



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 616

DATA: 0409/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Gemello

MATERIA: Meccanica Strutturale + Esercizi

Prof. Goglio

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

STRUTTURE → COSTRUZIONE / OGGETTO

↓
SOPPORTANO CARICHI IN SERVIZIO

↳ SOLLECITAZIONI VIBRAZ.
PRESSIONE
...

1) STATICA → EQUILIBRIO → TRA FORZE ATTIVE /

CARICHI VINCOLI REATIVE

↓
ELEMENTI DI FISSAGGIO

↓
MOBILI

↓
FISSI

↓
CONSENTE UN SOLO TIPO DI MOVIMENTO

CALCOLO REAZIONI VINCOLARI

2) TENSIONI - DEFORMAZIONI

↓
PRESSIONE X SOLIDI

↓
MISURE RELATIVE

3) PROVE SU MATERIALI

4) ELEMENTI DELLE STRUTTURE → STUDIARE TENSIONI IN PARTI DELLA STRUTT.

5) STRUTTURE → SOLLECITAZIONI
↓
VARIAZ. DI FORMA (QUANDO SOLLECITATO)

ESAME:

SCRITTO (OBBLIGATORIO)

+ ORALE (FACOLTATIVO)

{ QUESITI TEORICI A RISP. APERTA
{ ESERCIZI (3/4) (1/4)

↑
MAX 27

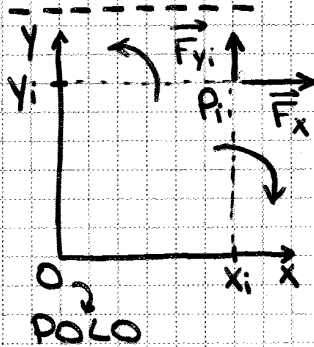
SE $\vec{R}_F = 0 \Rightarrow \vec{R}_{M_{O'}} = \vec{R}_{M_O}$

EQUILIBRIO

- ALLA TRASLAZIONE $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow 3$ EQUAZ. SCALARI
- ALLA ROTAZIONE $\sum_i (\vec{M}_{O_i} + C_i) = \vec{0} \Rightarrow 3$ EQ. SC.

6 EQUAZ. EQUILIBRIO

NEL PIANO



TRASLAZ:

$\rightarrow: \sum_i F_{x_i} = 0$
 $\uparrow: \sum_i F_{y_i} = 0$

ROTAZIONE

$\circlearrowleft: \sum_i (-y_i F_{x_i} + x_i F_{y_i} + C_i) = 0$

POSITIVO ANTIORARIO

BRACCIO DI F_{y_i}
 E' x_i

EQUVALENZA STATICA

2 SIST SONO EQUIVALENTI SE:

- STESSA RISULTANTE \vec{R}_F
- STESSO MOMENTO RISULTANTE \vec{R}_{M_O}

UTILITA' PRATICA → SOSTITUIRE PROBL. PARTENZA CON UN ALTRO

ES

TRASPORTO LATERALE DI UNA FORZA

↓
 LUNGO RETA D'AZIONE
 SEMPRE POSSIBILE

↓
 SE LO FACCIAMO RISPETTO A
 SUA PARALLELA CAMBIO
 BRACCIO



CARICHI E VINCOLI

AZIONI APPLICATE
(FORZE/MOMENTI)

DATI

• LIMITAZIONI AL MOVIMENTO
• REAZIONI (FORZE/MOMENTI)

INCOGNITE

CARICHI

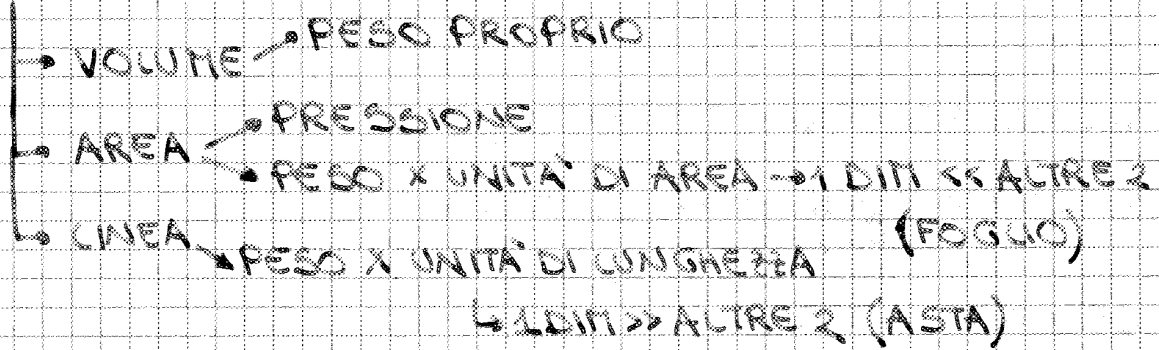
• CONCENTRATI (PUNTUALI) → FITIZI

APPROSSIMAZ. RISULTANTE



APPROSSIMO CHE RUOTA
TOCCHI SOLO IN UN PUNTO

• DISTRIBUITI



VINCOLI

2 ASPETTI:

STATICO

REAZIONI
ESERCITATE

CINEMATICO

COMPONENTI DEL NOTO
SOGGETTE A LIMITAZIONI

CASI NOTEVOLI:

• APOGGIO
(SCORREVOLI)



NO ATRITO

NON PUO' SALIRE/SCEND.

↳ 1 REAZIONE

GRADO DI IPERSTATICITÀ CALCOLO REAZ. INCOGNITE

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO (NEL PIANO 3 PER ELEM.)

$$h = V - 3m$$

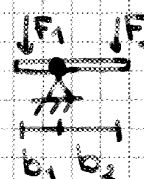
REAZIONI N. ELEMENTI

$$V = 3 \cdot i + 2(C + P) + a$$

INCASTRATI GUIDE PRISMATICHE
CERNIERE (SCORREVOLI) APPOGGI

$h < 0$ MENO VINCOLI RISPETTO AI GRADI DI LIBERTÀ
SIST. IPOSTATICO / LABILE
MECCANISMO

EQUILIBRIO POSSIBILE SE I CARICHI RISPETTANO
CERTI CONDIZ.

