NUMERO: 628

DATA: 12/09/2013

A P P U N T I

STUDENTE: La Malfa

MATERIA: Geometria
Prof. Spreafico

MATRICI

Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ positivi. Una <u>matrice</u> è l'insieme di $m \times n$ numeri reali disposti su <u>m righe</u> e <u>n colonne</u> racchiusi tra due parentesi.
L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ si indicherà con <u>$\mathbb{R}^{m,n}$</u>

Se $m = n$ si parlerà di matrici quadrate, se $m = 1$ di matrice riga, se $n = 1$ di matrice colonna.

DEF. Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. L'<u>opposto di A</u> è la matrice di $\mathbb{R}^{m,n}$, indicata con <u>$-A$</u>, la cui entrata (i,j) coincide con l'opposto dell'entrata (i,j) della matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ -3 & \sqrt{21} \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & -\pi \\ 3 & -\sqrt{21} \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

DEF. Due matrici si dicono <u>uguali</u> se hanno lo stesso numero di righe e colonne, e se le entrate aventi la stessa posizione nelle due matrici sono uguali.

MATRICI QUADRATE $(m=n)$

DEF. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. La diagonale di A è l'insieme ordinato di posizione (i,i) di A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

DEF. Una matrice quadrata si dice diagonale se tutte le entrate al di fuori della diagonale sono nulle, cioè se $a_{i,j} = 0$ quando $i \neq j$.

Fra le matrici diagonale una particolarmente importante è la matrice identità di ordine n (I_n), che ha tutte le entrate diagonali uguali a 1.

$$I_1 = (1) \qquad I_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DEF. Una matrice quadrata si dice:
- triangolare superiore se le sue entrate al di sotto della diagonale sono nulle;
- triangolare inferiore se le sue entrate al di ~~sotto~~ sopra della diagonale si annullano.

DEF. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Definiamo prodotto dello scalare α per la matrice A, la matrice di $\mathbb{R}^{m,n}$, indicata con αA, le cui entrate in posizione (i,j) è αa_{ij}.

Valgono le seguenti proprietà:

- per ogni $A \in \mathbb{R}^{m,n} \Rightarrow 1 \cdot A = A$
- per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1(\alpha_2 A) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot A$
  $\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2)A = \alpha_1 A + \alpha_2 A$
- per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow {}^t(\alpha A) = \alpha({}^tA)$
- per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si ha
  $\alpha A = 0_{m,n} \Leftrightarrow \alpha = 0$ o $A = 0_{m,n}$
  (legge di annullamento del prodotto per scalari.)

INVERSA DI UNA MATRICE QUADRATA

DEF Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. A si dice invertibile se esiste $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $AB = BA = I_n$.
Non è detto che una matrice quadrata, pur non nulla, abbia inversa.

DEF Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile. L'unica matrice $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $AB = BA = I_n$ viene detta inversa di A e viene indicata con A^{-1}

La matrice $(A|B)$ viene detta matrice completa del sistema.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Posto $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ il sistema può essere scritto in forma matriciale $AX = B$

Il sistema si dice omogeneo se $B = 0_{m,1}$, non omogeneo in caso contrario. Il sistema si dice compatibile se ha soluzioni, non compatibile o incompatibile in caso contrario.

RANGO DI UNA MATRICE

Da ogni matrice A, con operazioni elementari di riga, si potranno ottenere varie matrici ridotte per righe, anche molto diverse.

<u>DEF.</u> Sia $A \in K^{m,n}$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e sia A' una matrice ridotta per righe ottenuta da A con una successione finita di operazioni elementari di riga. <u>I numeri di righe di A' contenenti entrate non nulle</u> viene detto <u>rango</u> di A, $rk(A)$.

In particolare $rk(A) \leq m$ per definizione. Inoltre $rk(A)$ coincide con il numero di pivot di una forma ridotta per righe di A: ognuno di essi si trova necessariamente in una colonna diversa, quindi si ha anche $rk(A) \leq n$. Abbiamo dimostrato che:

<u>PROP.</u> Sia $A \in K^{m,n}$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Allora

$$rk(A) \leq \min\{m, n\}$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA

(i) Possiamo assumere che A sia una matrice fortemente ridotta per righe. Si possono presentare due casi per le righe della matrice completa $(A|B)$:

- Il primo caso è quello in cui esiste una riga di A con entrate tutte nulle che si prolunga in $(A|B)$ a una riga con entrate non tutte nulle. Ciò significa che nel sistema (1) figura un'equazione del tipo $0 = b_i$ che, per l'ipotesi $b_i \neq 0$, non ha soluzioni. Quindi il sistema (1) non ha soluzioni.
  È evidente inoltre che:

$$rk(A) \neq \underbrace{rk(A|B)}_{\boxed{rk(A)+1}}$$

- Nel secondo caso ogni riga di A con entrate tutte nulle si prolunga in $(A|B)$ a una riga con entrate tutte nulle. In questo caso si può risolvere il sistema, ~~che sarà~~ e risulta $rk(A) = rk(A|B)$

(ii) Se $rk(A) = rk(A|B)$ possiamo esprimere le incognite i cui coefficienti sono i pivot (in totale $rk(A)$) in funzione delle rimanenti (in totale $n - rk(A)$), cui possiamo dare valori arbitrari.

EQUAZIONI MATRICIALI

Consideriamo sistemi diversi $AX_1 = B_1$, $AX_2 = B_2$, ..., $AX_p = B_p$ aventi la stessa matrice incompleta A. Tale tipo di problema si presenta in varie situazioni. È evidente che è inutile ripetere le stesse operazioni per ciascun sistema: è più conveniente risolvere simultaneamente i sistemi, cioè considerare l'equazione matriciale $AX = B$ ove X e B sono rispettivamente una matrice incognita ed una numerica aventi colonne di indice j pari ad X_j e B_j rispettivamente.

DEF Siano $A \in K^{m,n}$, $B \in K^{m,p}$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
Un' <u>equazione matriciale</u> lineare con matrice incompleta A e matrice dei termini noti B è un'equazione della forma $AX = B$.

L'equazione $AX = B$ si dice omogenea se $B = O_{m,p}$, non omogenea altrimenti. Una soluzione di questa equazione è una matrice numerica $\overline{X}$ per cui vale l'identità $A\overline{X} = B$.

Il metodo di soluzione delle equazioni matriciali è totalmente analogo a quello dei sistemi di equazioni lineari (che ne sono un caso particolare quando la matrice dei termini noti si riduce ad una colonna unica).

CALCOLO DELL'INVERSA DI UNA MATRICE

Un caso particolarmente interessante di equazioni matriciali è quello delle equazioni della forma $AX = I_n$. Chiedere che una tale equazione sia compatibile equivale a chiedere se la matrice A sia invertibile. Infatti se l'equazione è compatibile la sua unica soluzione è A^{-1}.

PROP. $A \in K^{n,n}$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ è invertibile se e solo se $rk(A) = n$

DIMOSTRAZIONE

$AX = I_n$ ha soluzioni $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow rk(A) = rk(A \mid I_n) = n$

Inoltre, se $rk(A) = n$, per calcolare A^{-1}:

$$(A \mid I_n) \xrightarrow{\text{riduco}} (I_n \mid A^{-1})$$

$$AX = I_n \Longleftrightarrow I_n X = A^{-1}$$

(iv) $n \geq 4 \Rightarrow D(A) = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + A_{1n} \cdot a_{1n}$

In generale per calcolare il determinante di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è necessario moltiplicare $n!$ determinanti di matrici quadrate d'ordine 1 e sommarli dopo averli moltiplicati per un'opportuna potenza di -1.

