www.centroappunti.it

Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 635

DATA: 03/10/2013

APPUNTI

STUDENTE: Bodini

MATERIA: Geometria + Esercizi
Prof. Massaza

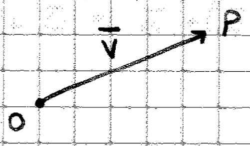
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

07/03/2013

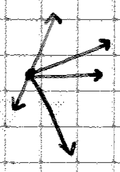
ALGEBRA LINEARE

SPAZIO DEI VETTORI APPLICATI AD UN PUNTO



- DIREZIONE, o la retta su cui giace
- LUNGHEZZA O MODULO $|\bar{v}|$
- VERSO, cioè l'orientazione

SI DEF. UN VETTORE NULLO $\bar{0}$, CON MODULO 0 E SENZA DIREZIONE NÉ VERS

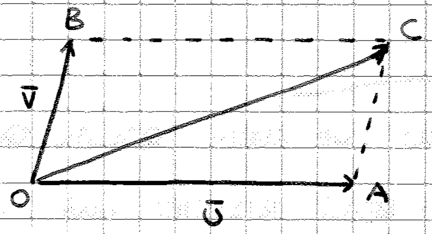


VETTORI IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON I PUNTI DELLO SPAZIO

$\bar{v} = \overline{OP} \longleftrightarrow P$

ogni vettore ha un'immagine ed ogni punto proviene da un vettore → rapido passaggio tra due insiemi, che però non coincidono

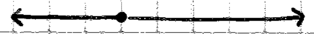
OPERAZIONE DI SOMMA



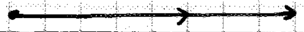
- REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA
- OPERAZIONE BINARIA

$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OA}$

- 0 E' ELEMENTO NEUTRO $0 + \overline{OB} = \overline{OB}$, se uno dei due ha modulo nullo
- VETTORI CON STESSA DIREZIONE

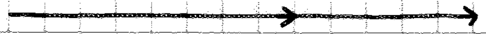


VERSO OPPOSTO

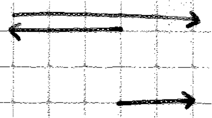


STESSO VERSO

la somma è un vettore con la stessa direzione, e il verso è quello del vettore di modulo maggiore. Il modulo è la differenza dei moduli.



la somma è un vettore con la stessa direzione, lo stesso verso e per modulo la somma dei moduli



A PARITA' DI MODULO SI OTTIENE IL VETTORE NULLO

- $\bar{u} + \bar{v} = 0$ $\bar{u} = -\bar{v}$ OPPOSTI → VERSO OPPOSTO
  STESSA DIREZIONE
  STESSO MODULO

SPAZIO VETTORIALE IN UN CAMPO $\mathbb{K}$

È un insieme con due operazioni
$(\mathbb{K}, +, \cdot)$
generalizzazione del concetto di campo reale

DEF DI SPAZIO VETTORIALE :

- RISPETTO ALLA SOMMA E' UN GRUPPO COMMUTATIVO
- SE SI TOGLIE LO ZERO, CHE RIMANGA UN GRUPPO COMMUTATIVO RISPETTO AL PRODOTTO
- VALIDA LA PROPRIETA' DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOMMA

insieme con un'operazione interna (somma) ed una esterna (prodotto numero - vettore) che gode delle ~~quattro~~ 8 proprietà

b) si dim che $a\cdot\bar{0} \overset{?}{=} 0$

$$a(\bar{0}\cdot\bar{v}) = \begin{cases} a\cdot\bar{v} & \text{direttamente} \\ a\cdot\bar{0} + a\cdot\bar{v} \end{cases}$$

come nel caso precedente, si sommano gli opposti:

$a\cdot\bar{v} = a\cdot\bar{0} + \bar{v}\cdot a$

$\cancel{a\cdot\bar{v}} - \cancel{a\bar{v}} = a\bar{0} + \cancel{a\cdot\bar{v}} - \cancel{a\cdot\bar{v}}$

$0 = a\bar{0}$ cvd

UNENDO a) e b), SI PUÒ DIM. CHE:

- $a\cdot\bar{v} = \bar{0} \Longrightarrow a = 0 \vee \bar{v} = \bar{0}$ ✓

$\|$

"vel", implica che la proposizione sia vera se le due condizioni non sono entrambe false (vere entrambe o almeno una delle due)

$\underbrace{\qquad\quad}_{P}$ implica "r" o "s"

equivale a dim che

$P \Rightarrow r \vee s = P \wedge \underbrace{\neg r}_{\text{"non r"}} \to s$ quindi

DIM: $a\bar{v} = 0 \wedge a \neq 0 \longrightarrow \bar{v} = \bar{0}$

è un numero che $\in K$ (campo), quindi ammette un inverso $\cancel{a}\cdot\frac{1}{\cancel{a}} = 1$ se $a \neq 0$

$\|$

$\exists \frac{1}{a} \mid a\cdot a^{-1} = 1$

$a\bar{v} = 0 \longrightarrow \underbrace{a^{-1}(a\bar{v})} = a^{-1}\cdot 0$ usando la prop. associativa

$= (a^{-1}\cdot a)\cdot\bar{v} = a^{-1}\cdot 0$

$1\cdot\bar{v} = a^{-1}\cdot 0 \qquad \bar{v} = 0$ cvd

$$a\cdot\bar{v} = \bar{0} \overset{\text{dim 1}}{\underset{\text{dim 2}}{\Longleftrightarrow}} a = 0 \vee \bar{v} = 0$$

occorre dim di teorema diretto ed inverso, nel caso di doppia implicazione

- $-\bar{v} = (-1)\cdot\bar{v}$ OPPOSTO DI $\bar{v}$; cioè dim. che $\bar{v} + (-1)\bar{v} \overset{?}{=} \bar{0}$

$(1)\bar{v} + (-1)\bar{v} = \bar{v}(1 + (-1)) = 0\cdot\bar{v} = \bar{0}$ cvd

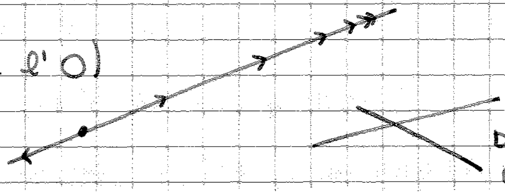
$\{\bar{0}\}$ E' SEMPRE UNO SPAZIO VETTORIALE, OLTRE CHE UN SOTTOSPAZIO

SOTTOSPAZIO NULLO O "BANALE"

||

↓ segue una successiva ricerca di sottospazi di crescenti dimensioni

RETTA (rette per l'O)



DUE RETTE RISPETTO AL PRODOTTO + CHIUSURA RISPETTO ALLA SOMMA

- non esiste uno spazio vettoriale con un num finito di vettori (a parte quello nullo)
  - L se di ogni vettore non nullo ci sono anche tutti i relativi infiniti multipli...

$S = \{(x, y) \mid 3x - 5y = 0\}$

è un sottospazio?

3) LA COPPIA (0,0) E' SOL

$y = \frac{3}{5}x$ e' una RETTA

① se $(x_1, y_1) \in S$ e $(y_1, y_2) \in S \overset{?}{\Longrightarrow} (x_1, x_2 ; y_1 + y_2) \in S$

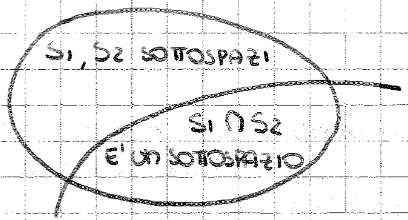
$3x_1 + 5y_1 = 0$ (VERO)

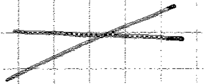
$\rightarrow 3(x_1 + x_2) + 5(y_1 + y_2) = 0$ VERO ✓

$3x_2 + 5y_2 = 0$ (VERO

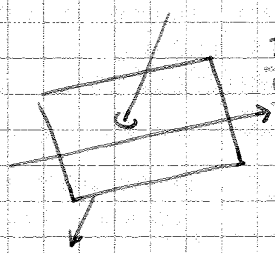
OPERAZIONI TRA INSIEMI → OPERAZIONI TRA SOTTOSPAZI

INTERSEZIONE

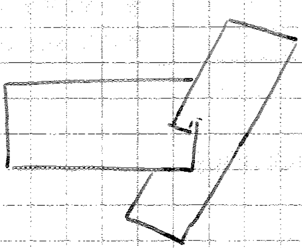




TRA DUE RETTE SI OTTIENE UN PUNTO $(\bar{0})$



TRA RETTA E PIANO SI OTTENGONO UNA RETTA O UN PUNTO



TRA DUE PIANI SI OTTIENE UNA RETTA (O UN PIANO)

DIM. SE S_1, S_2 SOTTOSPAZI, ALLORA $S_1 \cap S_2$ SOTTOSPAZIO

1) $\bar{0} \in S_1 \cap S_2$, CIOÉ $0 \in S_1$ E $0 \in S_2$ (VERO, PER DEF. DI SOTTOSPAZI

2) $\bar{u} \in S_1 \cap S_2$, $\bar{v} \in S_1 \cap S_2 \xrightarrow{?} \bar{u}+\bar{v} \in S_1 \cap S_2$

CIOÉ $\bar{v} \in S_1$ $v \in S_2$ $\Rightarrow$ $\bar{u}+\bar{v} \in S_1$, $\bar{u}+\bar{v} \in S_2$
$\bar{u} \in S_1$ $u \in S_2$

si dim perché, essendo S_1, S_2 sottospazi, sono chiusi rispetto alla somma

3) $k \in \mathbb{K}$, $u \in S_1 \cap S_2 \xrightarrow{?} k\bar{u} \in S_1 \cap S_2$

DATI DUE SPAZI VETTORIALI, IL PIÙ GRANDE SOTTOSPAZIO CONTENUTO IN ENTRAMBI E' LA LORO INTERSEZIONE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 310

SOMMA $(S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3)$ = ESISTONO, E SONO UNICI

$W = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$ SIGNIFICA CHE $\forall\, \bar{w} \in W \; \overline{\exists!}\; s_1, s_2, s_3$

$\parallel$ per cui risulta $\bar{w} = s_1 + s_2 + s_3$

RICERCA DI UN CRITERIO PER STABILIRE SE LA SOMMA $S_1 + S_2 + \dots S_n$
E' O MENO SOMMA DIRETTA:

verificare che ogni vettore si possa scrivere come (...)

$\downarrow$
deve essere vero, quindi, anche per il vettore nullo

la somma è diretta se e solo se il vettore nullo si può scrivere in modo unico, come somma di un vettore di S_1 più un vettore di $S_2 \dots S_n$: nel caso del vettore nullo, come somma di zeri.

