Teorema dei valori intermedi

Sia f continua in $[a,b]$. Se f assume 2 valori α e β, allora assume tutti i valori fra α e β

Dim nel caso $\alpha < \beta$ (no libro)

Dire che f assume α e β significa che

$\exists x_\alpha, x_\beta \quad f(x_\alpha) = \alpha$

$f(x_\beta) = \beta$

Supponiamo $x_\alpha < x_\beta$

Mostro che $\forall \gamma \in (\alpha, \beta) \qquad \exists x_\gamma$ dove $f(x_\gamma) = \gamma$

gamma

$\alpha < \gamma < \beta$

Prendo $g : [x_\alpha, x_\beta] \to \mathbb{R}$

$g(x) = f(x) - \gamma$

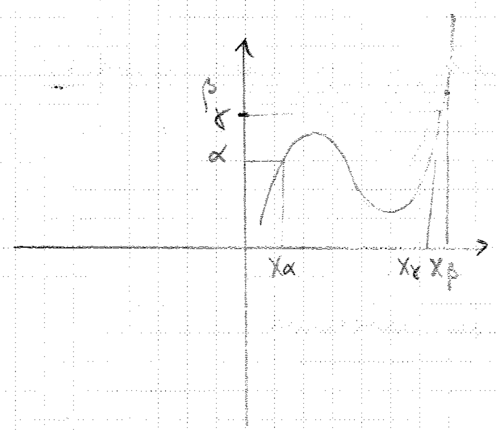
g è continua (differenza di f continue)

$g(x_\alpha) = f(x_\alpha) - \gamma = \alpha - \gamma \quad < 0 \qquad \gamma$ è $>$ di α

$g(x_\beta) = f(x_\beta) - \gamma = \beta - \gamma \quad > 0 \qquad \gamma$ è $<$ di β

$\exists x_\gamma \, / \, g(x_\gamma) = 0$

$f(x_\gamma) - \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_\gamma) = \gamma \qquad$ ho trovato un punto dove f è uguale a γ



2) f continua su I $\Rightarrow$ f strettamente monotona $\Leftrightarrow$ f iniettiva

3) f continua su I e invertibile $\Rightarrow$ f^{-1} continua

es $f(x) = tg\,x$
$f^{-1}(x) = arctg\,x$ continua

$f(x) = \operatorname{sen} x$
$f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$ continua

11/11 **CONFRONTO LOCALE DI FUNZIONI**

$$c = \begin{cases} x_0 \\ x_0^{\pm} \\ \pm\infty \end{cases}$$

f, g

$$\lim_{x\to c} f = \lim_{x\to c} g = \begin{matrix} 0 \\ \infty \end{matrix}$$

Voglio studiare il limite del rapporto

f e $g \to 0$

$$\lim_{x\to c} \frac{f}{g} = 0 \qquad \text{quale va a 0 più in fretta?}$$

$f = x^3 \quad x \to 0$

$g = \operatorname{sen} x \quad x \to 0$

$\frac{x^3}{\operatorname{sen} x} \to 0$ $\quad x^3$ tende a 0 molto più in fretta di $\operatorname{sen} x$

Def <u>Simboli di Landau</u>

$$c = \begin{cases} x_0 \\ x_0^{\pm} \\ \infty \end{cases}$$

$f, g \qquad \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \begin{matrix} 0 \\ \infty \end{matrix}$

① se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ si dice che f e g sono <u>EQUIVALENTI</u> per $x \to c$

$f \sim g$

f è molto più piccola

② se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ si dice che f è <u>TRASCURABILE</u> rispetto a g in c

$f = o(g)$ $\quad f$ è o piccolo di g

Algebra degli o piccoli

$\boxed{x \to 0}$

(1) $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$

somma di 2 f con la stessa proprietà

$f = o(x^n)$

$g = o(x^n)$

voglio vedere a cosa tende

$$\frac{f+g}{x^n} = \underbrace{\frac{f}{x^n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{g}{x^n}}_{\to 0} \to 0$$