FATTI UTILI

- Il calcolo del determinante si può sviluppare dalla riga che si vuole:

$$D(A) = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in},$$

dove $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot B_{ij}$

- Il calcolo del determinante si può fare anche sviluppando rispetto ad una colonna.
- Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è una matrice triangolare inferiore o triangolare superiore, il calcolo del suo determinante si riduce al prodotto delle entrate sulla diagonale.

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

- $R_i \leftrightarrow R_j \Rightarrow \det(A) = -\det(A')$
- $R_i \to hR_i \Rightarrow \det(A') = h \det(A)$
- $R_i \to R_i + kR_j \Rightarrow \det(A) = \det(A')$
- $D(-A) = (-1)^n \cdot D(A)$
- $D(hA) = h^n \cdot D(A)$
- $D(A) = D({}^tA)$

Consideriamo il prodotto $B = A \cdot \tilde{A}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(A) & 0 & 0 \\ 0 & D(A) & 0 \\ 0 & 0 & D(A) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = A \cdot \tilde{A} = D(A) \cdot I_n}$$

COROLLARIO Sia $A \in K^{n,n}$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow D(A) \neq 0 \quad (\Leftrightarrow rk(A) = n)$$

DIMOSTRAZIONE COROLLARIO

$\Rightarrow$ se $\exists A^{-1} \Rightarrow A \cdot A^{-1} = I_n$

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n)$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

$$\Rightarrow D(A) \neq 0$$

$\Leftarrow$ se $D(A) \neq 0$, per il teorema

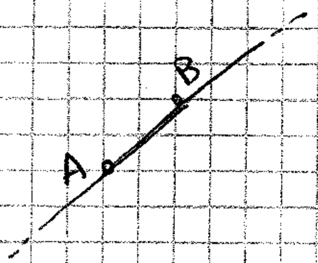
$$A \cdot \tilde{A} = D(A) \cdot I_n \Rightarrow \underbrace{A\left(\frac{1}{D(A)} \cdot \tilde{A}\right) = I_n}_{\text{definizione matrice inversa}}$$

$\Rightarrow A$ è invertibile ed è uguale a

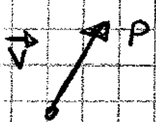
$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \cdot \tilde{A}}$$

VETTORI GEOMETRICI

Siano A e B due punti di S_n (se $n=2$ sono punti del piano S_2, se $n=3$ dello spazio S_3). Se $A \neq B$ esiste un'unica retta r passante per A e B e tali punti dividono la retta in tre parti: una semiretta di origine A, una semiretta di origine B, ed una parte limitata di retta individuata dai due punti A e B che prende il nome di <u>segmento</u>. Se invece $A=B$ parleremo di <u>segmento degenere</u>, intendendo con ciò l'unico punto $A=B$.



<u>DEF.</u> Sia O un punto in S_n. Un <u>vettore $\vec{v}$</u> applicato in O è un segmento per il quale uno degli estremi è O e l'altro è P.



$$\vec{OP} = \vec{v}$$

Il vettore è caratterizzato da:

1) <u>direzione</u> (retta su cui giace)
2) <u>verso</u> (verso di percorrenza)
3) <u>modulo</u> (o lunghezza) $|\vec{OP}| = |\vec{v}| = |\overline{OP}|$

SISTEMI DI RIFERIMENTO

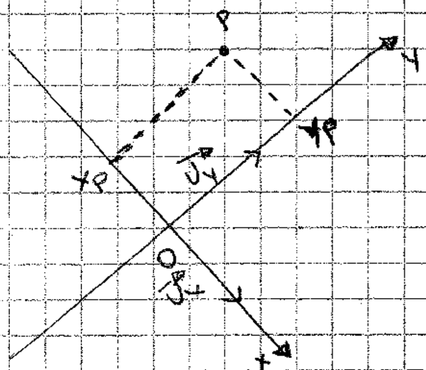
DEF. Un sistema di riferimento (cartesiano ortogonale) in S_2 è definito da:

(i) Un punto $O \in S_2$ detto origine del sistema di riferimento;

(ii) Un versore $\vec{i}$ applicato in O;

(iii) Un versore $\vec{j}$ applicato in O tale che il versore $\vec{i}$ si sovrappone al versore $\vec{j}$ con una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ radianti intorno ad O in senso antiorario.

Le direzioni di $\vec{i}$ e $\vec{j}$ vengono dette rispettivamente asse delle ascisse e delle ordinate.



Dati due punti generici $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, applicando il teorema di Pitagora si deduce che

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

OPERAZIONI CON I VETTORI

$\vec{OP}$ corrisponde al segmento $\overline{OP}$, $P=(x_p, y_p, z_p)$

Al vettore $\vec{OP}$ associo $\underbrace{(x_p\ \ y_p\ \ z_p)}_{\text{matrice riga}}$

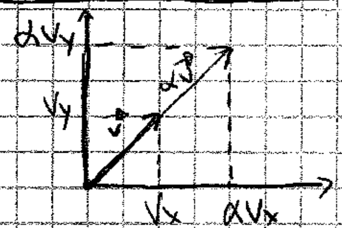
$\Rightarrow \vec{v} \rightsquigarrow (v_x\ \ v_y\ \ v_z)$

PRODOTTO PER UNO SCALARE

$\vec{v} \rightsquigarrow (v_x\ \ v_y\ \ v_z)$

$\vec{u} = \alpha\vec{v} \rightsquigarrow (\alpha v_x\ \ \alpha v_y\ \ \alpha v_z)$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



Quando moltiplico un vettore per uno scalare, ottengo un vettore $\alpha\vec{v} \parallel \vec{v}$, concordi se $\alpha > 0$, discordi se $\alpha < 0$.

PROP. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = \alpha\vec{v}$ $\left(\Leftrightarrow rk\begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \le 1\right)$

DIMOSTRAZIONE

$\Leftarrow$ Vedi interpretazione geometrica prodotto per uno scalare

$\Rightarrow$ si costruisce $\boxed{\alpha}$

$\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$ se concordi $\qquad -\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$ se discordi

PROPRIETÀ

- $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ (proprietà commutativa)
- $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$ (proprietà associativa)
- $(\vec{0} + \vec{v}) = \vec{v}$ (elemento neutro)
- $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ (c'è l'opposto)
- $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\cdot\vec{v}$
- $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
- $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$

TEOREMA

Per ogni vettori $\vec{v} \in V_3(O)$, esistono unici $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{v} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Quindi, una volta fissato di riferimento $C = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, possiamo associare ad ogni vettori $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, la matrice colonna

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\text{MATRICI DELLE COMPONENTI DI } \vec{u} \text{ RISPETTO ALLA BASE } C=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}} = {}^t(a_1\ a_2\ a_3) = [\vec{u}]_C$$

$\Downarrow$ (2) Per ipotesi, la matrice A diventa

$$A = \begin{pmatrix} \alpha u_{2x} + \beta u_{3x} & \alpha u_{2y} + \beta u_{3y} & \alpha u_{2z} + \beta u_{3z} \\ u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} \\ u_{3x} & u_{3y} & u_{3z} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 = R_1 - \alpha R_2 - \beta R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} \\ u_{3x} & u_{3y} & u_{3z} \end{pmatrix} = A'$$

$rk(A') \leq 2$

La matrice avrebbe avuto $rk(A') = 1$ se i tre vettori fossero stati tutti paralleli tra loro.