$\bar{0} + \bar{0} + \bar{0} \dots + \bar{0}$ SI DIMOSTRA CHE SE IL VETTORE NULLO HA DUE SCRITTURE, ALLORA ESSE COINCIDONO

DI CONSEGUENZA $(s_1 + s_2 + \dots s_n) - (\bar{s}_1' + \bar{s}_2' + \dots \bar{s}_n') = \bar{0}$

togliendo le parentesi ed associando si ottiene che

$$\underbrace{(\bar{s}_1 - \bar{s}_1')}_{0} + \underbrace{(\bar{s}_2 - \bar{s}_2')}_{0} + \dots \underbrace{(\bar{s}_n + \bar{s}_n')}_{0} = \bar{0}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 310

MATRICI

MATRICE DI ELEMENTI DI $\mathbb{K}$ $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$A_{\underset{\downarrow}{2},\underset{\rightarrow}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \pi & \frac{3}{4} & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

INDICI DI POSIZIONE

$$\Rightarrow \left(a_{ij} \right)_{\substack{i = 1,2 \\ j = 1,2,3}}$$

$$A_{n,m} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij} \right)_{\substack{i = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots m}}$$

▨ SOMMA DI MATRICI: $A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix} \overset{}{\underset{\text{def}}{=}}$$

IN GENERALE $A + B = \left\{ \left(a_{ij} \right) + \left(b_{ij} \right) \right\} = \left\{ R_{ij} \right\}$

- VALE LA PROPRIETA' COMMUTATIVA
- VALE LA PROPRIETA' ASSOCIATIVA
- ESISTE L'OPPOSTO $a_{ij} \Rightarrow -a_{ij}$
- ESISTE L'ELEMENTO NEUTRO (matrice con tutti 0)

$\Downarrow$

L'INSIEME DELLE MATRICI E' UN GRUPPO COMMUTATIVO

- $R(A_{ij}) = \left(R a_{ij} \cdots \right)$

SONO SODDISFATTE LE PROPRIETA', RISPETTO ALLA SOMMA

$\mathbb{R}^6 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON LE MATRI

$\Vert$

le proprietà di uno valgono per l'altro?

- NON commutativo
- ASSOCIATIVO $A(BC) = (AB)C$

i vettori riga della matrice prodotto nascono dai vettori delle matrici di partenza

$$C_{2,2} = \begin{pmatrix} \boxed{c_{11} \quad c_{12}} \\ c_{21} \quad c_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{}$$

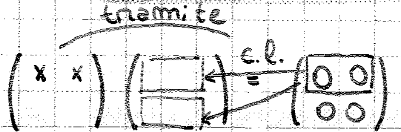
RIGA I°: COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI ~~RIGA~~ COLONNA DI B, USANDO COME COEFFICIENTI GLI ELEMENTI DELLA MATRICE A

$$(c_{11}, c_{12}) = a_{11}(b_{11}, b_{12}) + a_{12}(b_{21}, b_{22}) + a_{13}(b_{31}, b_{32})$$

e dalla combinazione lineare di coppie si ottiene coppia:

$$(\underbrace{a_{11}, b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31}}_{c_{1,1}}) ; (\underbrace{a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32}}_{c_{1,2}})$$

Esempio : MATRICI NON NULLE, PRODOTTO = 0 zerodivisori



$\begin{pmatrix}0&1\\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ 0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ la prima riga è così garantita nulla

$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ "1" inteso come generico, sostituibile da qualsiasi numero

SE $A \cdot B = 0$ con $A, B \neq 0$ A e B sono "DIVISORI DI 0"

$\Downarrow$

SEGUE CHE A E B NON SONO INVERTIBILI

dim. PER ASSURDO, SIA A INVERTIBILE.

$X A = I$

$(X A) B = IB$

$X \cdot 0 = B \rightarrow B = 0$ contro le ipotesi : A e B non nulli;

⑤ PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOMMA

$A(B+C) = AB + AC$

$B(C+A) = BC + AB$ $\nmid$ da dim

// ALGEBRA DELLE MATRICI

(le prop. sono simili a quelle di somma e prodotto di numeri, seppur con qualche eccezione)

$A_{mn} \quad B_{np} \quad = C_{mp}$

$({}^t C)_{pm}$

$$\underbrace{({}^t A_{mn})\cdot({}^t B_{pn})}_{\text{non ha generalmente senso}} \text{ no, ma } \underbrace{({}^t B_{pn})({}^t A_{mn})}_{\text{sì}} = ({}^t C_{pm})$$

QUINDI LA TRASPOSTA DEL PRODOTTO E' IL PRODOTTO DELLE TRASPOSTE INVERTITE DI ORDINE.

$A\cdot B = C \qquad {}^tC = {}^tB\,{}^tA$

tornando a $A_{23}\,X_{32} = I_{22}$?

$Y_{32}A_{23} = I_{33}$?

${}^t(Y_{32}A_{23}) = {}^t(I_{33})$

UNA MATRICE E' INVERTIBILE A SX SE LA SUA TRASPOSTA E' INVERTIBILE A DX

${}^tA_{23}\;{}^tY_{32} = {}^tI_{33}$

DIM. IPOTESI: VALGONO 1) E 2)

TESI: VALE (*)

si sa che $a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots a_{m-1}\bar{v}_{m-1} + a_m\bar{v}_m = 0$

└ a_m nullo, DIM.

SIA $a_m \neq 0$. SI MOSTRA CHE IN TAL CASO NON SAREBBE VERA 2)

DIRE CHE $a_m \neq 0$, POICHÉ $\in \mathbb{K}$ CAMPO, VALE A DIRE CHE AMMETTE L'INVERSO

$$a_m\bar{v}_m = -(a_1\bar{v}_1 + \dots a_{m-1}\bar{v}_{m-1})$$

$$v_m = a_m^{-1}(-a_1\bar{v}_1 + \dots - a_{m-1}\bar{v}_{m-1}) =$$

$$= -(a_m^{-1}a_1)v_1 + \dots -(a_m^{-1}a_{m-1})\bar{v}_{m-1}$$

MA PER LA 2), NESSUN VETTORE DOVREBBE ESSERE COMBINAZIONE LINEARE DEI PRECEDENTI.

DEVE QUINDI ESSERE $a_m = 0$

└ a_{m-1} nullo
└ ... a_2 nullo } dim analoga per i casi successivi

$$a_1 v_1 + \cancel{a_2 v_2} + \dots \cancel{a_{m-1} v_{m-1}} + \cancel{a_m v_m} = 0$$

|

NEGLI SPAZI VETTORIALI VALE LA LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO.

POICHÉ $a_1 v_1 = 0$, E POICHÉ PER LA 1), $v_1 \neq \bar{0}$, ALLORA $a_1 = 0$

USO DELLA BASE B PER IDENTIFICARE V con $\mathbb{K}^n$

$(V, +, \cdot)$ $\qquad$ $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$

$$\underbrace{\bar{v} = x_1\bar{b}_1 + x_2\bar{b}_2 + \dots x_n\bar{b}_n}_{\text{E' UNA SCRITTURA UNICA}} \longrightarrow (x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$$

$\Downarrow$

E' UNA FUNZIONE

E' SURIETTIVA

E' INIETTIVA

$\Downarrow$

$\Longleftrightarrow$

CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

AL VETTORE V SI ASSOCIANO LE SUE COMPONENTI RISPETTO ALLA BASE B

$\bar{v} = x_1\bar{b}_1 + \dots x_n\bar{b}_n$

$\bar{u} = y_1\bar{b}_1 + \dots y_n\bar{b}_n$

$+$ ———

si può scrivere così grazie alla validità delle 8 proprietà nello spazio vettoriale V

① $\bar{u} + \bar{v} = (x_1 + y_1)b_1 + \dots (x_n + y_n)b_n$

$\longleftrightarrow$

$(x_1 \dots x_n)$

$(y_1 \dots y_n)$

$+$ ———

$(x_1 + y_1, \ x_2 + y_2, \ \dots \ x_n + y_n)$

② $a \in \mathbb{K}$ $\quad a\bar{v} = a(x_1\bar{b}_1 + \dots x_n b_n) =$

$= a x_1 \bar{b}_1 + \dots a x_n b_n$

$\longleftrightarrow$

$a\bar{v} = (a x_1, \dots a x_n)$

↖ ISOMORFISMO ↗ ("buon comportamento rispetto alla somma)

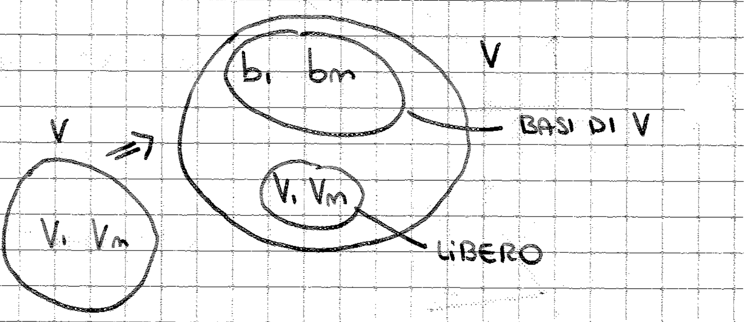
LO SPAZIO DEI VETTORI APPLICATI AD UN PUNTO E' ISOMORFO RISPETTO AD $\mathbb{R}^3$

DATO V, CONTENENTE V_1 E V_H
LINEARMENTE INDIPENDENTI

ESSI GENERANO UN PIANO

RIESCO A COMPLETARE IL LORO
INSIEME AD UNA BASE ?

NELL'ESEMPIO SI AGGIUNGE UN
VETTORE NON COMPLANARE



$V_1 \dots V_h \, , \; b_1 \dots b_n$ E' CERTAMENTE
UN SISTEMA DI
GENERATORI NON
LIBERO

SI ESTRAE UNA BASE CON IL
"metodo degli scarti successivi"

$V_1 \dots V_h$ SI TENGONO TUTTE (L'INSIEME E' LIBERO)

DALLE b QUALCOSA SI TOGLIE

QUELLO CHE RESTA E' LA BASE

SI HA UNA BASE CHE COSÌ CONTIENE
UN CERTO INSIEME LIBERO

Ⓐ

es. $\underset{\text{vettori}}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}}}$ pensato come spazio vettoriale su $\underset{\text{numeri}}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}}}$

$r \neq 0$, ar con $a \in \mathbb{R}$ è sufficiente?

sia $y \in \mathbb{R}$ un qualsiasi numero reale. $\exists\, a \mid y = ar$?

$$a = yr^{-1}$$

UN QUALUNQUE NUMERO REALE NON NULLO E' UNA BASE DELLO SPAZIO
VETTORIALE $\mathbb{R}$

1 E' LA BASE CANONICA DEI REALI

Ⓑ

es. $\underset{\bar{v} = a + ib}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{C}}}$ pensato come spazio vettoriale su se stesso, $\underset{\text{numeri}}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{C}}}$

come trovare una base di $\mathbb{C}$? $z = a + ib \neq 0$ nei $\mathbb{R}$ è sufficiente,
basta l'invertibilità

come sopra, anche $\mathbb{C}$ ha come base un suo
qualsiasi elemento non nullo

perché sono CAMPI 1 BASE CANONICA DI $\mathbb{C}$

TEOREMA FONDAMENTALE O DELLA DIMENSIONE

SIA V UNO SPAZIO FINITAMENTE GENERATO. TUTTE LE SUE BASI HANNO LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI.