ES:  $m = 1$ $C = 1$ $\rightarrow V = 2 \cdot 1 = 2$ $\rightarrow h = 2 - 3 \cdot 1 = -1$

1 GRADO DI LIBERTÀ

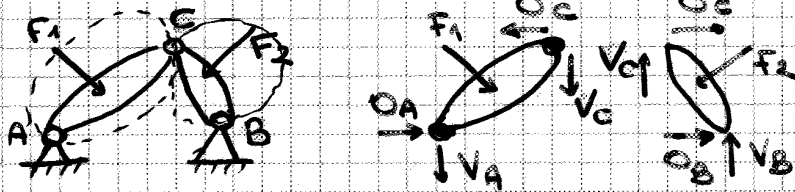
SE $F_1 \cdot b_1 = F_2 \cdot b_2$ EQUILIBRIO POSSIBILE

$h = 0$ SIST. ISOSTATICO (N. INCOGNITE = N. EQUAZ.)
SI POSSONO DETERMINARE INCOGNITE DA
(EQUAZ. DELLA STATICA (SALVO CASI ANOMALI))

$h > 0$ SIST. IPOSTATICO

↳ + VINCOLI DI QUANTI NECESSARI
NON È POSSIBILE INCOGNITE DALLA SOLA STA-
TICA (SERVONO EQUAZ. AGGIUNTIVE)

ES: 2 ELEMENTI



VERSI 1'ELEM. ARBITRARI

NEL 2'ELEMENTO, VERSI DEI VINCOLI INTERNI DEVONO ESSERE OPPOSTI AL 1'ELEM.

SCELTA EQUAZ. EQUILIBRIO: 3 OPZIONI

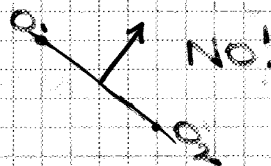
a) 2 EQUIL. TRASLAE. + 1 EQ. ROTAE.

b) 2 EQ. ROTAE + 1 EQ. TRASLAE. (POLI O1, O2)

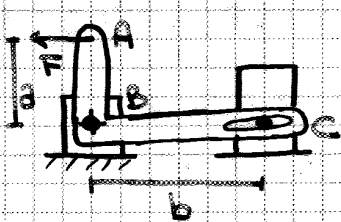
c) 3 EQ. ROTAZIONE

NO DIREZ. TRASLAE $\perp \vec{O_1 O_2}$

NO POLI ALLINEATI

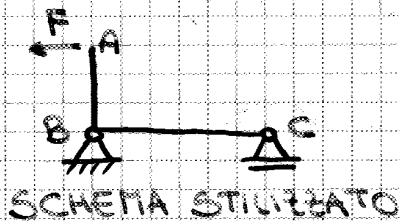


ESEMPIO



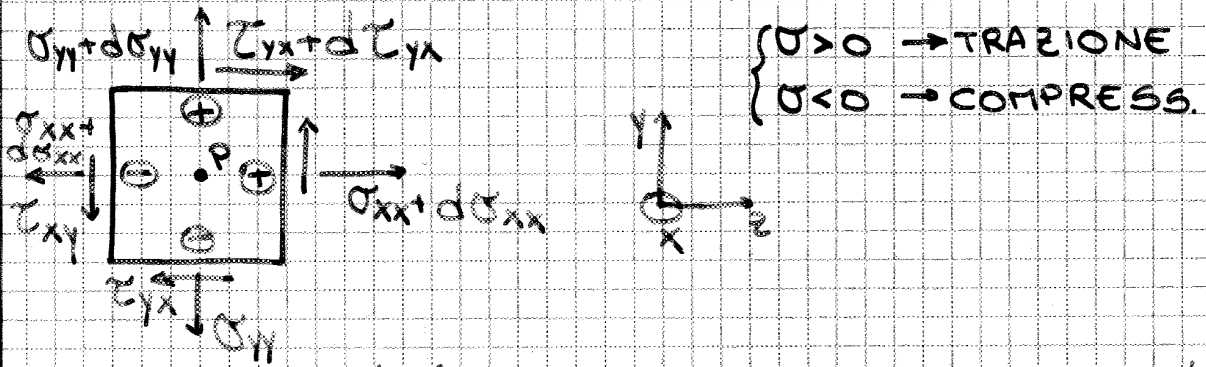
B: CERNIERA } $V = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$
 C: APPOGGIO

1 ELEMENTO $\rightarrow m = 1 \rightarrow h = 0$



a) $\rightarrow: O_B - F = 0$
 $\uparrow: V_C - V_B = 0$
 b) $F \cdot a + V_C \cdot b = 0$

$$\begin{cases} O_B = F \\ V_C = V_B = -F \cdot a/b \\ V_C = -F \cdot a/b \end{cases}$$



$$P): \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dx dy \frac{dz}{2} + (\tau_{xy} + d\tau_{xy}) dx dy \frac{dz}{2} - (\tau_{yx} + d\tau_{yx}) dx dy \frac{dz}{2} = 0 \leftarrow \text{EQUIL. ALLA ROTAZ.}$$

SI TRASCURANO I $d\tau_{ij}$ RISPETTO A τ_{ij}

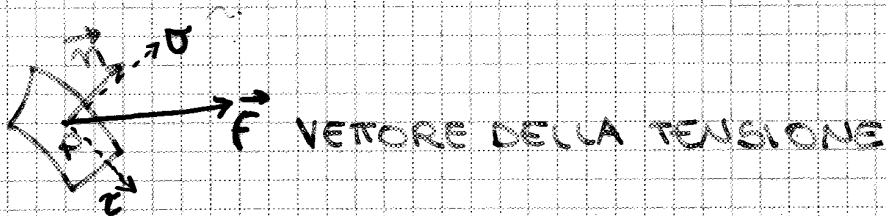
$$\Rightarrow 2\tau_{xy} - 2\tau_{yx} = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

QUINDI 6 COMPONENTI DI TENSIONE:

- 3 NORMALI $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$
- 3 TANGENZIALI $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$



VETTORI DI TENSIONE SULLE SUPERF. \perp X, Y, Z

$$\vec{F}_x = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_y = \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_z = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{Bmatrix}$$

$$[\sigma] \{n\} = \{p\}$$

↓
SIMMETRICA ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) 3x3

TENSORE DELLA TENSIONE

DISTINZIONE VETTORE, TENSORE DELLA TENSIONE?