(2) $o(x^n) \pm o(x^p) = o(x^{\min(n,p)})$

$f = o(x^2)$

$g = o(x^4)$

$f+g = o(x^2)$

$$\frac{f+g}{x^2} = \underbrace{\frac{f}{x^2}}_{\to 0} + \frac{g}{x^2} \to 0$$

$\to 0$ perché $f = o(x^2)$

$$\frac{g}{x^2} = \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\frac{g}{x^4}}_{\to 0} \to 0$$

$g = o(x^4)$

$$\frac{f+g}{x^4} = \underbrace{\frac{f}{x^4}}_{?} + \underbrace{\frac{g}{x^4}}_{\to 0}$$

non funziona usando la potenza più alta

$f = x^3 \qquad f = o(x^2) \qquad \frac{x^3}{x^2} \to 0$

$g = x^5 \qquad g = o(x^4) \qquad \frac{x^5}{x^4} \to 0$

$$\frac{x^3+x^5}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} + \frac{x^5}{x^2} = x + x^3 \to 0$$

$$\frac{x^3+x^5}{x^4} = \frac{x^3}{x^4} + \frac{x^5}{x^4} = \frac{1}{x} + x \to \infty$$

non tende a 0 (ho diviso per la potenza più alta)

(3) $x^m \, o(x^n) = o(x^{m+n})$

$f = o(x^n)$

è una funzione che divisa per $x^n \to 0$

$$\frac{\cancel{x^m} f}{\cancel{x^m}x^{n}} = \frac{f}{x^n} \to 0$$

(4) $o(x^n) \, o(x^m) = o(x^{m+n})$

$f = o(x^n)$

$g = o(x^m)$

$$\frac{f g}{x^{m+n}} = \overbrace{\frac{f}{x^n}}^{\to 0} \cdot \overbrace{\frac{g}{x^m}}^{\to 0} \to 0$$

significa dire che $f \cdot g$

$f(x) \to 0$ per $x \to 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)}$ chiamo $f(x) = y$ $x \to 0$ $y \to 0$

$\Rightarrow \lim_{\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$

$e^y = 1 + y + o(y)$ $y \to 0$

e^{x^2} $x \to 0$ chiamo $x^2 = y$

$\Rightarrow e^y = 1 + y + o(y)$ posso scrivere $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$

$\operatorname{sen}(5x^3)$ $\operatorname{sen} y = y + o(y)$

$\operatorname{sen}(5x^3) = 5x^3 + o(x^3)$

$\sqrt{1-3x^2}$ $x \to 0$

$\sqrt{1-3x^2} = (1-3x^2)^{1/2}$

$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + o(y)$ $y = -3x^2$ $\alpha = 1/2$

$\sqrt{1-3x^2} = 1 + \frac{1}{2}(-3x^2) + o(x^2) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$

12/11

$\boxed{f = o(1)}$ $x \to c$

$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{1} = 0$

$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = 0}$ la funzione tende a 0

f continua in x_0

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\lim_{x\to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$

$f(x) - f(x_0) = o(1)$ per $x \to x_0$

$\boxed{f(x) = f(x_0) + o(1)}$ f continua in x_0 (altra forma della def. di continuità)

$f(x)$ quando $x \to x_0$ è uguale al valore nel punto + una cosa piccola che tende a 0

$x \to 0$

- $\operatorname{sen} x = x + o(x)$
- $e^x = 1 + x + o(x)$
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
- $\log(1+x) = x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)+x^3}{4x+5\log(1+x^2)}$

num: $\operatorname{sen} y = y + o(y)$

$\operatorname{sen}(2x) = 2x + o(x)$

denom: $\log(1+y) = y + o(y)$

$\log(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$

è un o piccolo di x

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \dfrac{\overset{f}{2x} + x^3 + \overset{o(f)}{o(x)}}{4x+5x^2+o(x^2)}$ $\qquad \lim_{x\to 0} \dfrac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x}} = x^2 = 0$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{2x+o(x)}{4x+o(x^2)} = \dfrac{1}{2}$