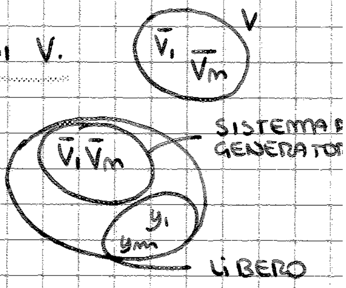
DEF. DIMENSIONE DI V E' IL NUMERO DI ELEMENTI DI UNA SUA QUALUNQUE BASE

LEMMA SIA $\bar{V}_1 \dots \bar{V}_m$ UN SISTEMA DI GENERATORI DI V.

SIA $\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n$ UN INSIEME LIBERO IN V.

ALLORA $n \le m$

IL NUMERO DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI NON PUO' MAI SUPERARE IL NUM. DI ELEMENTI DEL SISTEMA DI GENERATORI



COROLLARIO (da qui, la dim del teorema)

DUE BASI DI V HANNO LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI.

DIM.

$B = (b_1 \dots b_m)$

$B_1 = (b'_1 \dots b'_m)$ sono basi, cioè sistemi liberi ed insiemi di generatori

preso B come sistema di generatori e B_1 come sistema libero.

$h \le m$, secondo il lemma

(scambiando B e B_1 di ruolo, $m \ge h$)

quindi $h = m$

TEOREMA SIA V DI DIMENSIONE n. SONO FATTI EQUIVALENTI:

① I VETTORI $\bar{V}_1 \dots \bar{V}_m$ SONO BASE DI V

② " " " LINEARMENTE INDIPENDENTI

③ " UN SISTEMA DI GENERATORI

per verificare se $V_1 \dots V_m$ sono una base, basta una tra le tre.

DIM. 1: IPOTESI - $\bar{V}_1 \dots \bar{V}_m$ SISTEMA DI GENERATORI

TESI - $\bar{V}_1 \dots \bar{V}_m$ LIBERO

da $\bar{V}_1 \dots \bar{V}_m$ posso estrarne la base (cancellando qualche vettore), ma non posso cancellarne perché otterrei una base con meno di n vettori

DIM. 2: IPOTESI - $\bar{V}_1 \dots \bar{V}_m$ SISTEMA DI GENERATORI

TESI - $\bar{V}_1 \dots \bar{V}_m$ E' UNA BASE

se $\bar{V}_1 \dots \bar{V}_m$ E' LIBERO POSSO COMPLETARLO AD UNA BASE AGGIUNGENDO QUALCHE ELEMENTO. MA NON E' QUI POSSIBILE AGGIUNGERNE.

n.b. $+ \neq \oplus$
↓

- $S_1 + S_2$. NOTE LE DIM. DI S_1 ED S_2, COSA SI PUÒ DIRE DELLA DIM. DI $S_1 + S_2$?

S_1 $B_1 = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_m)$

S_2 $B_2 = (\bar{b}'_1 \dots \bar{b}'_m)$

$S_1 + S_2$ ha come sistema di generatori $B_1 \cup B_2$

$\bar{S} \in S_1 + S_2$, $\bar{S} = (\bar{S}_1 + \bar{S}_2) = (a_1 \bar{b}_1 + a_h \bar{b}_k) + (e_1 \bar{b}'_1 + e_h \bar{b}'_k)$

$\underline{\dim (S_1 + S_2) \leq h + K}$

SE LA SOMMA E' DIRETTA, ALLORA VALE L'UGUAGLIANZA $\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$

cioè $(b_1 \dots b_h, b'_1 \dots b'_k)$ è libero.

$$a_1 b_1 + a_h b_k + e_1 \bar{b}'_1 + e_k \bar{b}'_k \overset{?}{=} \bar{0}$$

$$(\qquad) + (\qquad) = \bar{0}$$

combinazione lineare delle basi quindi gli elementi di $\bar{S}_1 = 0$, $\bar{S}_2 = 0$

perché la somma è diretta.

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$

$(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ $\qquad \mathcal{L}(V_1, V_2, V_3)$

$V_1 = (1, 1, -1, 2) \qquad V_2 = (0, 1, 5, 7) \qquad V_3 = (1, 0, -6, -5)$

$\Downarrow$

si associa ai vettori la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}$

qual è la dimensione dello spazio generato da righe di tale matric

$\Downarrow$

- COSTRUZIONE DI UNA MATRICE CON RIGHE LINEARMENTE INDIPENDENTI:

$$A_{45} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \overset{\neq 0}{3} & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \xrightarrow{} \text{gli altri elem. della riga non hanno peso} = \begin{pmatrix} x & 3 & x & x & x \\ \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} =$$

0 un elemento non nullo e sotto tutti 0

$$= \begin{pmatrix} x & 3 & x & x & x \\ x & 0 & x & x & -7 \\ \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 & x & x & x \\ x & 0 & x & x & -7 \\ x & 0 & 5/2 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix}$$

ha righe come INSIEME LIBERO

$$a_1\overline{R_1} + a_2\overline{R_2} + a_3\overline{R_3} + a_4\overline{R_4} = (0, 0, 0, 0)$$

$$\hookrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

$$a_1(x\ 3\ x\ x\ x) + a_2(x\ 0\ x\ x\ -7) + a_3(x\ 0\ 5/2\ x\ 0) + a_4(1\ 0\ 0\ x\ 0)$$

2° componente : $3 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 = 3 \cdot a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

...

5° componente : $-7a_2 + 0a_3 + 0a_4 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

3° componente: $a_3 = 0$

1° : $a_4 = 0$ *per la legge di annullamento del prodotto*

DIM. 04/04/2013

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \dots \\ R_m \end{matrix}$$

$$\dim \mathcal{L}(\overbrace{R_1 \dots R_m}^{R \text{ DIMENSIONE SPAZIO RIGHE}}) \leq \mathbb{K}^n$$

$$\dim \mathcal{L}(C_1 \dots C_n) \leq \mathbb{K}^m$$

SIANO $\overline{V_1}, \overline{V_2} \dots \overline{V_R}$ UNA BASE DELLO SPAZIO DELLE RIGHE.

SARANNO ANCH'ESSI VETTORI O ENNUPLE

$\overline{V_1} = (C_{11}, C_{12} \dots C_{1n})$
$\overline{V_2} = (C_{21} \dots C_{2n})$
$\overline{V_3}$ $(C_{R1} \dots C_{Rn})$

MATRICE CCHE HA COME BASE I VETTORI DELLO SPAZIO

se lo spazio delle righe ha dimensione R, si può prendere una matrice di base con R vettori

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{1n} \\ C_{21} & C_{2n} \\ \dots & \\ C_{R,1} & C_{Rn} \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}}$$

SI OTTIENE DA C MOLTIPLICATA A SX PER UNA MATRICE OPPORTUNA

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & & & p_{2R} \\ p_{m1} & \dots & & p_{mR} \end{pmatrix}$$

→ COEFF DA CUI SI OTTIENE LA 1 RIGA DI R

$$\overset{P}{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & & & p_{2n} \\ \dots & & & \\ p_{m1} & & & p_{mn} \end{pmatrix}} \overset{C}{\begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & \dots & C_{2n} \\ C_{R1} & & C_{Rn} \end{pmatrix}}$$

lo spazio delle righe di A è c.l. di $p_1, p_2 \dots p_R$

FIN QUI SI E' SOLO USATO IL FATTO CHE $V_1, V_2 \dots V_R$ E' UN SISTEMA DI GENERATORI

RIASSUMENDO, $\boxed{A = PC}$ DA CUI, TRASPONENDO, $\boxed{A^t = P^t C^t}$

per cui le righe di A^t sono colonne di A,

QUINDI C.L. DELLE RIGHE DI C CON CERTI COEFFICIENTI DI P

$$\text{OGNI } \underbrace{\text{RIGA DI } {}^tA}_{\text{COLONNE DI } {}^tA} \text{ E' CL DELLE } \underbrace{\text{RIGHE DI } {}^tP}_{\text{COLONNE DI } P}$$

LE COLONNE DI P SONO UN SISTEMA DI GENERATORI DELLO SPAZIO DELLE COLONNE DI A.

LE COLONNE DI P SONO $R = \dim R$. DA OGNI SISTEMA DI GENERATORI SI PUÒ ESTRARRE UNA BASE; QUINDI

$\dim C \leq R$ CVD(1)

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad R_3 \xrightarrow{\text{sost}} R_3 - 2R_1 \qquad \longrightarrow \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

volendola ridurre per righe

CON CHE PRODOTTO SI SAREBBE POTUTA OTTENERE LO STESSA MATRICE ?

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} = A'$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} (A) = A'$$ Verif.

TEOREMA FONDAMENTALE : tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi

LEMMA : SIA $\dim V = m$. ALLORA OGNI INSIEME LIBERO DI V NON PUÒ AVERE PIÙ DI n ELEMENTI

(non ancora dimostrato)

DATA UNA BASE DI n ELEMENTI, SI CONSIDERA L'INSIEME LIBERO $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \dots \bar{y}_m$ (APPARTENENTI A V)

$$? \; m \leq n$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= a_{11}\bar{b}_1 + \dots a_{1n}\bar{b}_n \\ &\dots \\ \bar{y}_m &= a_{m1}\bar{b}_1 + \dots a_{m,n}\bar{b}_n \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad A \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

SI RIDUCE LA MATRICE PER RIGHE. UNA RIDOTTA NON PUÒ AVERE RIGHE NULLE
ALLORA IL NUMERO DELLE RIGHE NON PUÒ SUPERARE IL NUMERO DELLE COLONNE E QUINDI

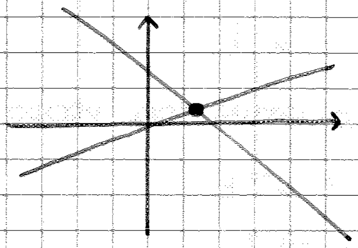
$$m \leq n \qquad \text{CVD}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 = b_1 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 = b_2 \end{cases}$$

LE SOL SONO SEMPRE ELEMENTI DI $\mathbb{K}^2$

(NEL CASO IN CUI I COEFF. NON SIANO A COPPIE NULLI)

CIASCUNA EQ. HA COME SOLUZIONI I PUNTI DI UNA RETTA (INTERPRETAZIO
GEOMETRICA



SE LE RETTE SI INCONTRANO IN UN PUNTO : 1 SOL

RETTE COINCIDENTI : INFINITE SOL, ∞^1
UNA DELLE DUE EQ. E' INUTILE

RETTE // : NO SOL

PRESE n INCOGNITE:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA E' UNA ENNUPLA $S = (s_1, s_2, \dots s_n)$ TALE CHE SE SOSTITUISCO x_1 CON s_1, LE UGUAGLIANZE DIVENTANO VERIFICATE

IL SISTEMA LINEARE GENERALE PUÒ ESSERE RICONDOTTO AD UNA MATRICE:

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

es. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$$(A, B) = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right.}_{A}\left.\begin{array}{|c} 1 \\ 0 \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad A_{2,3} \cdot X_{3,1} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - 5 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,3} \cdot X_{3,1} = B_{2,1} \qquad \underset{m,n}{A} \ \underset{mp}{X} = \underset{m\,p}{B}$$

matrice colonna
↓

RISOLVERE IL SISTEMA E' EQUIVALENTE A RISOLVERE $AX = B$ IN X
↑
matrice di coefficienti

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

① IL SISTEMA $AX = B$ E' RISOLUBILE SE E SOLO SE $\overset{\text{RANGO}}{\rho}(A) = \rho(A, B)$

IL RANGO E' LA DIM DELLO SPAZI
GENERATO DALLE RIGHE O DALLE
COLONNE DELLA MATRICE (COLONN

si dim. che $\rho(A) \leq \rho(A,B)$

IL SISTEMA E' RISOLUBILE SE E SOLO SE IL VETTORE B SI PUÒ SCRIVERE COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI $a_1 \dots a_n$

$B \in \mathcal{L}(A_1 \dots A_n)$

QUESTO EQUIVALE A DIRE CHE $\mathcal{L}(A_1, \dots A_n) = \mathcal{L}(A_1 \dots A_n, B)$

E CIÒ AVVIENE SE E SOLO SE I DUE SPAZI HANNO LA STESSA DIMENSIONE
CIOE' $\rho(A) = \rho(A,B)$

↳ da quanti parametri dipende la sol generale?