↳ VETTORE: STATO DI TENS. SU 1 FACIA GIÀ ASSEGNATA

↳ TENSORE: CONTIENE L'INFORMAZ. SULLO STATO DI TENS. V POSSIBILE FACIA

TENSIONI: UNITÀ DI MISURA

VALORI CARATTERISTICI

$$\frac{\text{FORZA}}{\text{AREA}} = \frac{N}{mm^2} = Pa \quad \rightarrow \text{NELLE STRUTTURE SI USA MPa}$$

METALUI $10^2 \div 10^3$ MPa

POLIMERI $10^0 \div 10^1$ MPa

$$1 MPa = 1 \frac{N}{mm^2}$$

IN GENERALE $\vec{f} \neq \lambda \vec{n}$ (ESISTONO LE τ)

↓
CASI IN CUI $\vec{f} = \lambda \vec{n}$

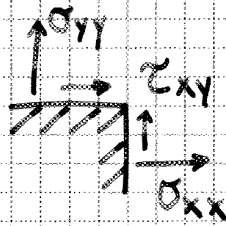
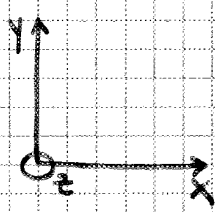
↓
AUTOPROBLEMA $[A] \{v\} = \lambda \{v\}$

↳ AUTOVETTORE

↳ AUTOVALORE

IL RIF. PRINCIPALE \exists SEMPRE

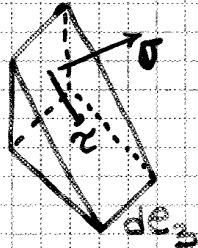
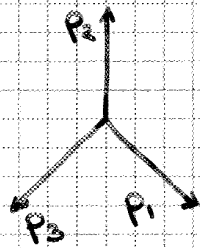
ES. 2D



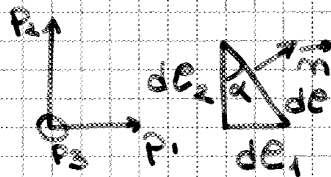
AL VARIARE DI $\{m\}$ COME RAPPRESENTARE VARIAZ. $\{R\}$?

$$\{R\} = [\sigma] \{m\}$$

IPOSTESI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, p_1, p_2, p_3$ GIÀ TROVATE

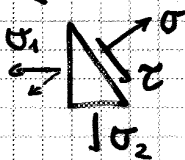


SITUAZIONE IN P.P.₂



$$\begin{cases} de_1 = de \sin \alpha \\ de_2 = de \cos \alpha \end{cases}$$

ESPRIMIAMO LE TENS. (σ, τ) SULLA FACCEA OBLIQUA IN FUNZ. DI σ_1, σ_2 E α



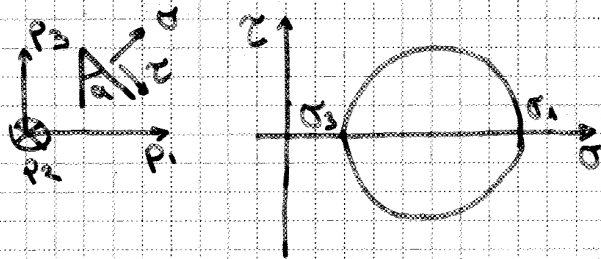
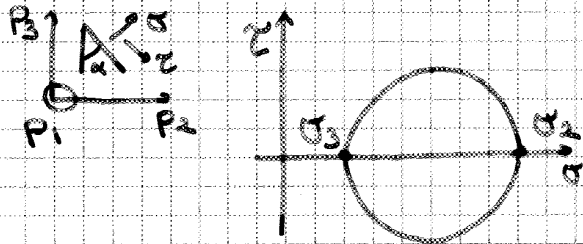
τ DEVE STARE NEL PIANO

$$\sum F_z = \sigma de de_3 - \sigma_1 de_2 de_3 \cos \alpha - \sigma_2 de_1 de_3 \sin \alpha = 0$$

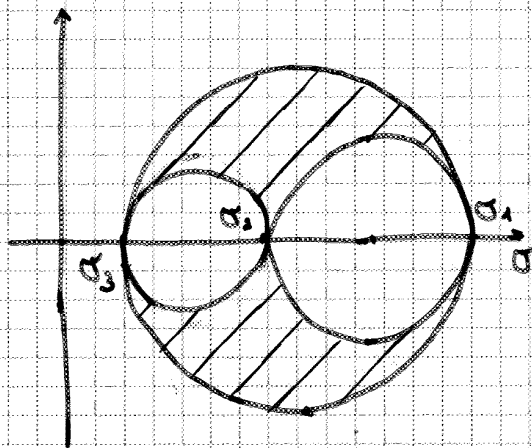
$$\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad de \cos \alpha \quad \quad \quad de \sin \alpha$$

ANALOGAMENTE

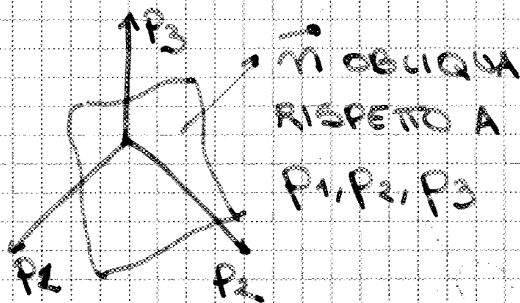


COMPLESSIVAMENTE:



3 CERCHI DI MOHR

NOTA: PER CONDOTTA
CHIAMIAMO $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$



σ OBLIQUA
RISPETTO A
 P_1, P_2, P_3

- σ, τ
- DENTRO IL CERCHIO
MAGGIORE
- FUORI DAI RESTANTI

OSSERVAZIONI:

$$\begin{cases} \sigma < \sigma_1 \\ \sigma > \sigma_3 \\ |\tau| \leq \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \end{cases}$$

$$\alpha \text{ DA } p_a \text{ A } x: \text{TGR} \alpha = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/2}$$

STATO DI DEFORMAZIONE E COMPORTAM. ELASTICO

CORPI DEFORMABILI → SOTTO L'AZIONE DI CARICHI LE STRUTTURE CAMBIANO (TUTTI GLI ELEMENTI)

• X STUDIARE RIGIDEZZA → COMPATIBILITÀ CON IL FUNZIONAMENTO DELLA STRUTT.

• X RISOLVERE PROBLEMI IPERSTATICI (NON BASTANO EQUAZ. STATICA)

POSIZIONE → XYZ NEL SIST. RIF.

SPOSTAMENTO → VETTORE CHE VA DA POSIZIONE INIZIALE (TEMPO t) ALLA POSIZ. FINALE (TEMPO t')

$$\vec{U} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{Bmatrix}$$

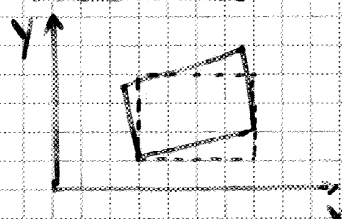
MOTO RIGIDO = DISTANZE TRA I PUNTI CHE LO COMPONGONO COSTANTI

TRASLAZIONE RIGIDA



u, v, w COSTANTI V PUNTO UGUALI

ROTAZIONE RIGIDA



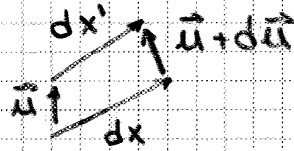
VARIANO PUNTO A PUNTO
↓
INDEFORMABILITÀ,
V SPOSTAM. & DIST. DAL CENTRO DI ROTAZ.

