NUMERO: 626 DATA: 12/09/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Frison

MATERIA: Analisi Matematica II + Eserc.
Prof. Bacciotti

Programma del corso di Analisi Matematica II
Ing. Civile, Edile, Ambiente e Territorio
AA 2012/13

0 Richiami e complementi

Integrali multipli e teoria dei campi conservativi. Insiemi misurabili del piano. Integrale di Riemann delle funzioni di due variabili, estesi agli insiemi misurabili. Formule di riduzione: domini orizzontalmente o verticalmente convessi. Cambiamenti di coordinate. Calcolo di aree di figure piane. Proprieta' degli integrali doppi. Integrali tripli. Riduzione
1 per fili o per strati. Cambiamenti di coordinate per gli integrali tripli. Calcolo di volumi. Volume dei solidi di rotazione (dimostrazione). Elementi di geometria delle masse. Curve nello spazio n-dimensionale. Cambiamenti di parametro. Lunghezza di una curva. Indipendenza della lunghezza dalla parametrizzazione (dimostrazione). Integrale curvilineo dei campi scalari e integrale di linea dei campi vettoriali. Rotore, divergenza di un campo vettoriale dello spazio tridimensionale. Campi conservativi e nozione di potenziale. Condizioni necessarie di conservativita' (con dimostrazione) e condizioni sufficienti. Teorema di Green, con applicazione alla teoria dei campi conservativi nello spazio bidimensionale. Superfici nello spazio tridimensionale. Piano tangente e vettore normale. Cambiamenti di parametri per le superfici. Integrali di superficie dei campi scalari e integrali di flusso dei campi vettoriali. Teorema di Stokes, con applicazione alla teoria dei campi conservativi nello spazio tridimensionale. Teorema di Gauss. Superfici di rotazione.

Serie. Serie numeriche. Condizione necessaria di convergenza. Criterio del confronto per le serie a termini positivi (dimostrazione), criterio del rapporto (dimostrazione), criterio della radice. Teorema di Mc Laurin (dimostrazione). Convergenza assoluta, serie a segni alterni.
2 Successioni di funzioni. Convergenza puntuale e uniforme. Continuita' e integrabilita' della funzione limite (con dimostrazione). Derivabilita' della funzione limite. Serie di funzioni in generale. Integrazione e derivazione per serie, Criterio di Weierstrass. Serie di potenze. Definizione e calcolo del raggio di convergenza. Operazioni con le serie di potenze. Funzioni analitiche. Sviluppi notevoli. Spazi vettoriali con prodotto scalare e problema di minima distanza. Teorema della proiezione (con dimostrazione). Funzioni periodiche. Coefficienti di Fourier, convergenza (in media quadratica, uniforme e puntuale) della serie di Fourier.

$f(x)$ qualunque

FUNZIONI ARBITRARIE: funzione né complet. positiva, né complet. negativa.

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \rightarrow \text{si azzera la parte negativa.}$$

parte positiva di f)

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases} \rightarrow -f: \text{la funzione viene ribaltata sopra, facendola diventare positiva.}$$

parte negativa di f)

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$ → ho un modo per decomporre la funzione f.
→ solo 1 delle 2 funzioni è $\neq 0$.

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

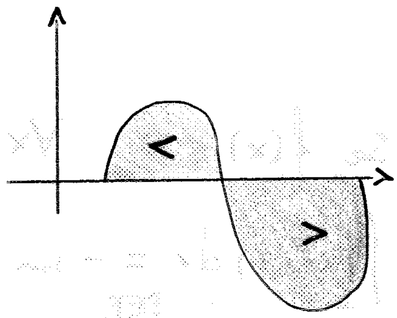
DEF. Data $f(x)$, $I \subseteq \text{dom} f$, limitata, dirò che f è integrabile su I se entrambe $f^+(x)$ e $f^-(x)$ sono integrabili e definisco:

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f^+(x)\,dx - \int_I f^-(x)\,dx =$$

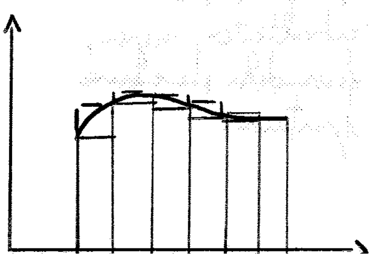
$$= m\left(T_{f^+, I}\right) - m\left(T_{f^-, I}\right)$$

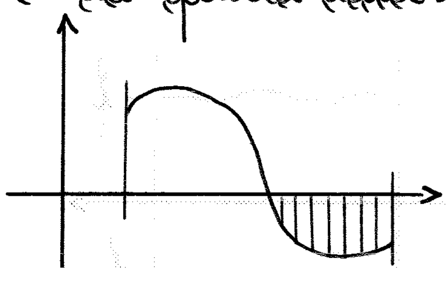
INTEGRALE: bilancio delle aree (entrate − uscite)

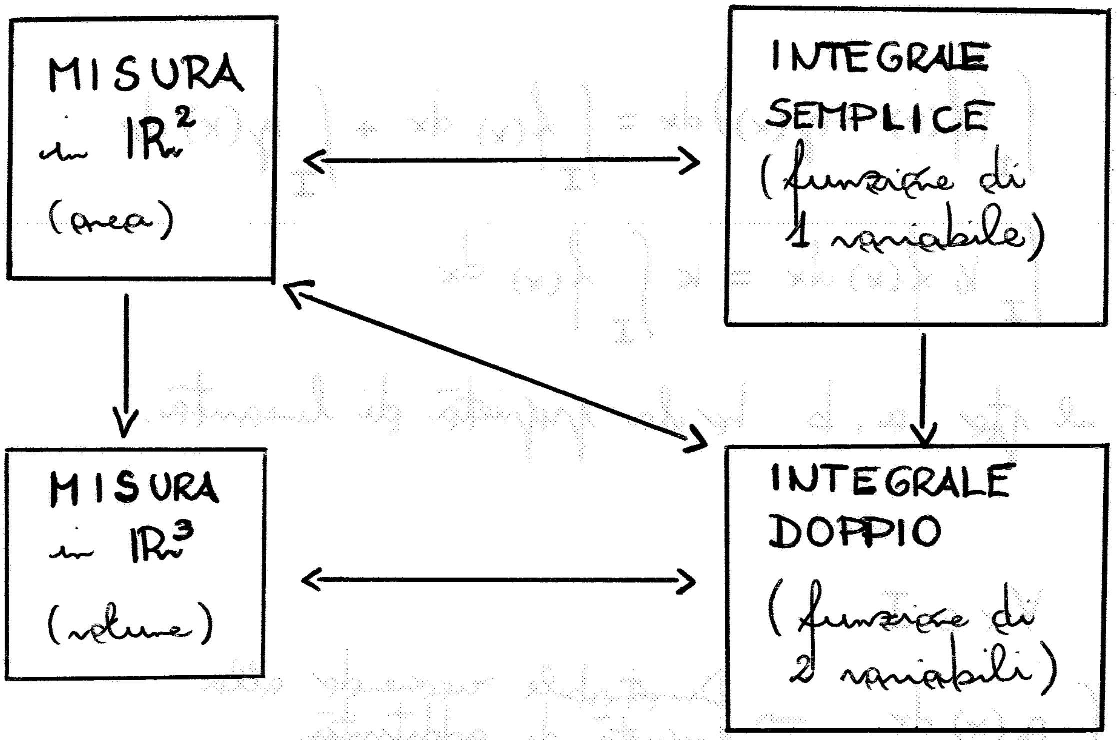
→ Il risultato può essere negativo! ES.



N.B. La definizione data non è molto diversa da quella data in ANALISI I.





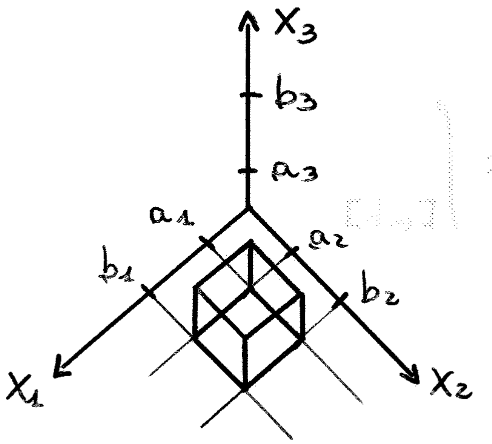


Aumenta di una dimens. da entrambe le parti.

$\mathbb{R}^3$ (x_1, x_2, x_3)

PARALLELEPIPEDO e IPER-RETTANGOLO

$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = Q$

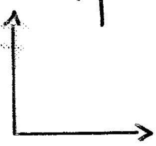


$m(Q) = (b_3 - a_3) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_1 - a_1)$

→ questa misura deriva dalla geometria elementare.

MISURA in R^3 (volume) $\longleftrightarrow$ INTEGRALE DOPPIO (funzione di 2 variabili

$\mathbb{R}^1$



$\mathbb{R}^2$

$$x_3 = f(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\text{dom } f \subseteq \mathbb{R}^2$$

PROPOSIZIONE:

Ip: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato

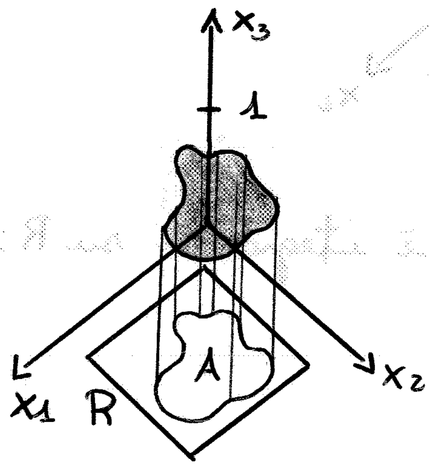
$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & (x_1,x_2) \in A \\ 0 & (x_1,x_2) \notin A \end{cases}$ è una funzione indicatrice di A

Sia R un rettangolo, $A \subseteq R$

Ts: $f(x_1,x_2)$ è integrabile su R se e solo se A è misurabile.

Inoltre $m(A) = \iint_R f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = \iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2$

L> xkè al di fuori di A è tutto ∅



è un volume !!

$m(A) \to$ AREA (A)

$1 \to$ ALTEZZA (h)

$\boxed{m(A) \cdot 1 = \text{VOLUME}}$

2) ESTENSIONE DEL CONCETTO DI INTEGRALE DOPPIO AI DOMINI DI INTEGRAZIONE = INSIEMI MISURABILI

$f(x_1,x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ LIMITATA

$A \subset \mathbb{R}^2$ MISURABILE

$A \subseteq \text{dom} f$

DEF. Dico che f è integrabile su A se la nuova funzione:

$\tilde{f}(x_1,x_2) = \begin{cases} f(x_1,x_2) & \text{se} \quad (x_1,x_2) \in A \\ 0 & \text{se} \quad (x_1,x_2) \notin A \end{cases}$

è integrabile su ogni rettangolo $R \supset A$

$\sim$: "tilde"

$\supset$: "che contiene" $\qquad f(x_1,x_2)$: funzione che deve integrare.