② SIA $\rho(A) = \rho(A,B)$.

IL NUMERO DI PARAMETRI ~~DIPENDE~~ E' $\underset{\text{NUM. DI INCOGNITE}}{m} - \underset{\text{RANGO}}{\rho}$

esempio (precedente):

$$(A,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2, & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

A E B HANNO STESSO RANGO:

$\rho(A) = 2$, PER LE RIGHE, E $\underbrace{\rho(A,B) = 2}_{\geq \rho(A)}$

SEMPRE PER LO SPAZIO
DELLE RIGHE

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{A_1}{\underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}}} x_1 + \underset{A_2}{\underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}}} x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{A_3}{\underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}}} x_3$$

FISSATO X_3, X_1 E X_2 SI TROVANO in modo unico, $\forall X_3$
X_1 E X_2 COME FUNZIONE DI X_3

$X_3 \dots \quad (X_1(X_3), \; X_2(X_3), \; X_3)$

SISTEMA CON MATRICE DEI COEFFICIENTI RIDOTTA PER RIGHE:

(SISTEMA RIDOTTO)

→ NO RIGHE NULLE (SISTEMA GIA' IMPOSSIBILE SE $b \neq 0$, INUTILE EQ SE $b = 0$)

esempio

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x & 1 & x & x & x \\ x & 0 & x & 2 & x \\ x & 0 & -1 & 0 & x \end{array}\right)$$

→ X_3 SOLO NELLA SECONDA E PRIMA EQ

↓ IMPLICA CHE X_2 COMPAIA SOLO NELLA PRIMA EQ

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ x & 1 & x & x & x \\ x & 0 & x & 2 & x \\ x & 0 & -1 & 0 & x \end{array}\right)$$

↓ ↓ 2) X_4

1) X_3 se c'é X_1, in f DI X_1. O COME NUMERO

RISOLUZIONE PER SOSTITUZIONE (A SALIRE ↑)

compare un'incognita che non c'era notto: Di ricava in funzione delle precedenti

↓

ALLA FINE RESTA UNA SOLA INCOGNITA

$\underset{m,n}{AX} = B$ $\qquad \underset{m,m}{P}$

$P(AX) = PB$

$(PA)X = PB$

SIA S UNA SOL DEL 1° SISTEMA, CIOE' UNA ENNUPLA PER CUI VALGA L'EGUAGLIANZA

$AS = B$

$P(AS) = PB$ S E' QUINDI SOL ANCHE DELLA SECONDA EQ :

OGNI SOL DEL PRIMO SISTEMA E' ANCHE SOL DEL SECONDO

(ma non è detto che le sol del secondo debbano essere sol del primo)

SI SUPPONE P INVERTIBILE

PASSO DAL SECONDO SISTEMA AL PRIMO MOLTIPLICANDO PER P^{-1}

$(PA)X = PB$ $\quad P^{-1}(PA)X = P^{-1}(PB)$ $\quad \underbrace{(P^{-1}P)}_{I}AX = \underbrace{B}_{IB}$

ALLORA TUTTE LE SOL DEL SECONDO SONO SOL DEL PRIMO.

$\forall$ $AX = B$, $\exists$ una matrice invertibile tale che $A^{-1} = PA$ sia ridotta

$\underbrace{(PA)}_{\text{RIDOTTA}} X = PB$

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{A} \downarrow$ $\qquad b_m \downarrow PB$

$\downarrow$

$1A$ $\longrightarrow$ si risolve l'equivalente

11/04/2013

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

$$AX = 0 \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- L'INSIEME DELLE SOL $S = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ E' UN INSIEME DI ENNUPLE $\subseteq \mathbb{K}^n$

- C'E' SEMPRE ALMENO UNA SOLUZIONE, $\bar{0} \in S$
  - └ ce ne sono altre?, e se ce ne sono, quante?

TEOREMA S E' UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{K}^n$

DIM: 1) $\bar{0} \in S$ SV

2) CHIUSURA RISPETTO ALLA SOMMA

si scelgono due soluzioni $\bar{y}_1$ ed $\bar{y}_2$: allora $Ay_1 = 0$ ed $Ay_2 =$

Ne consegue che $\bar{y}_1 + \bar{y}_2$ è soluzione ?

$$A(\bar{y}^1 + \bar{y}^2) \overset{?}{=} 0 \qquad A\bar{y}_1 + A\bar{y}_2 = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

è distributivo rispetto alla somma

3) CHIUSURA RISPETTO AL PRODOTTO

$$y \text{ soluzione} \xrightarrow{?} \lambda y \text{ soluzione}$$

$$Ay = 0 \qquad A(\lambda y) = 0 \qquad A(\lambda y) = \lambda(Ay) = \lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

N.B. le soluzioni di un sistema lineare non omogeneo non sono spazi vettoriali:

$AX = B,\ B \neq \bar{0} \rightarrow \bar{0}$ non è soluzione

SI SA CHE LA DIM E' n-p, E COME FABBRICARE UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SUE SOLUZIONI

ESEMPIO:

SISTEMA LINEARE OMOGENEO DI 2 EQ. (NON PROPORZIONALI) E 4 INCOGNITE. GIA' RIDOTTA PER RIGHE;

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

SI PUO' SCRIVERE ESPLICITAMENTE IL SISTEMA:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = \\ 2x_1 + x_2 \qquad - x_4 = \end{cases}$$

TROVARE UNA BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI

SI RISOLVE IL SISTEMA

$$x_4 = x_2 + 2x_1$$

$$x_3 = \frac{-x_1 + x_2 - 3x_4}{2} = \frac{-x_1 + x_2 - 3x_2 - 6x_1}{2} =$$

$$= -\frac{7}{2}x_1 - x_2$$

$$\bar{s} = \left(x_1,\ x_2,\ -\frac{7}{2}x_1 - x_2,\ 2x_1 + x_2\right)$$

DA CUI SI PUO' RICAVARE UNA BASE

$$\bar{s}_1 = \left(1,\ 0,\ -\frac{7}{2},\ 2\right)$$

$$\bar{s}_2 = (0,\ 1,\ -1,\ 0)$$

UNA BASE DELLO SPAZIO DELLE SOL E' COSTITUITA DA $\bar{s}_1$ ED $\bar{s}_2$: TUTTE LE ALTRE SOL SI OTTENGONO COME C.L. DI $\bar{s}_1$ ED $\bar{s}_2$

$$\underset{(m,n)}{A} \; X = \underset{(m,p)}{B} \swarrow$$ non è più 1, solo MATRICE COLONNA

$\downarrow$

ESISTE UNA X TALE CHE B POSSA ESISTERE A SUA VOLTA?

$X(n,p)$

ES. $A_{2,3} \, X_{3,2} = B_{2,2}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} X_{11}, & X_{12} \\ X_{21}, & X_{22} \\ X_{31}, & X_{32} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow X_1 \\ \rightarrow X_2 \\ \rightarrow X_3 \end{matrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}X_{11} + a_{12}X_{21} + a_{13}X_{31}) & (\underset{11}{a}X_{12} + a_{12}X_{22} + \underset{1,3}{a}X_{32}) \\ (a_{21}X_{11} + a_{22}X_{21} + a_{23}X_{31}) & (a_{21}X_{12} + a_{22}X_{22} + a_{23}X_{32}) \end{pmatrix}$$

SISTEMA DI 4 EQ. LINEARI IN 6 INCOGNITE

$$= \begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = (b_{11} \; b_{12}) \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = (b_{21} \; b_{22}) \end{cases}$$

RISOLVERE UN SISTEMA LINEARE AD INCOGNITE E TERMINI NOTI VETTORIALI

$\llcorner$ RIDUZIONE

$\cancel{EQ.1 = 0}$ $\lambda EQ_1 + \mu E_2 = 0$

$EQ.2 = 0$

HA LE STESSE SOLUZIONI

$(\lambda = 0)$

ESEMPIO: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + 2X_3 = (1,3) \\ X_1 + 2X_2 + X_3 = (1,-1) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$ matrice completa

SI RIDUCE PER RIGHE:

$R_2 \rightarrow R_2 - R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} X_1 - X_2 + 2X_3 = (1,3) \\ -3X_2 - X_3 = (0,4) \end{cases}$$

SI RISOLVE IL SISTEMA RIDOTTO, A SALIRE:

$$X_3 = 3X_2 - (0,4) = (3X_{21}, \; 3X_{22} - 4)$$

$$X_1 = X_2 - 2X_3 + (1,3) =$$

DETERMINANTI

= MATRICI QUADRATE
(PER LE RETTANGOLARE NON SI
DEFINISCE)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A \in \mathbb{K}^{2,2} \longrightarrow \det A \in \mathbb{K}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

HA COME SOL L'INT. DI DUE RETTE.
COME FARE LA MATRICE PERCHE' LE DUE RETTE
NON SIANO PARALLELE - CIOE' COMUNQUE SI
SCELGANO b_1 E b_2 ?