$x\to 0$ si raccolgono le potenze + basse

$x\to +\infty$ si raccolgono le potenze + alte

se avessi avuto $2x + x^{1/3} + o(x)$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x^{1/3}+o(x^{1/3})}{4x+o(x)} = +\infty$

! $\lim_{x\to c} \dfrac{f+o(f)}{g+o(g)} = \lim_{x\to c} \dfrac{f}{g}$ sono uguali i limiti

$\dfrac{f+o(f)}{g+o(g)} = \dfrac{f}{g}$ no!

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^4 (e^{-2x^2}-1)+3x^6}{(1-\cos x^2)(\sqrt{1+x^2}-1)}$

num: $\operatorname{sen} x^4 = x^4 + o(x^4)$

$e^y = 1+y+o(y) \Rightarrow e^{-2x^2} = 1-2x^2+o(x^2)$

$\Rightarrow \underbrace{(x^4+o(x^4))}_{\text{potenza + bassa 4}}\underbrace{(-2x^2+o(x^2))}_{\text{potenza + bassa 2}} + 3x^6 = -2x^6+o(x^6)+3x^6$ $\qquad$ devo tenere solo le potenza più basse (6)

$= x^6 + o(x^6)$

se moltiplico $4+2=6$

denom: $\cos x^2 = 1 - \frac{1}{2}(x^2)^2 + o(x^2)^2$

$1-\cos x^2 = \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ $\qquad (1+y)^\alpha = 1+\alpha y + o(y)$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\right)\left(\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right) = \frac{1}{4}x^6 + o(x^6)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \dfrac{x^6+o(x^6)}{\frac{1}{4}x^6+o(x^6)} = 4$

16/11

f, g per $x \to 0$

- entrambe infinitesime $f = o(1)$

$g = o(1)$

- entrambe infinite

Confronto locale di funzioni significa fare f/g $x \to c$

<u>Funzione "campione"</u> (φ) infinitesima per $x \to c$

f infinitesima. Si vuole confrontare f con φ

Supponiamo che $c = 0$ $x \to 0$ $\varphi(x) = x$

$c = x_0$ $x \to x_0$ $\varphi(x) = x - x_0$

$c = +\infty$ $x \to +\infty$ $\varphi(x) = \frac{1}{x}$

$c = +\infty$ $x \to +\infty$ $\varphi(x) = x$

$c = 0^+$ $x \to 0^+$ f finite in 0 $\varphi(x) = \frac{1}{x}$

Per confrontare 2 funzioni faccio il rapporto

$\Rightarrow \frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha}$ confronto f con una potenza di φ

f, φ funzioni infinite o infinitesime per $x \to c$

<u>Se esiste $\alpha > 0$</u> / $\underline{\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha}} = l \neq 0$ ↳ limite finito e non nullo

<u>$\Rightarrow$ si dice che f ha ordine di infinito o infinitesimo α rispetto a φ</u>

es $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^5} = -4$ f ha ordine di infinitesimo 5 $\Rightarrow$ f va come x^5

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{l\varphi(x)^\alpha} = 1$ $\quad f \underset{x \to c}{\sim} l\varphi(x)^\alpha \Rightarrow f(x) = \boxed{l\varphi(x)^\alpha} + o(\varphi^\alpha)$

↓

<u>parte principale</u> di f rispetto a φ in c

$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ $x \to 0$

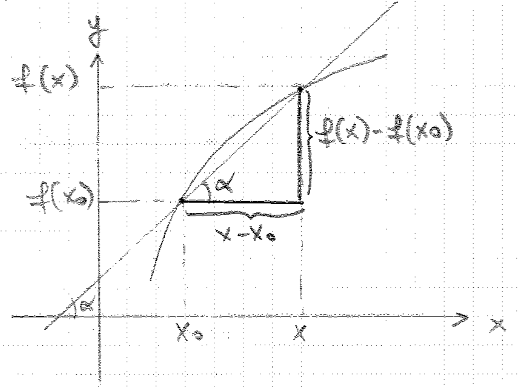
$\operatorname{sen} x \underset{x \to 0}{\sim} x$ $\quad \operatorname{sen} x = x + o(x)$ la parte principale di sen x risp. a x è x

