NUMERO: 631

DATA: 03/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Russo

MATERIA: Analisi dei Segnali
Prof. Visintin

Prima parte

CLASSIFICAZIONE DEI SEGNALI

Si suddividono in DETERMINATI e CASUALI. Nei primi è noto ogni parametro, con una espressione matematica, mentre quelli casuali non sono solitamente esprimibili. Casuali sono ad esempio la voce, o gli impulsi biologici.

SEGNALI

DETERMINATO CASUALE

TEMPO CONTINUO o DISCRETO

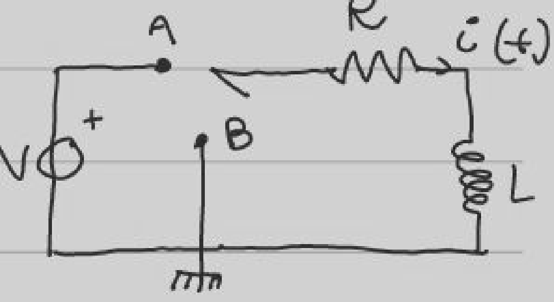
Il segnale a tempo continuo è una funzione del tempo, mentre quelli DISCRETI sono sequenze di valori, funzione di un indice "n".

- Per i processi CASUALI, la suddivisione dei segnali a tempo continuo è in stazionari o ciclostazionari, per il tempo discreto non li studiamo, ma sono categorie simili.

N.B, un segnale è una grandezza fisica che varia nel tempo, con una propria unità di misura. Gli istanti di tempo vanno da $-\infty$ (BIG BANG) a $+\infty$ (fine dei tempi).

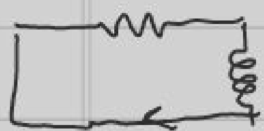
SISTEMA

Per $t<0$ l'interruttore è in B



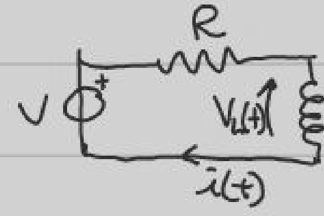
Per $0<t<T$ l'interruttore è in A

Per $t>T$ l'interruttore torna in B.



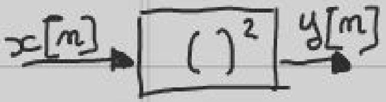
$t<0$

$i(t)=0$



$i(t)\neq 0$

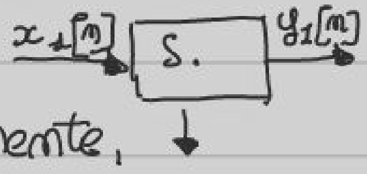
- Questi sistemi sono detti LINEARI, mentre un esempio di sistema non lineare é un sistema che fa uscire un segnale non lineare, ad esempio un polinomio di 2° grado.



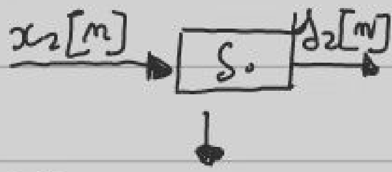
DEFINIZIONE DI LINEARITÁ:
Un sistema lineare é uno in cui vale la sovrapposizione degli effetti.

VERIFICA DELLA LINEARITÁ:

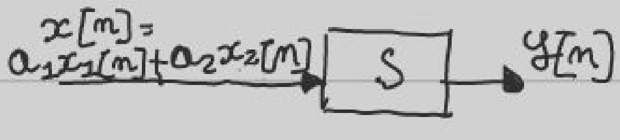
Dato un sistema:



si applicano separatamente, due segnali diversi



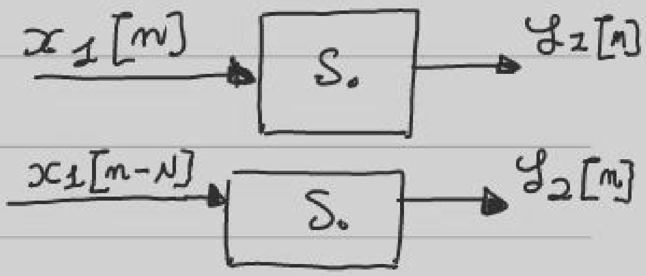
da 0, e poi una c. lineare dei



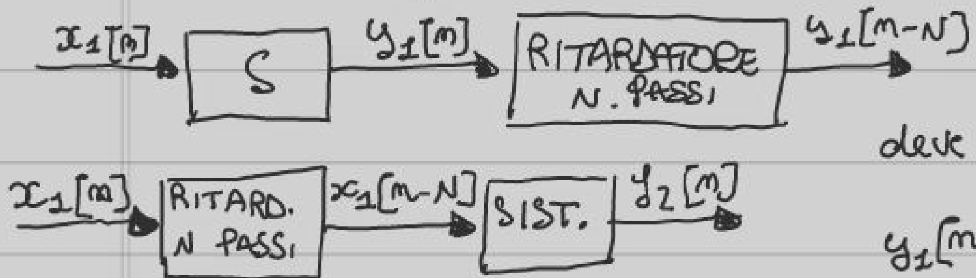
due. Si deve ottenere:

$$y[n] = a_1y_1[n] + a_2y_2[n]$$

Il sistema é tempo invariante se, misurata l'uscita di un sistema in due momenti diversi e $y_2[n] = y_1[n-N]$.
Sostanzialmente, é tempo invariante se le proprietá del sistema non cambiano nel tempo.



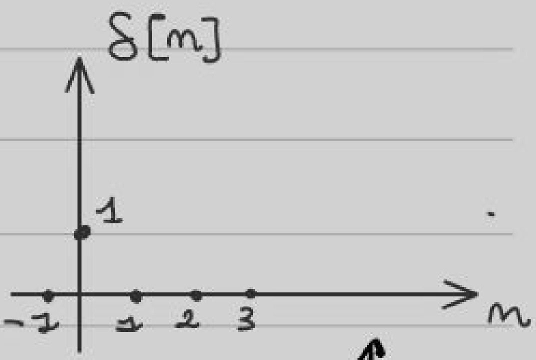
Inoltre, é tempo invariante se é possibile scambiare la posizione relativa di ritardato-re e sistema, senza che cambi l'uscita.



deve quindi essere $y_1[n-N] = y_2[n]$

SEGNALE $\delta[n]$

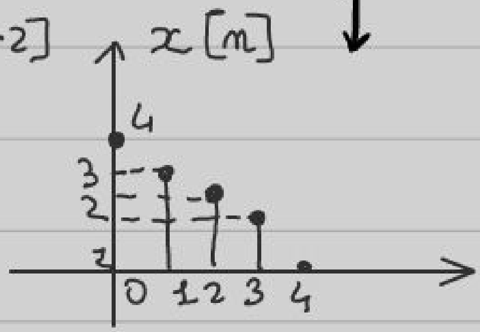
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 0 \\ 0 \text{ se } n \neq 0 \end{cases}$$



$$x[n] = \underset{x[0]}{4}\,\delta[n] + \underset{x[1]}{3}\,\delta[n-1] + \underset{x[2]}{2}\,\delta[n-2] + \delta[n-3] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$$

$\Downarrow$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$



Calcoliamo ora la RISPOSTA ALL'IMPULSO:

$h[n] \longrightarrow$

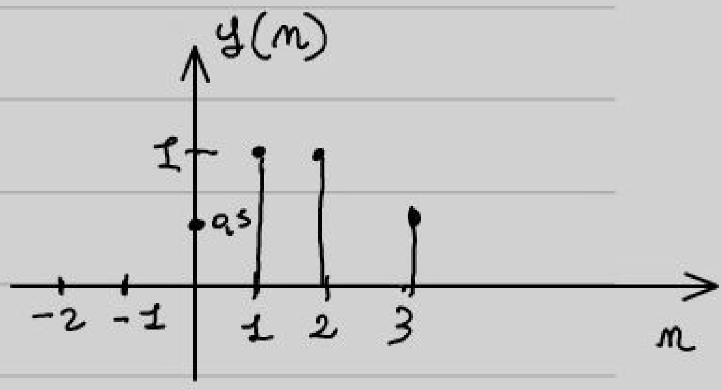
n	δ	h
0	1	0,5
1	0	0,5
2	0	0

$\downarrow$

$$h[n] = \delta[n] \cdot \frac{1}{2} + \delta[n-1] \cdot \frac{1}{2}$$

- Calcoliamo ora l'uscita per vari valori:

n	$x(n)$	$y(n)$
-2	0	0
-1	0	0
0	1	0,5
1	1	1
2	1	1
3	0	0,5

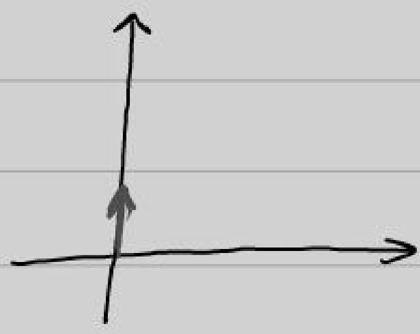


Ne risulta che $h[n]$ è $= 0$, per $n < 0$!

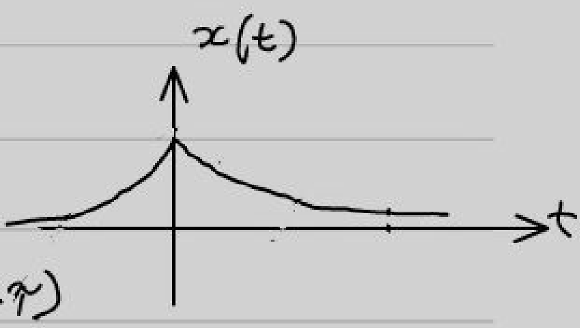
- Calcoliamo ora la convoluzione tra $x[n]$ e $h[n]$: $y[n] = \sum x[k] h[n-k]$

Per $n = 0 \longrightarrow y[0] = \sum x[k] h[-k] = x[0] h[-0] + x[1] \cdot h[-1] + x[2] h[-2]$, poiché la sommatoria ha senso SOLO per valori di x interni al

La notazione usata per rappresentare la Delta, é una freccia: infatti nell'intorno di 0, $\delta(t)$ "sale" ad ∞.



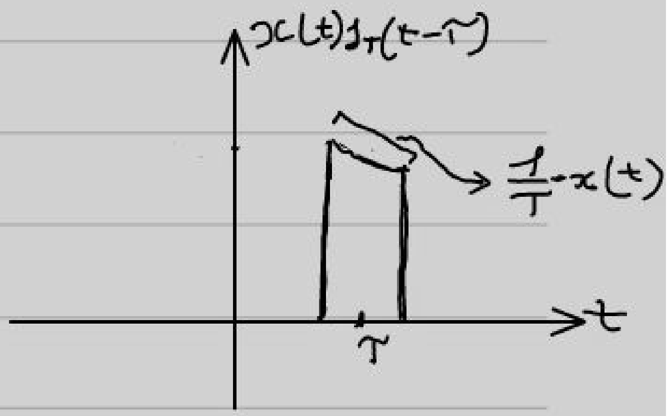
• $x(t) = e^{-|t|/t_0}$



Quanto vale $x(t)\delta(t-\tau)$?

$$\lim_{T \to 0}\left[x(t)\delta_T(t-\tau)\right] = x(t)\delta_T(t-\tau)$$

Il risultato del limite é spostato di τ, ed é il prodotto di due valori dei segnali istante per istante.