CONDIZIONE DI RISOLUBILITA' DEL SISTEMA $\forall B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

PER IL TEOREMA DI ROUCHE-CAPELLI, $\rho(A) = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$ supponendo $a_{11} \neq 0$

↓ RIDUZIONE PER RIGHE

$$R_2 \rightarrow R_2 - \frac{R_1}{a_{11}} a_{21} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} & \cdots \end{array}\right)$$

$$a_{22} - \frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}} \neq 0$$

QUINDI $\underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{\text{DETERMINANTE DI A}} \neq 0$

SE $\det(A) \neq 0$ LA MATRICE E' SEMPRE
RISOLUBILE CON UNA E UNA SOLA SOL.
E IL RANGO E' SEMPRE 2.

$$\overline{V_1} = a_{11}\overline{i} + a_{12}\overline{j} \qquad \overline{V_2} = a_{21}\overline{i} + a_{22}\overline{j}$$

AREA DEL PARALLELOGRAMMO
DI LATI V_1 E V_2 ?

$$\overline{V_1} \wedge \overline{V_2} = a_{11}a_{22}\overline{K} - a_{12}a_{21}\overline{K} =$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})K = K \det A$$

IL VA. DEL DETERMINANTE E'
L'AREA DEL PARALLELOGRAMMA

ⓒ

$$f : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = 0 \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = 0$$

SI SUPPONE CHE NON
CI SIANO RIGHE NULLE

E SI SUPPONE $a_{11} \neq 0$: f OPERA NELLO STESSO MODO SU $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \frac{\det A}{a_{11}} \end{pmatrix}$

$$R_2 \to R_2 - \frac{R_1}{a_{11}} a_{12}$$

E POI $R_1 \to R_1 - \frac{a_{11} a_{12}}{\det A} R_2$ $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \frac{\det A}{a_{11}} \end{pmatrix}$

la funzione f, gode delle tre proprietà, manda la sua matrice nello stesso luogo in cui manda questa

$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$ ha come IMMAGINE $\underbrace{a_{11} \frac{\det A}{a_{11}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \det A$

DA UNA MATRICE QUALUNQUE SE NE OTTIENE UNA TRIANGOLARE, E IL DET E' PRODOTTO DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE.

||

E' GENERALIZZATO A QUALSIASI MATRICE QUADRATA

||

SE UNA FUNZIONE OPERA SU UNA MATRICE $n \times n$ E GODE DELLE 3 PROPRIETA', QUESTO E' IL MODO DI OTTENERLA.

REGOLA O TEOREMA DI LAPLACE

$$A_{3,3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \det A = a_{11}\bar{A}_{11} + a_{12}\bar{A}_{12} + a_{13}\bar{A}_{13}$$

VALIDO PER OGNI RIGA DI A

$$A_{m,m} = \begin{pmatrix} & \dots & \end{pmatrix} \qquad \det A_{m,m} = \sum_{K=1}^{n} a_{iK} \cdot \bar{A}_{iK}, \quad \text{VERO } \forall \underbrace{i}_{\text{RIGA}} = 1, \dots n$$

SECONDO TEOREMA DI LAPLACE

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$$

generalizzabile, ed interpretabile come determinante di una opportuna matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

potrebbero esserci altri numeri: i complementi algebrici sono gli stessi

⇓

R_2 sostituibile con R_1 : SE $R_1 = R_2$, $\det A = 0$ (proprietà)

CALCOLO DELL' INVERSA CON I DETERMINANTI:

TEOREMA $\underbrace{A \text{ INVERTIBILE}}_{1} \iff \underbrace{\det A \neq 0}_{2}$ (RANGO MASSIMO)

DIM. 1 → 2

per la def. di "INVERTIBILE", $\exists X \mid AX = I$

poiché $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, allora $\det(AX) = \underbrace{\det A}_{\neq 0} \det X = 1$

DIM. 2 → 1

$$\det X = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Si deve costruire l'inversa (...?) di $A_{n,n}$, es. $A_{3,3}$:

B è la matrice di COMPLEMENTI ALGEBRICI DI A, TRASPOSTA

$$A_{3,3} \curvearrowright B = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{21} & \bar{A}_{31} \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{32} \\ \bar{A}_{13} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{33} \end{pmatrix}; \qquad AB = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} =$$

$$= (\det A) \cdot I = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot B$$

18/04/2013

$AX = B$ $\downarrow$ $A \in M^{m,m}$, SIMMETRICA

INVERTIBILE

$$\boxed{A^{-1}(AX) = A^{-1}B} \qquad \boxed{X = A^{-1}B}$$

$\longrightarrow$ **REGOLA DI CRAMER**

SI SUPPONE A, SISTEMA LINEARE 3x3,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det A}}$$

$$\boxed{f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2}$$

DIM 2, SI USA LA BASE CANONICA

$$B = (\bar{e}_1 = (1,0),\ \bar{e}_2 = (0,1))$$

$$(x,y) = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 \longrightarrow f(x,y) = f(x\bar{e}_1, y\bar{e}_2) = xf(\bar{e}_1) + yf(\bar{e}_2)$$

PER CONOSCERE L'IMMAGINE DI UN VETTORE QUALUNQUE BASTA CHE SIANO NOTI $\bar{e}_1, \bar{e}_2$

- $f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2)$ $\quad f(\bar{e}_1) = (3,-1)$ ED $f(\bar{e}_2) = (1,1)$

  $f(x,y) = x(3,-1) + y(1,1) = (3x+y, -x+y)$

- $f(\bar{e}_1); f(\bar{e}_2)$ $\quad f(\bar{e}_1) = (a_{11}, a_{21})$ ED $f(\bar{e}_2) = (a_{12}, a_{22})$

  $f(x,y) = x(a_{11}, a_{21}) + y(a_{12}, a_{22}) = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ f(x)}}{f(x)} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{12}y \end{pmatrix} = \underset{\substack{\parallel \\ AX}}{\left(\begin{array}{cc} \overset{f(\bar{e}_1)}{\downarrow} & \overset{f(\bar{e}_2)}{\downarrow} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$f(x) = AX$ E' LINEARE ?

1) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = A(x_1, x_2) \overset{?}{=} f(x_1) + f(x_2) = Af(x_1) + Af(x_2)$$

2) $f(\lambda x) = A(\lambda x)$

$\lambda f(x) = \lambda(Ax)$ $\quad \forall A$, f E' LINEARE

= CIOE' POSSO SCEGLIERE A PIACERE LE IMG DEI VETTORI DI UNA BASE

$V \xrightarrow{f} W$

$\mathcal{L}(V, W)$ = INSIEME DELLE FUNZIONI LINEARI DI V E W

DATE $f : V \longrightarrow W$

$g : V \longrightarrow W$

$\underline{(f+g)(\bar{v})} \overset{DEF}{=} \underline{f(\bar{v})+g(\bar{v})}$ E' LINEARE?

1) $(f+g)(\bar{v}_1+\bar{v}_2) = (f+g)(\bar{v}_1) + (f+g)(\bar{v}_2) = f(\bar{v}_1+\bar{v}_2) + g(\bar{v}_1+\bar{v}_2) =$

$= f(\bar{v}_1) + f(\bar{v}_2) + g(\bar{v}_1) + g(\bar{v}_2)$

2) VERIF. LA CONDIZIONE DEL PRODOTTO ∦

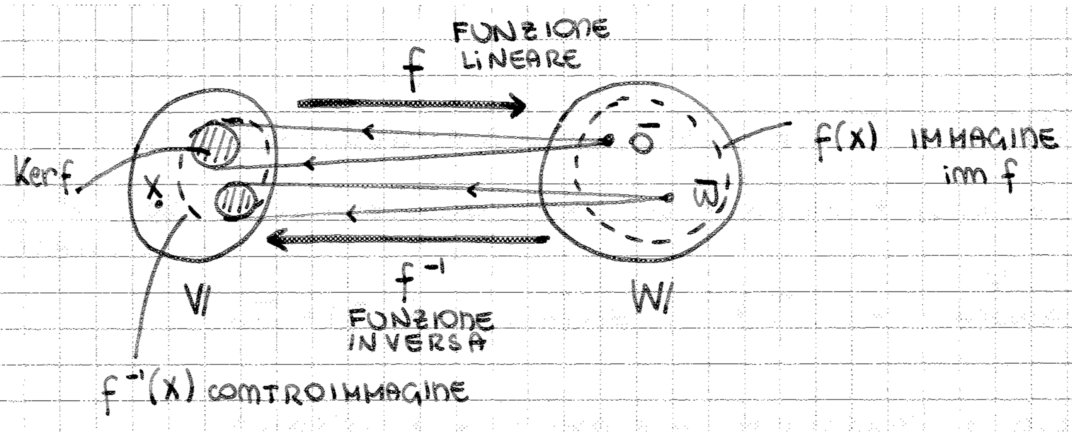
DEFINIZIONE DI PRODOTTO $m \cdot f$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ (λf)?

$\forall \bar{v} \in V$

$\underline{(\lambda f)(\bar{v})} \overset{DEF}{=} \underline{\lambda f(\bar{v})}$

19/04/2013



$$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid (x_1, \dots x_m) \longrightarrow f(x_1) \dots f(x_m)$$

$$\text{imm} f : \{ W \mid (\exists\, x \in V) \mid f(x) = W \}$$

$$f^{-1}(y) = \{ x \in V \mid f(x) = y \}$$

$$\text{Ker} f = \{ \bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \bar{O}_W = f^{-1}(\bar{O}_W) \}$$

TEOREMA: SIA $\bar{V}_0$ UN ELEMENTO FISSATO IN $f^{-1}(\bar{w})$.

ALLORA $\boxed{f^{-1}(W) = \bar{V}_0 + \text{Ker} f}$

DIM.1 $\quad V_0 + \text{Ker} f \subseteq f^{-1}(\bar{w})$

$\forall K \in \text{Ker} f, \quad \bar{V}_0 + \bar{K} \in f^{-1}(\bar{w})$?

$$f(\bar{V}_0 + \bar{K}) = f(\bar{V}_0) + f(\bar{K}) = \bar{w} + \bar{0} = \bar{w}$$

DIM.2 $\quad f^{-1}(w) \subseteq \bar{V}_0 + \text{Ker} f$

SIA $\bar{v} \in f^{-1}(\bar{w}), \quad \bar{v} - \bar{V}_0 \in \text{Ker} f$?

$$f(\bar{v} - \bar{V}_0) = f(\bar{v}) - f(\bar{V}_0) = \bar{w} - \bar{w} = \bar{0}$$

allora è vero che così si ottengono le controimmagini di w per traslazione del nucleo

‖

in una f lineare, basta che il nucleo abbia un solo elemento perché ogni controimmagine abbia un solo elemento

COROLLARIO $\quad f$ INIETTIVA $\Longleftrightarrow$ $\text{Ker} f = \{ \bar{0} \}$

‖

N.B. SOLO SE f E' LINEARE

f^{-1} E' LINEARE ? VERIFICA :

$\forall\ a_1 \dots a_m ,\in \overline{W}_1, \dots \overline{W}_m$

$$\alpha(a_1\overline{W}_1, \dots a_m\overline{W}_m) \overset{?}{=} a_1 f(\overline{W}_1) + \dots a_m f(\overline{W}_m)$$

con un'uguaglianza tra elementi del sistema, da $a=b$, segue l'uguaglianza tra le img $f(a)=f(b)$.
In genere, non è detto che valga il viceversa. NO SE INIETTIVA.