CALCOLO DEGLI INTEGRALI DOPPI:

$f(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA

sia R rettangolo : $[a,b] \times [c,d] \subseteq \text{dom} f$

"Blocchiamo" una delle 2 variabili (x_1): $F(x_1) = \int_c^d f(x_1,x_2)\, dx_2$

(è come risolvere un integrale semplice di AM.1)

TEOREMI:

1) $\int_a^b F(x_1)\, dx_1 = c$ (c = numero) NO DIM. [$F(x_1)$ è continua]

2) $c = \iint_R f(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2$ NO DIM.

N.B. $G(x_2) = \int_a^b f(x_1,x_2)\, dx_1$

$c = \int_c^d G(x_2)\, dx_2$

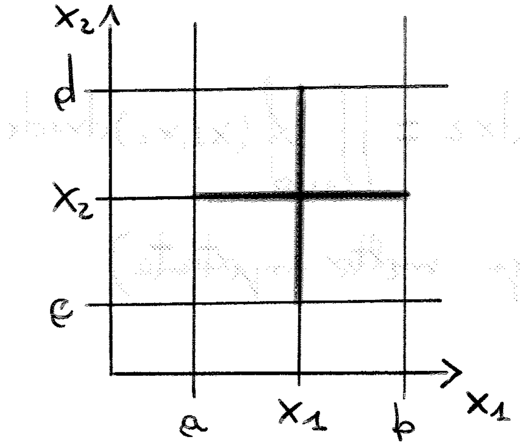
Integrale doppio ricondotto a ② integrazioni semplici.

$$\iint_R f(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_a^b \left(\int_c^d f(x_1,x_2)\, dx_2 \right) dx_1 =$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x_1,x_2)\, dx_1 \right) dx_2$$

→ FORMULE DI RIDUZIONE.

→ GRAFICAMENTE:



1° STRADA:

a) FISSO x_1.

b) VADO AD INTEGRARE SU x_2

2° STRADA: (viceversa 1° strada)

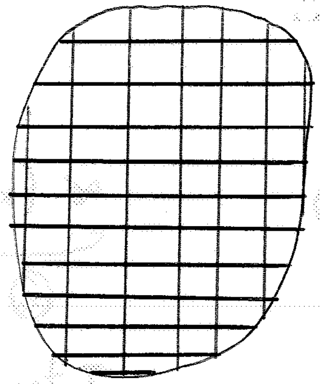
a) FISSO x_2.

b) VADO AD INTEGRARE SU x_1

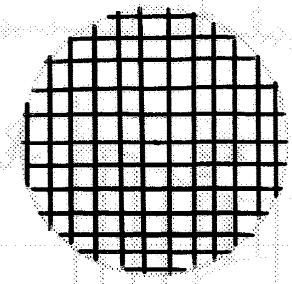
RIPASSO:

1) Figura verticalmente convessa:
&
Figura orizzontalmente convessa:

→ FIGURA CONVESSA.

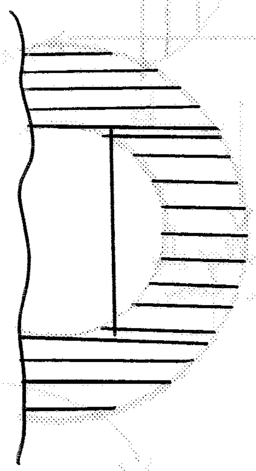


ES. Cerchio



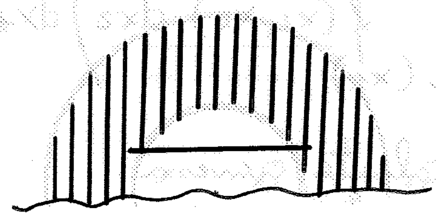
2) Figura orizzontalmente convessa:
&
Figura verticalmente non convessa:

→ FIGURA ORIZZONTALMENTE CONVESSA, MA NON CONVESSA.

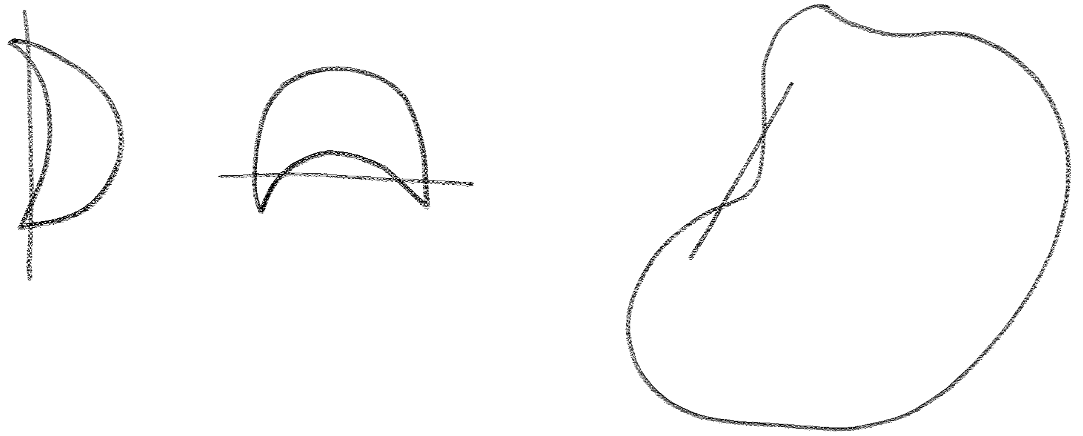


3) Figura verticalmente convessa:
&
Figura orizzontalmente non convessa:

→ FIGURA VERTICALMENTE CONVESSA, MA NON CONVESSA.

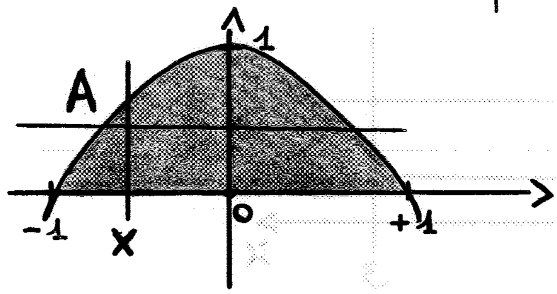


→ FIGURA ORIZZ./VERT. CONVESSA, MA NON CONVESSA:
→ non posso unire 2 punti sull'orizzontale/verticale senza uscire dall'insieme.



2) $\iint_A (3y + e^x)\,dx\,dy$ $\qquad A = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$

N.B. È molto importante fare il disegno del dominio!!



$1 - x^2 \rightarrow$ PARABOLA:
- concavità verso il basso

① $$\int_{-1}^{+1} \left(\int_0^{1-x^2} (3y + e^x)\,dy \right) dx = \frac{8}{5} + \frac{4}{e}$$ $\rightarrow$ fissata x!

Oppure

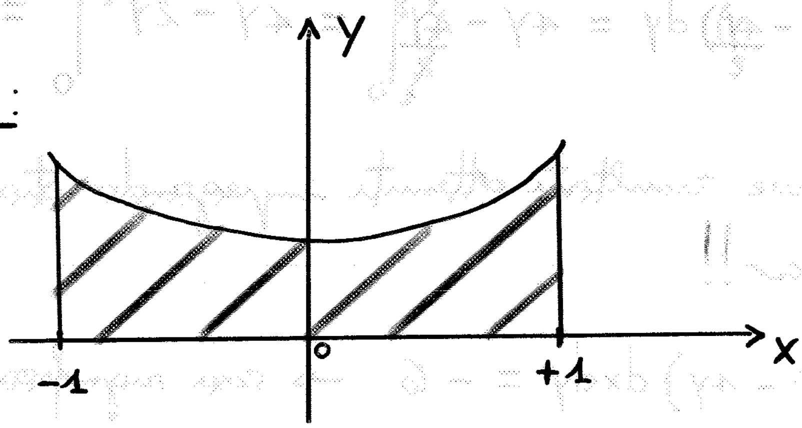
② $$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} (3y + e^x)\,dx \right) dy = \ldots$$ $\rightarrow$ fissata y!

$\rightarrow$ Occorre notare: $x^2 \leq 1 - y$

Ci sono sempre ② strade possibili per pervenire al risultato corretto. Una è più laboriosa dell'altra. $\rightarrow$ calcoli più complessi!! (come nel 2° caso).

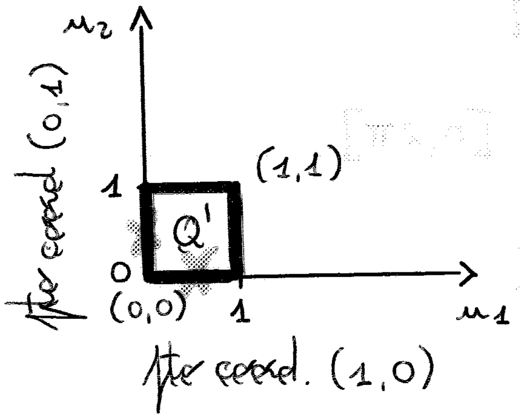
3) $\iint_A (x^2 + 4y)\,dx\,dy$ $\qquad A = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 + x^2\}$

$\rightarrow$ Disegno del dominio:



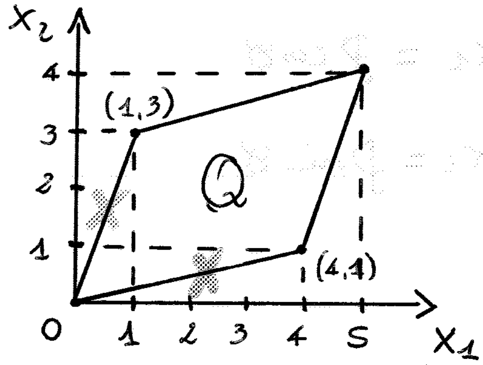
$$\int_{-1}^{+1} \left(\int_0^{1+x^2} (x^2 + 4y)\,dy \right) dx = \ldots$$ $\rightarrow$ fissata x!

3) $x = Tu \rightarrow \begin{cases} x_1 = u_1 + 4u_2 \\ x_2 = 3u_1 + u_2 \end{cases}$ (sul libro)



T (funzione) $\longrightarrow$

Come vengono trasformati i vertici di questo quadrato....



✗, ✗ : riescono sono trasformazioni lineari.

N.B.

Q' è più semplice di Q, xkè è un quadrato.

$$\iint_Q f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \iint_{Q'} f(u_1 + 4u_2, 3u_1 + u_2) \; ?$$

$dx_1 \, dx_2$ = 11 ; $(u_1 + 4u_2, 3u_1 + u_2)$ = 1

? → è presente un fattore correttivo!! (11) → x uguag

$f \equiv 1$

$m(Q) = 11 = |-11|$ → Risultato ottenuto dal prodotto vettoriale. $\left[\mathbb{R}^3 \quad (1,3,0) \wedge (4,1,0)\right]$

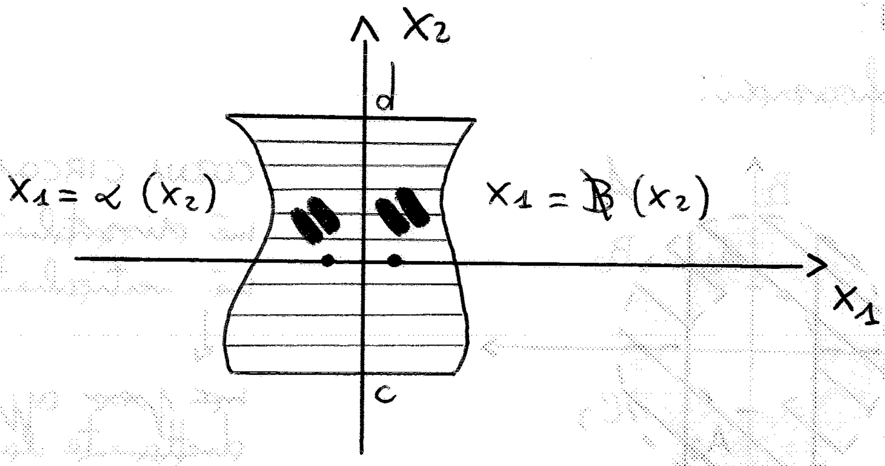
$m(Q') = 1$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -11 = |-11| = 11$$

vogliamo e prendiamo un risultato positivo!!