$\Uparrow$ (2) Se il rango non è massimo, una riga della matrice A è combinazione lineare delle altre.

PRODOTTO SCALARE

Un prodotto scalare di vettori $V_3(O)$ è una funzione

$$\cdot : V_3(O) \times V_3(O) \to \mathbb{R}$$

che associa una coppia $(\vec{u}, \vec{v})$ ad un numero reale e che verifica le seguenti proprietà:

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(ii) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

(iii) $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \alpha \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ e vale $0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Il prodotto scalare euclideo, oltre alle precedenti condizioni, verifica anche

(v) $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

(vi) $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

PROPOSIZIONE Siano $\vec{u} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ e $\vec{w} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ due vettori in $V_3(O)$. Allora

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{w} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= {}^t[\vec{u}]_C \cdot [\vec{w}]_C$$

DIMOSTRAZIONE Basta eseguire il prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{w} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k})$ Tenendo conto delle proprietà (v) e (vi)

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono due vettori non nulli, allora

$$-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \le \vec{u}\cdot\vec{v} \le |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{-1 \le \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \le 1}$$

DEF Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori non nulli di $V_3(O)$. L'angolo che essi formano è l'unico angolo $\theta \in [0, \pi]$ che verifica

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta}$$

In particolare, due vettori sono ortogonali se $\theta = \pi/2$ e quindi $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

$\alpha = \vec{u} \wedge \vec{v}$ è acuto $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} > 0$

$\alpha = \vec{u} \wedge \vec{v}$ è ottuso $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} < 0$

Il vettore nullo, per convenzione è ortogonale a qualsiasi vettore.

PROPOSIZIONE $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$,

dove $\alpha = \vec{u} \wedge \vec{v}$ (angolo formato dai due vettori)

DIMOSTRAZIONE L'uguaglianza è vera se e solo se

$$\frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \sin \alpha \Rightarrow \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|^2}{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2} = \sin^2 \alpha =$$

$$= 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - |\vec{u} \cdot \vec{v}|^2$$

Questa risulta essere verificata se confrontiamo $|\vec{u} \times \vec{v}|$ con il calcolo fatto a proposito della disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

Geometricamente, il modulo di $\vec{u} \times \vec{v}$ è l'area del parallelogramma di lati $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

PROPOSIZIONI

1) $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$

2) $\vec{u}$ non $\parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v}$

DIMOSTRAZIONE

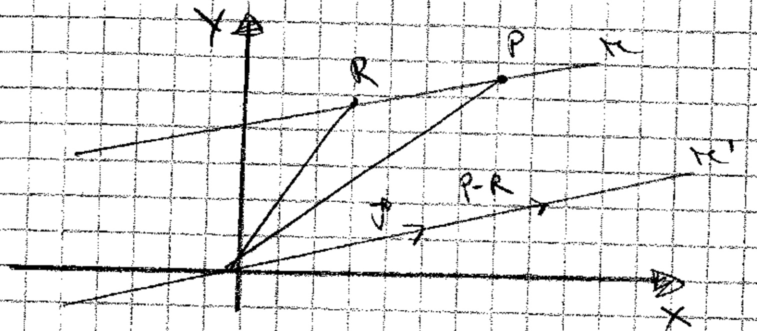
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} A_{11} + A_{12} + A_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 A_{11} + a_2 A_{12} + a_3 A_{13} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = 0$$ perché è una matrice con due righe uguali

GEOMETRIA ANALITICA

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI RETTE

Sia $r \subseteq S_3$ una retta. Tale retta è sempre parallela ad un'unica retta passante per l'origine r' e rimane completamente individuata da essa e da un punto qualsiasi $R \in r$. Dare r' equivale a dare un vettore $\vec{v} \neq 0$ avente r' come direzione.



$R(x_R, y_R, z_R)$

$P(x, y, z)$

$P - R = \vec{OP} - \vec{OR}$

$P - R = t\vec{v}$ (perché sono paralleli)

$\vec{OP} - \vec{OR} = t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_R\vec{i} + y_R\vec{j} + z_R\vec{k} + t(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_R + tb_1)\vec{i} + (y_R + tb_2)\vec{j} + (z_R + tb_3)\vec{k}$$

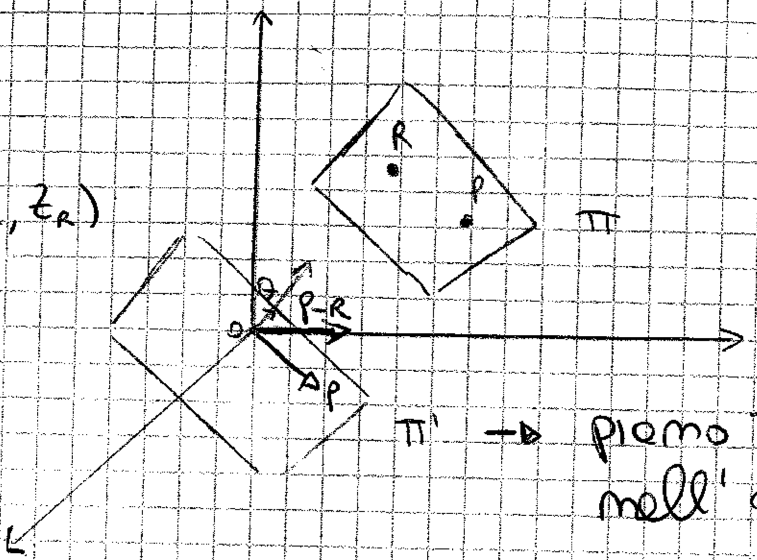
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_R + tb_1 \\ y = y_R + tb_2 \\ z = z_R + tb_3 \end{cases}} \Rightarrow \text{EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA RETTA}$$

EQUAZIONI CARTESIANE DI PIANI

$P(x, y, z)$

$R(x_R, y_R, z_R)$



P-R sta nel piano individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se

$$P-R = t\vec{u} + h\vec{v} \qquad [\vec{u}]_C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} - \vec{OR} = t\vec{u} + h\vec{v} \qquad [\vec{v}]_C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = \vec{OR} + t\vec{u} + h\vec{v}$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_R\vec{i} + y_R\vec{j} + z_R\vec{k} + (ta_1 + hb_1)\vec{i} + (ta_2 + hb_2)\vec{j} + (ta_3 + hb_3)\vec{k}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_R + ta_1 + hb_1 \\ y = y_R + ta_2 + hb_2 \\ z = z_R + ta_3 + hb_3 \end{cases}} \Rightarrow \text{EQUAZIONE PARAMETRICA DEL PIANO}$$