$a = b \iff f(a)=f(b)$ SOLO SE INIETTIVA

$$= \alpha\left[f^{-1}(a_1 W_1 + \dots a_m W_m)\right] = f\left[a_1 f^{-1}(W_1) \dots a_m f^{-1}(W_m)\right]$$

//
applicare f ad una certa c.l.

$$a_1 f(f^{-1}(W_m)) + \dots a_m f(f^{-1}(W_m)) = \dots a_1 W_1 + \dots a_m W_m$$

l'obiettivo è studiare tutte le f lineari che operano tra spazi di dimensione finita

$$V_n \xrightarrow[\varphi]{} W_m$$

PRESE DUE BASI, UNA DI V E UNA DI W :

$B_V(\overline{e}_1 \dots \overline{e}_n)$ $B_W(\overline{f}_1 \dots \overline{f}_m)$

e tutto il futuro procedimento è legato alla scelta di tale coppia di basi

$\overline{V}$ vettore di $V = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \dots x_n\overline{e}_n$ identificabile con la sua ennupla di componenti

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ per comodità si scrive come colonna di vettori

$$\varphi(\overline{v}) = \varphi(x_1\overline{e}_1 + \dots x_n\overline{e}_n) = x_1\varphi(\overline{e}_1) + \dots x_n\varphi(\overline{e}_n)$$

ASSEGNATI $\varphi(\overline{e}_1), \dots \varphi(\overline{e}_n)$ L'IMMAGINE E' OBBLIGATA

$$\varphi(\overline{v}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\varphi(\overline{e}_i)$$

$$\varphi(\overline{e}_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots a_{m1}f_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}\overline{f}_i$$

$$\varphi(\overline{e}_2) = a_{12}f_1 + \dots a_{m2}f_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\overline{f}_i$$

...

$$\varphi(\overline{e}_n) = a_{1n}f_1 + \dots a_{mn}f_m = \sum^{m} a_{in}\overline{f}_i$$

02/05/2013

CAMBIAMENTI DI BASE $V_E \longrightarrow V_F$

DATI V CON UNA SUA BASE $E=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots \bar{e}_m)$

E DATO UN VETTORE GENERICO $\bar{v} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots x_m\bar{e}_m =$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i\bar{e}_i \longrightarrow X=\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots \\ x_m\end{pmatrix}$$

SI PUÒ CAMBIARE BASE, DA E IN F

con $F=(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots \bar{f}_m)$:

$$\bar{f}_1 = p_{11}\bar{e}_1 + p_{21}\bar{e}_2 + \dots p_{m1}\bar{e}_m = \sum_i p_{i1}\bar{e}_i$$

per convenzione è il passaggio da una base all'altra

$$\bar{f}_2 = p_{12}\bar{e}_1 + p_{22}\bar{e}_2 + \dots p_{m2}\bar{e}_m = \sum_i p_{i2}\bar{e}_i$$

...

$$\bar{f}_m = p_{1m}\bar{e}_1 + p_{2m}\bar{e}_2 + \dots p_{mm}\bar{e}_m = \sum_i p_{im}\bar{e}_i$$

quali sono le matrici utili per il cambiamento di base?

$$P=\begin{pmatrix}p_{11} & \cdots & p_{1m}\\ \cdots & & \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm}\end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc}\parallel & & \parallel\\ \bar{f}_1 & & \bar{f}_m\end{array}$$

= LE SUE COLONNE SONO L.I.

= LE SUE RIGHE SONO L.I.

= $\text{rank}(P) = m$

= P E' INVERTIBILE $\leftarrow$ $E \xrightarrow{P} F$, $F \xrightarrow{P^{-1}} E$

$$V_E \xrightarrow{\varphi} V_F$$

l'inverso

$$M_i^{E,F} = P \qquad \varphi(\bar{e}_1) = f_1, \quad \varphi(\bar{e}_2) = f_2$$

$$V_F \xrightarrow{\varphi'} V_E$$

$$M_i^{F,E} = P$$

$$\bar{V} = \sum_i x_i \bar{e}_i = \sum_j y_i f_j =$$

volendo anco esprimere $\bar{v}$ risp alla base vecchi

$$= \sum_j y_j \Big(\sum_i p_{ij}\bar{e}_i\Big) = \sum_{i=j=1}^{m} (p_{ij} y_j)\bar{e}_i$$

$$x_i = \sum_j p_{ij} y_i \rightarrow X\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots \\ x_m\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}y_1\\ \cdots \\ y_m\end{pmatrix} \Rightarrow X = Py$$

$$\boxed{X = Py \longleftrightarrow y = P^{-1}X}$$

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

$$\underset{B}{V} \xrightarrow{\quad f \quad} \underset{B}{V} \qquad \text{in } \mathbb{K}$$

$\|$

$$B(\bar{b_1}, \bar{b_2}, \bar{b_3}) \quad e \quad M_f^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$f(\bar{b_1}) = \lambda_1 \bar{b_1} + \cancel{0\bar{b_2}} + \cancel{0\bar{b_3}} = \lambda b_1$$

$$f(\bar{b_2}) = \lambda_2 \bar{b_2}$$

$$f(\bar{b_3}) = \lambda_3 \bar{b_3} \quad \Big\Downarrow$$

DIRE CHE LA MATRICE E' DIAGONALE, VALE A DIRE CHE LE SUE COMPONENTI HANNO COME IMMAGINE UN PROPRIO MULTIPL

DEF. $\bar{V}$ E' UN AUTOVETTORE DI f SE $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

N.B. SOLO CON $f: V \rightarrow V$ LINEARE (ENDOMORFISMI)

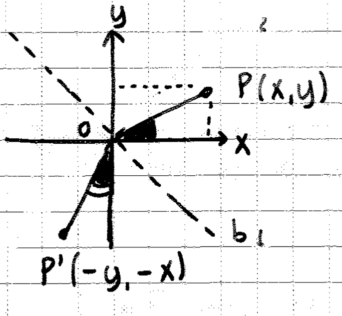
° $\forall \bar{v}$, $f(\bar{o}) = \lambda \cdot \bar{o}$ ma per fabbricare una base di AUTOVETTORI quello nullo non è notevolmente importante

$\bar{o}$ E' COMUNQUE UN AUTOVETTORE

ES. DATA f LINEARE, TALE CHE $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

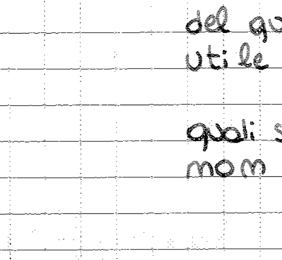
$$(x, y) \longrightarrow (-y, -x)$$

E' POSSIBILE TROVARE UNA BASE DI AUTOVETTORI?



P e P' simmetrici rispetto a b_1 : SIMMETRIA ORTOGONALE

P e P' opposti rispetto a b_2



RICERCA DEGLI AUTOVETTORI

$$(-y, x) = \lambda(x, y) \quad 1 ⊛$$

cerco λ oppure le coppie (x, y)

$\|$ INCOGNITA NUMERICA

$\|$ INCOGNITA VETTORIALE ⊛ 2

cerco i vettori non nulli per costruire le basi; c'è un λ in corrispondenza del quale si ha un vettore utile a formare una base?

quali sono i λ in corrispondenza di cui esiste un vettore non nullo che verifichi la relazione 1 ⊛

$$\int dx\, \lambda = \int \frac{f'}{f}\, dy$$

$$\log|f| = \lambda x + c$$

$$f(x) = Ke^{\lambda x} \quad \forall \lambda \quad K \in \mathbb{R}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ AUTOVALORE, E I CORRISPONDENTI AUTOVETTORI SONO LE FUNZIONI DI $Ke^{\lambda x}$ AL VARIARE DI K IN $\mathbb{R}$

SIA ALLORA $\lambda \in \mathbb{K}$ AUTOVETTORE PER $f: V \to V$:
CONSIDERIAMO TUTTI I VETTORI $\bar{v}$ PER CUI RISULTA $f(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$, AUTOVETTOR DI λ. QUESTO INSIEME E' UNO SPAZIO VETTORIALE

$\downarrow$
VERIFICA:

$f(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$ con λ FISSATO.

① $\underset{\bar{0}}{\underset{\parallel}{f(0)}} \overset{?}{=} \underset{0}{\underset{\parallel}{\lambda 0}}$ OK, lo $\bar{0}$ E NELL' INSIEME

② $f(\bar{v}_1) = \lambda\bar{v}_1$ ED $f(\bar{v}_2) = \lambda\bar{v}_2$

$f(\bar{v}_1) + f(\bar{v}_2) \overset{?}{=} \lambda(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$

$f(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = f(\bar{v}_1) + f(\bar{v}_2) = \lambda\bar{v}_1 + \lambda\bar{v}_2 = \lambda(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$ OK

③ $\cancel{1}$, OK: $v \in V_\lambda \Rightarrow \lambda v \in V_\lambda$

E' UNO SPAZIO VETTORIALE

$$f(\bar{v}) = \lambda\bar{v} \longrightarrow f(\bar{v}) - \lambda\bar{v} = \bar{0}$$

$$(\lambda_i)\bar{v}$$

$$(f(\bar{v}) - \lambda_i)\,\bar{v} = \bar{0}$$

VETTORI v CHE SONO MANDATI IN 0 DA $f - \lambda_i$:

$f - \lambda_i$ E' C.L. DI f E λ_i

$$\underset{\text{APPLICAZIONE LINEARE}}{\underset{\parallel}{(f - \lambda_i)}}(\bar{v}) = 0$$

$\mathrm{Ker}(f - \lambda_i)$

l'insieme a cui ci si riferisce si può intendere come nucleo di un'applicazione lineare (dim. indiretta)

se il Ker non si riduce al solo vettore nullo è OK

segue la ricerca di valori per cui Ker è iniettiva.

$f: V \longrightarrow V$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ SONO AUTOVALORI DISTINTI DI f:

CIASCUNO HA IL RELATIVO AUTOSPAZIO $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots V_{\lambda_m}$

GLI AUTOSPAZI DEVONO AVERE TUTTI DIMENSIONE ≥ 1 (non solo $\bar{0}$: $v_1, v_2, \dots v_m \neq \bar{0}$)

TEOREMA DICE CHE TALI VETTORI, ~~SE~~ SE $\neq \bar{0}$, DEVONO ESSERE L.I.

$a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots a_m\bar{v}_n = 0 \rightarrow a_1 = a_2 = \dots a_m = 0$ (def. di l. i)

↘ il primo non è nullo; il secondo non è multiplo del primo, ... l'n-esimo non è c.l. dei precedenti.