SEMPLICE!! → TRASFORM. LINEARI → fan intervenire il determinante della matrice.

ES. 3)



$\alpha(x_2) = -\beta(x_2) \qquad \forall x_2 \in [c,d]$

$f(x_1, x_2) = -f(-x_1, x_2)$

DISPARI RISPETTO a x_1

$\iint_A f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 0$ → per ragioni prevalentemente geometriche.
→ simmetria dominio.
→ " figura.

N.B. Se $f(x_1, x_2) = f(-x_1, x_2)$ → l'integrale non è più 0, però è presente una semplificazione.
→ Volume formato da due parti uguali.

$\alpha(x_2) = -\beta(x_2)$

$f(x_1, x_2) = f(-x_1, x_2)$

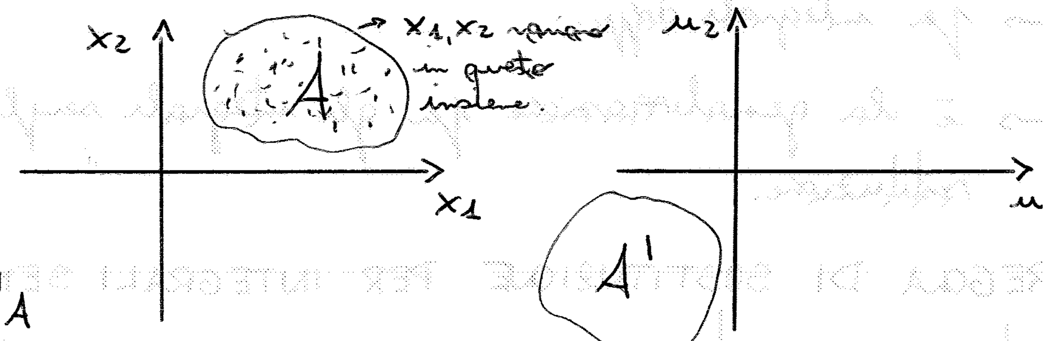
$\int_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 2 \int_{A_1 \,(A_2)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$

$\boxed{A_1 = A_2}$

Quindi: prima di partire e fare molti calcoli, occorre ragionare effettuare il disegno del dominio e analizzare l'eventuale presenza di semplificazioni di calcolo per motivi geometrici.

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + a_1 \\ x_2 = u_2 + a_2 \end{cases}$$

$a_1, a_2 \rightarrow$ numeri costanti reali



TRASLAZIONE

$\hookrightarrow$ è un moto rigido, quindi la forma di A non varia.

$\downarrow$

$\rightarrow$ non cambia il valore dell'integrale. $\longrightarrow$

$\rightarrow$ matrice identità

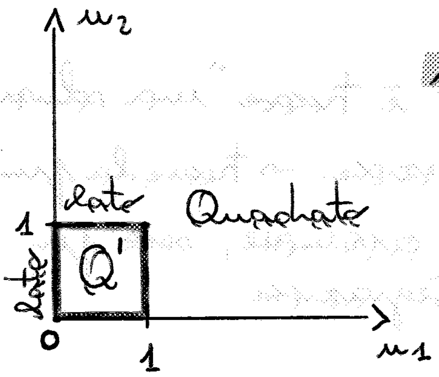
$$x = I u + a$$

$$\det I = 1$$

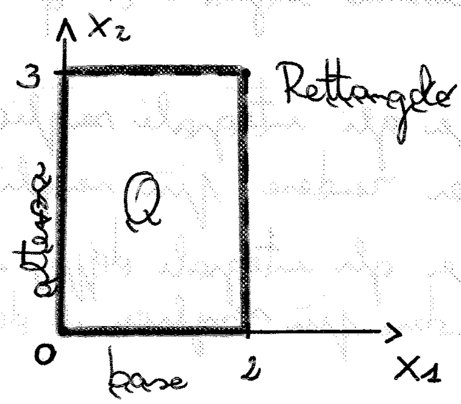
2) Cambio di coordinate:

$$\begin{cases} x_1 = 2u_1 \\ x_2 = 3u_2 \end{cases}$$

$\boldsymbol{x} = T u$ (x in funzione "T" di u)



AREE $\neq$



$m(Q') = 1 \neq m(Q) = 6 \rightarrow$ è presente una dilatazione

se $f \equiv 1$, calcolo l'area.

$$\iint_{Q} 1 \, dx_1 dx_2 \neq \iint_{Q'} 1 \, dx_1 dx_2 \quad \text{xké} \quad 6 \neq 1$$

$$\iint_{Q} 1 \, dx_1 dx_2 = 6 \qquad \iint_{Q'} 1 \, dx_1 dx_2 = 1$$

Per ritrovare lo stesso risultato occorre moltiplicare $Q' \cdot 6$ --> coeff. (fattore correttivo)

6: è il determinante della matrice di trasformazione.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$$

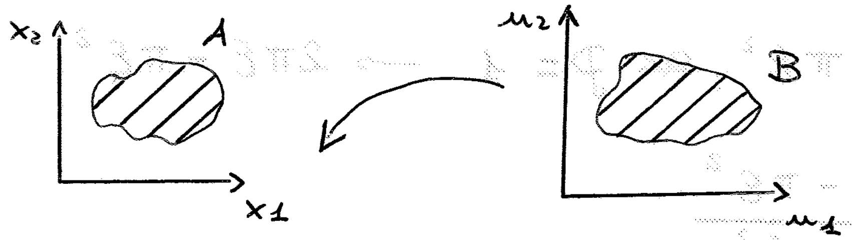
REGOLA GENERALE:

$$\iint_A f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$$T \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \psi_1(u_1, u_2) \\ x_2 = \psi_2(u_1, u_2) \end{cases} : \underset{(u_1,u_2)}{\mathbb{R}^2} \to \underset{(x_1,x_2)}{\mathbb{R}^2}$$

T biunivoca (non necessariamente su tutto il piano, ma su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ contenente A)

di classe C^1 (esistono e sono continue $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}$ ...)



1)

$$\iint_A f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \iint_B \Big(f(\psi_1(u_1,u_2), \psi_2(u_1,u_2)) \Big) \cdot \left|\det(JT)(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

↳ modulo ? valore assoluto

AREE

VOGLIAMO UN VALORE POSITIVO XKÈ STIAMO PARLANDO DI AREE.

$|\det(JT)(u_1,u_2)|$ → è un termine di $\boxed{\text{compensazione / correzione.}}$

GIOCANO LO STESSO RUOLO !!

2)

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\, dt$$

TRAPEZOIDI

L'area può essere negativa!

$\psi'(t) = +$

$\psi'(t) = -$

} <u>NON</u> OCCORRE IL <u>VALORE</u> <u>ASSOLUTO</u>.

VALUTARE CMQ GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE.

INTEGRALE TRIPLO: definito nel senso di Riemann

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{MISURA in } \mathbb{R}^2 \text{ (area)}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \boxed{\text{INTEGRALE SEMPLICE}} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\boxed{\text{MISURA in } \mathbb{R}^3 \text{ (volume)}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \boxed{\text{INTEGRALE DOPPIO}} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\boxed{\text{MISURA in } \mathbb{R}^4} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\text{INTEGRALE TRIPLO}}
\end{tikzcd}
$$

→ Schema riassuntivo del ragionamento!!

→ RAGIONAMENTO UGUALE A QUELLO PER INTEGRALI DOPPI.

→ IPER - RETTANGOLI:

$$P = \underbrace{\underbrace{\underbrace{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]}_{\mathbb{R}^2} \times [a_3, b_3]}_{\mathbb{R}^3} \times [a_4, b_4]}_{\mathbb{R}^4}$$

$$m(P) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3) \cdot (b_4 - a_4)$$

elementare)

Q = unione finita di iper-rettangoli $P_1, \dots, P_k$ non sovrapposti.

$$m(Q) = \sum_{k=1}^{k} m(P_k)$$

f è integrabile su A se $T_{f,A}$ è misurabile.

$$\iiint_A f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = m\,(T_{f,A})$$

2° step:

$$f(x_1,x_2,x_3) \leq 0 \longrightarrow \iiint_A f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = -m\,(T_{-f,A})$$

(solito concetto del ribaltamento e del segno $-$)

→ vedi integrali doppi

3° step: Caso generale → funz. arbitraria

$$f = f^+ \ominus f^-$$

$$\iiint_A f(x_1,x_2,x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iiint_A f^+(x_1,x_2,x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \; +$$

$$- \iiint_A f^-(x_1,x_2,x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

4° step: → "domini non necess. rettangoli"

$$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} f(x_1,x_2,x_3) & \text{su } A \\ 0 & \text{fuori di } A \end{cases}$$

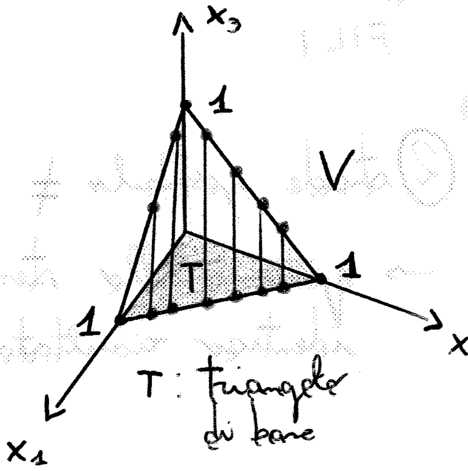
$$\iiint_A f(x_1,x_2,x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iiint_R \tilde{f}(x_1,x_2,x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$A \subset R$ (come fatto con le 2 variabili)

ESEMPIO: calcolo di un integrale triplo.

$f(x_1, x_2, x_3) = 1$ → calcolo di volumi mediante integrali tripli.

$\boxed{1^\circ \text{ rappr.}}$



T: triangolo di base

→ tanti "fili verticali".
→ tetraedro non regolare.

eq. piano: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

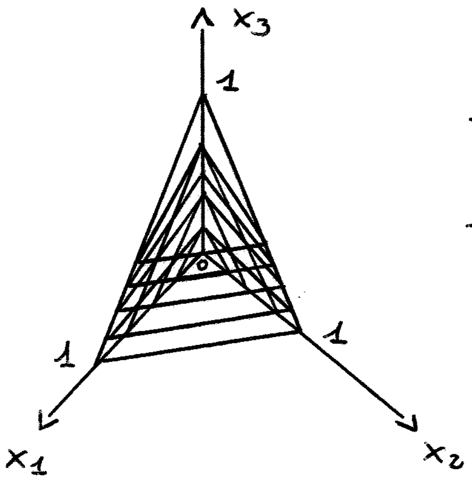
funzione: $x_3 = 1 - x_1 - x_2$

$V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \;, \quad x_3 \leq 1 - x_1 - x_2\}$

(volume)

→ insieme rappresentato con delle disequazioni.