$\frac{1 - \cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} \to 1$ $\quad 1 - \cos x$ ha ordine 2 rispetto a x

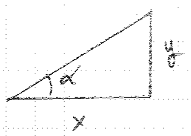
$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ $\quad$ P.P di $1 - \cos x$ è $\frac{1}{2}x^2$

DERIVATE

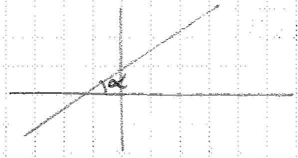
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ confronto fra 2 infinitesimi



confronto tra loro le lunghezze di questi 2 segmenti quando $x \to x_0$



$\frac{y}{x} = tg\alpha$



Quando abbiamo una qualunque retta la tg α si chiama COEFF. ANGOLARE della retta.

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ mi chiedo cosa fa la tg dell'angolo quando $x \to x_0$

Def Una funzione f si dice DERIVABILE in un punto x_0 se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ esiste ed è finito. Il valore del limite si chiama DERIVATA di f in x_0 $\left(f'(x_0),\ \frac{df}{dx}(x_0),\ Df(x_0) \right)$

Osservazione

$x \to x_0$

$x - x_0 = h$ se $x \to x_0$ $h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to$ rapporto incrementale

f derivabile vuol dire che $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \ell = 0$ ho il lim di un rapp. che fa 0

$\frac{f(x)-f(x_0)-\ell(x-x_0)}{x-x_0} = o(1)$

$f(x)-f(x_0)-\ell(x-x_0) = o(x-x_0)$

$\Rightarrow$ f è derivabile se esiste $\ell \in \mathbb{R}$ / si può scrivere

$\boxed{f(x) = f(x_0) + \ell(x-x_0) + o(x-x_0)}$ $x \to x_0$

Teorema Se f è derivabile in x_0, allora f è continua

Deriv $\Rightarrow$ continua

Dim $f(x)=f(x_0)+o(1)$?

f è derivabile $\Rightarrow$ $f(x)=f(x_0)+\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)}_{\to 0 \text{ quando } x\to x_0}$

$\Rightarrow f(x)=f(x_0)+o(1)$

! continua $\not\Rightarrow$ derivabile

$f(x)=|x|$ f è continua su tutto $\mathbb{R}$, ma non è derivabile in $x=0$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $x_0=0$ $f(x)=|x|$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ non esiste

$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=1$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=-1$

$\Rightarrow |x|$ non è deriv. in 0

Avrei dovuto avere $|x|=|0|+\ell x+o(x)$

$|x|=\ell x+o(x)$ non esiste ℓ con la proprietà $|x|-\ell x=o(x)$

$\frac{|x|}{x}=\text{sgn}(x)$ segno di x

$$\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & \text{se } x>0\\ -1 & \text{se } x<0\end{cases}$$

f derivabile in x $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ nasce una nuova funz.

Se f è derivabile in tutti i punti, definisco una nuova funz. (f')

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f(x)=c\in\mathbb{R}$ $\forall x$ (f costante)

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0$

f costante $\Rightarrow f'=0$ $f'(x)=0$ $\forall x$

$f(x)=x^2$ $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2hx+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h=2x$

$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$

$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+o(h)$ $x-x_0=h$ $x=x_0+h$

$(x+h)^2=x^2+2xh+\underbrace{h^2}_{o(h)}$ $f'(x)=2x$

Derivata della funzione inversa

se f derivabile
invertibile
$f'(x) \neq 0$

$\Rightarrow f^{-1}$ è derivabile

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$D(f(f^{-1}(x))) = 1$ derivata di $x = 1$ $\quad \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h} = 1$