TENSORE DELLE DEFORMAZIONI

X STUDIARE CONTEMPORANEAMENTE IN 3D (x,y,z)
I POSSIBILI CASI DI DILATAZIONE E DI SCORRIMENTO

VEETTORE $d\vec{X}$

$$\{dX\} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$



I SUOI PUNTI SI SPOSTANO $\vec{U} = \{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$

$\vec{U}(x,y,z)$ E' UN CAMPO FUNZIONE DEL PUNTO

SPOSTAMENTO DI \odot E SPOSTAMENTO DI \odot

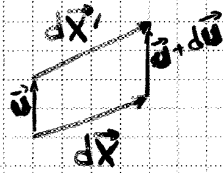
$$\{dU\} = \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix}$$

$$\vec{U} + d\vec{U}$$

STUDIO ANALITICO DELLO STATO DI DEFORMAZIONE

• TRASFORMAZ. DI UN SEGMENTO VETTORE INFINITESIMO
DA $d\vec{X}$ A $d\vec{X}'$

$$d\vec{X}' = \{dX'\} = \begin{Bmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{Bmatrix}$$



$$\vec{U} = \{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

SPOST. REGOLARE = NE' DISTACCHI, NE' COMPENETRAZIONI

$$\{dU\} = \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

$$\{dU\} = [E] \{dX\}$$

COMP. DI DEFORMAZIONE:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

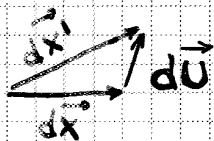
$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

RIPRENDENDO LA RELAZIONE PER $d\vec{U}$ $\{d\vec{U}\} = [E] \{X\}$

$\{d\vec{U}\} = ([E] + [Q]) \{dX\}$ DIFFERENZIALE COMPRESSIVO

$\{d\vec{U}\} = [E] \{dX\}$ DIFFERENZIALE DOVUTO ALLA DEFORMAZIONE ($d\vec{U} \neq$ DA QUELLO PRIMA)



PROPRIETA' NOTEVOLI DI [E]

- AUTOVALORI \rightarrow DEFORMAZIONI PRINCIPALI $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$
- AUTOVETTORI \rightarrow DIREZIONI PRINCIPALI

NEL RIFERIM. PRINCIPALE

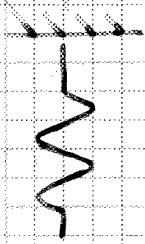
$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

SENDO FISICO: UN SEGMENTO POSTO SU UNA DIREZ. PRINC. VARIA DI LUNGHEZZA (DILATAZIONE), NON DI DIREZIONE (SCORRIMENTO)

PLASTICITA': IRREVERSIBILITA' (ES. DEFORMAZIONE RESIDUA DOPO LA RIMOZIONE DEL CARICO)

STUDIAMO MATERIALE OMOGENEO, ISOTROPO, ELASTICO LINEARE

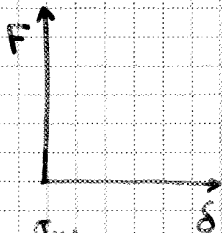
PREMESSA: LA MOLLA



APPLICO CARICO $F \rightarrow$ MISURARE ALLUNGAM. δ

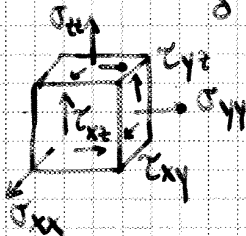
APPLICO ALLUNGAM. $\delta \rightarrow$ MISURA CARICO

$$F \propto \delta$$



$F = k \delta$ k RIGIDEZZA DELLA MOLLA

$$\delta = \frac{1}{k} F$$



APPLICO TENSIONI, MISURO DEFORMAZIONI DILATAZIONI:

$$\sigma_{xx} \rightarrow \epsilon_{xx} \propto \sigma_{xx} \rightarrow \epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx}$$

E = MODULO ELASTICO NORMALE O DI YOUNG

$$\sigma_{yy} \rightarrow \epsilon_{xx} \propto \sigma_{yy} \rightarrow \epsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$$

ν = COEFF. DI CONTRAZIONE TRASVERSALE (DI POISSON)

$$\sigma_{zz} \rightarrow \epsilon_{xx} \propto \sigma_{zz} \rightarrow \epsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}$$

$$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \rightarrow \epsilon_{xx} = 0$$

SCORRIMENTO:

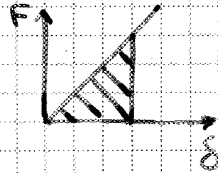
$$\sigma_{xx} \rightarrow \gamma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{yy} \rightarrow \gamma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{zz} \rightarrow \gamma_{xy} = 0$$

ENERGIA DI DEFORMAZIONE IN POTENZIALE ELASTICA

ESEMPIO: MOLLA

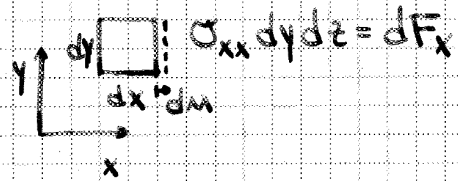


$$dW = \frac{1}{2} F \delta$$

EFFETTO σ, ϵ

ASSE X

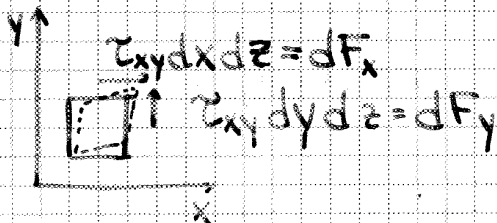
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$



$$\{dU\} = [E] \{dX\}$$

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \{dX\} \quad dW = \frac{1}{2} dF_x du = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} \underbrace{dx dy dz}_{dV}$$

EFFETTO τ, γ



$$\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \quad \begin{cases} du = \gamma_{xy}/2 dy \\ dv = \gamma_{xy}/2 dx \\ dw = 0 \end{cases}$$

$$dW = \frac{1}{2} (\tau_{xy} dx dz \frac{\gamma_{xy}}{2} dy + \tau_{xy} dy dz \frac{\gamma_{xy}}{2} dx)$$

$$dW = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} \underbrace{dx dy dz}_{dV}$$

MACCHINE DI PROVA

SI MISURA SFORZO APPLICATO / ALLUNGAMENTO PROVETTA

CELLA DI CARICO → MISURA F (COME UNA BILANCIA)