$\boxed{2^\circ \text{ rappr.}}$



→ tanti "fogli sovrapposti".
strati
→ tetraedro non regolare.

Tutte e 2 le rappresentazioni / configurazioni mi forniscono il dominio

0.1 Cambiamenti di coordinate

È bene tener presente che nel calcolo degli integrali doppi le maggiori difficoltà provengono spesso non tanto dal tipo di funzione integranda, ma piuttosto dalla forma del dominio d'integrazione, e cioè dalla forma dei grafici delle funzioni che lo delimitano. Risulta quindi utile in molti casi fare ricorso a trasformazioni di tipo geometrico mediante le quali la forma del dominio viene semplificata. Tali trasformazioni sono nella sostanza dei cambiamenti di coordinate i quali, in genere, modificano la misura dell'area del dominio d'integrazione e quindi dell'integrale stesso. Per arrivare al risultato desiderato, bisognerà allora compensare la modifica apportata introducendo un termine opportuno. La situazione è analoga a quella in cui ci si trova quando si calcolano per sostituzione gli integrali semplici. In base alla nota formula, si ha infatti

$$\int_a^b f(x_1)\,dx_1 = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

dove è il fattore $\varphi'(t)$ che funge da termine compensatore.

Esempi

8. Una traslazione nel piano x_1x_2 è definita da equazioni del tipo

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + a_1 \\ x_2 = u_2 + a_2 \end{cases} \tag{1}$$

dove u_1, u_2 sono le nuove coordinate e a_1, a_2 sono costanti. Una traslazione non altera la misura delle aree. Quindi nel caso di una traslazione non c'è bisogno di fattori di compensazione. Si noti che il determinante della matrice jacobiana della trasformazione (1) è uguale ad 1.

9. Vogliamo calcolare l'integrale della funzione costantemente uguale a 1 sul dominio costituito dal parallelogramma S di vertici $(0,0)$, $(1,3)$, $(4,1)$, $(5,4)$. Si noti che il valore dell'integrale coincide in questo caso con l'area del parallelogramma. Effettuando il cambiamento di coordinate lineare

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + 4u_2 \\ x_2 = 3u_1 + u_2 \end{cases} \tag{2}$$

a quello che era un parallelogramma nel piano x_1x_2 corrisponde, nel piano u_1u_2, il quadrato Q di lato uno.

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{m(C_\rho)}{m(C_1)} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{2\pi\rho\varepsilon - \pi\varepsilon^2}{2\pi\varepsilon - \pi\varepsilon^2} = \rho \, .$$

Ciò può essere interpretato dicendo che l'area della corona circolare di spessore costante ε varia in ragione proporzionale al raggio.

Tuttavia, nel passaggio a coordinate polari, C_1 e C_ρ vengono rispettivamente trasformati in due rettangoli $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_\rho$ con la stessa base e la stessa altezza, per cui $m(\tilde{C}_\rho) = m(\tilde{C}_1)$. È dunque naturale congetturare che il fattore di compensazione da introdurre sia uguale a ρ.

Per cercare una conferma a questa congettura, proviamo a calcolare l'area del cerchio C di raggio r e centro l'origine. Passando alle coordinate polari, si ha

$$\int_C dx_1 dx_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho d\rho d\theta = \pi r^2$$

come era giusto attendersi. Osserviamo che il termine compensatore ρ coincide col determinante della matrice jacobiana della trasformazione (3)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} .$$

In generale, la funzione da integrare non sarà costante come abbiamo supposto per semplicità negli esempi precedenti. Si dovrà allora tener conto che la trasformazione di coordinate determina una sostituzione delle variabili: in pratica, si dovrà integrare la funzione che si ottiene componendo l'integrando originariamente assegnato con le funzioni che determinano il cambiamento.

Esempi

11. Sia A la parte del cerchio di raggio r e centro l'origine che si trova al di sopra dell'asse x_1, ovvero

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le r, \ x_2 \ge 0\} \, .$$

Vogliamo calcolare

$$\int_A (x_1 + x_2) \, dx_1 dx_2 \, .$$

Effettuando il passaggio a coordinate polari, A viene trasformato nel rettangolo $S = \{(\rho, \theta) : 0 \le \rho \le r, \ 0 \le \theta \le \pi\}$. Ricordando di introdurre il fattore di compensazione ρ, si ha

Sia infine B la regione descritta dai parametri u_1 e u_2 quando x_1 e x_2 descrivono la regione A. Allora

$$\iint_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \iint_B f(\psi_1(u_1, u_2), \psi_2(u_1, u_2)) \cdot |\det JT(u_1, u_2)|\, du_1 du_2 \,.$$

∎

Osservazione 0.1 Per definizione, un cambiamento di coordinate del tipo (4) determina una corrispondenza biunivoca tra il piano riferito alle coordinate $x_1 x_2$ e il piano riferito alle coordinate $u_1 u_2$. Se le trasformazioni (4) e le loro inverse sono tutte di classe C^1, allora si ha $\det JT(u_1, u_2) \neq 0$ in ogni punto.

Come osservato negli esempi precedenti, un cambiamento di coordinate si applica nella speranza che la forma geometrica di B sia più facilmente trattabile della forma di A.

∎

$$\tilde{f}(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} f(x_1,x_2,x_3) & \text{se } (x_1,x_2,x_3)\in V \\ 0 & \text{se } (x_1,x_2,x_3)\in Q\setminus V \end{cases},$$

dove Q è un parallelepipedo che contiene V, si dirà che f è *integrabile nel senso di Riemann* su V se $\tilde{f}$ è integrabile su Q, e si definisce l'*integrale triplo* di f nel senso di Riemann esteso a V come

$$\iiint_V f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1dx_2dx_3=\iiint_Q \tilde{f}(x_1,x_2,x_3)\,dx_1dx_2dx_3\ .$$

In particolare, se $f(x_1,x_2,x_3)=1$ allora l'integrale triplo esteso a V restituisce il volume di V. Come l'integrale doppio collega la nozione di area a quella di volume, così l'integrale triplo collega la nozione di volume a quella di misura dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$.

Le proprietà di additività dell'integrale rispetto al dominio di integrazione e rispetto alla funzione integranda, la proprietà di omogeneità e quella di monotonicità continuano naturalmente a valere anche per gli integrali tripli.

A causa della maggior varietà e complessità della forma geometrica dei possibili domini di integrazione, che sono adesso insiemi tridimensionali, dobbiamo mettere un po' più d'attenzione nello stabilire le tecniche di riduzione.

Così come l'integrale doppio si riduce, se il dominio di integrazione è verticalmente o orizzontalmente convesso, a una coppia di integrali parziali iterati, l'integrale triplo si ridurrà sotto condizioni opportune, al calcolo di tre integrali semplici.

A seconda della forma del dominio, vi sono due possibili strade: scrivere l'integrale triplo come un integrale semplice, seguito da uno doppio oppure viceversa, come un integrale doppio seguito da uno semplice. Nel primo caso si parla di riduzione *per fili*, nel secondo di riduzione *per strati*. Naturalmente l'integrale doppio verrà in ogni caso sostituito, in un passaggio successivo, con una coppia di integrali semplici. Cerchiamo di descrivere questi procedimenti di riduzione con alcuni semplici esempi.

Esempi

1. Si consideri la regione V di $\mathbb{R}^3$ definita dalle relazioni

$$0\le x_1\le 1\ ,\quad 0\le x_2\le 1\ ,\quad x_1+x_2\le x_3\le 3\ .$$

Vogliamo calcolare $\iiint_V x_3\,dx_1dx_2dx_3$. Se si considerano le sezioni di V fatte mediante piani perpendicolari all'asse x_3, si osserva che queste cambiano con la quota in modo non del tutto facile da descrivere. In questo caso, la riduzione per strati, ancorché possibile, non è però conveniente. Procediamo invece per fili verticali. Se Q è il quadrato definito da $0\le x_1\le 1$, $0\le x_2\le 1$, si ha

$$\iiint_V x_3\,dx_1dx_2dx_3 \quad=\quad \iint_Q\left(\int_{x_1+x_2}^3 x_3\,dx_3\right)dx_1dx_2=$$

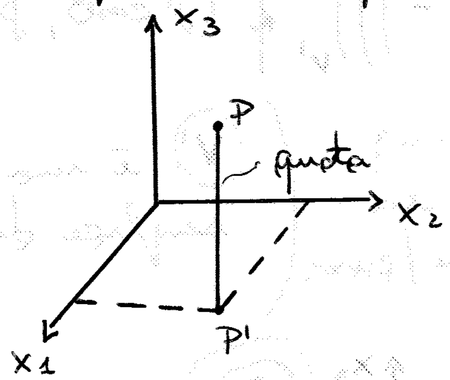
CAMBIO DI COORDINATE PER INTEGRALI TRIPLI → può essere conveniente in alcuni casi.

1) lineari → geometria.
2) a) coordinate cilindriche.
   b) coordinate sferiche.

} individuare, in base al caso, quella più conveniente.

Rappresentazione di un pto nello spazio, mediante:

: COORDINATE CARTESIANE:
(da Cartesio)

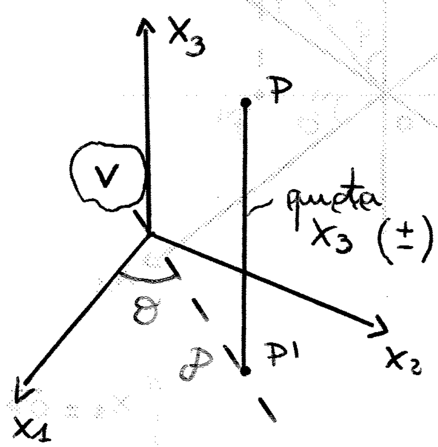


$P(x_1, x_2, x_3)$

: COORDINATE CILINDRICHE:

ρ: distanza dall'origine della proiezione di P.

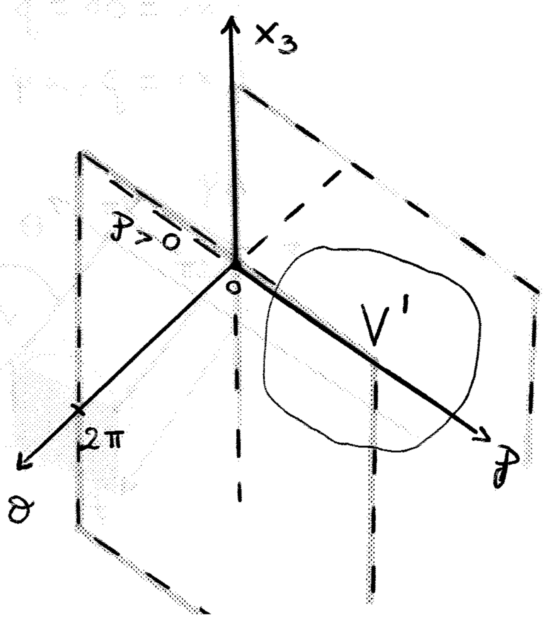
$\sqrt{x_1^2+x_2^2} = \rho > 0$



$P = (x_1, x_2, x_3)$
$P = (\rho, \theta, x_3)$

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cdot \cos\theta \\ x_2 = \rho \cdot \sin\theta \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

"raddrizzo" l'angolo!