CAMPIONAMENTO

$$x(t)\delta(t-\tau) = \boxed{x(\tau)\delta(t-\tau)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)dt = x(\tau)$$

RISULTATO FONDAMENTALE

Questo perché il rettangolo sotto integrale dá 1, quindi rimane solo il valore del

$$\int x(\tau)\delta(t_0-\tau)\,d\tau = \int x(t_0)\delta(t_0-\tau)\,d\tau =$$
$$= x(t_0)\int \delta(t_0-\tau)\,d\tau = x(t_0),$$

Questo risultato è equivalente alla relazione del tempo discreto, ma lì c'era una sommatoria $\rightarrow x[n] = \sum x[k]\,\delta[n-k]$.

DIMOSTRAZIONE CONVOLUZIONE

- Prendiamo un sistema lineare e tempo invariante, per vedere come si comporta la RISPOSTA ALL'IMPULSO al segnale delta di Dirac, quindi siamo in TEMPO CONTINUO. Per trovare la risposta all'impulso, poniamo come nel tempo discreto, $\delta(t) = x[n]$: $\downarrow$

L.T.I

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow h(t)$$

Si ha che $y[t] = \mathcal{T}\{x[t]\} =$

$$x[t] \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y[t]$$

$$= \mathcal{T}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau\right\} =$$
$$= \int \mathcal{T}\{x(\tau)\delta(t-\tau)\}\,d\tau = \int x(\tau)\,\mathcal{T}\{\delta(t-\tau)\}\,d\tau =$$
$$= \int x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = x(t) * h(t)$$

, in tempo CONTINUO la CONVOLUZIONE è il risultato di un integrale.

$\int h(\tau) w(t-\tau) d\tau = \lambda w(t)$, si vuole isolare $w(t-\tau) = w(t) g(\tau)$ in modo da isolare il termine costante; la funzione è l'esponenziale $\rightarrow e^{\alpha(t-\tau)} = e^{\alpha t} \cdot e^{-\alpha \tau}$. L'autofunzione è $w_s(t) = e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$ (si mette "s" per non confondere con gli autovettori). L'integrale diventa:

$$\int h(\tau) w_s(t-\tau) d\tau = \int h(\tau) e^{st} \cdot e^{-s\tau} d\tau =$$

$$= e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{\lambda_s = H(s)}$$

, $H(s)$ è la TRASFORMATA DI LAPLACE di $h(t)$.

$w_s(t) = e^{st} \rightarrow w_s(t) * h(t) = w_s(t) H(s)$, è lo strumento matematico per i sistemi lineari e tempo invarianti, essa è quindi una funzione di variabile comples-sa, dai valori complessi.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt$$

TRASFORMATA Di FOURIER

È un sottoinsieme delle trasformate di Laplace, si ottiene ponendo $s = j2\pi f$, $f \in \mathbb{R}$. Qui l'autofunzione cercata per

ESEMPIO: $x(t) \longrightarrow \boxed{\text{rit. } t_0} \longrightarrow y(t) = x(t-t_0)$

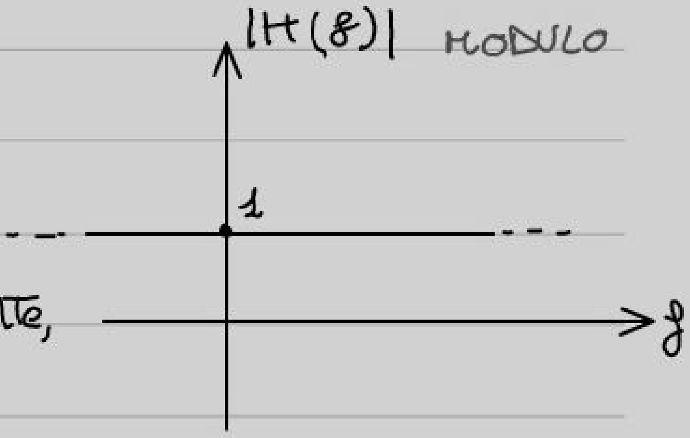
Calcoliamo la risposta all'impulso, mettendo in ingresso $\delta(t)$.

$h(t) = \delta(t-t_0)$

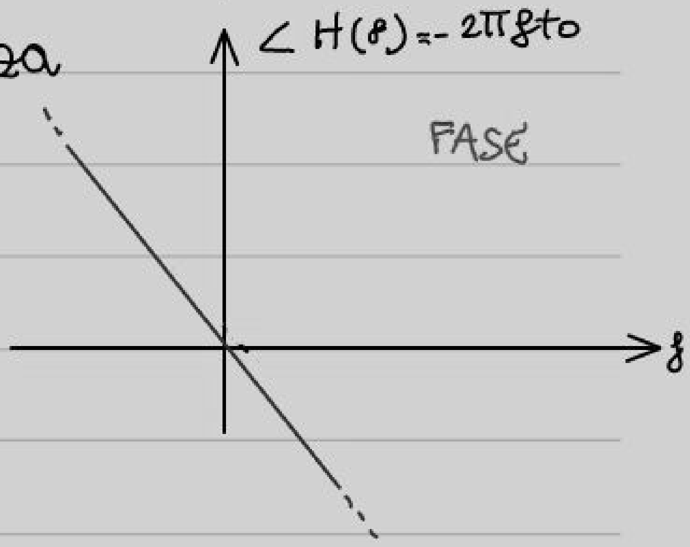
$$H(f) = \int h(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int \delta(t-t_0) e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= \int \underbrace{\delta(t-t_0) e^{-j2\pi f t_0}}_{\text{FORMULA DEL CAMPIONAMENTO}} dt = e^{-j2\pi f t_0} \cancel{\int \delta(t-t_0) dt}^{\,1} = e^{-j2\pi f t_0}$$

grafico di $H(f)$:



Il grafico del modulo è una costante, invece il modulo è una retta di pendenza $-2\pi t_0$.



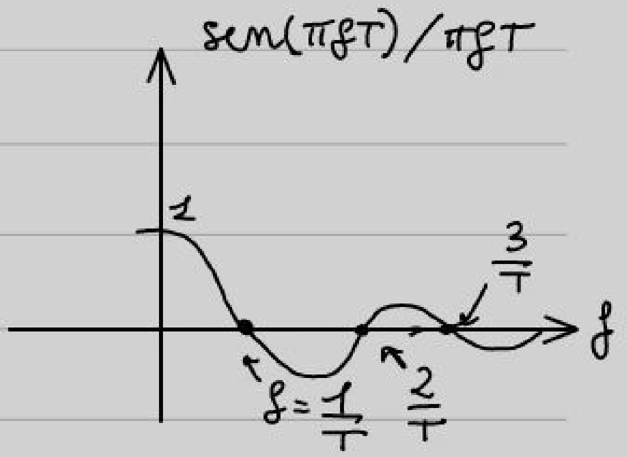
NOTAZIONE:

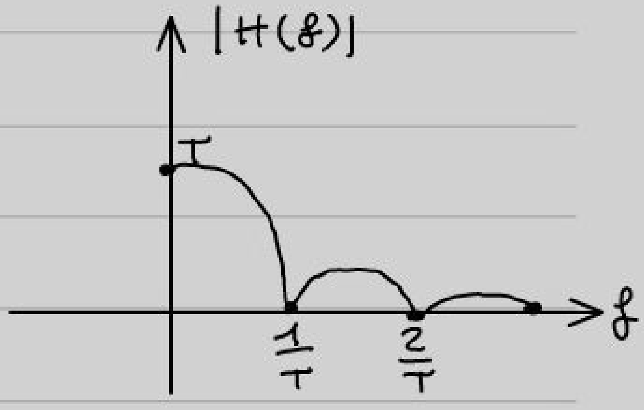
$h(t)$ è la risposta all'impulso, la sua TRASFORMATA di Fourier $H(f)$ è la FUNZIONE DI TRASFERIMENTO o RISPOSTA IN FREQUENZA.

- Se $h(t) = \delta(t)$, $H(f) = \int \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1$

Disegniamola nel nostro caso:

Gli zeri sono in corrispondenza di $\frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \frac{3}{T} \dots$





- Ulteriori notaz. sulle trasformate di Fourier:

$H(f) = \int h(t) e^{-j2\pi f t} dt$

$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$

$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int x(t) e^{-j2\pi f t} dt$ (trasformata di una funz. qualsiasi)

In minuscolo sono i SEGNALI, in maiuscolo le TRASFORMATE.

- LINEARITÀ: $\mathcal{F}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$.

Se $x(t)$ è REALE, allora $X^*(f) = X(-f)$

Possiamo scambiare gli elementi tra gli integrali:

$$\int_{\tau} x(\tau)\left[\int_{t} h(t-\tau)e^{-j2\pi f t}\,dt\right]d\tau$$, cambiamento di variabile: $t-\tau=u$, $t=u+\tau$:

$$Y(f)=\int_{\tau} x(\tau)\left[\int_{u=-\infty}^{\infty} h(u)e^{-j2\pi f(u+\tau)}\,du\right]d\tau=$$

$$=\int_{\tau} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\underbrace{\left[\int_{u} h(u)e^{-j2\pi f u}\,du\right]}_{H(f)}d\tau \rightarrow$$

$$\rightarrow Y(f)=\int_{\tau} x(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}H(f)\,d\tau = H(f)\underbrace{\int x(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau}_{X(f)} = X(f)H(f) \rightarrow \boxed{Y(f)=X(f)H(f)}$$

Quindi la trasformata di Fourier dell'uscita è la trasformata di Fourier dell'entrata per la funzione di trasferimento.

- Ne discende il risultato:

$$\boxed{\mathcal{F}\{x(t)*h(t)\}=\mathcal{F}\{x(t)\}\,\mathcal{F}\{h(t)\}}$$

ALCUNE TRASFORMATE FONDAMENTALI

- $\mathcal{F}\{\delta(t)\}=1$
- $\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\}=e^{-j2\pi f t_0}$

Per cui $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \Rightarrow \mathcal{F}\{1(t)\} = \delta(t)$

- $\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \int e^{-j2\pi(f-f_0)t}\, dt = \delta(f-f_0)$
- $\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$ (usato Eulero).
- $\mathcal{F}\{e^{-j2\pi f_0 t}\} = \delta(f+f_0)$
- $\mathcal{F}\{\text{sen}(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)\right]$
- $\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t+\theta)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j(2\pi f_0 t+\theta)} + e^{-j(2\pi f_0 t+\theta)}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{j\theta}\cdot e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j\theta}\cdot e^{-j2\pi f_0 t}\} = \frac{1}{2}\left[e^{j\theta}\delta(f-f_0) + e^{-j\theta}\cdot\delta(f+f_0)\right]$, con $\theta = 0$ si torna alle trasformate di seno e coseno.