$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$

derivata della funzione composta $f(f^{-1}(x)) \Rightarrow D(f(f^{-1}(x))) = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$

$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

↳ è la derivata di f calcolata in f^{-1}

Potenze

$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$

$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h)$

$f(x) = x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x+h) = (x+h)^\alpha = \left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)^\alpha = x^\alpha \left(1+\underbrace{\frac{h}{x}}_{y}\right)^\alpha = x^\alpha \left(1+\alpha\frac{h}{x} + o(h)\right)$

$(x+h)^\alpha = \overbrace{x^\alpha}^{f(x)} + \overbrace{\alpha x^{\alpha-1}}^{f'(x)} h + o(h)$ $\quad (1+y)^\alpha = 1+\alpha y + o(y)$

$$\boxed{D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}}$$

$(x+h)^\alpha$

$(0+h)^\alpha = h^\alpha \quad h^\alpha = o(h)\ ? \quad \frac{h^\alpha}{h} \to 0 \quad$ se $\alpha > 1 \quad h^\alpha = o(h)$

^ calcolato in 0

$(0+h)^\alpha = o(h)$

$= \underbrace{N}_{0} + \underbrace{M}_{0} h + o(h)$

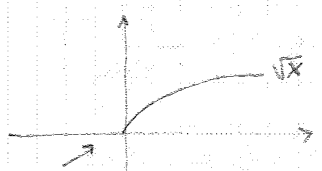
x^α $(\alpha > 1)$ è derivabile in 0 e la derivata è nulla

$\alpha = \frac{1}{2}$

$(0+h)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{h}$ ma $\sqrt{h}$ non è $o(h)$

$\Rightarrow$ <u>$\sqrt{x}$ non è derivabile in 0</u>

$D(\sqrt{x}) = D(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



in 0 le potenze < di 1 non si possono calcolare

la tg in 0 è verticale
ma tende a ∞
→ f non è derivabile (la tg non può

$f(x)$	$D(f(x))$
x	1
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
c	0
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$ opp $1+\operatorname{tg}^2 x$
a^x	$a^x \log a$
e^x	e^x
e^{-x}	$-e^{-x}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$ $x>0$
$\log(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{x}$ $x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^x	$x^x(\log x+1)$! vedi dimostrazione

$y = x^x$

$$\log y = \log x^x$$
$$\log y = x \log x$$
$$\frac{1}{y} y' = \log x + 1$$
$$y' = x^x(\log x + 1)$$

Esercizi:

$f(x) = 3xe^{2x}$

$f'(x) = 3e^{2x} + 3xe^{2x} \cdot 2$

$f(x) = 4x\sqrt[3]{1+x^2} = 4x(1+x^2)^{1/3}$

$f'(x) = 4\sqrt[3]{1+x^2} + 4x \cdot \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 2x$

$f(x) = \frac{1}{x\log x}$

$f'(x) = \frac{-1\left(\log x + x \cdot \frac{1}{x}\right)}{x^2\log^2 x} = \frac{-\log x - 1}{x^2\log^2 x}$

Def Si dice che una funzione f è derivabile in x_0 da dx se $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ esiste ed è finito

Si dice che f è derivabile da sx se $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ esiste ed è finito

$\Rightarrow$ $f'_+(x_0)$ derivata dx

$f'_-(x_0)$ " sx

f è derivabile in un punto se e solo se è derivabile da dx e da sx e $\underbrace{f'_+(x_0) = f'_-(x_0)}_{f'(x_0)}$! questa non è la def di derivata

più dx
+ più sx
della funzione
punti esclusi dal
dominio della
derivata

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

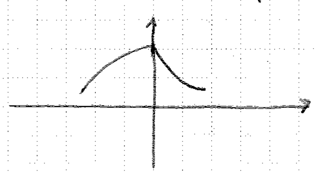
f, x_0

f continua in x_0

f non derivabile in x_0

① Esistono $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ e almeno una è finita, ma sono $\neq$