θ: angolo $[0, 2\pi]$

$$\begin{cases} x_1 = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ x_2 = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ x_3 = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

- Jacobiano
- det |Jacobiano|

→ coeff. ...

→ COORD. SFERICHE!!

$$|J| = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \rho} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \rho} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \rho} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$\det|J| = \rho^2 \sin\varphi$ <u>DIM.</u>

$$\det|J| = (\sin\varphi\cos\theta)\cdot[(\rho\sin\varphi\cos\theta)(-\rho\sin\varphi)] +$$

$$-(\sin\varphi\sin\theta)\cdot[(-\rho\sin\varphi\sin\theta)(-\rho\sin\varphi)] +$$

$$+\cos\varphi\cdot\begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -\rho^2\sin^3\varphi\cos^2\theta - \rho^2\sin^3\varphi\sin^2\theta +$$

$$+\cos\varphi\,\{[(-\rho\sin\varphi\sin\theta)\cdot(\rho\cos\varphi\sin\theta)] - [(\rho\sin\varphi\cos\theta)\cdot(\rho\cos\varphi\cos\theta)]$$

$$= -\rho^2\sin^3\varphi\,\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1} - \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi\sin^2\theta - \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi\cos^2\theta$$

$$= -\rho^2\sin^3\varphi - \rho^2\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi\cdot\underbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}_{1} =$$

$$= -\rho^2\sin^3\varphi - \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi = -\rho^2\sin\varphi\cdot\underbrace{(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}_{1} =$$

$$= -\rho^2\sin\varphi = |\rho^2\sin\varphi|$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \rho^2 > 0 \\ \varphi\,[0,\pi] \end{cases}$$

→ MASSA DISTRIBUITA NON UNIFORMEMENTE : ②

Bisogna capire come varia la massa pto x pto!

→ DENSITÀ DI MASSA $\delta(x_1, x_2, x_3)$

$$(g_1, g_2, g_3) = \left(\underbrace{\frac{\iiint_A x_1 \,\delta(x_1,x_2,x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3}{\iiint_A \delta(x_1,x_2,x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3}}_{= g_1}, \underbrace{\frac{\iiint_A x_2 \,\delta(x_1,x_2,x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3}{\iiint_A \delta(x_1,x_2,x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3}}_{= g_2}, \underbrace{\frac{\iiint_A x_3 \,\delta(x_1,x_2,x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3}{\iiint_A \underbrace{\delta(x_1,x_2,x_3)}_{\text{funzione densità di massa}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3}}_{= g_3} \right)$$

→ MOTI D'INERZIA:

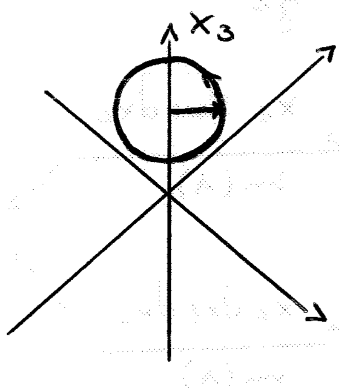
1) Moto attorno ad un pto. → ES. Satellite
2) Moto attorno ad un asse.
3) Momenti centrifughi.

MOM. D'INERZIA DI UNA FIGURA "A" RISPETTO ALL'ORIGINE CON MASSA UNITARIA:

→ corpo composto da tanti pti ognuno dotato di massa.

$$\iiint_A (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \qquad \text{M.D.U.}$$

$$\iiint_A (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\,\delta(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \qquad \text{M.D.N.U.}$$



$$\iiint_A (x_1^2 + x_2^2)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \qquad \text{M.D.U.}$$

$$\iiint_A (x_1^2 + x_2^2)\,\delta(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \qquad \text{M.D.N.U.}$$

→ MOM. D'INERZIA rispetto all'asse x_3.

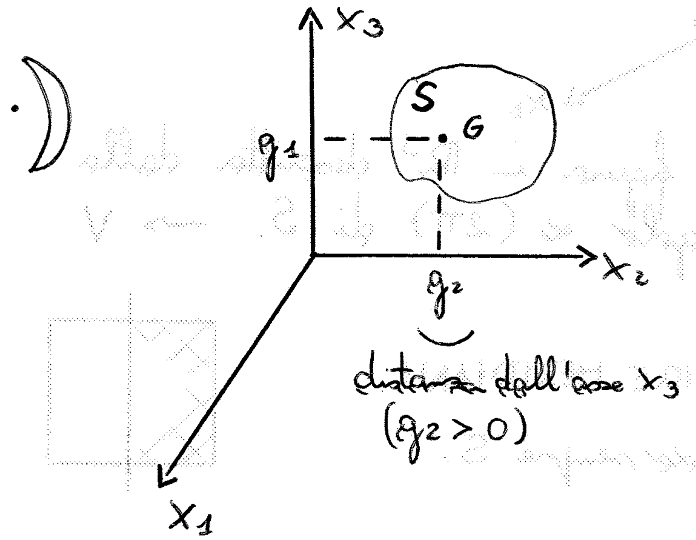
Serve per

→ CALCOLO DEI VOLUMI DEI SOLIDI DI ROTAZIONE

Approfondimento:

$$\iiint_V 1\, dx_1 dx_2 dx_3 = 2\pi \iint_S x_2\, dx_2 dx_3 = 2\pi\, m(S)\, \underbrace{\frac{\iint_S x_2\, dx_2 dx_3}{m(S)}}_{\text{2° componente del baricentro di } S \;\to\; g_2} =$$

$$= 2\pi \cdot m(S) \cdot g_2 \quad (\text{è un volume!})$$



$x_1 = 0$

$x_2 > 0$

$2\pi \cdot g_2 \to$ lunghezza della circonferenza di raggio g_2 (è esattamente la lunghezza che descrive il baricentro G nella rotazione).

N.B. Ci possono essere delle considerazioni geometriche, in alcuni casi, che permettono di individuare la possibile posizione del baricentro, per semplificare i calcoli.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 393

Una curva si dice REGOLARE se le funzioni $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \cdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$ ammettono derivata. $x = \gamma(t) : I \to \mathbb{R}^n$

① $\frac{d}{dt}\gamma_i(t)$ $i = 1, \ldots, n$ esiste ed è continua.

② $\begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \cdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in I$ → intervallo considerato

PERCHÉ LA CURVA SIA REGOLARE DEVONO VALERE QUESTE ② CONDIZIONI.

↓ VETTORE TANGENTE) non voglio che si annulli!

↓ dal pto di vista fisico ha un significato ben preciso. → VELOCITÀ

pto che si muove, acc., decel. ma non si ferma. → non può neanche tornare indietro. — vettore tangente non si annulla

→ Mi accorgo di questo solamente sul grafico, non sull'immagine, perché è una proiezione.

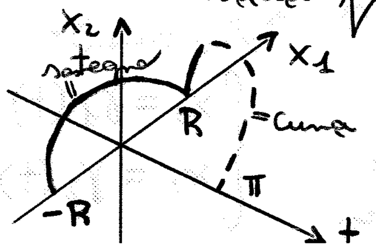
N.B. I : intervallo aperto → intervallo chiuso $[a, b] \subset J$ (aperto) → solo agg. + grande.

ES. Curva → circonferenza → la più semplice.
→ si può parametrizzare utilizzando t che varia per un certo intervallo. → $\neq$ MODI.

$x_1 = R \cdot \cos t$

$x_2 = R \cdot \sin t$

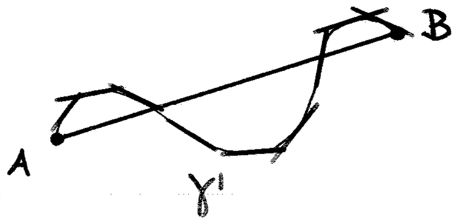
$t \in [0, \pi]$



$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \sqrt{R^2 - t^2} \end{cases} \to x_2 = \sqrt{R^2 - x_1^2}$$

$x_1^2 + x_2^2 = R^2$ $\qquad t \in [-R, R]$

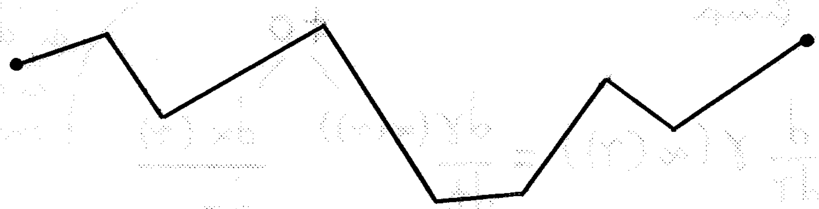
PROBLEMA APPLICATIVO: Calcolare la lunghezza di una curva.



$\overline{AB}$ → misura lineare → facile da determinare.

$\widehat{AB}$ → misura curvilinea (curva) → complicato determinarla

Considero una spezzata formata da tratti rettilinei da sommare insieme per il totale.



la spezzata è una approssimazione della curva reale (andamento)

Per rappresentare la curva dovrà essere effettuata una parametrizzazione.

- γ' → tangente curva → velocità
- la lunghezza del "segmentino" dipende da come ho parametrizzato.

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \cdots \\ \gamma_m'(t) \end{pmatrix} \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_m'(t))^2}$$

MODULO o NORMA DEL VETTORE TANGENTE

↳ mi fa comprendere con che velocità mi muovo istante per istante.