CASO PARTICOLARE:

$$e^{j2\pi f_0 t} \longrightarrow \boxed{\int_{t-T}^{t}} \longrightarrow y(t)$$

$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$H(f) = e^{-j2\pi f t} \cdot T\,\frac{\text{sen}(\pi f T)}{\pi f T}$

$X(f) = \delta(f-f_0)$

$Y(f) = X(f)H(f) = \delta(f-f_0)H(f) = H(f_0)\delta(f-f_0)$

formula di campionamento

Scriviamo la funzione di trasferimento in modulo e fase:

DIMOSTRAZIONE:

$$X(f) = \int x(u) e^{-j2\pi f u} du$$

$$x(t) = \int X(f) e^{j2\pi f t} df$$

$$\Downarrow$$

$$= \int_f \left[\int_u x(u) e^{-j2\pi f u} du \right] e^{j2\pi f t} df = \int_u x(u) \left[\int e^{-j2\pi f u} \cdot e^{j2\pi f t} df \right] du =$$

$$= \int_u x(u) \underbrace{\left[\int_f e^{j2\pi f(t-u)} df \right]}_{\delta(t-u)} du = \int_u x(u) \delta(t-u) du =$$

$$= \int \underbrace{x(t) \delta(t-u)} du = x(t)$$ (la δ integrata vale 1)

(non si cambia il segno perché δ è pari)

DERIVAZIONE

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$, se $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$

$$Y(f) = \int y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int \dot{x}(t) e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= x(t) e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int x(t) \left(\frac{d}{dt} e^{-j2\pi f t} \right) dt =$$

Per risolvere l'integrazione, introduciamo l'ipotesi: $x(t) = 0$, per $t = \pm\infty$

$$Y(f) = -\int x(t)(-j2\pi f) e^{-j2\pi f t} dt = j2\pi f \int x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$= j2\pi f \, X(f)$, quindi basta moltiplicare la trasformata del segnale per "$j2\pi f$"!

Se $X(0)=0$, allora:

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(u)\,du\right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{\text{der.}} \xrightarrow{y(t)} \boxed{\text{int.}} \xrightarrow{x(t)}$$

- Quindi, se $X(0)=0$, e SOLO in questo caso, la derivazione equivale a MOLTIPLICARE per $j2\pi f$, l'integrazione equivale a DIVIDERE per $j2\pi f$.
- Lo stesso concetto si applica al regime in frequenza, dove la cascata di un sistema integratore e uno derivatore, all'uscita troviamo lo stesso segnale, e la funzione di trasferimento è il prodotto delle due funzioni di trasferimento (che fa 1 ovviamente)

- Non vale se c'è prima un integratore e poi un derivatore: infatti l'integratore è un sistema NON STABILE.

$$Z(f) = \int_{f_1} X(f_1)\, Y(f-f_1) \cdot \left[\int \cancelto{1}{\delta(f-f_1-f_2)\, df_2} \right] df_1 =$$

$$= \int_{f_1} X(f_1)\, Y(f-f_1)\, df_1 = X(f) * Y(f)$$

La trasformata di Fourier del prodotto é la convoluzione delle trasformate.

- ESEMPIO

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

$$y(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

$$z(t) = x(t)\,y(t) \longrightarrow Z(f) = X(f)\,Y(f)$$

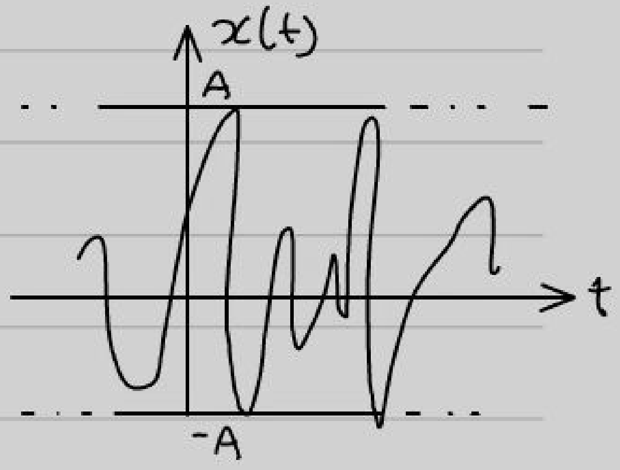
$$Y(f) = \frac{A}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right)$$

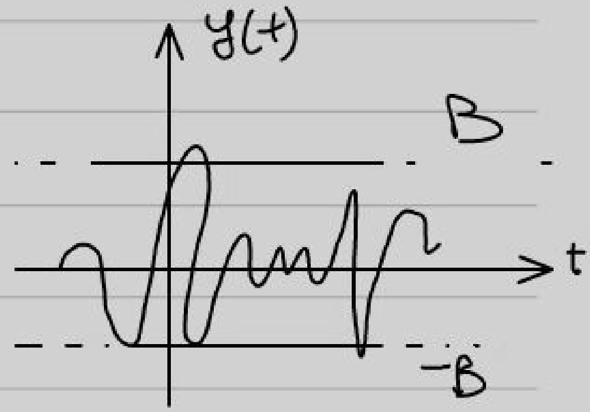
$$Z(f) = \frac{A}{2}\left[X(f) * \delta(f-f_0) + X(f) * \delta(f+f_0)\right] =$$

$$= \frac{A}{2}\left[X(f-f_0) + X(f+f_0)\right]$$

SISTEMA STABILE

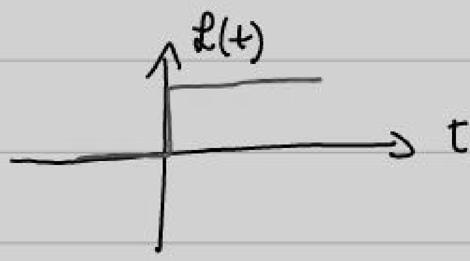
Un sistema LTI é stabile in senso BIBO (Bounded input bounded output), se per ogni ingresso $x(t)$ limitato in ampiezza (cioé tale per cui $|x(t)| \leq A < \infty$), l'uscita $y(t)$ é anch'essa sempre limitata in ampiezza, cioé $|y(t)| \leq B < \infty$.





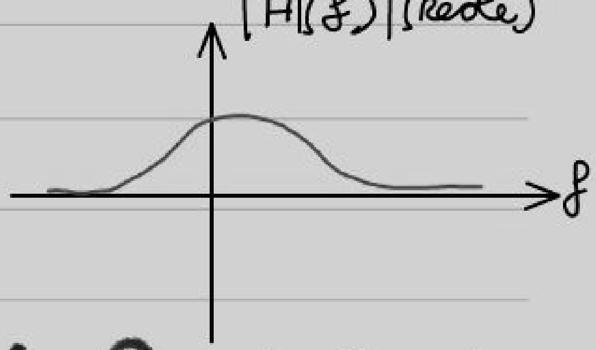
- ESEMPIO, di sistema NON BIBO, cioé un integratore.

$h(t) = u(t)$

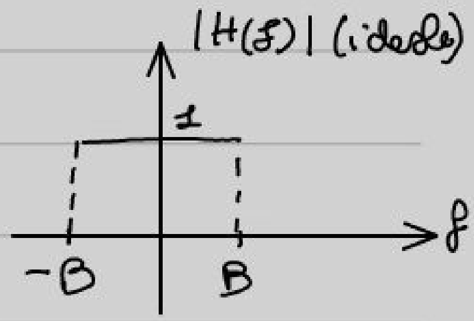


FILTRO PASSABASSO

Fa passare le basse frequenze e taglia quelle oltre.



- **filtro passabasso ideale**, di banda B, ha funzione di trasferimento:

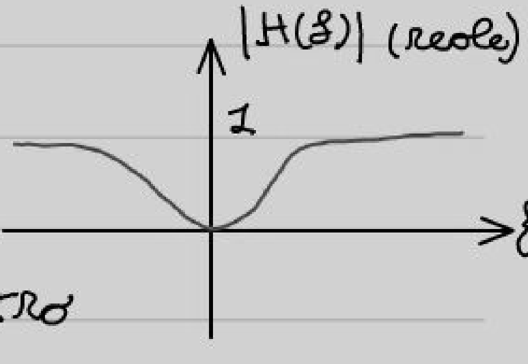


$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Non é fisicamente realizzabile perché la $h(t)$ é del tipo $\frac{sen(x)}{x}$, quindi inizia a $t \to -\infty$, ma é comodo per i conti.

FILTRO PASSAALTO

Per il filtro ideale, B é detta FREQUENZA DI TAGLIO, cioé la frequenza a cui il filtro



di Trasferimento comincia a decrescere.

- N.B Il coefficiente che moltiplica $|H(0)|^2$ si ricava dalla banda:

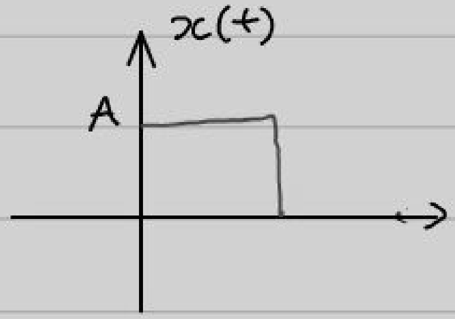
$B_{3dB} \rightarrow 10\log x = 3$, per ricavare il coefficiente x.

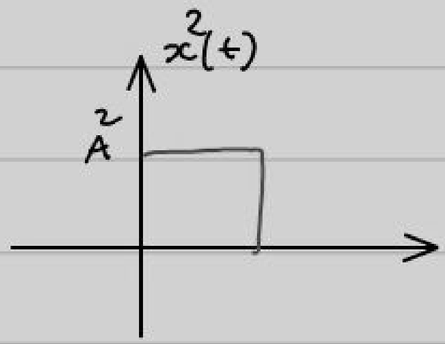
correttivo dal punto di vista dimensio-
-nale, dato che il risultato deve essere
in Joule (noi avevamo una potenza come segnale).

- I segnali a energia finita sono quelli per cui $\mathcal{E}_x = \int |x(t)|^2 dt < \infty$.

Ad esempio, se $x(t) = A p_T(t)$, $\mathcal{E}_x = \int x^2(t) dt = A^2 T$, con $\mathcal{E}_x$ in Joule, A in $\sqrt{\text{WATT}}$.

- L'energia è SEMPRE POSITIVA.





TEOREMA DI PARSEVAL

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

BISOGNA VEDERE SE È PIÙ UTILE LAVORARE IN FREQUENZA.

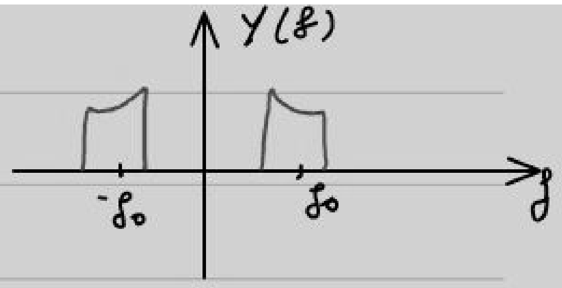
DIMOSTRAZIONE

$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(f)$, $Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt$,

$Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt$.