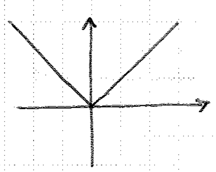
$\Rightarrow$ x_0 è un PUNTO ANGOLOSO



Es. $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$

$f'_+(0) = 1$

$f'_-(0) = -1$



② Entrambi i limiti sx e dx sono ∞

- se il segno è concorde $\Rightarrow$ x_0 è un PUNTO A TANGENTE VERTICALE

$$f(x) = \begin{cases} a \operatorname{sen}(2x) - 4 & x<0 \\ b(x-1) + e^x & x \geq 0 \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Trovare a, b / f è derivabile su $\mathbb{R}$

f è derivabile su $\mathbb{R} - \{0\}$ perché è composizione di f elementari e quindi derivabili

1) f deve essere continua in 0 $\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ (def. di continuità in 0

$f(0) = -b+1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -b+1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -4$

f continua in 0 se $-b+1 = -4$ $\quad b = 5 \quad \forall a$

$$f(x) = \begin{cases} a \operatorname{sen}(2x) - 4 & x<0 \\ 5(x-1) + e^x & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{è continua}$$

2) $$f'(x) = \begin{cases} 2a \cos 2x & x<0 \\ 5+e^x & x>0 \end{cases}$$

in 0 non so se sia derivabile

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 6$

$\Rightarrow 6 = 2a \quad a = 3$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 2a$

per $b=5$ e $a=3$ f è derivabile su $\mathbb{R}$

Esercizi:

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+\operatorname{sen}x)^5 - 1}{1-\cos\sqrt{x}}$

$\operatorname{sen}x = x + o(x)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x+o(x))^5 - 1}{\cancel{1-1}+\frac{x}{2} + o(x)}$

$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$, $\quad t = x+o(x)$

$(1+x+o(x))^5 = 1 + 5(x+o(x)) + \underbrace{o(x+o(x))}_{o(x)} = 1+5x+o(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{5x+o(x)}{\frac{x}{2}+o(x)} = 10$

Teorema di Fermat

Sia f definita in un intorno di x_0. Supponiamo che f sia derivabile in x_0. Se x_0 è un minimo o massimo locale, allora x_0 è critico $\Rightarrow$ $f'(x_0)=0$

Dim nel caso x_0 max locale

$$\exists I(x_0) \;/\; \forall x \in I(x_0) \quad f(x) \le f(x_0)$$

Sia $x > x_0$ $\quad x \in I(x_0)$

$$\overset{(\qquad x_0 \qquad x \qquad)}{\rule{4cm}{0.4pt}}$$

$f(x) - f(x_0) \le 0$

$x - x_0 > 0$

Faccio il rapporto $\dfrac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}}$ $\Rightarrow$ il rapp è ≤ 0

$\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \quad \forall x \in I(x_0) \quad x > x_0$

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$ questo lim esiste (la f è derivabile per HP)

Teorema della permanenza del segno

$f'_+(x_0) \le 0$

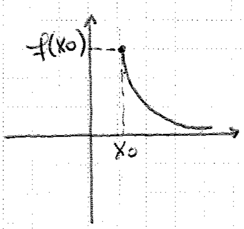
Ora prendo $x < x_0$

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} \ge 0$

$f'_-(x_0) \ge 0$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad x_0$ è critico

Se f non è definita in un intorno di x_0, allora il teorema non vale



x_0 è un massimo stretto, ma non è vero che la derivata è nulla, non è vero che x_0 è critico

Inoltre x_0 deve essere interno al dominio

$\Rightarrow \exists I(x_0) \subset \mathrm{dom}(f)$

Nel grafico x_0 non ha un intorno contenuto nel dom di f, ne ha solo metà.