$\|\gamma'(t)\|\,dt$

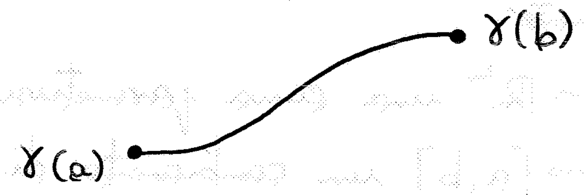
→ per intervallo di tempo

DEF. Data una curva regolare e semplice γ, si definisce lunghezza γ (l_γ) di una curva parametrizzata tramite una funzione γ, tramite la seguente formula:

$$l_\gamma = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$$

CONSIDERAZIONI:

$$\gamma(t) = [a,b] \to \mathbb{R}^n$$



$$\gamma : [a,t] \to \mathbb{R}^n$$

$$\ell(t) = \int_a^t \|\gamma'(\theta)\|\, d\theta > 0$$ → la lunghezza deve essere maggiore di 0.

$$\frac{d\ell(t)}{dt} = \|\gamma'(t)\| > 0$$ (xkè è una norma [> 0])

$\ell(t)$ può essere impiegato come cambiamento di parametro!

$$S = \ell(t) \to t = \ell^{-1}(S) \quad (\text{f. inversa})$$

→ parametro intrinseco e parametro d'arco
xkè misura istante per istante la lunghezza / distanza di percorso dell'arco fino a quel momento.

$$S(s) = (\gamma \circ \ell^{-1})(s) : \underbrace{[0, \ell_\gamma]}_{\text{intervallo di parametrizzazione}} \to \mathbb{R}^n$$ → nuova parametrizzazione riferita al parametro intrinseco.

$$S'(s) = \frac{\gamma'(\ell^{-1}(s))}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\gamma'(\ell^{-1}(s))}{\|\gamma'(\ell^{-1}(s))\|} \Longrightarrow \|S'(s)\| = 1 \text{ Versore}$$

Ricordando che $\frac{d\ell(t)}{dt} = \|\gamma'(t)\| > 0$ si ottiene:

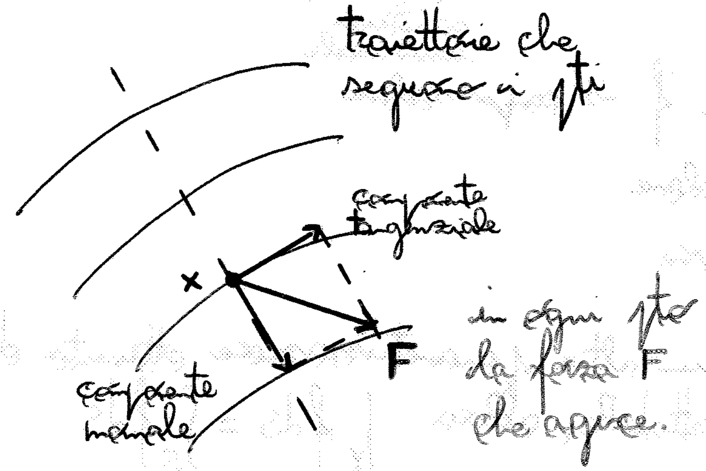
$$ds = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\; dt$$

INTEGRALE CURVILINEO DI UN CAMPO VETTORIALE SU UNA CURVA REGOLARE γ:

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

campo vettoriale: rappresenta l'assegnazione di un vettore in ogni pto.
→ 1 eq. per ogni incognita.

Questi integrali in fisica vengono impiegati per il calcolo del lavoro svolto da una forza.



F → i fisici considerano solo la componente tangenziale.
↳ calcolo del prodotto scalare oppure linea d'arco.

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = t(t)$$
↳ tangente

$$F(x_1, \dots, x_n) \cdot t(t) = f(x_1, \dots, x_n)$$
↳ $t = (x_1, \dots, x_n)$

$$\int_a^b F(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \underset{P.S.}{\cdot} t(t) \cdot \underbrace{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}}_{\|\gamma'(t)\|}\, dt =$$

$$= \int_a^b F(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \underset{P.S.}{\cdot} \gamma'(t)\, dt = \boxed{\int_\gamma F\, dt}$$

|| integrale di linea di un campo vettoriale

↳ integrale nella direzione del versore tangente.

$$\text{grad } f(x_1, \dots, x_m) = \nabla f(x_1, \dots, x_m)$$

NABLA (può essere interpretato come un operatore differenziale)

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \cdot f \quad \text{se} \quad \text{grad } f(x_1, \dots, x_m) \text{ (da) } : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

CONTINUO

$$f \in C^1(A) \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^m$$

(classe C^1)

N.B.

$\text{grad } f(x) = \nabla f(x) \to$ operatore differenziale ① $\to$ Vettore di operatore.

grad e ∇ $\to$ Vettore di derivate che non hanno ancora compiuto la loro azione x che non è "stato detto" cosa devono derivare.

DIMOSTRAZIONE:

①
$$\text{rot } F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f_3(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} \right) \cdot i - \left(\frac{\partial f_3(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} \right) \cdot j +$$

$$+ k \cdot \left(\frac{\partial f_2(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} \right)$$

②
$$\nabla \overset{P.V.}{\wedge} F = \text{rot } F$$

→ N.B. Non è un vero e proprio prodotto vettoriale xké ∇ non è un vettore, ma una terna di vettori.

→ Non viene effettuata una moltiplicazione ma bensì una applicazione agli elementi.

1P. → IL RISULTATO È UN VETTORE.

MP. → IL ROTORE TRASFORMA DA CAMPO VETTORIALE A CAMPO VETTORIALE (altro ≠).

PROPRIETÀ MATEMATICHE:

f campo scalare $C^2(A)$ → cioè esistono tutte le derivate parziali seconde e sono continue. $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ per ogni coppia di indici.

$n = 3$

rot (grad f) → RIS: vettore

grad $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$ → è sempre un campo irrotazionale.

rot $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$ → 1° componente del rotore.

$$\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}}_{\text{sono uguali}} = \vec{0}$$ per il teorema di Schwartz.

↳ RISULTATO: vettore nullo!!

F campo vettoriale $C^2(A)$

$n = 3$

div (rot F) → RIS.: scalare

$$\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}} - \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}} + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}} - \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}} + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}} - \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}} = 0$$

→ si elidono avendo segno opposto!

IMP.: → IL ROTORE È UN CAMPO A DIVERGENZA NULLA!!

RICORDA: Scrivere: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}$ significa derivata prima rispetto a x_1 poi rispetto a x_3.

↓ (sempre se)

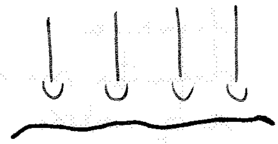
RICORDA:

CAMPO VETTORIALE → abbastanza regolare e di classe C^2.

CAMPO GRAVITAZIONALE
CAMPO ELETTRICO → sono campi conservativi!!

→ campo gravitazionale → locale. ①
→ globale. ②

① LOCALE:



(verso il basso)

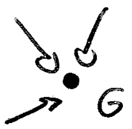
→ campo conservativo.

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = -x_3$$

$$F = \frac{-1 \longrightarrow \text{xké tira}}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}}$$

② GLOBALE:



→ nel pto d'origine G, dove si concentra la massa, la forza è infinita (∞).

$$g = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

→ esiste un punto in cui non è definito!

$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ → campo conservativo.

→ Verificare che $\text{grad}(g) = F$

2) Se $n = 1$ cercare una potenziale significa cercare una primitiva.

[campi vettoriali di dimensione 1 sono tutti conservativi.

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua [AN.1])

$\frac{dg}{dx} = F \Rightarrow$ Ammettono tutti primitiva! (per teorema del calcolo integrale).

DOMANDE a cui risponderemo più avanti:

1) $\text{rot}\, F = 0$ (per F conservativa) è una condizione sufficiente, oltre che necessaria? si possono fare restrizioni?

2) Ammesso che esista un potenziale, tutti gli altri possono essere definiti a meno di una costante? SI $\times$ $n = 1$, per $n > 1$?

$$: \int_a^b \frac{d}{dt}\, g(\gamma(t))\, dt = g(\gamma(t))\Big|_a^b = g(P_1) - g(P_0)$$

Spiegazione:

$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R} \longrightarrow g(\gamma(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

con la funzione composta salto un passaggio!

$$\frac{d}{dt}\, g(\gamma(t)) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\gamma(t))\cdot \gamma_1' + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\gamma(t))\cdot \gamma_2' + \dots$$

COROLLARIO DEL TEOREMA:

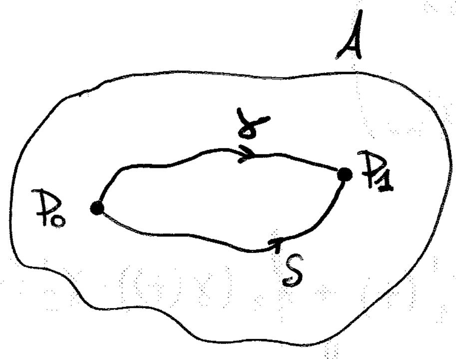
1) Sia F un campo conservativo su un dominio A e siano γ e δ due curve regolari con sostegno contenuto in A e con gli stessi estremi (nell'ordine):

$\gamma : [a, b] \to A$

$\delta : [c, d] \to A$

$\gamma(a) = \delta(c)$

$\gamma(b) = \delta(d)$



RICORDA:

INDIPENDENZA DAL CAMMINO.
$\to \forall$ traiettoria
$\to \forall$ pto iniz., fin.
$\to$ STESSO LAVORO!

γ e δ sono ② strade $\neq$ che partono da uno stesso punto e giungono in uno stesso punto.
$\to$ il valore dell'integrale è lo stesso!

DEFINIZIONE:

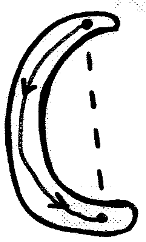
Si dice che un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ è CONVESSO se $\forall P_0, P_1 \in A$, esiste una curva continua regolare a tratti γ che:

1) γ ha sostegno interamente contenuto in A.

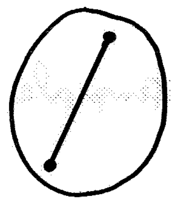
2) gli estremi di γ sono P_0, P_1.

N.B. un insieme convesso è sicuramente connesso.

→ **Att.** NON È VERO IL VICEVERSA!



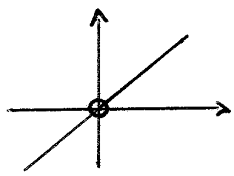
Curve:
raggiungere l'ostacolo!



→ **SCONNESSIONI:**

in SPAZIO

$n-1$ → togliere elementi



→ PIANO → tolgo retta.

→ RETTA → tolgo 1 pto.

È ora possibile dare RISPOSTA alla 1° DOMANDA:

TEOREMA: MOLTO IMPORTANTE!

F è un campo vettoriale di $\mathbb{R}^m$ continuo, con dominio A aperto e connesso.

Hp:
Supponendo che F soddisfi su A la proprietà di indipendenza dal cammino; ↓
$\forall P_0, P_1 \in A$ e $\forall \gamma, S$ con sostegno contenuto in A ed estremi coincidenti con P_0 e P_1 nell'ordine: $\int_\gamma F \cdot t = \int_S F \cdot t$) è una condiz. sufficiente, anche se non ideale.

Ts: Allora F è conservativo su A.
quindi ∃ potenziale
→ è la 1° volta che si può definire in sicurezza! → CONDIZ. NECESS. e SUFF.

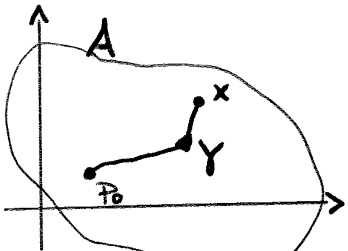
N.B. Indipendenza dal cammino e circuitazione nulla sono equivalenti. (stessa cosa)
↓
RIFORMULAZIONE:

Se $\oint_\gamma F \cdot t = 0$ $\forall$ curva chiusa γ con sostegno contenuto in A.

→ Allora F è conservativo → esiste il potenziale!