Posto $y(t) = x^2(t)$, con $x(t)$ reale.

grafico del segnale filtrato $\longrightarrow$ $Y(f) = X(f)H(f)$



- $S_y(f) = |Y(f)|^2 =$ $\quad x(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t)$

$= |X(f)\, H(f)|^2 = |X(f)|^2 \, |H(f)|^2 =$

$= S_x \, |H(f)|^2$ [Lo spettro del segnale entrante è proporzionale a quello del segnale uscente mediante $|H(f)|^2$]

- N.B. se un segnale è sinusoidale, non ha spettro di energia poiché si avrebbero due δ^2, e la Delta di Dirac al quadrato non ha significato.

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

È definita come $R_x(\tau)$, è l'ANTITRASFORMATA dello spettro di energia del segnale $x(t)$.

$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f) \cdot X^*(f)\} =$

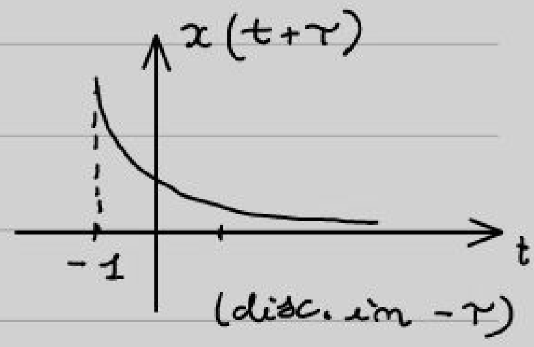
$= \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} * \mathcal{F}^{-1}\{X^*(f)\}.$

- $\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = x(\tau) = \int X(f) e^{j2\pi f\tau} df$ $\quad$ 1° termine
- $\mathcal{F}^{-1}\{X^*(f)\} = \int X^*(f) e^{j2\pi f\tau} df = \left[\int X(f) e^{-j2\pi f\tau} df\right]^*$

$= \left[\int X(f) e^{j2\pi f(-\tau)} df\right]^* = [x(-\tau)]^*$ $\quad$ 2° termine

quindi $R_x(\tau) = \underbrace{x(\tau)}_{x(t)} * \underbrace{x^*(-\tau)}_{h(t)} = \int x^*(-u)\, x(\tau-u)\, du =$

$R_x(\tau) = \int_0^{+\infty} x(t)\, x(t+\tau)\, dt =$



N.B. l'integrale è in t!

$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-\frac{(t+\tau)}{T}} dt =$

$= e^{-\frac{\tau}{T}} \int_0^{+\infty} e^{-2t/T} dt =$

$= \frac{T}{2} e^{-\frac{\tau}{T}}$ (per un τ generico positivo)

Per τ negativo generico:

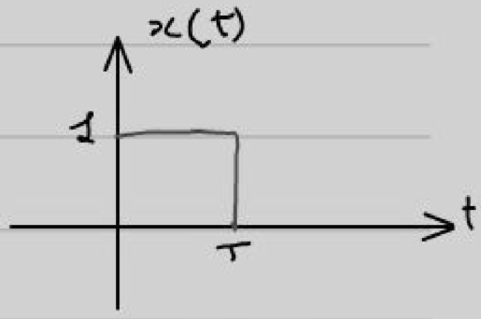
$R_x(\tau) = \int_{-\tau}^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-\frac{(t+\tau)}{T}} dt = \int_0^{\infty} e^{-(u-\tau)/T} e^{-\frac{u}{T}} du =$

$= \frac{T}{2} e^{\tau/T}$

Ora si fa l'unione dei due risultati.

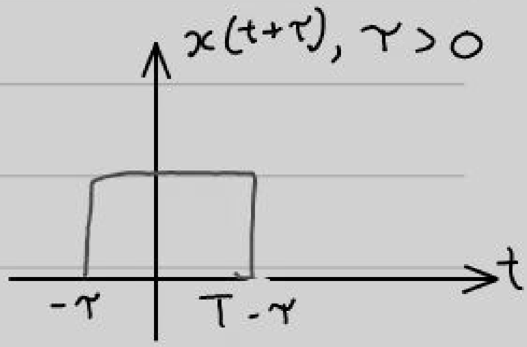
- Calcolare la f. di autocorrelazione di

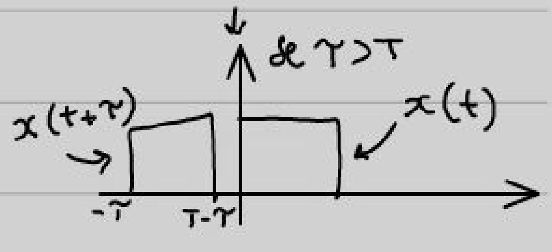
$x(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$



$R_x(\tau) = \int x(\tau)\, x(t+\tau)\, dt =$

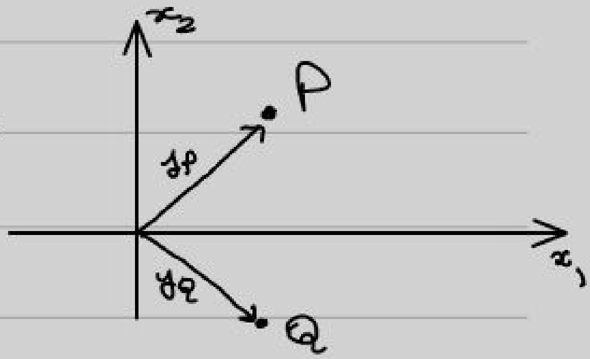
$= \int_0^{T-\tau} 1\, dt = T - \tau$ (per $0<\tau<T$)





scalare di due vettori in uno spazio opportuno.

Dal grafico si vede che il prodotto scalare dei due vettori dà:



$0 \le |\underline{y}_p \cdot y_q| \le |y_p|\,|y_q|$

se $\underline{y_p} \propto \underline{y_q}$

$0 \le |\langle x(t), y(t)\rangle| < \sqrt{E_x}\,\sqrt{E_y}$

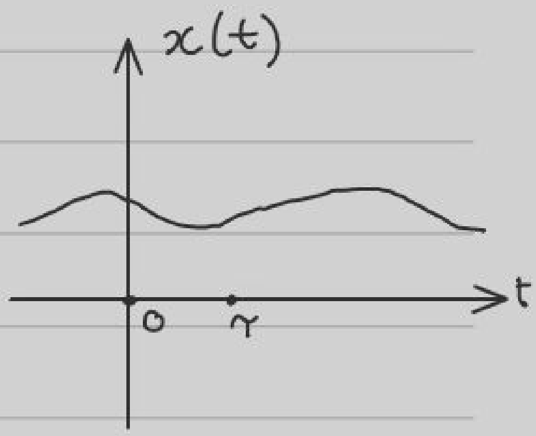
$$\left|\int x(t)\,y(t)\,dt\right|^2 \le \int |x(t)|^2 dt \int |y(t)|^2 dt$$

Disuguaglianza di Schwartz

- $R_x(\tau) = \langle x(t), x(t+\tau)\rangle$, quindi da questo risultato sappiamo che se la f. di autocorrelazione vale 0, i due vettori sono ORTOGONALI, dal p. scalare. otteniamo invece il valore massimo quando $\tau = 0$, ovvero i due vettori sono PROPORZIONALI (sempre dal p. scalare e dalla dis. di Schwartz).

$$\mathcal{E}_e = \int e^2(t)\,dt = \int [x(t) - x(t+\tau)]^2\,dt =$$
$$= \int x(t)^2\,dt + \int x^2(t+\tau)\,dt + \int 2x(t)x(t+\tau)\,dt =$$
$$= \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_x - 2R_x(\tau)$$
$$\mathcal{E}_e = 2\left[\mathcal{E}_x - R_x(\tau)\right]$$

$\mathcal{E}_e$ è piccola se $R_x(\tau) \simeq \mathcal{E}_x \longrightarrow x(t)$ è simile a $x(t+\tau) \longrightarrow x(t)$ varia lentamente in un intervallo di durata τ. Nel grafico infatti c'è poca differenza tra $x(t)$ e $x(t+\tau)$, quindi saranno simili anche le funzioni di autocorrelazione.



In frequenza, la trasformata di Fourier ha una piccola banda B_x, infatti se si "dilata" l'asse dei tempi, la trasformata di Fourier si restringe.
Ricapitolando, il segnale che varia lentamente ha:

1) Banda della trasformata di F. stretta
2) Spettro di energia con banda stretta (la maggior parte dell'energia è

$$\left.\begin{aligned} S_{yx}(f) &= X^*(f)Y(f) = \mathcal{F}\{R_{yx}(\tau)\} \\ S_{xy}(f) &= X(f)Y^*(f) = \mathcal{F}\{R_{xy}(\tau)\} \end{aligned}\right\} \text{SPETTRI MUTUI}$$

DIMOSTRAZIONE

$$\mathcal{F}\{R_{yx}(\tau)\} = \mathcal{F}\left\{\int x(t)\,y(t+\tau)\,dt\right\} = \int_\tau \left[\int_t x(t)\,y(t+\tau)\,dt\right] \cdot e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau$$

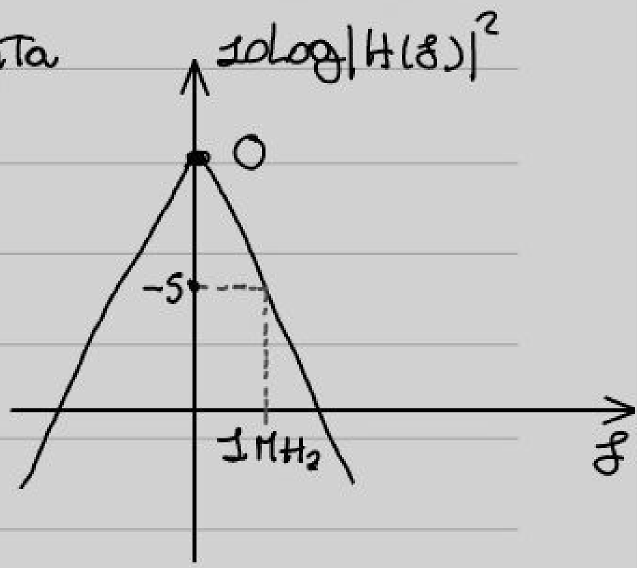
$$= t+\tau = u = \int_t^{t+\tau=u} x(t)\left[\int_u y(u)\, e^{-j2\pi f(u-t)}\,du\right]dt = \int x(t)\cdot e^{j2\pi f t}\,dt$$

$$\cdot \int_u y(u)\, e^{-j2\pi f u}\,du = X(-f)Y(f) = X^*(f)Y(f).$$

ECOGRAFIA

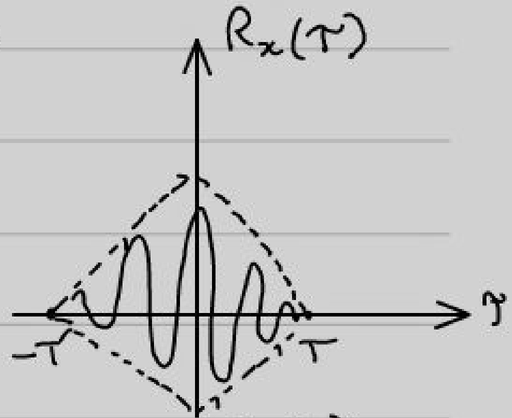
Si manda un segnale ($\simeq 1$ MHz), che trapassa i tessuti e torna indietro quando viene riflesso trovando una discontinuità. Bisogna calcolare la distanza percorsa fino alla discontinuità. Viene trasmesso il segnale $x(t)$ e ritorna $y(t) = \alpha x(t-t_0)$, α è un coefficiente di attenuazione del segnale, t_0 è il ritardo con cui torna. Il ricevitore calcola il p. scalare tra $x(t-\tau)$ e $y(t)$, per ogni possibile valore di τ (generico ritardo), e prende τ che rende massimo il prodotto scalare; questo significa