AFFERRAGGI

GANASCE AUTO SERRANTI A CUNEI

TIPICI DI MACCHINE

• ELETTROMECCANICO → AVVITAMENTO DI UNA VITE

↓
ECONOMICO, CARICO MAX 10^3 KN

• IDRAULICA → PRESSIONE FLUIDO

↓
COSTOSO, VELOCE, CARICO MAX 10^3 KN

MISURA DEFORMAZIONE

• INDIRETTA → ENCODER, POTENZIOMETRO A FILO

↓
LUNGHEZZA ELEVATA, BASSA RISOLUZIONE

• DIRETTA → ESTENSIMETRO → SEGNALE ELETTRICO DA LAMINA

↓
RISOLV. ELEVATA (< 1 mm) DEFORMABILE

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\sigma = \frac{F}{S_0}$$

$$\text{ALLUNG. \%} = 100 \Delta L / L_0$$

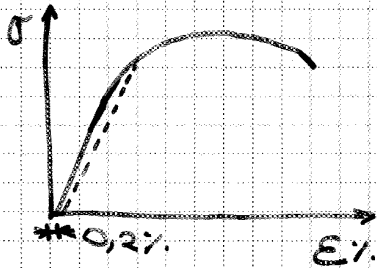
DURANTE LA PROVA L'AREA SI RIDUCE

↓
SI USA TENSIONE CONVENZIONALE, CON S INIZIALE

CARICO → F [N]

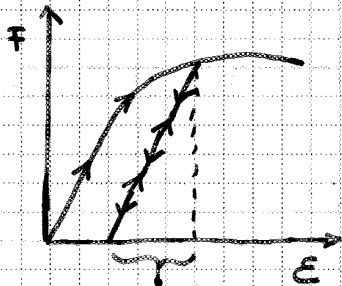
CARICO UNITARIO → R [$N \cdot mm^{-2}$]

TENSIONE DI ROTTURA $R_m = \frac{F_m}{S_0}$ → MAX DELLA CURVA
 ↳ CONVENZIONALE



DUTILE SENZA SNERNAMENTO

RIMOZIONE E RIAPPLICAZIONE DEL CARICO



SE CARICO VIENE RILASCIATO
 DURANTE FASE PLASTICA, RITORNA
 ↳ ALLA RETTA ELASTICA INIZIALE

RECUPERO ELASTICO
 ↳
 RESIDUO PLASTICO

PERDE DUTTILITÀ
 AUMENTA RESISTENZA
 ↳
 INCRUDIMENTO

MATERIALE FRAGILE



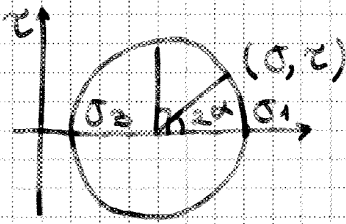
NO STRIZIONE
 NO CAMPO PLASTICO (O LIMITATO)
 ↳
 NON CONSIGLIABILE X STRUTTURE
 (SI ROTTE)

FRAGILI/DUTILI SI CONTRADDISTINGONO X ALLUNGAMENTO
 (DOPO ROTTURA)
 $A < 5\%$ $A > 10\%$

IPOTESI DI CEDIMENTO

CONFRONTARE TENSIONE SU PUNTO + SOLLECITATO
 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) CON IL VALORE DELLA TENS. LIMITE (σ_{lim})

A



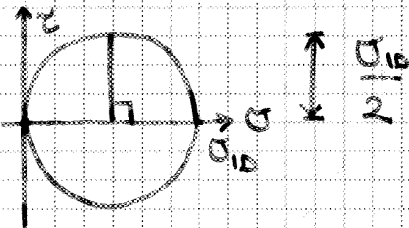
SOLO CERCHIO σ_1, σ_3

$$\frac{\pi}{2} = 2\alpha \rightarrow \alpha = 45^\circ \text{ NEL MAX}$$

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

SITUAZIONE IDEALE EQUVALENTE

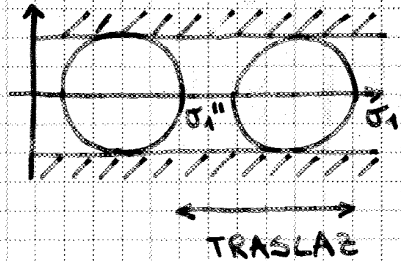
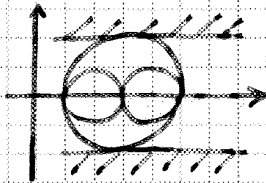
↓
STATO DI TENSIONE MONOASSIALE



EGUAGUANDO (STESSA τ_{MAX})

$$\frac{\sigma_{10}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\sigma_{10} = \sigma_1 - \sigma_3$$



③ APPROCCIO SU ENERGIA ELASTICA

ENERGIA DI DEFORMAZIONE → VON MISES

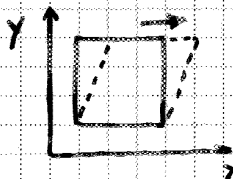
$$U = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$$

2 CONTRIBUTI DISTINTI

→ VARIAZ. VOLUME

→ VARIAZ. DI FORMA

ENERGIA DI DISTORSIONE



$$\sigma_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

SIMIL-MEDIA

QUADRATICA DIAMETRI

• SITUAZIONE DI PROGETTO

↓
 UN PARAMETRO DA DETERMINARE (SPESSORE, AREA,...)

SI DEFINISCE TENSIONE AMMISSIBILE

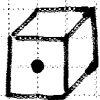
$$\sigma_{AMM} = \frac{\sigma_{LIM}}{C_S} \rightarrow \text{IMPOSTO (1,5; 3; ...)}$$

↓
 $\sigma_{ID} = \sigma_{AMM}$ (PUNTO PIÙ SOLLECITATO)