Teorema di Rolle

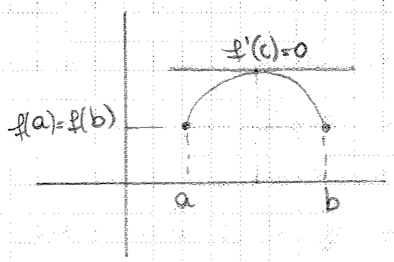
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Supponiamo che:

- f continua in $[a,b]$
- f derivabile almeno in (a,b)
- $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$ Allora f ha un punto critico in (a,b)

$\exists c \in (a,b) \,/\, f'(c) = 0$



Dim

f continua su $[a,b] \Rightarrow$ (Weierstrass) f ha un min x_m e un max x_M

Se $x_m = a$, $x_M = b$ opp $x_M = a$, $x_m = b$ $\Rightarrow$ min e max cadono agli estremi dell'intervallo

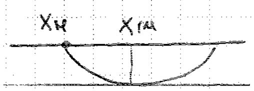
ma $f(a) = f(b) \Rightarrow$ la f è costante

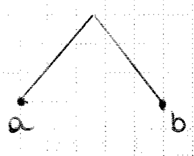
Tutti i punti di (a,b) sono critici

Se non è vero che entrambi cadono agli estremi, almeno uno, diciamo x_m, cade in (a,b).

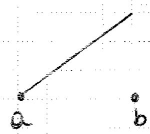
x_m è un punto di minimo interno, f derivabile

$\Rightarrow$ x il T. di Fermat x_m è critico

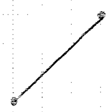




f non è deriv. $\to$ il teorema non vale



f non è cont. in $[a,b]$ $\to$ il T. non vale



$f(a) \neq f(b)$

Applicazioni del Teorema di Lagrange

f definita su un intervallo

f derivabile

f costante $\Rightarrow f'(x)=0$ in tutti i punti

Una funzione costante ha la derivata nulla

Se $f'(x)=0 \ \forall x \Rightarrow f$ costante ?

Prendiamo l'intervallo $[a,x]$ $x>a$

f derivabile ovunque ($\Rightarrow$ f continua ovunque)

Applico Lagrange su $[a,x]$

$$\exists c \in (a,x) \ / \ f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

La derivata di f è nulla in tutti i punti per HP

$$\Rightarrow f'(c)=0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0 \Rightarrow f(x)-f(a)=0 \Rightarrow f(x)=f(a) \quad \forall x$$

cambiando la x la f rimane sempre uguale a $f(a)$

$\Rightarrow$ Questo vuol dire che f è cost. (caratterizzaz. delle f cost.)

f costante <u>su un intervallo</u> se e solo se

$f'(x)=0 \quad \forall x$ in tutti i punti

$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cancel{x^2}}\frac{\cancel{x^2}}{x^2+1} = 0 \qquad f \text{ è costante}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

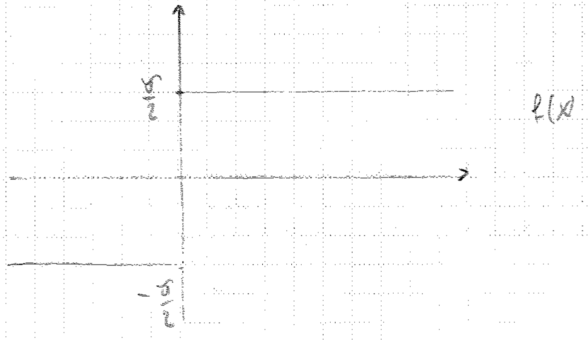
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

f non è definita su un int. Il dom(f) è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x)=0$ su $(-\infty, 0)$

$f'(x)=0$ su $(0,+\infty)$

In 0 la f non è derivabile (non è definita in 0)



su ognuno di questi int. la f è costante ma non possiamo dire che sia costante su $\mathbb{R}$