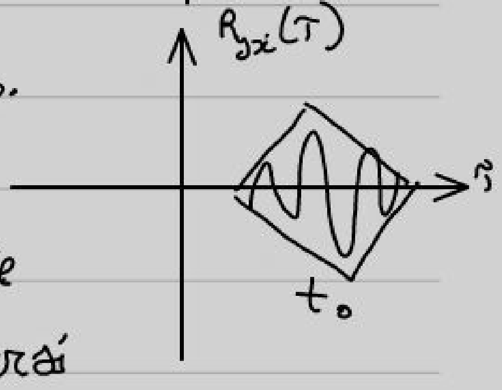
Quindi é come se il corpo umano si comportasse da FILTRO, con una funzione di trasferimento. All'aumentare della frequenza aumenta l'attenuazione.



- ESEMPIO, se il segnale fosse: $x(t) = A\cos 2\pi f_0 t \cdot P_T(t-\frac{T}{2})$, quindi oscilla tra $\pm A$.

La sua funzione di autocorrelazione é $R_x(\tau)$, e quella di mutua correlazione é $R_x(\tau)$ ritardata di t_0. Per trovare il τ massimo che ci interessa, conviene che T sia il più piccolo possibile per migliorare la risoluzione nella stima di t_0. Questo anche perché così diventa possibile distinguere due echi da tessuti diversi ma vicini (echi cioé segnali di ritorno).





Questa relazione funziona sempre in frequenza, nel tempo si hanno eccezioni, ad esempio per l'integratore.

- $h(t) = u(t)$, NON esiste $R_h(\tau)$ perché $h(t)$ NON é ad energia finita.
- Altro caso é il RITARDATORE, $h(t) = \delta(t - t_0)$, NON é ad energia finita, non esiste $R_h(\tau)$.
- Per sistemi LTI stabili, in genere $h(t)$ é un segnale a energia finita e $R_h(\tau)$ esiste.

SEGNALI PERIODICI

- Un segnale $x(t)$ é periodico di periodo T se $x(t+T) = x(t)$, ad esempio:

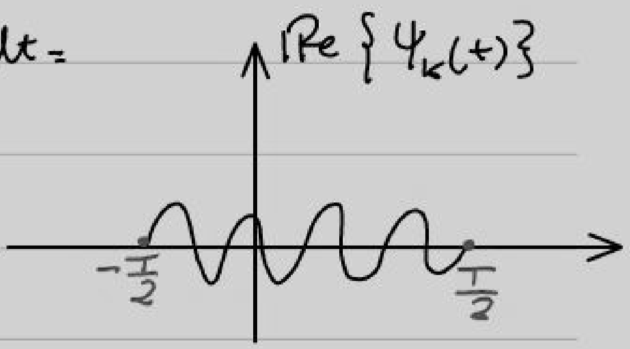
$x(t) = \text{sen}(2\pi f_0 t) \rightarrow \text{sen}(t+T) = \text{sen}(2\pi f_0 (t+T)) =$

$= \text{sen}(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 T) = x(t)$, per quali T é verificato? $x(t+T) = x(t)$ se $2\pi f_0 T = 2k\pi$, k intero, positivo e $\neq 0$, $T = \frac{k}{f_0}$, ma si intende sempre il più piccolo possibile, quindi: $T = \frac{1}{f_0}$

$$\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \int \psi_k(t)\, \psi_l^*(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi k \frac{t}{T}}\, e^{-j2\pi l \frac{t}{T}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi (k-l) \frac{t}{T}}\, dt$$



- Se $k = l$, il prodotto scalare vale 1.
- Se $k \neq l$, il prodotto scalare vale: $\frac{1}{T} \cdot \left. \frac{e^{j2\pi(k-l)\frac{t}{T}}}{j2\pi\frac{(k-l)}{T}} \right|_{-T/2}^{T/2} =$

$$= \frac{1}{T} \frac{e^{j\pi(k-l)} - e^{-j\pi(k-l)}}{j2\pi\frac{(k-l)}{T}} \longrightarrow e^{j\pi} = -1 \;, \; e^{j\pi(k-l)} = (-1)^{k-l},$$

$\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \frac{1}{T}$, o $= 0$, in base a k pari o dispari.

- Si definisce quindi un insieme di segnali $\mathcal{B} = \{\psi_k(t)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, è una BASE ORTO-NORMALE, perché il prodotto scalare tra questi segnali vale 0 (sono tutti ortogonali tra di loro).

Quindi il segnale è:

$$x_T(t) = \sum \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}} \int x_T(t)\, e^{-j2\pi k \frac{t}{T}}\, dt}_{c_k} \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{T}}\, e^{j2\pi k \frac{t}{T}}\, p_T(t)}^{\text{elemento di } \mathcal{B}} =$$

$$= \sum \mu_k\, e^{j2\pi k \frac{t}{T}}\, p_T(t) \longrightarrow \mu_k = \frac{1}{T} \int x_T(t)\, e^{-j2\pi k \frac{t}{T}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T} X_T(f)\Big|_{f=\frac{k}{T}}$$

, μ_k è il k-esimo coefficiente della serie di Fourier.

- $\sum \mu_k\, e^{j2\pi k \frac{t}{T}}\, p_T(t)$ è la serie di Fourier

- $x_T(t) = \sum \mu_k\, e^{j2\pi k \frac{t}{T}}\, p_T(t)$

- Il segnale periodico $x(t)$ vale $x_T(t)$ nel periodo fondamentale $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.
- Il segnale $x(t)$ è periodico di periodo T.
- Il segnale $e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$ è anche periodico di periodo T per ogni k.

$\Longrightarrow$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k\, e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$, $-\infty < t < \infty$, è la serie di Fourier per il segnale NON troncato, infatti non c'è più la porta. I coefficienti della serie valgono:

- $\mu_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\, e^{-j2\pi k \frac{t}{T}}\, dt$, cioè uguale a quello del segnale TRONCATO.

$$\mu_k = \frac{1}{T} X_T\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \cdot 2jA \frac{\sin^2(\pi k/2)}{\pi k/T}$$

$$x(t) = \sum \mu_k e^{j2\pi f \frac{t}{T}}$$

$$X(f) = \sum \mu_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \sum \frac{1}{T} X_T\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f - \frac{k}{T}\right) =$$

$$= \frac{1}{T} X(f) \underbrace{\sum \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)}_{\text{"TRENO DI DELTA"}}$$

- ESEMPIO DI SEGNALE SINUSOIDALE

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t - \theta) \quad , \quad T = \frac{1}{f_0}$$

$$\mu_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt = \frac{A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{e^{j2\pi \frac{t}{T} + j\theta} + e^{-j2\pi \frac{t}{T} - j\theta}}{2}\right] \cdot$$

$$\cdot e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt = \frac{A}{2T} e^{j\theta} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi(k-1)\frac{t}{T}} dt + \frac{A}{2T} e^{-j\theta} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi(k+1)\frac{t}{T}} dt \rightarrow \mu_k = 0 \quad \text{se } k \neq \pm 1$$

$$\mu_1 = \frac{A}{2} e^{j\theta}$$

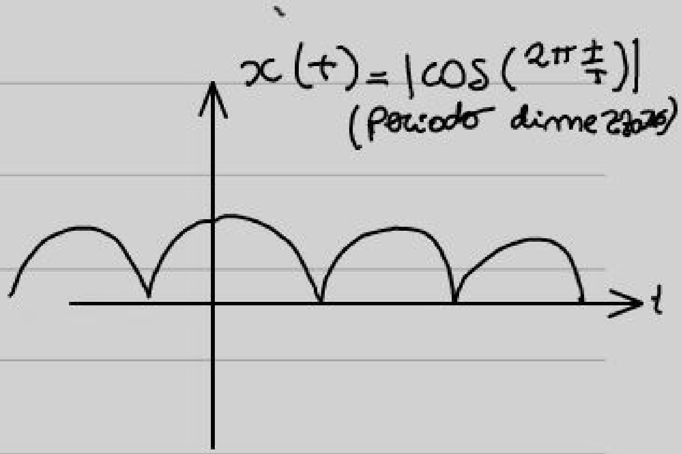
$$\mu_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\theta}$$

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) = \sum \mu_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}} = \mu_1 e^{j2\pi \frac{t}{T}} + \mu_{-1} e^{-j2\pi \frac{t}{T}} =$$

$$= \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{j2\pi \frac{t}{T}} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-j2\pi \frac{t}{T}}$$

$$X(f) = \mu_1 \delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \mu_{-1} \delta\left(f + \frac{1}{T}\right)$$

• ALTRO ESEMPIO

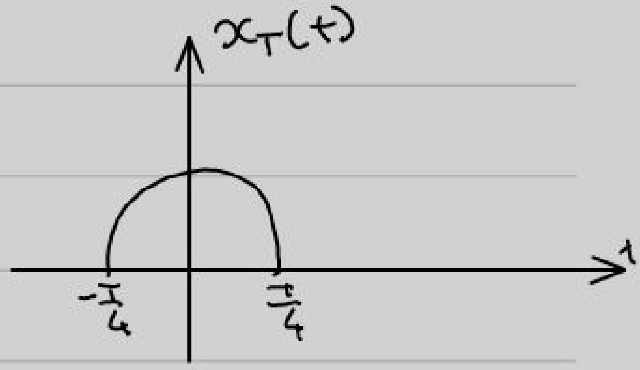


Il periodo è $\frac{T}{2}$,

$x(t) = \sum x_T(t - k\frac{T}{2}) =$

$= x_T(t) + x_T(t - \frac{T}{2}) +$

$+ x_T(t - T) \dots$

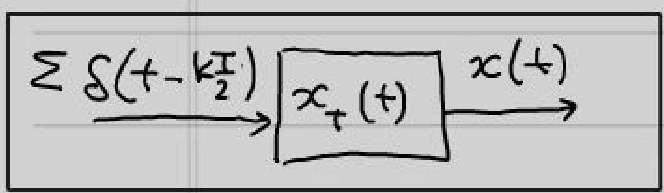


$x(t) = \sum_k x_T(t - k\frac{T}{2}) =$

$= \sum_k x(t) * \delta(t - k\frac{T}{2}) =$

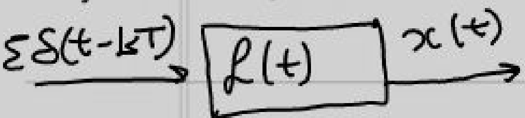
$= x_T(t) * \sum_k \delta(t - k\frac{T}{2})$

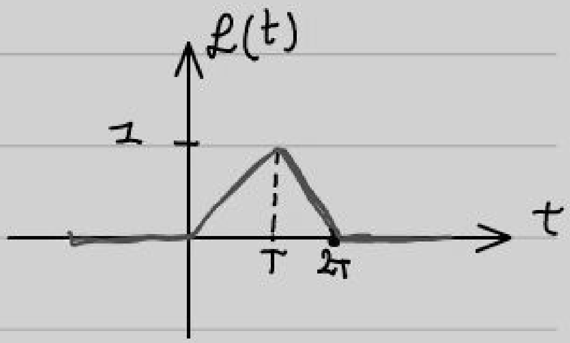
Il segnale periodico equivale ad un sistema con risposta all'impulso $x_T(t)$ e ingresso come treno di delta.