POSIZIONE RECIPROCA DI PIANI

π_1, π_2

$\boxed{\pi_1, \pi_2}$

- $\pi_1 \parallel \pi_2$
  - $=$
  - $\neq$
- $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = r$

$$\begin{matrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{matrix} \begin{cases} ax + by + cz = -d \\ a'x + b'y + c'z = -d' \end{cases}$$

cerco le soluzioni di questo sistema lineare $AX = B$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \end{array}\right)$$

① se $rk(A) = 1$

- $rk(A|B) = 1$
  $\exists\ \infty^2$ soluzioni
  $\boxed{\pi_1 = \pi_2}$
- $rk(A|B) = 2$
  $\nexists$ soluzioni
  $\Downarrow$
  $(a\ b\ c) = \alpha\,(a'\ b'\ c')$
  $\Downarrow$
  $\pi_1, \pi_2 \perp \vec{v}$ ma $\parallel$

② se $rk(A) = 2 = rk(A|B)$

$\Downarrow$

$\exists\ \infty^1$ soluzioni

$\boxed{\pi_1 \cap \pi_2 = r}$ (retta)

$$\cos\beta = \frac{|\vec{v_n} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v_n}||\vec{w}|} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

α è l'unico $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{v_n} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v_n}||\vec{w}|} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arcsin \frac{|\vec{v_n} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v_n}||\vec{w}|}}$$

INTERSEZIONE TRA FORME CARTESIANE

TEOREMA

$$r: \begin{cases} ax + by + cz = -d \\ a'x + b'y + c'z = -d' \end{cases}$$

$$\pi: a''x + b''y + c''z = -d''$$

$$r \cap \pi: \begin{cases} ax + by + cz = -d \\ a'x + b'y + c'z = -d' \\ a''x + b''y + c''z = -d'' \end{cases} \Leftrightarrow AX = B$$

Se $r \neq \phi \Rightarrow rk(A) \geq 2$

Allora:

(i) $rk(A) = 2 = rk(A|B) \Rightarrow \exists\, \infty^1$ sol., cioè $r \subset \pi$

(ii) $rk(A) = 2 \neq rk(A|B) = 3 \Rightarrow \nexists$ sol, cioè $\pi \parallel r$

(iii) $rk(A) = 3 = rk(A|B) \Rightarrow \exists!$ sol, cioè $r \cap \pi = P$ (punto)

OSSERVAZIONE. Cerco le equazioni degli assi.

ASSE X $\to (0,0)$ $\quad \vec{V}_x = \vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + 0\cdot t \\ z = 0 + 0\cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Forma parametrica $\qquad$ Forma cartesiana

$\boxed{\text{ASSE Y}}$ $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\boxed{\text{ASSE Z}}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

ESERCIZIO Siano date le rette

$$r: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + y + hz = 2 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$$

determinare al variare di h, la posizione reciproca di r ed s.

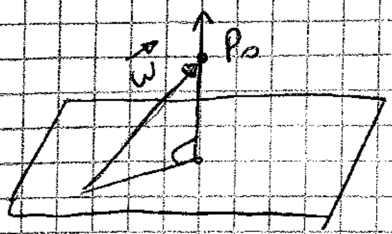
$r \cap s \Leftrightarrow AX = B$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & h & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 = R_4 - R_1]{R_3 = R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & h & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 = R_4 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & h & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 = R_4 + hR_3]{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2h \end{array}\right)$$

$\forall h,\ rk(A) = 3$
- $= rk(A|B) \Leftrightarrow h = \frac{1}{2} \Rightarrow r$ incidente a s
- $\neq rk(A|B) = 4 \Leftrightarrow \forall h \neq \frac{1}{2} \Rightarrow r, s$ sghembe

DISTANZA PUNTO - PIANO



$\pi: ax + by + cz + d = 0$

$\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Sia H il punto di π che ottengo proiettandolo ortogonalmente al piano. Dico che:

$$d(P_0, \pi) = \inf\{d(P_0, P) \mid P \in \pi\} = d(P_0, H)$$

1° modo Trovo s retta passante per P_0 e $\perp$ a π.

$$s: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad H = s \cap \pi$$

e poi calcolo $d(P_0, H)$

2° modo Preso un punto $P = (x_P, y_P, z_P) \in \pi$, considero $\vec{PP_0}$ e lo proietto su $\vec{w}$

$$|\vec{HP_0}| = \left| \frac{\vec{PP_0} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \cdot \vec{w} \right| = \frac{|\vec{PP_0} \cdot \vec{w}|}{|\vec{w}|^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{|\vec{w}|} \qquad \vec{PP_0} = P_0 - P$$

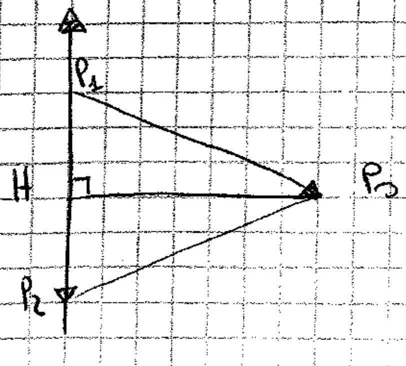
$$\Rightarrow \frac{\left| (x_0 - x_P \quad y_0 - y_P \quad z_0 - z_P) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{|a(x_0 - x_P) + b(y_0 - y_P) + c(z_0 - z_P)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d(P_0, H) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

DISTANZA PUNTO-RETTA



$$d(P_0, r)$$

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

$$\vec{v_r} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$d(P_0, r) = d(P_0, H)$$

1° modo Costruisco $\pi \ni P_0$, $\pi \perp r$

$\pi: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$\pi \cap r = H$ e poi calcolo $d(P, H)$

2° modo $t=0$ $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in r$

$t=1$ $P_2 = (x_1+a, y_1+b, z_1+c) \in r$

$$\text{Area}(P_0P_1P_2) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{P_1P_2})h$$

$$\Rightarrow h = d(P_0, r) = \frac{2\,\text{Area}(P_0P_1P_2)}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{P_1P_2} \times P_1P_0|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|};$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \vec{v_r}$$

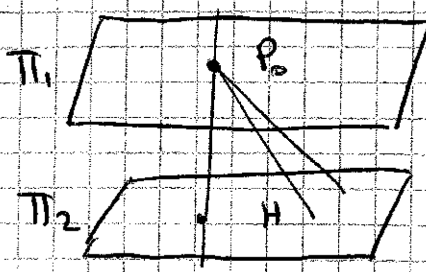
$$h = \frac{|\vec{v_r} \times P_1P_0|}{|\vec{v_r}|}$$

$\boxed{\text{DISTANZA PIANO - PIANO}}$

$\pi_1 = \pi_2 \Rightarrow d(\pi_1, \pi_2) = 0$

$\pi_1 \ // \ \pi_2$ (distinti) (2)

$\pi_1 \cap \pi_2 = r \Rightarrow d(\pi_1, \pi_2) = 0$



$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_0, \pi_2)$
dove P_0 è un qualsiasi punto di π_1

Esempio

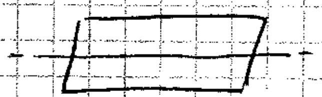
$\pi_1 : x + 2y + z = 1$
$\pi_2 : x + 2y + z = 7$

$P_0 \in \pi_1 \qquad P_0 = (0, 0, 1)$

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_0, \pi_2) = \frac{|1-7|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