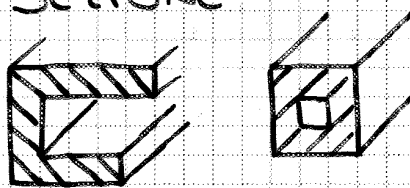
↓
 CONTIENE PARAMETRO INCOGNITO CHE VIENE DETERMINATO

PROPRIETÀ GEOMETRICHE DELLE AREE

PUNTO

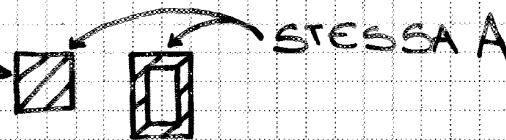


SEZIONE

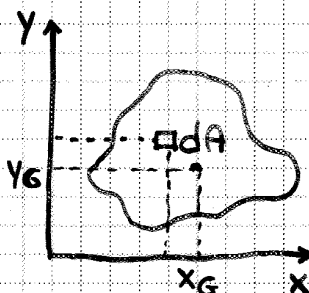


• AREA

• FORMA



PARAMETRI CARATTERISTICI → AREA (ORDINE ZERO)
 → MOMENTI I ORDINE
 → MOMENTI II ORDINE



$$A = \int_A dA \quad \text{ORDINE ZERO}$$

ORDINE I: MOMENTI STATICI

$$S_x = \int_A y dA \quad \leftrightarrow \quad S_y = \int_A x dA$$

NECESSARI X

DETERMINARE

IL BARICENTRO

$$\rightarrow x_G = \frac{S_y}{A} \quad y_G = \frac{S_x}{A}$$

NEL CASO DI AREE $J_{xx} J_{yy} J_{xy} [m^2 \cdot m^2] = [m^4]$

UN RIFERIMENTO TALE CHE $J_{xy} = 0$ È DETTO PRINCIPALE D'INERZIA

SISTEMI DI RIFERIMENTO

ORIGINE / TRASLAZIONE / ROTAZIONE

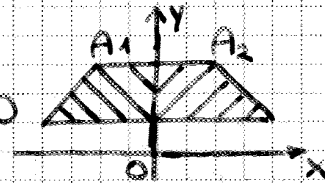
ORIGINE NEL BARICENTRO $O \equiv G$ RIF. BARICENTRICO

↓
COORDINATE G (0; 0) $S_x = 0$ $S_y = 0$

IMPORTANZA DELLE SIMMETRIE

↓
SE UNA FIGURA AMMETTE UN ASSE DI SIMMETRIA
G STA SU DI ESSA

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \int_A x \, dA = \int_{A_1} x \, dA + \int_{A_2} x \, dA = 0$$



SE GLI ASSI DI SIMM. SONO 2, G È SULLA LORO INTERSEZIONE

PER IL MOMENTO CENTRIFUGO (II ORDINE)

$$J_{xy} = \int_A xy \, dA = \int_{A_1} xy \, dA + \int_{A_2} xy \, dA = 0$$

DIVISO DA ASSE SIMM.

(++) + (-+)

UN ASSE DI SIMM. È PRINCIPALE D'INERZIA

UN RIFERIM. BARICENTRICO E ANCHE PRINCIPALE D'INERZIA È DETTO CENTRALE PRINCIPALE

(O CENTRALE) $\hookrightarrow O \equiv G; J_{xy} = 0$

$$J_{xx} = \sum_i (y_i^2 A_i + J_{\xi_i \xi_i}) \quad J_{yy} = \sum_i (x_i^2 A_i + J_{\eta_i \eta_i})$$

MOM. D'INERZIA

$$J_{xy} = \sum (x_i y_i A_i + J_{\xi_i, \eta_i}) \quad \text{MOM. CENTRIFUGO}$$

X AREE CONTRIBUTI SINGOLE PARTI

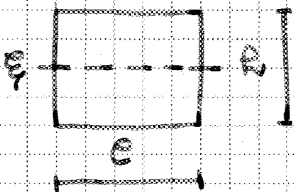
X MOMENTI BISOGNA PRIMA ESPRIMERE TERMINE V SINGOLA PARTE NEL SIST XY + SOMMA SINGOLI CONTRIBUTI

X MOMENTI STATICI SOLO VALORI DI TRASPORTO POICHE' $S_{\xi} = S_{\eta} = 0$ (SIST. BARICENTRICI)

X MOMENTI D'INERZIA / CENTRIFUGO, $J_{\xi_i \xi_i}, J_{\eta_i \eta_i}, J_{\xi_i \eta_i}$ VENGONO CORRETTI CON VALORI DI TRASPORTO $x_i^2 A, y_i^2 A, x_i y_i A$ (FORMULA HUYGENS)

MOMENTI D'INERZIA ELEMENTARI

• RETTANGOLO $\rightarrow J_{\xi\xi} = \frac{bR^3}{12} = \int_A \left(\frac{R}{2}\right)^2 d(bR) = b \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{R^3}{3}$



• TRIANGOLO $\rightarrow J_{\xi\xi} = \frac{bR^3}{36}$

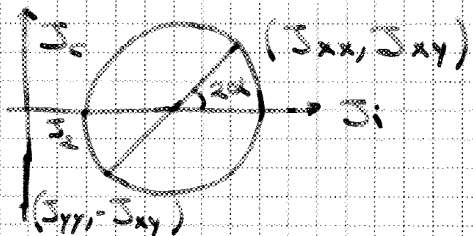
• CERCHIO $\rightarrow J_{\xi\xi} = \pi \frac{R^4}{4} = \int \pi^2 d(\pi R^3) = \pi \int R^3 dR = \pi \frac{R^4}{4}$

• SEMICERCHIO $\rightarrow J_{\xi\xi} = \pi^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9} \pi \right)$

$$\sin\alpha \cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$\begin{cases} J_{xx} = \frac{J_1 + J_2}{2} + \frac{J_1 - J_2}{2} \cos 2\alpha \\ J_{yy} = \frac{J_1 + J_2}{2} - \frac{J_1 - J_2}{2} \cos 2\alpha \\ J_{xy} = \frac{J_1 - J_2}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

(J_{xx}, J_{xy}) E $(J_{yy}, -J_{xy})$ SU CIRC., POSIZ. OPPOSITE



• SI CALCOLANO IN XY CON J_{xx}, J_{yy}, J_{xy}

$$J_1 = \frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

$$J_2 = \frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

$$\bullet |\tan 2\alpha| = \left| \frac{2J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}} \right|$$

OPPURE SI PUO' RISOLVERE CON AUTOVALORI

SOLIDO DI SAINT VENANT

ELEMENTI STRUTTURALI → FORMULE PER TENSIONI, DEFORMAZIONI, SPOSTAMENTI

• MONODIMENSIONALI → 2 DIM << DEL RIMANENTE

↓
TRAVI, ALBERI DELLE MACCHINE ↓ SOLIDO DI SAINT VENANT

• BIDIMENSIONALI → 1 DIM << → PIASTRE, GUSCI (CURVI)

SONO PRESENTI $\sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$

NECESSARIE A L'EQUILIBRIO DEI CARICHI ESTERNI

SI CERCA DI RIDURRE FUNZIONI DI UNA SOLA DIREZIONE
(SOLO DA Z)

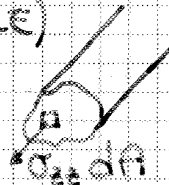
EQUIVALENTI STATICI SULLA SEZIONE L

COMPONENTI DELLA RISULTANTE DELLA FORZA

• FORZA NORMALE (SFORZO NORMALE)