!!

• ALTRO ESEMPIO

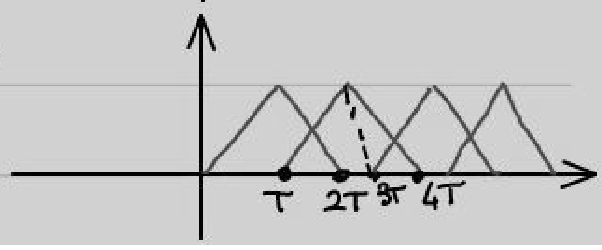




$x(t) = \ell(t) * \Sigma \delta(t-kT) =$

$= \Sigma \ell(t-kT)$

Il risultato complessivo della sommatoria.



POTENZA DEL SEGNALE PERIODICO

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\sum_k \mu_k e^{j2\pi k\frac{t}{T}}\right)\left(\sum_m \mu_m e^{j2\pi m\frac{t}{T}}\right)^* dt$$

$$P_x = \frac{1}{T}\sum_k\sum_m \mu_k \mu_m^* \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi k\frac{t}{T}} e^{-j2\pi m\frac{t}{T}} dt}_{T\delta_{km}}$$

$$T\delta_{km} = \begin{cases} T & \text{se } k=m \\ 0 & \text{se } k\neq m \end{cases}$$

(delta di Kronecker)

$$P_x = \frac{1}{T}\sum_k\sum_m \mu_k \mu_m^* T\delta_{km} = \sum_k \mu_k \mu_k^* = \boxed{\sum_k |\mu_k|^2}$$

La sommatoria esiste solo se $k=m$, quindi si può togliere la sommatoria delle m.

- ESEMPIO

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}$$

$$\mu_1 = \frac{A}{2} e^{j\theta}, \quad \mu_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\theta}, \quad f_0 = \frac{1}{T}$$

$$P_x = |\mu_1|^2 + |\mu_{-1}|^2 = \frac{A^2}{2},$$ PER OGNI SEGNALE SINUSOIDALE DI AMPIEZZA A.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 151

è l'integrale dello spettro di potenza da $-\infty$ a $+\infty$ deve darmi la potenza.

- Per il segnale $x(t)$ sinusoidale:

$G_x(f) = |\mu_1|^2 \delta(f-f_0) + |\mu_{-1}|^2 \delta(f+f_0) =$

$= \frac{A^2}{4}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$

Si nota che si utilizzano solo le frequenze fondamentali, e le $\mu_{\pm 1}$ che non si annullano.

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_x(f)\}$, è uguale a quella per i segnali a energia finita.

$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_k |\mu_k|^2 \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)\right\} = \sum_k |\mu_k|^2 e^{j2\pi k\frac{\tau}{T}}$

$R_x(\tau)$ è una funzione periodica, infatti ha un'espressione in serie di Fourier di periodo T.

$$\begin{cases} x(t) = \sum \mu_k e^{j2\pi k\frac{t}{T}} \\ R_x(\tau) = \sum |\mu_k|^2 e^{j2\pi k\frac{\tau}{T}} \\ X(f) = \sum \mu_k \delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \\ G_x(f) = \sum |\mu_k|^2 \delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \end{cases}$$

Quanto vale $R_x(0)$? $\rightarrow R_x(0) = \sum_k |\mu_k|^2$, è la

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 151

- Relazione tra gli spettri:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \xrightarrow{y(t)}$$

Calcolare $G_y(f)$ in funzione di $G_x(f)$ e $H(f)$.

$$X(f) = \sum \mu_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$Y(f) = X(f)H(f) = H(f)\sum \mu_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \sum \mu_k H(f)\delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \sum_k \mu_k H\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$y(t) = \sum_k \nu_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}, \quad \nu_k = \mu_k H\left(\frac{k}{T}\right)$$

$\downarrow$

$$G_y(f) = \sum |\nu_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \sum_k \left|\mu_k H\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) =$$

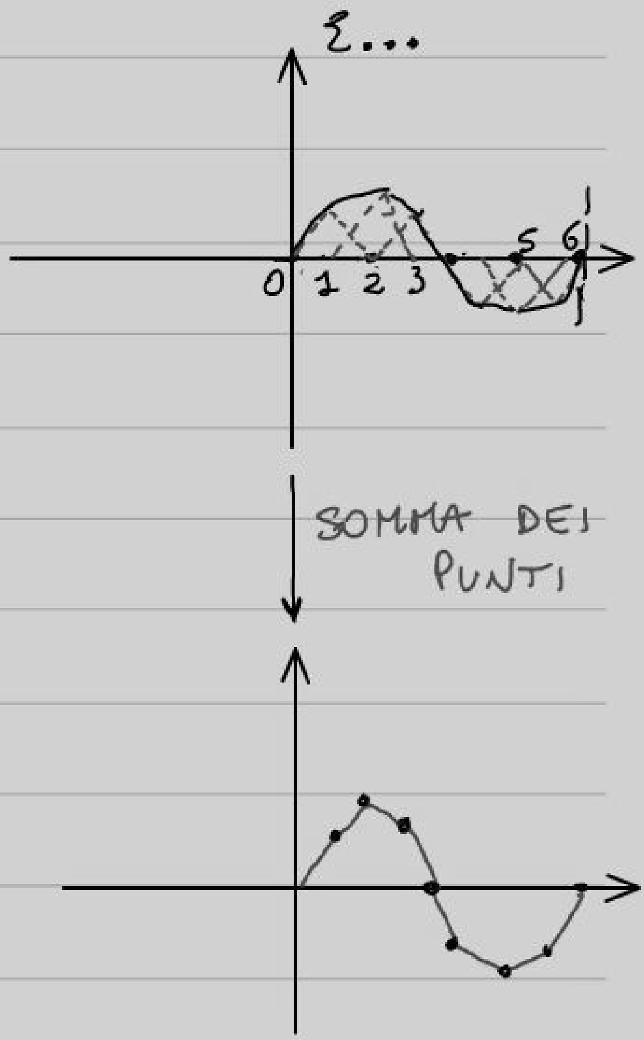
$$= |H(f)|^2 \sum_k |\mu_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = |H(f)|^2 \cdot G_x(f)$$

Lo spettro dell'uscita è uguale allo spettro dell'entrata per il modulo di $H(f)$ al quadrato.

- $R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} * R_x(\tau) =$
$= R_h(\tau) * R_x(\tau)$, dove $R_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t)h(t+\tau)\,dt$, è un segnale a energia FINITA, quindi ha un'autocorrelazione diversa da $x(t)$.

Se $T_s = \frac{T}{8}$:

n	$x(nT_s)$
0	0
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	1
3	$\frac{\sqrt{2}}{2}$



- Vogliamo che valga la relazione:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\, g(t-nT_s)$$

L'incognita è $g(t)$, oltre a T_s (intervallo di campionamento). Si ha anche $f_s = \frac{1}{T_s}$, frequenza di campionamento.

$$\sum x(nT_s) \underbrace{g(t-nT_s)}_{g(t) * \delta(t-nT_s) = \delta(t-nT_s) * g(t)}$$

$$x(t) = \sum x(nT_s)\, g(t-nT_s) = \left[\sum x(nT_s)\delta(t-nT_s)\right] * g(t) =$$

$$= \left[\sum \underbrace{x(t)\,\delta(t-nT_s)}_{\text{formula del camp.}}\right] * g(t) = \left[x(t)\sum \delta(t-nT_s)\right] * g(t)$$

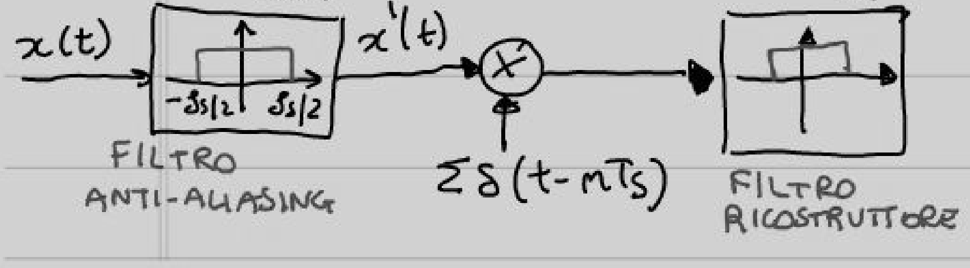
Ne deriva che:

$$\left[\sum X\left(f-\frac{n}{T_s}\right)\right] G(f) = X(f)$$

Enunciato teorema:

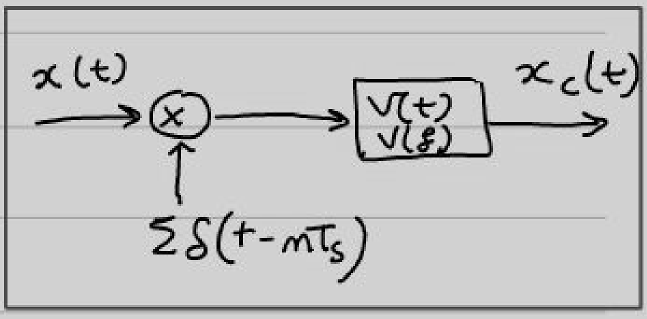
- Se $x(t)$ é strettamente limitato in banda e la banda B_x, é possibile ricostruirlo esattamente dai suoi campioni, a patto che la frequenza di campionamento sia $f_s > 2B_x$, e il filtro di ricostruzione abbia funzione di trasferimento $G(f)$ di tipo passabasso con banda $> B_x$

Se non si rispettasse la condizione della banda, si avrebbe SOVRAPPOSIZIONE DELLE CODE, detto ALIASING.



$$X(f) = X(f)\, P_{f_s}(f)$$

Quindi un sistema a blocchi equivalente é:



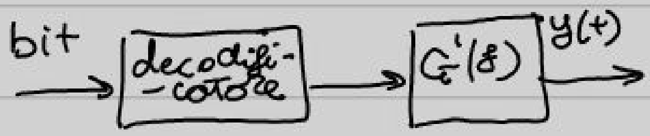
Dal segnale campionato possiamo ricostruire quello originale tramite il filtro ricostruttore, con funzione di trasferimento $G(f)$, e un ulteriore filtro che abbia funzione di trasferimento $G'(f) = \frac{G(f)}{V(f)}$, in modo da ANNULLARE l'effetto "campionante" di $V(f)$:

$$X_c(f) = \mathcal{F}\left\{\left[\Sigma\, x(mT_s)\,\delta(t-mT_s)\right] * v(t)\right\} =$$
$$= \mathcal{F}\left\{\Sigma\, x(mT_s)\,\delta(t-mT_s)\right\} V(f) = \mathcal{F}\left\{\Sigma\, x(t)\,\delta(t-mT_s)\right\}$$
$$V(f) = \mathcal{F}\left\{x(t)\,\Sigma\,\delta(t-mT_s)\right\} V(f) = \left[X(f) * \frac{1}{T_s}\Sigma\,\delta\!\left(f-\frac{m}{T_s}\right)\right]$$
$$V(f) = \underbrace{\left[\frac{1}{T_s}\Sigma\, X\!\left(f-\frac{m}{T_s}\right)\right] V(f)}$$

Dall'espressione finale della trasformata del segnale campionato, si vede che $X(f-..)$ cioé una "gobba", viene moltiplicato

- Altro esempio è il campionamento GSM, con $f_s = 8\,kHz$, 13 bit per campione.
All'uscita dell'ADC i bit vengono generati alla velocità:
ogni $T_s = \frac{1}{8\,kHz}\,s$, lo 1 campione che viene convertito in 13 bit.
T_b = intervallo di bit $= \frac{T_s}{13}$. Bit rate $R_b = \frac{1}{T_b}$
$= \frac{13}{T_s} = 13 f_s = \underbrace{13 \cdot 8\,Hz\,\frac{bit}{s}}$ (Velocità di generazione)

- Esiste anche il filtro DAC, che fa l'esatto opposto:



$y(t) \neq x(t)$, perché $x(t)$ ha banda maggiore di $\frac{f_s}{2}$, il quantizzatore fa perdere informazioni, i filtri AA e ricostruttore non sono ideali.

SEGNALI E SISTEMI A TEMPO DISCRETO

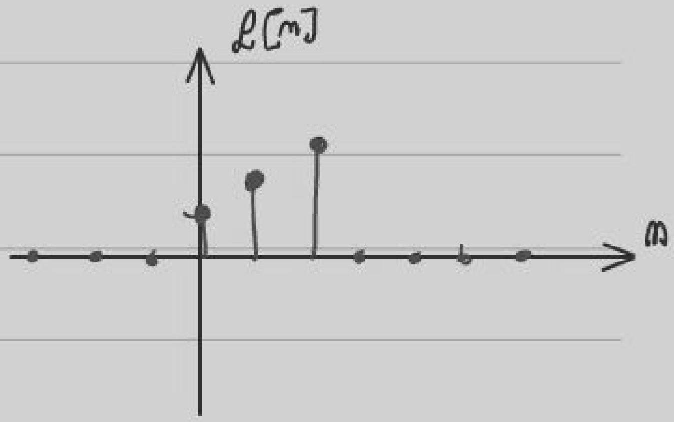
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{per } x=0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{per } n \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

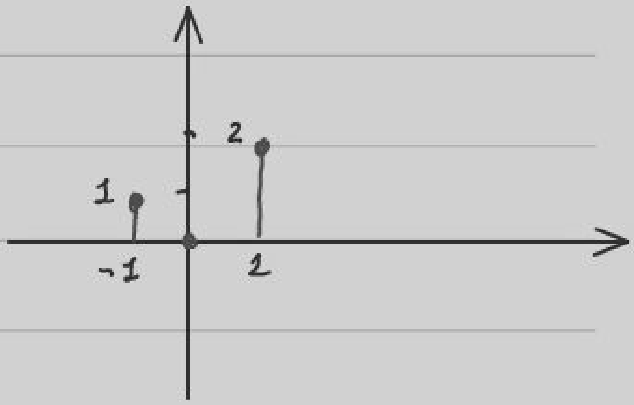
$$p_N[n] = \begin{cases} 1, & \text{per } n=0, \dots N-1. \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- Dato un segnale $x[n]$, la sua energia è:
$\mathcal{E}_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$
- Un segnale $x[n]$ periodico di periodo M è tale che: $x[n] = x[n+M]$, M intero e positivo
- Per un segnale periodico di periodo M, la potenza è: $P_x = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} |x[n]^2|$
- Per un segnale $x[n]$ a energia finita, la funzione di autocorrelazione è:
$R_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] x[n+m]$
- Per un segnale $x[n]$ periodico di periodo M la f. di autocorrelazione è:
$R_x(m) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x^*[n] x[n+m]$

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-3]$$



- $x[n] = \sum_k x[k]\,\delta[n-k]$



$$x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1].$$

$$x(t) = \int x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$$

- Se $x[n]$ è ingresso del sistema LTI con risposta $h[n]$, quanto vale $y[n]$?

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\sum_k x[k]\,\delta[n-k]\right\} = \sum_k x[k]\,T\{\delta[n-k]\}$$

$$h[n] = T\{\delta[n]\} \Rightarrow T\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$$

$$y[n] = \sum_k x[k]\,h[n-k] = x[n] * h[n]$$

AUTOFUNZIONE NEI SISTEMI DISCRETI

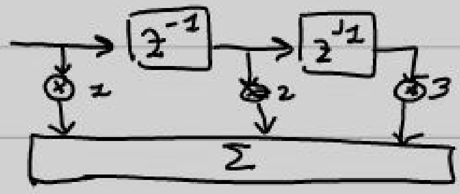
Autofunzione per la convoluzione discreta: voglio trovare il segnale $w[n]$ tale che:

$$w[n] * h[n] = \sum_k w[k]\,h[n-k] = \lambda w[n]$$

Esempi di calcolo:

- $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$
- $\mathcal{Z}\{\delta[n-1]\} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[n-1] z^{-n} = \delta[0] z^{-1} = \frac{1}{z}$
- $\mathcal{Z}\{\delta[n-M]\} = z^{-M} \rightarrow h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$

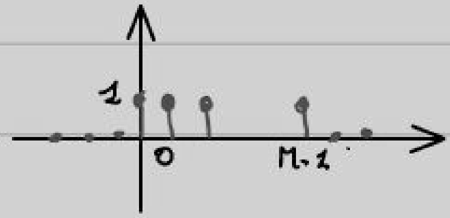
$\rightarrow H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$



se blocco z^{-1} identifica il ritardo di 1 passo.

- $\mathcal{Z}\{P_M[n]\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_M[n] z^{-n} =$

$= \sum_{0}^{M-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}}$



- $\mathcal{Z}\{u[n]\} = \sum_{-\infty}^{\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$, solo se $|z^{-1}| < 1$,

ovvero $|z| > 1$, detta REGIONE DI CONVERGENZA.

- $\mathcal{Z}\{y[n]\}$ con $y[n] = x[n] * h[n]$

$Y(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} y[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \right) z^{-n} =$

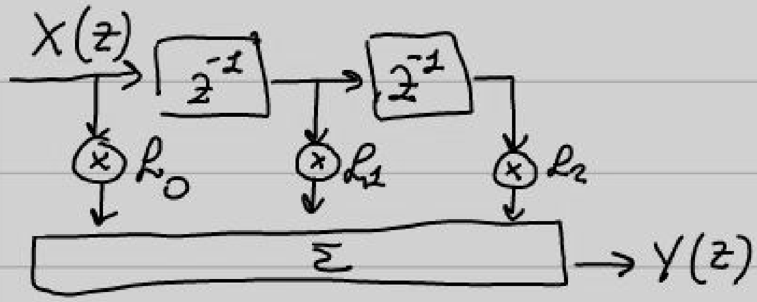
$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] z^{-n} \right) z^{-k} z^{k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] \right.$

$\left. z^{-(n-k)} \right) = \sum_{k} x[k] z^{-k} H(z) = X(z) H(z)$

- $\mathcal{Z}\{\alpha^n u[n]\} = \sum_{\infty}^{-\infty} \alpha^n u[n] z^{-n} = \sum_{0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n =$

$= \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$, per $|\alpha z| > 1$, di nuovo regione di

convergenza $= \frac{z}{z - \alpha}$, per $|z| > \alpha$



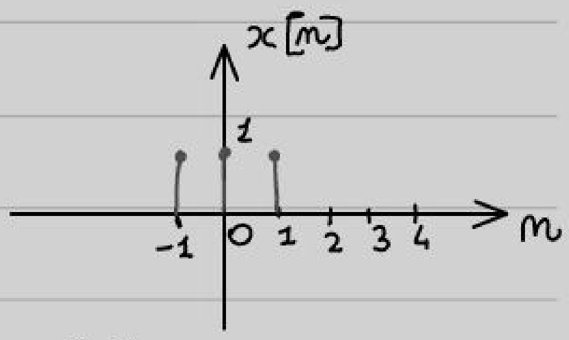
- All'uscita del primo ritardatore c'è $X(z)\cdot z^{-1}$, all'uscita del secondo $X(z)\cdot z^{-2}$, poiché la funz. di trasferimento del ritardatore è z^{-1}. Nel sommatore arrivano i segnali: $h_0 X(z)$, $X(z)\cdot z^{-1}\cdot h_1$, $X(z)\cdot z^{-2}\cdot h_2$, per cui l'uscita sarà:

$$Y(z) = X(z)h_0 + X(z)z^{-1}h_1 + X(z)z^{-2}h_2 =$$
$$= X(z)(h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}) = X(z)H(z).$$

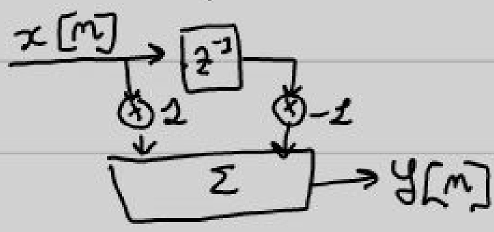
Ne deriva che: $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$

- $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = h_0\delta[n] + h_1\delta[n-1] + h_2\delta[n-2]$

ESEMPIO:



$$Y(z) = X(z)H(z) =$$
$$= X(z) - X(z)z^{-1} =$$
$$X(z)\underbrace{[1 - z^{-1}]}_{\to H(z)}$$



$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)(1-z^{-1})\} =$$
$$= x[n] - (x[n] * \delta[n-1]) =$$

$$W_2(z) = Y(z)\,\alpha_2 z^{-1}$$

$\downarrow$

$$W(z) = X(z) + W(z)\alpha_1 z^{-1} \rightarrow W(z) = \frac{X(z)}{1-\alpha_1 z^{-1}} = X(z)\cdot\frac{z}{z-\alpha_1}$$

$$Y(z) = W(z) + Y(z)\alpha_2 z^{-1} = \frac{W(z)}{1-\alpha_2 z^{-1}} = \frac{W(z)\,z}{z-\alpha_2}$$

$$Y(z) = X(z)\cdot\frac{z}{z-\alpha_1}\cdot\frac{z}{z-\alpha_2} = X(z)\cdot H_1(z)\cdot H_2(z)$$

Quindi la CASCATA di due sistemi ha uscita con le due funz. di trasferimento.