DIM. (dimostrazione per assurdo)

SI SUPPONE CHE $\bar{v}_1, \dots \bar{v}_n$ SIANO L.I. E SI GIUNGE A CONTRADDIZIONE

SIA i IL PRIMO INDICE, PER CUI SI SUPPONE

$$\bar{v}_i = a_i\bar{v}_i + a_2\bar{v}_2 + \dots a_{(i-1)}\bar{v}_{(i-1)}$$

$$f(\bar{v}_i) = a_1 f(\bar{v}_1) + a_2 f(\bar{v}_2) + \dots a_{i-1} f(\bar{v}_{i-1})$$

$$\lambda_i\bar{v}_i = a_1 \lambda_1 \bar{v}_1 + a_2\lambda_2\bar{v}_2 + \dots a_{i-1}\lambda_{i-1}\bar{v}_{i-1}$$

OSSERVAZIONE:

LA CONDIZIONE CHE PORTA ALL'ASSURDO E' QUESTA; MA APPLICANDO LA f HO SCRITTO NON UNA CONDIZIONE, MA UNA CONSEGUENZA.
L'APPLICAZIONE DI f A SX E A DX E' UNA CONDIZIONE PIU' DEBOLE DELL'IPOTESI: NON E' DI PER SE' SUFFICENTE. SI SOSTITUISCE V_i

$$\lambda_i(a_i\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots a_{i-1}\bar{v}_{i-1}) = a_1\lambda_1\bar{v}_1 + \dots a_{i-1}\lambda_{i-1}\bar{v}_{i-1}$$

il primo membro è c.l. di $v_1, \dots v_{i-1} = 0$ ed i è il primo indice per cui questo accade.
Quindi, per ipotesi, i vettori fino a $i-1$ sono l.i
e per def $a_1(\lambda_1 - \lambda_i), a_2(\lambda_2 - \lambda_i) \dots a_{i-1}(\lambda_i - \lambda_i - 1)$ tutti i coefficienti fino ad i devono essere nulli

Per la legge di annullamento di prodotto in un campo,
$a_1 = a_2 = \dots a_i - 1 = 0$; DA QUESTO SEGUE $V_i = 0$.

MA L'IPOTESI DI PARTENZA ERA $\bar{v}_1, \dots \bar{v}_m \neq 0 \rightarrow$ ASSURDO. CVD.

E' LA BASE PER DIMOSTRARE UN'ULTERIORE PROPRIETA' DEGLI AUTOSPAZI

LA SOMMA $V\lambda_1 \dots V\lambda_n$ E' DIRETTA : LA SOMMA DIRETTA DI AUTOSPAZI E' UNA PROPRIETA' ESSENZIALE

PROPRIETA' $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m}$ DIRETTA

Si dim utilizzando il risultato appena ottenuto

03/05/2013

$$f: V_n \xrightarrow{f} V_n$$

$$B \qquad\qquad B$$

E SI CONSIDERA LA MATRICE DI f RISPETTO A TALE BASE, $M_f^B = A$;

CALCOLO DI AUTOVALORI ED AUTOVETTORI DI f USANDO LA MATRICE A.

λ E' AUTOVALORE DI f SE $\exists \bar{v} \neq 0 \mid f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

$$f(\bar{v}) - \underbrace{\lambda \bar{v}}_{\lambda i(\bar{v})} = \bar{0}$$

$$(\lambda i)(\bar{v})$$

per la def di
c.l. di applicazioni
lineari

$$\underbrace{(f - \lambda i)}_{f_\lambda}(\bar{v}) = \bar{0}$$

cioè, comunque, che il nucleo non sia ridotto al solo vettore nullo

$$\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Ker}(f - \lambda i) \neq \{\bar{0}\}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (f - \lambda i)(\bar{v}) \text{ non e' iniettiva}$$

$f - \lambda i$ ha una matrice, rispetto alla base B, è $M_f - \lambda I = A - \lambda I$;
TALE MATRICE SI USA PER RICAVARE IL KER, CHE SI PONE $\neq \{\bar{0}\}$

$\Longleftrightarrow$ $(A - \lambda I) X = 0$ DEVE AVERE QUINDI SOL NON NULLE

↳ E' ANCORA UN'EQUIVALENTE DELLA DEF. DI λ COME AUTOVALORE.

↓

SI USA IL TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI;
IL RANGO DEVE ESSERE $< n$, E TRA LE VARIE FORME PER ESPRIMERLO E' UTILE

$$\det(A - \lambda I) = 0 : \quad \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} \ldots & & \ldots a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

POLINOMIO
CARATTERISTICO
DI f

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots \alpha_1 + \lambda + \alpha_0$$

TERMINE NOTO: VALORE CHE IL POLINOMIO ASSUME NEL CASO IN CUI $\lambda = 0$, CIOE' α_0.

MA POSTO $\lambda = 0$, α_0 E' IL DETERMINANTE DI A, CHE COINCIDE CON IL TERMINE NOTO DEL POLINOMI
CARATTERISTICO.

I SEGUENTI FATTI SONO EQUIVALENTI:

① ESISTE UNA BASE DI V COSTITUITA DA AUTOVETTORI DI f

=

② ESISTE UNA BASE DI V RISPETTO A CUI LA MATRICE DI f E' DIAGONALE

$\lambda_1 \dots \lambda_m$ AUTOVALORI DI f

$\parallel \quad\quad \parallel$

$V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_m}$ CON I RELATIVI AUTOSPAZI

PER COSTRUIRE UNA BASE NE OCCORRONO n, CHE SIANO l.i.

$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots V_{\lambda_m}$ qual è il più grosso insieme libero estraibile

IL MAX NUM DI AUTOVALORI l.i. E' LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO OTTENUTO PER SOMMA DIRETTA

SI PUO' COSTRUIRE IL MASSIMO INSIEME LIBERO, TUTTO FORMATO DA AUTOVETTORI, COME UNIONE INSIEMISTICA DI BASI.

=

③ $\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots \dim V_{\lambda_m} = n$

$= \dim (V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots V_{\lambda_m})$

=

④ $V_{\lambda_1} \oplus \dots V_{\lambda_m} = V$

=

⑤ TUTTI GLI AUTOVALORI STANNO IN $\mathbb{K}$

$\dim V_\lambda$ = molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico

$\dim V_\lambda$ = dim dello spazio delle sol del sistema di $(A - \lambda I)\, x =$

|

teorema rouché capelli

$= n - \rho(A - \lambda I)$

matrice DIAGONALE $\overrightarrow{\text{implica}}$ 5) VERA

$\downarrow$ ne consegue che

④ $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$ SEMPRE

$\hookrightarrow$ $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$ SE E SOLO SE $\bar{v} = \bar{0}$

ES: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longrightarrow X^t Y$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$(x, y) \longrightarrow X^t y = X_1 y_1 + X_2 y_2 + \dots X_n y_n$

ES V_n $\mathbb{R}$

$B (\bar{b_1}, \dots \bar{b_n})$

$\bar{v} = x_1 \bar{b_1} + \dots x_n \bar{b_n} \longleftrightarrow (x_1, x_2, \dots x_n) = X$

$\bar{u} = y_1 \bar{b_1} + \dots y_n \bar{b_n} \longleftrightarrow (y_1, y_2 \dots y_n) = Y$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = X^t y$ IL PRODOTTO SCALARE VARIA A SECONDA DELLA BASE

DEF. **NORMA** : $\bar{u} = \|\bar{u}\| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$

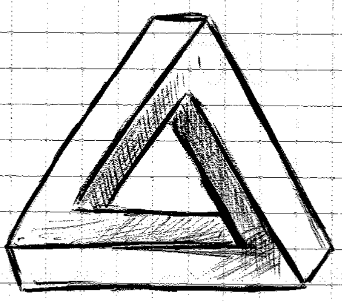
DEF **VERSORE** : SE $\|\bar{u}\| = 1$

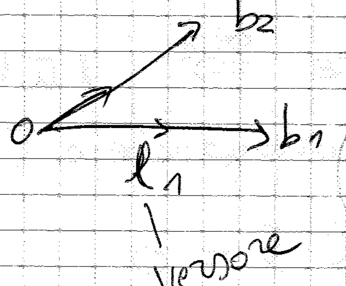
DEF $\bar{u}$ ORTOGONALE $\bar{v}$, $\bar{u} \perp \bar{v}$: $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

DEF. **BASE NATURALE** : TUTTI GLI ELEMENTI SONO VERSORI A COPPIE ORTOGONALI

$\downarrow$

UN INSIEME CHE ABBIA TUTTI GLI ELEM VERSORI, A COPPIE $\perp$, E' LIBERO processo di fabbricaz. di una base naturale → ortogonalizzazione





$B = (b_1, b_2)$

$\downarrow$

$B(\cancel{b}\, e_1, b_2)$

$$e_1 = \frac{b_1}{|b_1|}$$

$$\boxed{e_2 = a_1 e_1 + a_2 b_2}$$

$$\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = (a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{b}_2) \cdot e_1 =$$

$$= a \underbrace{\bar{e}_1 \bar{e}_1}_{1} + a_2 \bar{b}_2 \bar{e}_1 = 0$$

eq. di primo grado im 2 incognite

$$a_1 = -a_2 (b_2 e_1)$$

$$e_2 = -a_2 (b_2 e_1) e_1 + a_2 b_2$$

$$e_2 = \frac{-b_2 e_1) e_1 + b_2}{\| -(b_2 \cdot e_1) e_1 + b_2 \|}$$

$B = (b_1\ b_2, b_3)$

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} \qquad e_2 = \frac{-(b_2 b_1) e_1 + b_2}{\|}$$

$e_3 b_3 = 0$

$e_3 b_3 = a_1 e_1 e_3 + a_2 e_2 e_3 +$

$a_3 b_3 e_3 = 0$

$e_3 = a_1 e_1 + a_2 e_2 +$
$a_3 e_3$

$e_3 b_3 = 0$

$V \quad B = (b_1 \dots b_n)$

si suppone noto $b_i \cdot b_j$ per tutte le coppie;
a partire da qst si costruisce il p.s. per i vettori

$\Rightarrow$ " $b_i b_j = \alpha_{ij}$ noto $\Rightarrow$ possiamo calcolare in modo unico $\bar{u} \cdot \bar{v} \ \forall\, u, v$ mediante le loro componenti rispetto a B

$$u = x_1 b_1 + \dots x_n b_n = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$

$$v = y_1 b_1 + \dots y_n b_n = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i$$

$\boxed{u \cdot v} \dots$

es.

Dato $n=2$

$$(x_1 b_1 + x_2 b_2) \cdot (y_1 b_1 + y_2 b_2) =$$

SHHH

~~$x_1 b_1 + x$~~

$$x_1 y_1 b_1 b_1 + x_1 y_1 b_1 b_2 + x_2 y_1 b_2 b_1 + x_1 y_2 b_1 b_2$$

$$= x_1 y_1 \underbrace{(b_1 b_1)}_{1} + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \underbrace{(b_1 b_2)}_{0} + (x_2 y_2) \underbrace{(b_2 b_2)}_{1}$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j b_j \right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (x_i y_j) \, b_i b_j$$

$B = (b_1, \dots b_m)$ NUOVA BASE ORTONORMALE IN $\mathbb{R}^m$

$$P = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{b_1} & \bar{b_2} & \bar{b_m} \end{pmatrix}$$

$$^tP \cdot P = \begin{pmatrix} \text{-----} \\ \text{---} \\ \text{----} \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{b_1} \\ \\ \bar{b_m} \end{matrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{b_1} & & \bar{b_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \cdot & 0 & 0 1 \end{pmatrix}$$

MATRICE IDENTICA

le matrici che cerchiamo di caratterizzare hanno l' INVERSA A SX che è la TRASPOSTA.