↓
TRAZIONE > 0 , COMPRESSIONE < 0

$N = \int_A \sigma_{zz} dA$ IN DIREZ. ASSIALE



• FORZE DI TAGLIO (TAGLI) → CESSIAMENTO TRASVERSALE

↓
COMPONENTI x, y

$F_x = \int_A \tau_{xz} dA$

$F_y = \int_A \tau_{yz} dA$

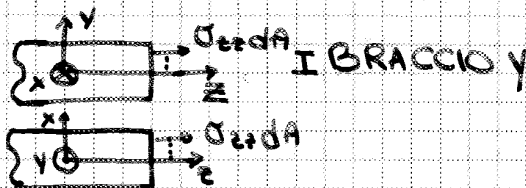


COMPONENTI DEL MOMENTO RISULTANTE

• MOMENTI FLETTENTI → TENDONO A CURVARE L'ASSE

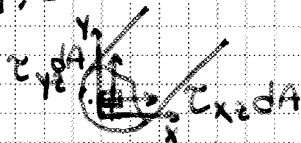
$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA$

$M_y = \int_A \sigma_{zz} x dA$



• MOMENTO TORCENTE } TENDE AD ATTORCIGLIARE

$M_z = \int (\tau_{zy} x - \tau_{xz} y) dA$ (TORCERE) L'ASSE



FACCIA POSITIVA CON VERSI CONCORDI AGLI ASSI

IN PRATICA:

NOTE LE FORMULE DALLE CARATT. (ES: N, M_x, M_y, \dots)

SI CALCOLANO LE TENSIONI σ_{ii}, τ_{ij}

COMPORTAM. ESTENSIONALE
(TRAZIONE - COMPRESSIONE)

1) SPOSTAMENTO

$$W = k_0 z$$

COSTANTE



2) DEFORMAZIONI

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} = k_0$$

3) ELASTICITA'

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad \text{SOLIDO DI SAINT VENANT}$$

$$\sigma_{zz} = E \cdot \epsilon_{zz}$$

TENSIONE ASSIALE COST.

MODULO DI YOUNG

4) EQUIVALENTI STATICI (NOTA RIDUZIONE A G)

$$\text{FORZA NORMALE } N = \int_A \sigma_{zz} dA = E k_0 \int_A dA = E k_0 A$$

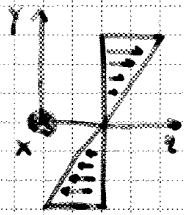
$$\text{MOMENTO FLETTENTE } M_x = \int_A y \sigma_{zz} dA = E k_0 \int_A y dA = E k_0 \int_A y dA = 0$$

$$\text{MOMENTO FLETTENTE } M_y = \int_A (-x) \sigma_{zz} dA = E k_0 \int_A (-x) dA = -E k_0 \int_A x dA = 0$$

ROTAZ. ANTICORARIA

CONCLUSIONE: $k_0 = \frac{N}{EA}$

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A}$$

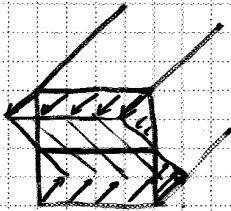


TENSIONI ≥ 0 A SECONDA DELLA ZONA

VALORI MASSIMI (IN MODULO) SUGLI ORLI DELLA SEZIONE

PER $y=0$ (LIVELLO BARICENTRICO) $\sigma_{zz}=0$

\hookrightarrow X ASSE NEUTRO



ASSE X NEUTRO

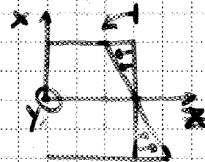
• INTORNO A CUI LA SEZ. RUOTA

• ASSE DEL MOMENTO $\neq 0$ (M_x)

FLESSIONE RETTA

PIANO ZX

ROTAZIONE α_y (INTORNO A Y)



① $w = -\alpha_y x$

② DEFORMAZIONE $\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -x \frac{d\alpha_y}{dz} = -x k_y$

③ ELASTICITÀ $\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz} = E x k_y$

④ EQUIVALENZA STATICA

$N = \int \sigma_{zz} dA = E k_y \int x dA = 0$

$M_x = \int y \sigma_{zz} dA = -E k_y \int x y dA = 0$ RIF. PRINC. XY

$M_y = - \int x \sigma_{zz} dA = E k_y \int x^2 dA = E k_y J_{yy}$

CONCLUSIONE:

$\sigma_{zz} = - \frac{M_y}{J_{yy}} x$

FLESSIONE COMBINATA (PIANI ZY E ZX)

$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_y}{J_{yy}} x$ SOVRAPP. EFFETTI

COMPORTAM. TORSIONALE

2 CASI

- SEZ. RETTA CIRCOLARE ○

⇒ SOLUZIONE IN FORMA CHIUSA → FORMULA



- SEZ. RETTA NON CIRCOLARE



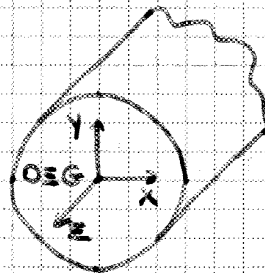
⇒ SOLUZ. NON IN FORMA CHIUSA → SERIE

⇒ FORMULE PRATICHE APPROSSIMATE

SEZIONE CIRCOLARE

1) CINEMATICA

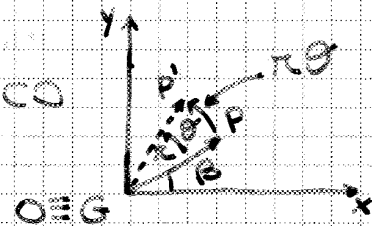
- SEZIONI RESTANO PIANE



- ROTAZIONE DI OGNI SEZIONE INTORNO A Z
ANGOLO DI ROTAZIONE θ

UTILIZZIAMO ANCHE UN RIF. CILINDRICO

$$\begin{cases} x = r \cos \beta \\ y = r \sin \beta \end{cases}$$

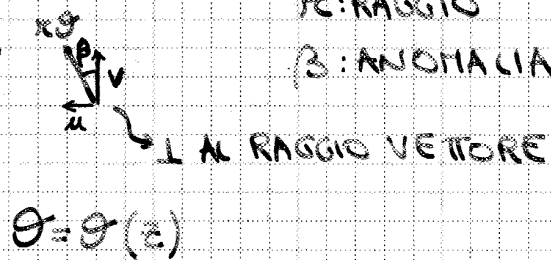


θ PICCOLO → ARCO ≈ CORDA

↳ RETTIFICO SPOSTAM. DAP A P'

r: RAGGIO
 β : ANOMALIA

$$\begin{cases} u = -r \theta \sin \beta = -y \theta \\ v = r \theta \cos \beta = x \theta \\ w = 0 \end{cases}$$