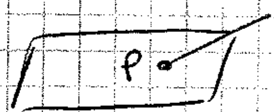
$\boxed{\text{DISTANZA PIANO - RETTA}}$

$r \subseteq \pi$



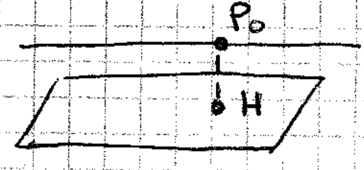
$d(r, \pi) = 0$

$r \cap \pi = P$



$d(r, \pi) = 0$

$r \ // \ \pi$



$d(r, \pi) = d(P_0, \pi)$
per un qualsiasi $P_0 \in r$

Esempio

$$r: \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1+h \\ y = 2+h \\ z = 3+2h \end{cases}$$

Innanzitutto verifichiamo che le due rette siano sghembe

$$\vec{v}_r = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \qquad \vec{v}_s = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

- $\vec{v}_r \neq \alpha \vec{v}_s \Rightarrow r$ non $\parallel s$
- $r \cap s \quad \begin{cases} -t = 1+h \\ t = 2+h \\ t = 3+2h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1-h \\ 2h = -3 \\ 3h = -4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1-h \\ h = -3/2 \\ h = -4/3 \end{cases}$$ non ci sono soluzioni

$P \in r \quad P(-t, t, t)$

$Q \in s \quad Q(1+h, 2+h, 3+2h)$

$$\vec{PQ} = Q - P = (1+h-t)\vec{i} + (2+h-t)\vec{j} + (3+2h-t)\vec{k}$$

$$\begin{cases} \vec{PQ} \perp \vec{v}_r \\ \vec{PQ} \perp \vec{v}_s \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \\ \vec{PQ} \cdot \vec{v}_s = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1(1+h+t) + 1(2+h-t) + 1(3+2h-t) = 0 \\ 1(1+h+t) + 1(2+h-t) + 2(3+2h-t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 3/7 \\ h = -19/14 \end{cases}, \quad P = \left(-3/7, 3/7, 3/7\right), \quad Q = \left(1 - 19/14, 2 - 19/14, 3 - \frac{19}{7}\right)$$

$d(r,s) = d(P,Q) = \dots$

2° MODO: completamento quadrati

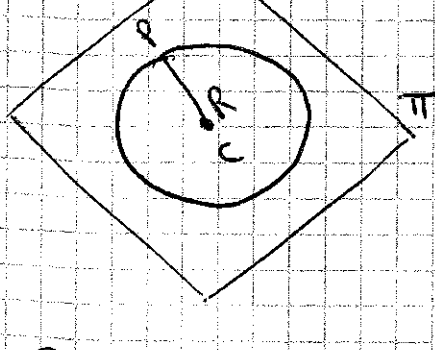
$$x^2+y^2+z^2-2x+6y-17=0$$
$$(x-1)^2-1+(y+3)^2-9+z^2=17$$
$$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=27$$
$$\Downarrow$$
$$C=(1,-3,0) \quad , \quad R=\sqrt{27}$$

CIRCONFERENZE NELLO SPAZIO

Sia $\pi \subseteq S_3$ un piano, $C \in \pi$, $R>0 \in \mathbb{R}$. Definiamo circonferenza del piano π, di centro C e raggio R il luogo dei punti P tali che $d(P,C)=R$.

$$\underline{\gamma=\{P\in\pi \mid d(P,C)=R,\ C\in\pi\}}$$

La circonferenza si può pensare come l'intersezione del piano π con una sfera S di raggio R e centro C.

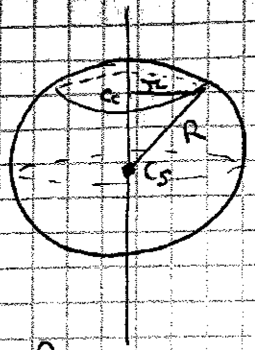


$$\pi: \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$$
$$S: (x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=R^2$$

$$\gamma=\pi\cap S$$

$$\gamma: \begin{cases}(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=R^2\\ \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta\end{cases}$$

EQUAZIONE CARTESIANA DELLA CIRCONFERENZA



$$r_C = \sqrt{R^2 - d^2(C,\pi)} = $$
$$= \sqrt{4 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{11}{3}}$$

Per calcolare C_c scrivo la retta passante per C_s, $\perp$ a π

$\vec{v} \perp \pi = (1,1,1)$

$$s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 + t \\ z = 0 + t \end{cases} ; \qquad s \cap \pi: \quad x+y+z=0$$
$$1+t+t+t=0$$
$$t = -\frac{1}{3}$$
$$\Downarrow$$
$$C_c = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

PIANI TANGENTI A SFERA

OSS Se ho S e π e $d(C,\pi) = R$, allora π è tangente alla sfera, poiché $S \cap \pi = P$.

Viceversa, data S e un punto $P_0 \in S$, come trovare π passante per P_0 e tangente a S?
Si può dimostrare che esiste un solo piano per P_0 e $\perp \vec{P_0C}$ e questo piano interseca la sfera S solo in P_0.

DEF. Sia $P_0 \in S$. Chiamo piano tangente a S in P_0, il piano per P_0 $\perp$ a $\vec{P_0C}$

FASCI DI SFERE

Supponiamo $S_1 \cap S_2 = \gamma$ (circonferenza)

$$\begin{cases} S_1: & x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \\ S_2: & x^2+y^2+z^2+\alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta'=0 \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} S_1: & x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \\ S_2-S_1=\pi: & x(\alpha'-\alpha)+y(\beta'-\beta)+z(\gamma'-\gamma)+\delta'-\delta=0 \end{cases}$$

PIANO RADICALE

$$\Downarrow$$

$$S_1 \cap S_2 = S_1 \cap \pi$$

Se $S_1 \cap \pi \neq 0 \Rightarrow$ è una circonferenza

Se ho $\gamma = S_1 \cap \pi$:

$$\begin{cases} S_1: & x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \\ \pi: & ax+by+cz+d=0 \end{cases}$$

che equazione ha $S_2 \supset \gamma$?

Se $S_2 \supset \gamma$, il sistema $\begin{cases} S_1 \\ \pi \\ S_2 \end{cases}$ ha le stesse soluzioni del sistema: $\begin{cases} S_1 \\ \pi \end{cases}$

$\Rightarrow$ l'equazione di S_2 è una combinazione dell'equazione di S_1 con l'equazione di π.