ESPANSIONE IN FRATTI SEMPLICI

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots a_K x^K}{b_0 + b_1 x + \dots b_N x^N} = \frac{a_0 + \dots a_K x^K}{b_N (x-p_1)(x-p_2)\dots(x-p_N)}$$

Supponiamo $p_i \neq p_\ell$, $\forall i \neq \ell$ (poli distinti), $K < N$

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{c_1}{x-p_1} + \frac{c_2}{x-p_2} + \dots + \frac{c_N}{x-p_N}$$

$$\frac{N(x)}{D(x)}(x-p_1) = \frac{c_1}{\cancel{(x-p_1)}}\cancel{(x-p_1)} + \frac{c_2}{(x-p_2)}(x-p_1) + \dots \frac{c_N}{(x-p_N)}(x-p_1)$$

$\Downarrow$

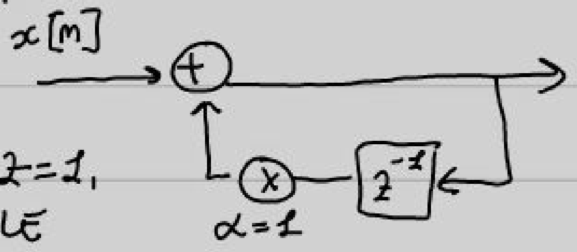
$$\left.\frac{N(x)}{D(x)}(x-p_1)\right|_{x=p_1} = c_1 \rightarrow \lim_{x\to p_1}\frac{N(x)}{D(x)}(x-p_1) = c_1$$

- Se $\alpha_1 > 1$, $h[n]$ DIVERGE e il sistema è instabile, stessa cosa per α_2.

CONDIZIONE DI STABILITÀ DEL SISTEMA

- Ognuno dei poli della $H(z)$ deve avere modulo < 1! CONDIZIONE DI STABILITÀ

ESEMPIO DI INSTABILITÀ



$H(z) = \dfrac{z}{z-1}$ polo in $z=1$, INSTABILE

$y[n] = x[n] + y[n-1]$

$y[n-1] = x[n-1] + y[n-2]$

$y[n-2] = x[n-2] + y[n-3]$

$\vdots$

$y[n] = x[n] + x[n-1] + y[n-2] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + y[n-3] = \sum_{-\infty}^{k=\infty} x[k]$, INTEGRATORE

$h[n] = u[n]$ (è infatti la risp. all'impulso dell'integratore).

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$, CONDIZIONE DI STABILITÀ BIBO

, concentriamoci sulla frazione:

$$6z^2 - z - 1 = 0 \rightarrow P_1 = \frac{1}{2}, \; P_2 = -\frac{1}{3}$$

$$Y(z) = z^2 + z + 4 + \frac{11z+2}{6(z-P_1)(z-P_2)} = z^2 + z + 4 + \frac{1}{6} \cdot G(z)$$

$$G(z) = \frac{11z+2}{(z-P_1)(z-P_2)}$$

$$G(z) = C_1 \cdot \frac{z}{z-P_1} + C_2 \cdot \frac{z}{z-P_2} + C_0$$

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{11z+2}{z(z-P_1)(z-P_2)} = \frac{C_0}{z} + \frac{C_1}{z-P_1} + \frac{C_2}{z-P_2}$$

$$C_0 = \lim_{z \to 0} \frac{G(z)}{z} \cdot z = \frac{2}{P_1 P_2} = -12$$

$$C_1 = \lim_{z \to P_1} \frac{G(z)}{z}(z-P_1) = \lim_{z \to P_1} \frac{11z+2}{z(z-P_2)} = \frac{11P_1+2}{P_1(P_1-P_2)}$$

$$C_2 = \lim_{z \to P_2} \frac{11z+2}{z(z-P_2)} = \frac{11P_2+2}{P_2(P_2-P_1)}$$

$$Y(z) = z^2 + z + 4 + \frac{11z+2}{6z^2-z-1}$$

$$Y(z) = z^2 + z + 4 + \frac{1}{6}\left[C_0 + C_1 \frac{z}{z-P_1} + C_2 \frac{z}{z-P_2}\right]$$

$+\frac{a_0}{4}$.

Ne deriva un sistema:

$$\begin{cases} a_0 + b_0 = 0 \\ -a_0 + a_1 - \frac{b_0}{2} + b_1 = 1 \\ \frac{a_0}{4} - a_1 = 1 \\ \frac{a_1}{4} = 1 \end{cases}$$

SEGNALI PERIODICI IN TEMPO DISCRETO

La trasformata Z non esiste per i segnali periodici in tempo discreto:

$x[n] = A\cos(2\pi \frac{n}{M} + \theta)$, $n \in \mathbb{Z}$

Se un segnale tempo discreto ha periodo N può essere espresso nel suo periodo fondamentale come c. lineare dei segnali discreti:

$\psi_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi k \frac{n}{N}}$, da $n=0$ a $n=N-1$

$$\langle \psi_k[n], \psi_\ell[n] \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} \psi_k[n]\, \psi_\ell^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{j2\pi k \frac{n}{N}} e^{-j2\pi \ell \frac{n}{N}} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi (k-\ell)\frac{n}{N}}$$

- $C_k = \langle x[m], \psi_k[m] \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, \psi_k^*[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum x[m]\, e^{-j2\pi k \frac{m}{N}}$

$C_k = \underline{x} \cdot \underline{\psi_k}^*$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \qquad \underline{\psi_k}^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi \frac{k}{N}} \\ e^{-j2\pi \frac{2k}{N}} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Si può battezzare $\omega = e^{-j2\pi \frac{k}{N}}$, $\underline{\psi_k}^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \omega_k^0 \\ \omega_k^k \\ \omega_k^2 \\ \omega_k^{N-1} \end{bmatrix}$

E scrivere $x[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell]\, e^{-j2\pi k \frac{\ell}{N}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}\, e^{j2\pi k \frac{m}{N}}$

$$x[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell]\, e^{-j2\pi k \frac{\ell}{N}} \right) \cdot e^{j2\pi k \frac{m}{N}}$$

- $X(k) \triangleq \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell]\, e^{-j2\pi k \frac{\ell}{N}} = \sqrt{N}\, C_k$

$$x[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j2\pi k \frac{m}{N}}$$

$X(k)$ è la TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA, "DFT" $\rightarrow X(k) \triangleq \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, e^{-j2\pi k \frac{m}{N}}$, k da "0" a "N-1"
"IDFT", INVERSE DFT $\rightarrow x[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j2\pi k \frac{m}{N}}$, m da "0" a "N-1".

- Si nota che l'antitrasformata ha un

Quindi per i segnali periodici, invece della trasformata $\mathcal{Z}$ si usa la DFT.
Per il tempo continuo $x(t)$ periodico di periodo T, $x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$, con $\mu_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt$, si nota quindi che la IDFT è lo sviluppo in serie di Fourier del segnale.

• ESEMPIO:

$x[n] = A\cos(2\pi \frac{n}{N} + \theta)$, $n \in \mathbb{Z}$

Calcolare la DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}$$

$$x[n] = \frac{A}{2}\left[e^{j(2\pi \frac{n}{N} + \theta)} + e^{-j(2\pi \frac{n}{N} + \theta)}\right]$$

$$X(k) = \frac{A}{2} \text{DFT}\left\{e^{j(2\pi \frac{n}{N} + \theta)}\right\} + \frac{A}{2} \text{DFT}\left\{e^{-j(2\pi \frac{n}{N} + \theta)}\right\}$$

$$X(k) = \frac{A}{2} e^{j\theta} \text{DFT}\left\{e^{j(2\pi \frac{n}{N})}\right\} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} \text{DFT}\left\{e^{-j2\pi \frac{n}{N}}\right\}$$

$$\text{DFT}\left\{e^{j(2\pi \frac{n}{N})}\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{n}{N}} e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi (k-1) \frac{n}{N}} =$$

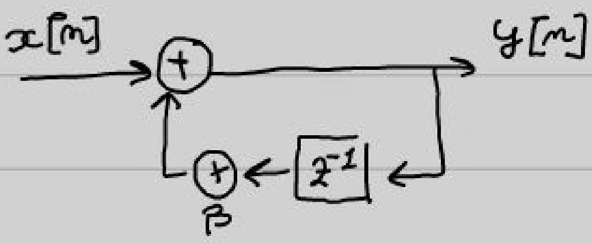
$= $ è la serie geometrica $= \dfrac{1 - e^{-j2\pi(k-1)}}{1 - e^{-j2\pi \frac{(k-1)}{N}}}$

Se $k \neq 1$, la serie vale 0

Se $k = 1$, la serie vale N

$$X(k) = 1 + e^{-j2\pi \frac{k}{4}} = \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3$$
$$= 1 + \left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)^k = 1 + (-j)^k$$

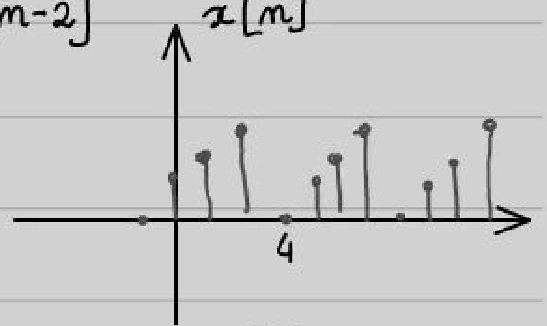
SEGNALI PERIODICI e SISTEMI LTI IN TEMPO DISCRETO



$x[n]$ é periodico, quindi non possiamo usare la trasformata $\mathcal{Z}$.

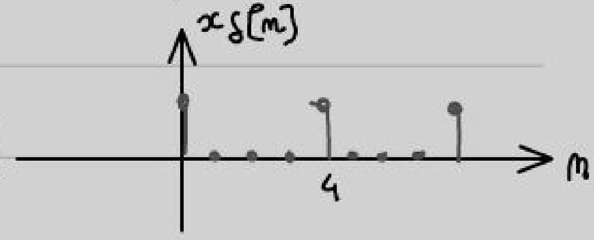
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k].$$

$$x_\delta[n] = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta[n - sN]$$, TRENO DI DELTA



$$x[n] = x_\delta[n] + 2x_\delta[n-1] + 3x_\delta[n-2] + 0 \cdot x_\delta[n-3].$$

Quindi il generico segnale periodico di periodo N, può essere scritto come



$$x[n] = x[0]\, x_\delta[n] + x[1]\, x_\delta[n-1] + \dots\, x[N-1]\, x_\delta[n-(N-1)]$$