N.B. è solo un 1° PASSO, non ancora completo)

DIM. Breve accenno: → OCCORRE DIMOSTRARE CHE ESISTE UN POTENZIALE!



$$\underbrace{\int_\gamma F \cdot t}_{\text{"è un numero!"}} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{g(x)}_{\text{"è un potenziale!"}} : A \to \mathbb{R}$$

→ indipendente da γ.
→ " da P_0.
→ dipendente da x che varia

GIST. COORD. → Calcolo le derivate parziali! $\left(\frac{\partial g}{\partial x} = f_1\right)$

TS: $\int_\gamma F \cdot t = \iint_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right) dx_1 \, dx_2$

γ ↓ integrali di linea di campi vettoriali ↓ molto influenzati dalla parametrizz. dell'orientamento. → quando si sbaglia l'orientamento, l'uguaglianza vale in valore assoluto, ma non in segno.

K = sarebbe Ω più il bordo esterno (sostegno Γ)

INTERPRETAZIONI:

1) componente lungo **k** del rot F, pensando a F come $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. (CAMPO VETTORIALE di $\mathbb{R}^3$)

$$F(x_1, x_2) = \left(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\right)$$

$$\tilde{F}(x_1, x_2, x_3) = \left(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), \emptyset\right)$$

faccio il rotore:

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1(x_1, x_2) & f_2(x_1, x_2) & \emptyset \end{pmatrix}$$

1° componente: $\emptyset$

2° componente: $\emptyset$

3° componente: $\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2}$) ricevuto da **STOKES!**

→ ho trovato la formula di Green!

APPLICAZIONE AI CAMPI CONSERVATIVI di $\mathbb{R}^2$:

Se F è conservativo (condiz. suff.),

allora $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \equiv 0$ (condiz. necess.) $\forall (x_1, x_2) \in A$

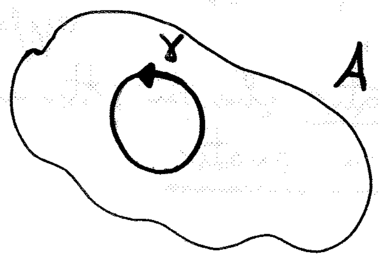
$\equiv$ ↓ identicamente

DEF. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ aperto, connesso. (Hp) base potenza

$\forall$ curva γ regolare, semplice, chiusa con sostegno contenuto in A.

La regione del piano (non di A) definita da γ deve essere contenuta in A

→ questo esclude che ci siano pti mancanti.



Ts) Definizione

→ Allora si dice che A è semplicemente connesso!!

→ Si fa solo per insiemi che sono già connessi.

connesso $\neq$ semplicemente connesso ⟵ RICORDA!

↓ ↓ ↓

L'ipotesi di "A semplicemente connesso" (è Ts - definizione appena vista), significa

che posso applicare il teorema di Green a $\forall$ γ chiusa, e questo implica

$$\oint_\gamma F \cdot t = 0$$

parametrizzazione:

$$\gamma \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma' \begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \end{cases}$$

sostituire nella funzione F e moltiplicare per γ'.

$$\oint_\gamma F \cdot t = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi \longrightarrow \text{(GUADAGNO)}$$

IMP!

Il campo non è conservativo, poiché guardo lungo la curva che passa attraverso (attorno) al pto singolare, non c'è conservazione di energia. (nel seguente caso ho un guadagno).

$$\Big[(-\sin t)\cdot\overbrace{(-\sin t)}^{\gamma' x'}\Big] + \Big[(\cos t)\cdot\overbrace{(\cos t)}^{\gamma' y'}\Big]$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi \longrightarrow + : \text{POSITIVO}$$

→ Guadagno di energia.

→ Variazione di energia.

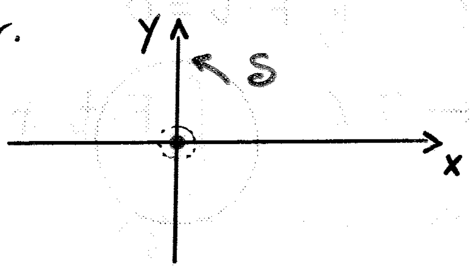
→ Campo non conservativo.

SVILUPPO DEL RAGIONAMENTO

IMP!

Se mi "accontento" di una parte del dominio, e non la prendo tutta, forse ottengo quello che voglio, cioè un insieme semplicemente connesso!!

→ Anche a prendere parti del dominio che verificano che l'insieme è semplicemente connesso.



$$\oint_S F \cdot t = 0 \quad \nearrow \text{Green}$$

Applicazione ②:

$$F = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} , \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \qquad A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \qquad \forall (x_1, x_2) \in A$$

$$g(x_1, x_2) = \log(x_1^2 + x_2^2) \rightarrow x_1, x_2 \neq (0,0)$$

definita in tutti gli altri pti.

Nel seguente caso il campo è conservativo nonostante il dominio non sia semplicemente connesso. Quindi esistono casi particolari/eccezioni che non seguono precisamente le definizioni/applicazioni date.

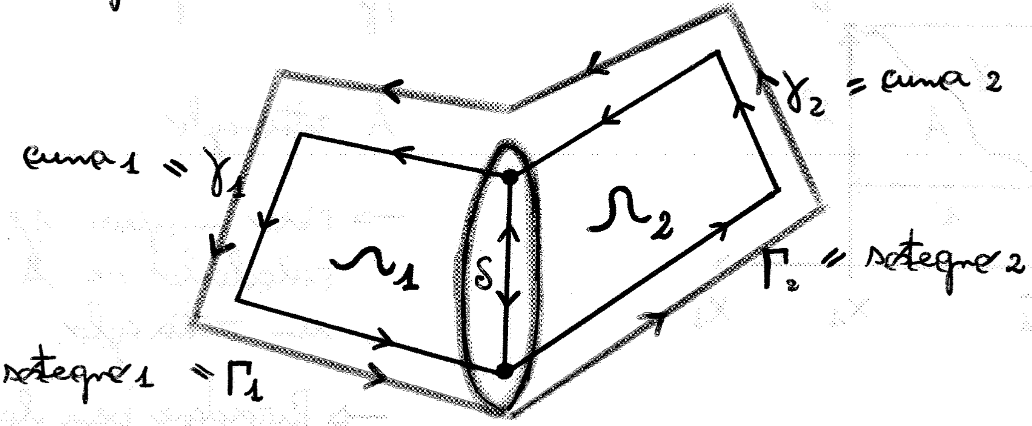
Ing:

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dom A sempl. connesso

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Rightarrow F \text{ è conservativo} \longleftrightarrow \exists\, g \text{ potenziale} / \text{grad}\, g = F$$

2) GENERALIZZAZIONE DEL PROBLEMA: → ESTENSIONE! TEOREMA

→ ② regioni con un tratto in comune:



$K_1 = \Gamma_1 \cup \Omega_1$

$K_2 = \Gamma_2 \cup \Omega_2$

$$\oint_{\gamma_1} F \cdot t = \iint_{K_1} \text{——}$$

$\oplus$

$$\oint_{\gamma_2} F \cdot t = \iint_{K_2} \text{——}$$

$$\oint_{\gamma} F \cdot t = \iint_{K} \text{——}$$

MOLTO IMPORTANTE!!

Il tratto in S comune viene percorso in ② sensi diversi ed opposti al variare dell'indice (1,2).

→[1] si unisce tutto insieme.

→[2] il tratto in comune si annulla.

↳ il contributo complessivo del tratto S risulta nullo! *

→ Applico il teorema di Green al contorno tutto compreso.

* (non considero i tratti di divisione delle varie parti.)

$$\oint_{\gamma} F \cdot t = \iint_{K} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right) dx_1\, dx_2$$

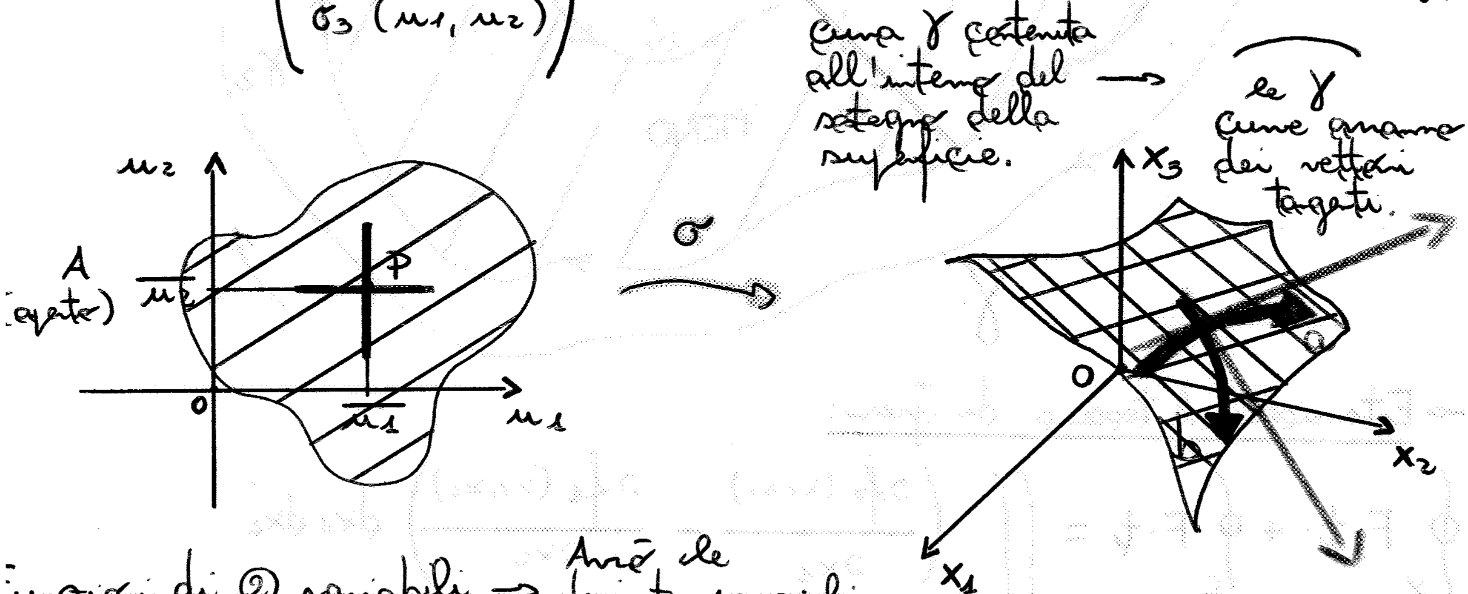
CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI in $\mathbb{R}^3$:

Nello spazio occorre fare ricorso alle superfici.

Occorre fare teoria delle superfici parametriche in $\mathbb{R}^3$:

segue più o meno la teoria delle curve.

$$\sigma(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} \sigma_1(u_1,u_2) \\ \sigma_2(u_1,u_2) \\ \sigma_3(u_1,u_2) \end{pmatrix}$$



Funzioni di ② variabili → Avrò le derivate parziali.

Superficie regolare se $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono di classe $C^1(A)$.

a) $\begin{pmatrix} \sigma_1(u_1,\overline{u_2}) \\ \sigma_2(u_1,\overline{u_2}) \\ \sigma_3(u_1,\overline{u_2}) \end{pmatrix}$

$\overline{u_2}$: bloccata
u_1: libera

b) $\begin{pmatrix} \sigma_1(\overline{u_1},u_2) \\ \sigma_2(\overline{u_1},u_2) \\ \sigma_3(\overline{u_1},u_2) \end{pmatrix}$

$\overline{u_1}$: bloccata
u_2: libera

Abbiamo bisogno di descrivere lo stesso concetto di vettore tangente visto per le curve per le superfici.