Tutte e sole le sfere che contengono γ sono del tipo

$$\boxed{\lambda(x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)+\mu(ax+by+cz+d)=0}$$

FASCIO DI SFERE [illegible]

FUNZIONI IN UNA VARIABILE A VALORI VETTORIALI

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$t \mapsto (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$

- $\lim_{x \to x_0} f(t) = \left(\lim_{x \to x_0} f_1(t), \lim_{x \to x_0} f_2(t), \dots, \lim_{x \to x_0} f_m(t) \right)$
- $f \in C^0(I) \iff f_i \in C^0(I) \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$
- $\exists f' \iff \exists f_i' \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$
- $f \in C^1(I) \iff f_i \in C^1(I) \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$

DEF La funzione f si dice regolare su I se

1) f è iniettiva su I
2) f sia di classe $C^1(I)$
3) $f'(t) \neq \vec{0}, \ \forall t$

ESEMPIO 1 $f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, t^2 + 1 \right)$

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

Si può estendere per continuità

$$\bar{f} : \begin{cases} (1, 1) = 0 & t = 0 \\ \left(\frac{\sin t}{t}, t^2 + 1 \right) & t \neq 0 \end{cases}$$

ESEMPIO 2 $f(t) = (t^2, t^3)$

1) è iniettiva: $f(a) = (a^2, a^3) \quad f(b) = (b^2, b^3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 \\ a^3 = b^3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{a \neq 0 \\ b \neq 0}]{} \begin{cases} \frac{a^3}{a^2} = \frac{b^3}{b^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = b}$$

ESEMPIO 1 $f(t) = (3\cos t, 3\sin t)$, $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

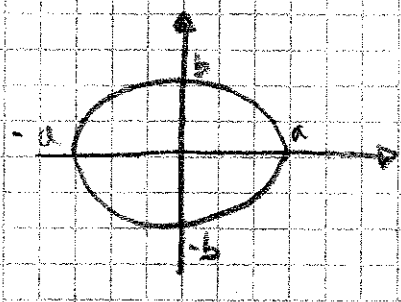
f è iniettiva
$f \in C^1(I)$
$f'(t) = (-3\sin t, 3\cos t) \neq (0,0)$ $\Rightarrow$ f è regolare

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 9(\cos^2 t + \sin^2 t)$$
$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{(circonferenza)}$$

In generale

$f(t) = (R\cos t, R\sin t)$ $\Rightarrow$ parametrizzazione di tutte le $\boxed{\text{circonferenze}}$ di centro O e raggio R.

ESEMPIO 2 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\boxed{\text{ellisse}}$



$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos\theta \\ \dfrac{y}{b} = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$

$$\theta = [0, 2\pi)$$

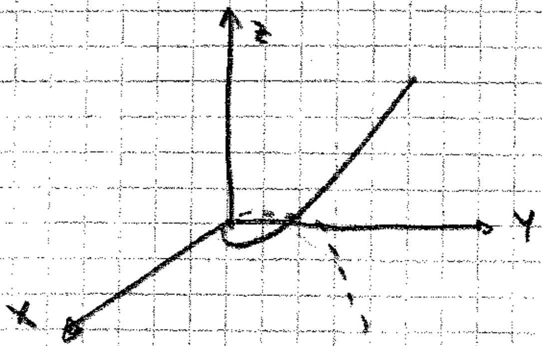
Questa è una parametrizzazione è regolare

$\Downarrow$

l'ellisse è una curva regolare

ESEMPIO 5 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$f(t) = (t, t^2, t^3)$ cubica gobba
o
cubica sghemba



f è iniettiva
$f \in C^1(\mathbb{R})$
$f' = (1, 2t, 3t^2) \neq (0,0,0)$
$\Rightarrow$ f è regolare, allora $C = Im(f)$ è una curva regolare

Proietto C su $z=0$, $C_1 = (t, t^2) = (x, y)$ in $\mathbb{R}^2$

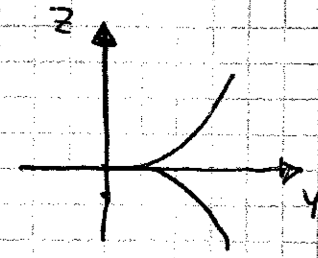
$y = x^2$ parabola (regolare)

Proietto C su $y=0$, $C_2 = (t, t^3) = (x, z)$ in $\mathbb{R}^2$

$z = x^3$ cubica

Proietto C su $x=0$, $C_3 = (t^2, t^3) = (y, z)$ in $\mathbb{R}^2$

$z^2 = y^3$



$g' = (2t, 3t^2) = (0,0)$ per $t=0$

OSSERVAZIONE C_3 non è regolare, cioè non esiste nessuna sua parametrizzazione regolare

OSS Nelle ipotesi della proposizione

$$g'(s) = f'(t(s)) \cdot t'(s)$$

In particolare se $t(s_0) = t_0$

$$g'(s_0) = f'(t(s_0)) \cdot t'(s_0)$$

Calcoliamo le rette per $P(t_0) = P(s_0)$ con direzione

$$\vec{v} = f'_x(t_0)\vec{i} + f'_y(t_0)\vec{j} + f'_z(t_0)\vec{k}$$

e

$$\vec{w} = g'_x(s_0)\vec{i} + g'_y(s_0)\vec{j} + g'_z(t_0)\vec{k}$$

$P = (f_x(t_0), f_y(t_0), f_z(t_0))$

$$r: \begin{cases} x = f_x(t_0) + f'_x(t_0) \cdot h \\ y = f_y(t_0) + f'_y(t_0) \cdot h \\ z = f_z(t_0) + f'_z(t_0) \cdot h \end{cases} \quad (*)$$

Usando g

$$r': \begin{cases} x = g_x(s_0) + f'_x(t_0) \cdot t'(s_0) \cdot l \\ y = g_y(s_0) + f'_y(t_0) \cdot t'(s_0) \cdot l \\ z = g_z(s_0) + f'_z(t_0) \cdot t'(s_0) \cdot l \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v} \parallel \vec{w}$$

e le due rette coincidono

DEF Se la curva C ha una parametrizzazione regolare data da $f: I \to \mathbb{R}^3$, allora definisco la retta tangente in $P(t_0)$ a C, la retta $(*)$

Sia $t: J \subseteq \mathbb{R} \to I \subseteq \mathbb{R}$ un cambio di parametro tale che

$$g(s) = f(t(s))$$

allora

$$g'(s) = f'(t(s)) \cdot t'(s)$$

$$g''(s) = f''(t(s)) \cdot t'(s)^2 + f'(t(s)) \cdot t''(s) =$$

$$= f'' \cdot (t')^2 + f' \cdot t''$$

$$g' \times g'' = f' \cdot t' \times \left(f''(t')^2 + f' \cdot t'' \right) = (t')^3 f' \times f'' \neq 0$$

Posso scegliere $t(s)$ regolare con $t' \neq 0$. Quindi:

$$g' \times g'' \neq 0 \iff f' \times f'' \neq 0$$

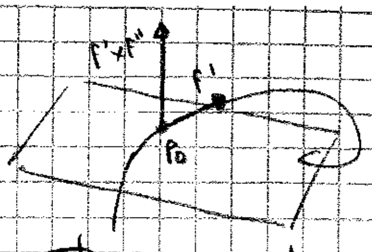
DEF Sia $C \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva e P_0 un punto appartenente alla curva. P_0 è un punto di flesso se $\exists f: I \to C$ regolare, $f \in C^2$ tale che

$$f' \times f''(t_0) = 0 \quad , \quad f(t_0) = P_0$$

Per quanto visto prima, questa definizione non dipende dalla parametrizzazione di f, ma è una proprietà intrinseca di $P_0 \in C$.

DEF Sia $P_0 \in C$ non di flesso e sia f regolare, $f \in C^2$. Definiamo piano osculatore in P_0 a C, il piano passante per P_0 ortogonale al vettore $f' \times f''(t_0)$.