LA MATRICE DI PASSAGGIO DI BASE ORTONORMALE AD ORTONORMALE E' INVERTIBILE (COME TUTTE LE MATRICI DI CAMBIAMENTO DI BASE), E LA SUA INVERSA A SX E' LA SUA TRASPOSTA

se la si pensa come matrice di f lineare rispetto a due basi... o alla stessa base in arrivo e in partenza...

$V \xrightarrow{f} V$ COME MATRICE DI APPLICAZ. LIN. RISPETTO A BASE ORTONORM

$M_f^B = P$ tale che $^tPP = P^tP = I$

CERTAMENTE E' INVERTIBILE, CORRISP. BIUNIVOCA, ISOMORFISMO, MA NON E' QUESTO IL PUNTO

(*) LE IMMAGINI DELLA MATRICE ORTOGONALE P CONSERVA IL PRODOTTO SCALARE

FISSATO α, HO FISSATO I.
SE DEVE AVERE MODULO 1 ED ESSERE ⊥ AD I, PUO' ESSERE ± J
→ J E' FISSATO DI CONSEGUENZA MA A MENO DEL SEGNO, E I SUOI ELEMENTI SI POSSONO ESPRIMERE IN FUNZIONE DI α

J E' "PREFERIBILE". E' OTTENUTO TRAMITE ROTAZIONE DI $\frac{\pi}{2}$ IN SENSO ANTIORARIO.

$P_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ COMPONENTI DEI NUOVI VETTORI RISPETTO ALLA NUOVA BASE

$I = \cos\alpha\, \hat{i} + \sin\alpha\, \hat{j}$

$J = -\sin\alpha\, \hat{i} + \cos\alpha\, \hat{j}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \det P_1 = 1$$

AL VARIARE DI α TRA 0 E π TROVO TUTTE LE POSSIBILI MATRICI DEL PRIMO TIPO I

16/05/2013

①

dato V si può sempre scegliere una sua

BASE ORTONORMALE

$$B = (\bar{b_1}, \dots \bar{b_m})$$

$$\bar{b}_{ij} = 0, \quad i \neq j \qquad e \qquad \bar{b_i} \cdot \bar{b_i} = 1 \qquad \text{(DEF.)}$$

SI PUÒ IDENTIFICARE OGNI VETTORE $\bar{v}$ RISPETTO ALLE SUE COMPONENTI PER TALE BASE:

$$\bar{v} = x_1 \bar{b_1} + \dots x_m \bar{b_m} \longleftrightarrow (x_1, \dots x_m) = {}^t X$$

TRASPOSTO IN MODO CHE X SIA

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\bar{v} = x_1 \bar{b_1} \dots x_m \bar{b_m} \longrightarrow (x_1, \dots x_m) = {}^t X$$

$$\bar{b_1} \longrightarrow (1, 0, 0 \dots 0)$$

$$\vdots$$

$$\bar{b_m} \longrightarrow (0, 0, \dots 0, 1)$$

DATO POI $\bar{u} = y_1 \bar{b_1} + \dots y_m \bar{b_m}$

IL PRODOTTO SCALARE È $\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1 y_1 + \dots x_m y_m$

per semplicità si identifica $\bar{v}$ con X, delle sue componenti, sicché il prodotto vettoriale si scrive

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1 y_1 + \dots x_m y_m = {}^t X y$$

BASE ORTONORMALE $\xleftrightarrow{\text{SE E SOLO SE}}$ LA MATRICE CHE LA DESCRIVE E' ORTOGONALE

$${}^t P P = 1$$

$$\Downarrow$$

LA TRASPOSTA DELLA MATRICE COINCIDE CON L'INVERSA

P MATRICE DI PASSAGGIO TRA BASE COMUNE E ORTONORMALE

$^tP \cdot P = I$; ALLORA L'UGUAGLIANZA VALE.

CIOE': OGNI MATRICE ORTOGONALE E' LA MATRICE DI UNA f CHE CONSERVA IL PRODOTTO SCALARE

DIM. 2 ←

$$^tx\,A\,y = {}^tx\,y, \quad \forall\, x, y$$

$$\Rightarrow A = I \,?$$

ne seguirebbe che:

$$^tx\,(\underbrace{A - I}_{B})\,y = 0$$

: si dice che, data una matrice B, se esiste sempre una B tale per cui: e ci si chiede se c'è

$$^tx\,B\,y = 0, \quad \forall\, x, y \quad \exists\, B = 0\,?$$

⊛

$$x = e_1 = {}^t(1, 0, \dots 0)$$

$$y = e_2 = {}^t(0, 1, \dots 0)$$

⊛ x vettore colonna; se trasposto, ^tx è un vettore riga; y sarebbe riga, ma per tale prodotto serve come colonna e si traspone, ^ty

$$\underset{(1,m)}{(1, 0, 0, \dots 0)} \begin{pmatrix} b_{11} & & b_{1m} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{m,m} \end{pmatrix} \underset{(m,1)}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= (b_{11}, \dots b_{1m}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b_{12} = 0$$

si ripete per ogni riga, ecc, ma in sostanza ottengo la matrice nulla CVD

$^tx\,A\,y = {}^tx\,y$ E' VALIDA SE E SOLO SE $A = I$

E POICHE' $^tP.P = A = I$ IL TEOREMA VALE ANCHE IN SENSO INVERSO

DIM. 1 $\rightarrow$

SE f $\underbrace{\text{AUTOAGGIUNTO}}$, $\xrightarrow{\text{ALLORA}}$ M_f^e E' SIMMETRICA

$$\parallel$$

$$f(\bar{u})\cdot\bar{v} = \bar{u}\cdot f(\bar{v})$$

$$\forall\ \bar{u}, \bar{v}$$

componenti dell'immagine del primo vettore della base; in questo caso è il primo vettore della base perché è la base canonica

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} \vdots & \overset{\oplus}{a_{1,2}} & \vdots & \vdots \\ a_{2,1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} f(\bar{e}_1) & f(e_2) & \cdots & f(\bar{e}_m) \end{array} \end{array}$$

$f($

$$f(\bar{e}_1) = \Big(f(\bar{e}_1)\overset{\text{SCALARE}}{\cdot}\bar{e}_1\Big)\,\bar{e}_1 + \Big(\overline{\underline{f(\bar{e}_1)\bar{e}_2}}\Big)\,\bar{e}_2 + \dots \Big(f(\bar{e}_1)\cdot\bar{e}_m\Big)\,\bar{e}_m$$

* VOLENDO CONFRONTARE UN ELEMENTO CON IL SUO SIMMETRICO: (esempio)

$$f(\bar{e}_2) = \Big(\overline{\underline{f(\bar{e}_2)\cdot\bar{e}_1}}\Big)\cdot\bar{e}_1 + \Big(f(e_2)\,e_2\Big)\,\bar{e}_2 + \dots \Big(f(\bar{e}_2)\,\bar{e}_m\Big)\,\bar{e}_m$$

secondo la condizione si dovrebbe poter dire

$$\underset{\overset{\parallel}{a_{2,1}}}{f(\bar{e}_1)\,\bar{e}_2} = \underset{\overset{\parallel}{a_{1,2}}}{f(\bar{e}_2)\cdot\bar{e}_1}$$

generalizzando $\quad a_{ij} = f(\bar{e}_j)\,\bar{e}_i = \bar{e}_j\,(f(\bar{e}_i)) = a_{ji}$

CIOE': LA MATRICE E' SIMMETRICA, SE VALE LA CONDIZIONE

DIM. 2 $\leftarrow$

supponendo che A sia simmetrica, dim che allora vale la condizione per cui f è ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO per tutti i suoi vettori.

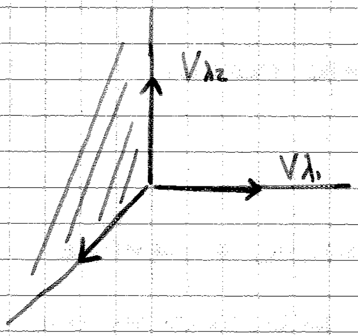
se la base è ortonormale, e v si scrive come

$x_1\bar{b}_1 + x_2\bar{b}_2 + \dots x_m\bar{b}_m = \bar{V}$; come si ottiene $\bar{x}_1$?

$$\bar{V}\cdot b_1 = x_1(b_1\cdot b_1) + x_2\underset{\overset{\parallel}{0}}{(\cancel{b_2 b_2})} + \dots x_m\underset{\overset{\parallel}{0}}{(b_m b_m)} = x_1$$

...

⑧



A, SIMMETRICA

P, MATRICE DI PASSAGGIO AD UNA BASE ORTONORMALE DI AUTOVETTORI

$\Downarrow$

P, ORTOGONALE

CIOE' $^tPP = I$ CIOE $P^{-1} = {}^tP$

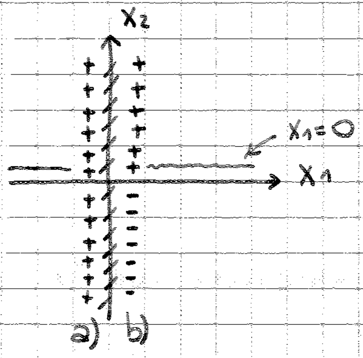
$$\underline{D} = \underline{P^{-1}AP} = \underline{{}^tPAP}$$

DIAGONALIZZAZIONE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 310

a) $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ E' SEMPRE POSITIVA, SALVO CHE IN O : DEFINITA

b) $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_2^2$ NON E' DEFINITA, SE CAMBIA SEGNO

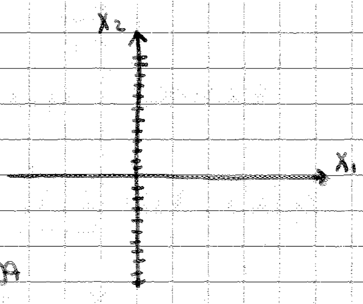


$x_2=0$

$q(x_1,x_2)>0$

$x_1=0$

$q(x_1,x_2)<0$



c) $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + \cancel{0x_2^2}$ intesa come funzione definita sul piano

HA SEMPRE LO STESSO SEGNO MA SI ANNULLA SU UNA RETTA:

E' SEMIDEFINITA < SEMIPOSITIVA
SEMINEGATIVA

||

IN ALTRE PAROLE, é un problema, cioe' non e' DEFINITA, SE LA MATRICE SIMMETRICA NON E' DIAGONALE

$$\underset{a)}{\begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{pmatrix}} \qquad \underset{b)}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}} \qquad \underset{c)}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 310