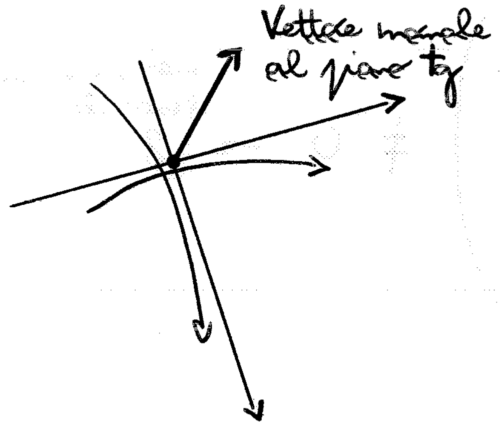
$$\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma_1}{\partial u_1}(\overline{u_1},\overline{u_2}) \\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial u_1}(\overline{u_1},\overline{u_2}) \\ \frac{\partial\sigma_3}{\partial u_1}(\overline{u_1},\overline{u_2}) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma_1}{\partial u_2}(\overline{u_1},\overline{u_2}) \\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial u_2}(\overline{u_1},\overline{u_2}) \\ \frac{\partial\sigma_3}{\partial u_2}(\overline{u_1},\overline{u_2}) \end{pmatrix} \right)$$

Vettore tangente — tutte e ② bloccate — Vettore tangente

Se non sono paralleli, identificano un piano FORMANO UN PIANO VETTORE TANGENTE.

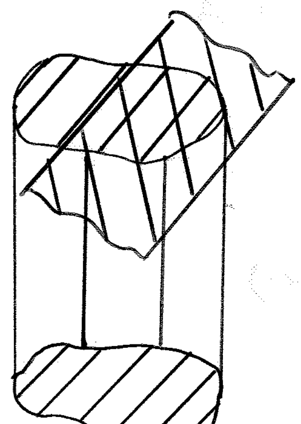
→ Devo quindi imporre la condizione di non parallelismo

SUPERFICIE IN GENERALE:



Come si calcola il vettore normale al piano tangente di una superf. regolare?

→ Applico il prodotto vettoriale (ricorda che non è commutativo



u_1, u_2

σ regolare

$$N(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_1} \end{pmatrix} \overset{P.V.}{\wedge} \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

→ Il vettore normale al piano tangente ci da il <u>senso di attraversamento</u> e non più il senso di percorrenza. (molto imp.)

$$N(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1(u_1,u_2) \\ I_2(u_1,u_2) \\ I_3(u_1,u_2) \end{pmatrix}$$

Oppure:

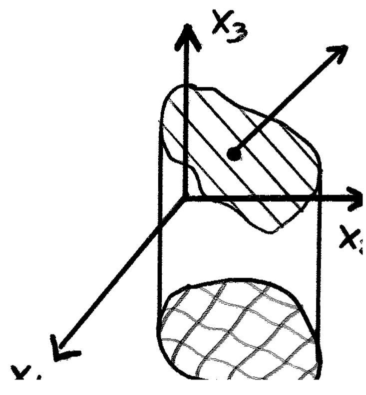
$$I_1 = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

I_2, I_3 come segue calcoli.

→ <u>Vedi per i dettagli il libro!!</u>

ESEMPIO:

$$\sigma: \begin{cases} x_1 = u_1 \\ x_2 = u_2 \\ x_3 = f(u_1,u_2) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial u_2} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u_1} \\ -\frac{\partial f}{\partial u_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$



SERIE GEOMETRICA: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ → Il comportamento di tale serie dipende dal valore di x.

SERIE TELESCOPICHE: $a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ES. $S_n = \log 2 + \log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{3}\right) + \dots + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

SERIE A TERMINI POSITIVI:

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice a termini positivi se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

→ La successione delle somme parziali di una serie a termini positivi è crescente. Dunque una serie a termini positivi o converge o diverge positivamente e non può mai essere indeterminata.

→ Il criterio fondamentale per lo studio del comportamento di una serie a termini positivi è il CRITERIO DEL CONFRONTO.

- Siano date due serie a termini positivi, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

  Se $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

  la serie di termine generale $\{a_n\}$ è una minorante della serie di termine generale $\{b_n\}$, ovvero che la serie di termine generale $\{b_n\}$ è una maggiorante della serie di termine generale $\{a_n\}$.

SERIE ARMONICA: $a_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

$\forall \alpha > 0$, la funzione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ soddisfa le condizioni del criterio di McLAURIN.

→ converge per $\alpha > 1$

→ diverge positivamente per $0 < \alpha \leq 1$.

DIM. • $\{S_n\}$: succ. somme parz. serie $\sum_{n=0} a_n$ • $\{\sigma_n\}$: succ. somme parziali serie $\sum_{n=0} b_n$

1. Se la serie maggiorante converge, si ha $\lim_{n \to +\infty} \sigma_n = \sigma < +\infty$

$(\sigma_n \leq \sigma$ per ogni $n \in \mathbb{N})$

$\to S_n \leq \sigma$ per ogni $n \in \mathbb{N} \to \exists \lim_{n \to +\infty} S_n = S$

→ Essendo crescente e limitata, la successione $\{S_n\}$ converge e il suo limite S sarà minore o uguale a σ. $\to S_n \leq \sigma_n \leq \sigma$

2. Se la serie minorante diverge, applicando il teorema del confronto per le successioni divergenti si deduce subito in base a $S_n \leq \sigma_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ che anche la maggiorante diverge. $\to \lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ $(S_n \leq \sigma_n)$

→ RICORDA la condizione iniziale di partenza: $S_n \leq \sigma_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Per lo studio del comportamento di una serie a termini positivi, risultano utili i due criteri seguenti, di facile applicazione. (alt. equivalenti)

1) Criterio del rapporto: • $a_n > 0$, $\forall n$ $(0, 1, 2, \dots)$ VALE

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{(n+1)}}{a_n} = l < 1 \quad \text{VALE} \qquad [0, 1)$$

ALLORA, la serie di termini generali $\{a_n\}$ converge.

• $a_n > 0$, $\forall n$ $(0, 1, 2 \dots)$ VALE

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{(n+1)}}{a_n} = l > 1 \quad \text{VALE} \qquad (1, +\infty]$$

ALLORA, la serie di termini generali $\{a_n\}$ diverge.

N.A.A. Pte debole del criterio: Nel caso $l = 1$, il criterio non è abbastanza forte per prendere una decisione. Il caso può essere compatibile sia per convergenza, sia per divergenza. → NON POSSO PRENDERE UNA DECISIONE IN SICUREZZA.

ES. 1 $1/n \to \frac{1}{(n+1)} n \to l = 1$

ES. 2 $1/n^2 \to \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 \to l = 1$

$n \to \infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} (a_n)^{1/n} = 1 = l$$

DIM.

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 : \overset{(N)}{n} > n_0 \ / \ l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon < 1$

Applicando due volte il criterio del confronto, si conclude che:

1. se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$ converge.

2. se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$ converge, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$ converge.

N.B. Le due serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hanno gli stessi termini (la seconda ha solo il primo termine in più) e quindi l'una converge se e solo se converge l'altra.

Il teorema è provato se facciamo vedere che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_n^{n+1} f(x)\,dx}_{b_n} = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

RIC. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{N} f(x)\,dx \qquad (\forall N \geq 1)$

Poiché $f(x) \geq 0$, la funzione $z \to \int_1^{z} f(x)\,dx$ è crescente. Pertanto:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{z \to +\infty} \int_1^{z} f(x)\,dx = \lim_{N \to +\infty} \int_1^{N} f(x)\,dx = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

ES. Per ogni $\alpha > 0$, la funzione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ soddisfa le condizioni del criterio di Mc LAURIN.

$\longrightarrow$ Serie armonica generalizzata: $\sum^{\infty} \frac{1}{\dots}$

OSSERVAZIONI.

1) Il comportamento di una serie non cambia se si cambiano, si eliminano e si aggiungono un numero finito di termini della serie.
Invece operazioni che coinvolgono infiniti termini di una serie, in generale non sono consentite.

2) Non è necessario che la numerazione dei termini della serie inizi proprio con l'indice zero.

3) Date due serie di termine generale rispettivamente $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, si chiama serie somma la serie il cui termine generale è $\{a_n + b_n\}$, ovvero la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$.

→ Se le serie date convergono, anche la serie somma converge.
→ A.A.A. ai casi in cui si presentino forme indeterminate.

4) Se la serie data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ed ha per somma S, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (c a_n)$ converge ed ha per somma cS. → SERIE IL CUI TERMINE GENERALE SI OTTIENE MOLTIPLICANDO PER UNA COSTANTE IL TERMINE GENERALE DI UNA SERIE DATA.

5) Sia data la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
a) Se la successione $\{a_n\}$ è infinitesima di ordine minore o uguale a quello della successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, la serie data diverge.
b) Se esiste un numero $\alpha > 1$ tale che la successione $\{a_n\}$ è infinitesima di ordine maggiore o uguale a quello della successione $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}$, la serie data converge.

6) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice definitivamente a termini positivi se esiste un indice N tale che $a_n \geq 0$, $\forall n \geq N$.

Teorema di Schwarz

Il **teorema di Schwarz** è un importante teorema in analisi matematica, che afferma che (sotto opportune ipotesi) l'ordine con il quale vengono eseguite le derivate parziali in una derivata mista di una funzione a variabili reali è ininfluente.

Il teorema in due variabili

Sia

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

una funzione in due variabili, definita su un aperto Ωdel piano $\mathbb{R}^2$. Se f ammette derivate seconde miste continue ($f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$) allora queste coincidono in ogni punto p, cioè

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

In altre parole, invertendo l'ordine di derivazione di una doppia derivazione parziale mista, il risultato non cambia.

Dimostrazione

Sia

$$p = (x_0, y_0) \in \Omega.$$

Scegliamo due reali ε, $\delta > 0$tali che $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset \Omega$. Ciò è possibile, poiché Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Definiamo due funzioni Fe G come segue:

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$G : (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

in modo che

$$F(t) = f(x_0 + t, y_0 + s) - f(x_0 + t, y_0) \qquad \forall s \in (-\delta, \delta),$$

$$G(s) = f(x_0 + t, y_0 + s) - f(x_0, y_0 + s) \qquad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Si prova facilmente che, fissati t e s nei rispettivi intervalli:

$$F(t) - F(0) = G(s) - G(0).$$

Inoltre, applicando due volte il teorema di Lagrange:

$$F(t) - F(0) = tF'(\xi_1) = t\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi_1, y_0 + s) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi_1, y_0)\right] =$$

$$= ts\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \xi_1, y_0 + \sigma_1),$$

e analogamente

$$G(s) - G(0) = st\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \xi_2, y_0 + \sigma_2),$$

con $\xi_i \in (0, t)$, $\sigma_i \in (0, s)$, dove, per comodità di scrittura, si sono assunti $t, s > 0$.

Facendo tendere t e s a 0(e quindi anche ξ_ie σ_i) si ha la tesi.