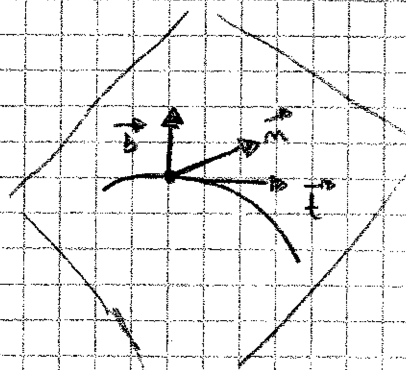
2) $f'(t_0) \parallel O_{P_0}C$



Vogliamo costruire una terna di versori che, su ogni punto, si comporti come la terna $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$\vec{t} = \dfrac{f'}{|f'|}$ versore tangente ($\vec{i}$)

$\vec{b} = \dfrac{f' \times f''}{|f' \times f''|}$ versore binormale ($\vec{k}$)



$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$ versore normale ($\vec{j}$)

Come stabilire se una curva è piana

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Scelgo $P_0 \in C$, calcolo $O_{P_0}(C)$ e vedo se $C \subseteq O_{P_0}(C)$; C è piana $\Leftrightarrow C \subseteq O_{P_0}(C)$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Esempio: $f(t) = (t^2, t^3, 2t^2 + 3t^3)$

$$\Downarrow$$

$$z = 2x + 3y$$

$$2x + 3y - z = 0$$

$$2t^2 + 3t^3 - (2t^2 + 3t^3) = 0 \quad \forall t$$

$\boxed{3° \text{ modo}}$ Si scelgono tre punti su C; si calcola il piano per i tre punti e si verifica se $C \subseteq \pi$.

Legami tra punti di flesso di una curva e quelli di una funzione

$$\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \varphi \in C^2$$

considero la curva grafico di φ

$$P(t) = (t, \varphi(t), 0)$$

$$f'(t) = (1, \varphi'(t), 0)$$

$$f''(t) = (0, \varphi''(t), 0)$$

$$f' \times f'' = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \varphi' & 0 \\ 0 & \varphi' & 0 \end{vmatrix} = \varphi''(t) \cdot \vec{k}$$

Se $\varphi''(t) \neq 0$ il punto non è di flesso e si può definire $O_{P_0}(C)$

LUNGHEZZA D'ARCO

$$f : I = [a, b] \to C \subseteq \mathbb{R}^3$$

Fissiamo una partizione

$t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$

$P(t_0), P(t_1), P(t_2), \ldots, P(t_n)$

Chiamiamo lunghezza della poligonale

$$l(P(t_0), \ldots, P(t_n)) = \sum_{i=0}^{n-1} |P_{i+1} - P_i| \quad , \quad P_i = P(t_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f_x(t_{i+1}) + f_x(t_i))^2 + (f_y(t_{i+1}) + f_y(t_i))^2 + (f_z(t_{i+1}) + f_z(t_i))^2}$$

DEF $D \subseteq \mathbb{R}^3$, $D \supseteq C$. $F: D \to \mathbb{R}$, $F \in C^0$, f regolare

Definisco:

$$\int_C F \, df := \int_a^b F(f(t)) |f'(t)| \, dt$$

Integrale di linea di I° specie

OSS: ASCISSA CURVILINEA

$f: [a,b] \to C$

$s(t) \int_a^t |f'(u)| \, du$ (funzione d'arco ~~ascissa curvilinea~~)

$s: [a,b] \to \mathbb{R}$

- s è derivabile e $s'(t) = |f'(t)| > 0$
- s è sempre crescente $\Rightarrow$ s è una funzione invertibile:

$s = s(t)$ inversa $\Rightarrow t = t(s)$

Quindi passo passare dalla parametrizzazione

$f(t) \rightsquigarrow g(s) = f(t(s))$ PARAMETRIZZAZIONE NATURALE O MEDIANTE ASCISSA CURVILINEA

$$g'(s) = f'(t(s)) \cdot t'(s) = f' \cdot \frac{1}{s'} = \frac{f'}{|f'|} \Rightarrow |g'| = 1$$

$$\Downarrow$$

$$g' = \vec{t}$$

$|g'| = 1 \Leftrightarrow |g'|^2 = g' \cdot g' = 1$

derivo $g' \cdot g' = 1 \Rightarrow (g' g')' = 1'$

$$g'' \cdot g' + g' \cdot g'' = 0$$

$$\Rightarrow 2 g' \cdot g'' = 0 \Rightarrow g' \perp g'' \Rightarrow g'' // \vec{n}$$

$$\vec{t} \perp g''$$

$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$

SPAZIO VETTORIALE

DEF Un insieme V viene detto spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) se $V \neq \phi$ e possiamo definire due operazioni:

- $S_V: V \times V \longrightarrow V$ somma

  $(v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2$

- $P_V \; \mathbb{R} \times V \longrightarrow \alpha V$ prodotto per scalare

  $(\alpha, v_1) \longrightarrow \alpha v$

Con queste proprietà:

(i) S_V commutativa;

(ii) S_V associativa $(v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3)$;

(iii) S_V ha un elemento neutro (indicato con 0);

(iv) $\forall v$ esiste l'opposto di v $(\exists w \mid w+v=0)$;

(v) $1 \cdot v = v$

(vi) $(\alpha_1 \alpha_2) \cdot v = \alpha_1(\alpha_2 v) = \alpha_2(\alpha_1 v)$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$

(vii) $(\alpha_1+\alpha_2) v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$

(viii) $\alpha_1(v+w) = \alpha_1 v + \alpha_1 w$

Inoltre, gli elementi di V si dicono vettori.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

1) $\mathbb{R}^{m,n} = V$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

2) $V = \{ f: [0,1] \to \mathbb{R}, \text{ continue} \}$

$f, g \in V \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x)$

L'elemento neutro è $h(x)=0, \forall x$

L'opposto di f è $-f$

· Va bene anche il prodotto

$\Rightarrow$ V è uno spazio vettoriale

CRITERI $W \subseteq V$ sottoinsieme di V.
W è sottospazio se e solo se vale una delle seguenti condizioni:

(i) $W \neq \phi$ ed è chiuso rispetto a $^{S_V}/_W$ e $^{P_V}/_W$

(ii) $\vec{0} \in W$ e W è chiuso rispetto alle operazioni.

Esempi

1) V spazio vettoriale

$W = \{\vec{0}\} \Rightarrow$ sottospazio banale

$W = V \Rightarrow$ sottospazio banale

2) $\mathbb{R}^{2,2} = V$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \middle| \; d_{11}, d_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} O_M \in W \\ M_1, M_2 \in W \Rightarrow M_1 + M_2 \in W \\ \alpha M_1 \in W, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right\} W \text{ è un sottospazio}$$

OSS $\mathbb{R}^{n,1} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \; x_i \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathbb{R}^{1,n} = \left\{ [x_1, \dots, x_n] \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$

Con $\mathbb{R}^n$ indichiamo o $\mathbb{R}^{n,1}$ o $\mathbb{R}^{1,n}$

X = soluzione
Y = soluzione   e verifico che $X+Y \in W_0$

$X \in W_0 \qquad AX = 0_r$
$Y \in W_0 \qquad AY = 0_r$

$A(X+Y) = AX + AY = 0_r + 0_r = 0_r$

$\Rightarrow X+Y \in W_0$

- chiuso rispetto al prodotto:

$\left.\begin{array}{l} X \in W_0 \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cdot X \in W_0$

$A(\alpha \cdot X) = \alpha(AX) = \alpha \cdot 0_r = 0_r$

APPLICAZIONI $\mathbb{R}^3$

- $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ con a,b,c fissati $\in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

I piani passanti per l'origine sono tutti ssp

- $W' = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}\right\}$

In generale è una retta per l'origine $(0,0,0)$ (oppure un piano per $(0,0,0)$)

• In generale $W_1 \cup W_2$ non è un sottospazio.

Esempio

$\mathbb{R}^2$: $W_1 = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$W_2 = \{(x, 5x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$W_1 \cup W_2 = \left\{ (a, 3a), (b, 5b) \;\middle|\; \begin{matrix} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$$

non è chiuso rispetto alla somma:

$$\underset{\substack{\cap \\ W_1 \\ \cap \\ W_1 \cup W_2}}{(1,3)} + \underset{\substack{\cap \\ W_2 \\ \cap \\ W_1 \cup W_2}}{(1,5)} = (2,8) \notin W_1 \cup W_2$$

$W_1 \cup W_2$ è un sottospazio

$\Updownarrow$

$W_1 \subseteq W_2 = W_2$

o

$W_2 \subseteq W_1 = W_1$

DEF W_1, W_2 due sottospazi contenuti in V.

$$W_1 + W_2 = \{ v + w \mid v \in W_1, \; w \in W_2 \}$$

$W_1 + W_2$ è un sottospazio ed è il più piccolo che contenga W_1 e W_2.

2) V , $\varphi(\vec{0}) = \{\alpha\vec{0} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\vec{0}\}$

3) $\mathcal{L}((1,1,0),(2,0,1)) = W \subseteq \mathbb{R}^3$

$(4,2,1) \in W$?

$\Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \mid (4,2,1) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(2,0,1)$

$$(4\ 2\ 1) = (\alpha_1 + 2\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 4 \\ \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2+2=4 \\ \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (4,2,1) \in W$$

oppure:

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & t \end{array} \end{array} ; \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Questo ci dice che

$$\mathbb{R}^n \subseteq \mathcal{L}(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$$

ESEMPIO

$$\mathbb{R}^{2,2} = \mathcal{L}\Big(\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}}_{E_{22}}\Big)$$

OSS

1) Se $\vec{w} \in \mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ non è detto che $\vec{w}$ si scriva in modo unico come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

$$\mathcal{L}\big((1\ 0), (1\ 1), (0\ 2)\big)$$

$$(1\ 2) = 1 \cdot (1\ 0) + 0 \cdot (1\ 1) + 1(0\ 2)$$
$$(1\ 2) = -1(1\ 0) + 2(1\ 1) + 0(0.2)$$

2) Se $V = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ diremo che V è finitamente generato ($\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m,n}$). Esistono comunque V non finitamente generati (ad esempio, polinomi, le funzioni $C^0(I)$).

PROPOSIZIONE $V \ni \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, allora $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ è un sottospazio e $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \mathcal{L}(\underline{v}_1) + \mathcal{L}(\underline{v}_2) + \dots + \mathcal{L}(\underline{v}_n)$

Dimostrazione

(1) Mostro che $\mathcal{L}(\underline{v}_1)$ è un sottospazio:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \vec{0} \in \mathcal{L}(\underline{v}_1) \quad \bullet\ \vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_1 \\ (S_V)\ \bullet\ \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_1 = (\alpha + \beta)\underline{v}_1 \in \mathcal{L}(\underline{v}_1) \\ (P_V)\ \bullet\ h(\alpha \underline{v}_1) = \mathcal{L}(v_1) + \mathcal{L}(v_2) + \dots + \mathcal{L}(v_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{è un sottospazio}$$

DEFINIZIONE $V \ni v_1, \dots, v_m$.

$v_1, \dots, v_m$ sono linearmente dipendenti se $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_m$ non tutti nulli (cioè almeno uno diverso da zero), tali che:

$$\alpha_1 \underline{v_1} + \alpha_2 \underline{v_2} + \dots + \alpha_m \underline{v_m} = \underline{0}$$

Sono invece linearmente indipendenti se l'unica combinazione che da zero ha

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

Esempi

1) $(1,0), (0,1) \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha_1 (1\ 0) + \alpha_2 (0\ 1) = (0\ 0)$$

$$\| $$

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\text{sono indipendenti}}$$

2) $\underset{\underline{v_1}}{(1\ 2\ 3)}, \underset{\underline{v_2}}{(-2, -4, -6)} \in \mathbb{R}^3$

$$2\underline{v_1} + \underline{v_2} = \underline{0}$$

3) $(1\ 0\ 0), (0\ 0\ 0) \in \mathbb{R}^3$

$$0 \cdot \underline{v_1} + \alpha_2 \underline{v_2} = \underline{0}$$

OSS. GENERALI

1) un solo vettore $\underline{v}$
- linearmente indipen $\Leftrightarrow$ $\underline{v} \neq \underline{0}$
- lin. dipendente $\Leftrightarrow$

2) due vettori
- se uno dei due è $\underline{0}$ $\Rightarrow$ dipendenti
- $\underline{v_1} \neq 0$, $v_2 \neq 0$ sono dipendenti $\Leftrightarrow$ sono proporzionali

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_4 \notin \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$$

BASI DI UNO SPAZIO VETTORIALE

__DEF__ Sia V spazio vettoriale. Si definisce __base di V__ un insieme __ordinato__ $\beta = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ di vettori $\underline{v}_i \in V$, tale che

1) $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = V$
2) $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ linearmente indipendenti

~~... ... condizione che~~

__OSS.__ 1) ci dice che sono il numero massimo di generatori indipendenti $\forall \underline{w} \in V$ $\underline{w} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$

2) ci dice che sono "minimali" come generatori; non posso levare nessun $\underline{v}_i$ (perché non lo ottengo come combinazione lineare dei rimanenti.

__PROPOSIZIONE__ V, e sia $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \beta$ una base di V. Allora

$\forall \underline{v} \in V \quad \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che

$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$

Chiamo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ componenti di $\underline{v}$ rispetto alla base β

$$[\underline{v}]_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad (= (\alpha_1, \dots, \alpha_n))$$

Esempio

$V = \mathcal{L}(1, x, x^2, x^3)$

$= \{ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \}$

$(1, x, x^2, x^3)$ è una base?

sono generatori? → si
sono indipendenti? → si
⇒ sono una base

$[1 - 3x^3]_\beta = (1 \ 0 \ 0 \ -3)$

PROPOSIZIONE $V \neq \{\underline{0}\}$, $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_m} \in V$

Allora

i) Se $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_m}$ generano V ⇒ posso estrarre una base da $\{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_m}\}$

(ii) Se V è finitamente generato e $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_m}$ sono linearmente indipendenti

⇓

∃ base di V che contiene $(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_m})$.
(li posso completare)

DIMOSTRAZIONE

(i) con il metodo degli scarti successivi

(ii) Se V è finitamente generato (f.g) allora $V = \mathcal{L}(\underline{w_1}, \dots, \underline{w_n})$. Considero tutti i vettori $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_m}, \underline{w_1}, \dots, \underline{w_n}$. Questi generano V e quindi applico il punto (i) partendo da $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_m}$ (che terrò sicuro perché sono indipendenti).