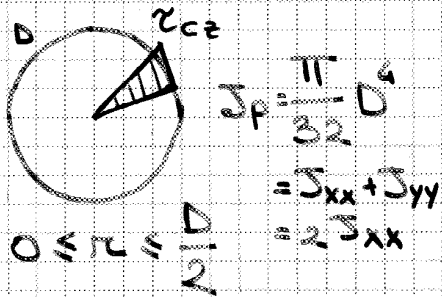
2) DEFORMAZIONI

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\theta + \theta = 0$$

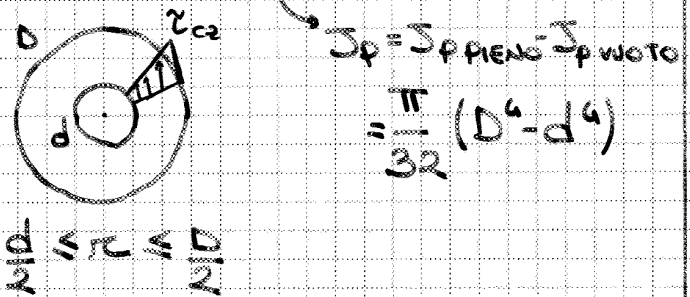
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -y \frac{d\theta}{dz} + 0 = -y \theta'$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = x \frac{d\theta}{dz} + 0 = x \theta'$$

SEZIONE PIENA

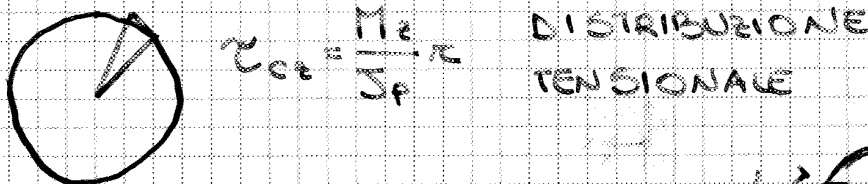


SEZIONE CAVA

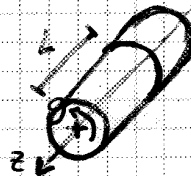


TENSIONE MAX SUL BORDO ESTERNO

SINTESI



$\theta' = \frac{d\theta}{dz} = \frac{M_z}{G J_p}$ GRADIENTE DI TORSIONE



$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_0^L \frac{M_z}{G J_p} dz$ $M_z = \text{COST (SOLIDO SAINT VENANT)}$
 $J_p = \text{COST (CILINDRO)}$

$\theta_1 - \theta_2 = \frac{M_z}{G J_p} L$ $G = \text{COST (MATERIALE UNIF.)}$

ROTAZIONE RELATIVA

$\frac{M_z}{\Delta\theta} = \frac{G J_p}{L}$

SE SPESSE + RIGIDO,
 SE + LUNGO SI TORCE
 DI +

RIGIDEZZA TORSIONALE

CONFRONTO: MOLLA

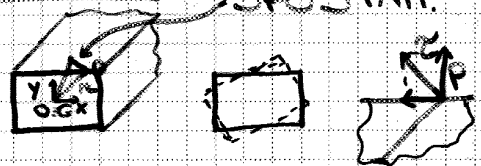
$F = k u$

RIGIDEZZA $k = \frac{F}{u}$

SEZIONE DI FORMA NON CIRCOLARE

ES: SEZIONE RETTANGOLARE

ROTAZIONE θ

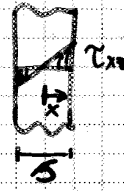


IN PROSSIMITA' DEGLI ORLI "e"

τ VERTICALE: τ_{yz}

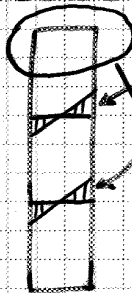
$$\tau_{yz} = \frac{M_x}{J_c} x$$

$$x = \pm s/2$$

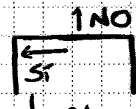


VALORI DI PICCO: $\tau_{\text{picco}} = \pm \frac{M_x}{J_c} s$

NOTARE CHE LA τ_{yz} NON DIPENDE DA y



STESSA SITUAZIONE



τ_{xz} → TRASCURABILI COME INTENSITA'

CONSEGUENZA: MODIFICA DELL'ESPRESSIONE J_c

$$J_c = \frac{1}{3} s^3 (e - 2 \cdot 0,3 \cdot s)$$

↳ RIDUZIONE
2 ESTREMI LIBERI

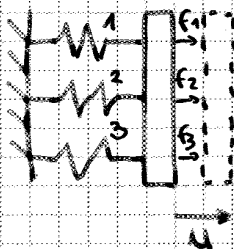


PARETE SOTTILE APERTA → AGGREGAZIONE DI RETTANGOLI

CONDIZIONE DI "PARALLELO" MECCANICO

ELEMENTI MECCANICI ELASTICI IN PARALLELO

ES: MOLLE



u COMUNE

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_i$$

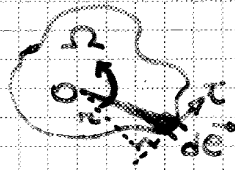
$$= k_1 u + k_2 u + \dots$$

$$\pm (k_1 + k_2 + \dots) u = k_{eq} u$$

IN CONDIZ. DI // LE RIGIDENZE SI SOMMANO

• STESSA ROTAZIONE $\vartheta \rightarrow \vartheta' = \text{cost}$

EQUVALENTI STATICI



dL : TRATTO INFINITESIMO DI LINEA MEDIA ORIENTATA

$$\text{FORZA} = \oint_C \tau dL = \vec{0} \quad \text{NULLA}$$

$$\text{MOMENTO} = \oint_C r \tau dL = \tau \oint_C r dL$$

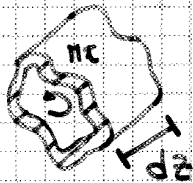
$$M_c = \tau \cdot 2 \cdot \Omega \quad \text{AREA CONTENUTA NELLA LINEA MEDIA}$$

$$\tau = \frac{M_c}{2 \cdot \Omega}$$

ASSUMENDO $\tau \approx \text{COST}$ NELLO SPESSORE

$$\gamma = \frac{\tau}{s} = \frac{M_c}{2 \cdot \Omega \cdot s}$$

RIGIDEZZA (DETERMINAZIONE DI J_c)
CONSIDERAZIONE ENERGETICA



IN TERMINI ESTERNI (MACROSCOPICI)

$$dE = \frac{1}{2} M_c d\theta$$

IN TERMINI INTERNI (MICROSCOPICI)

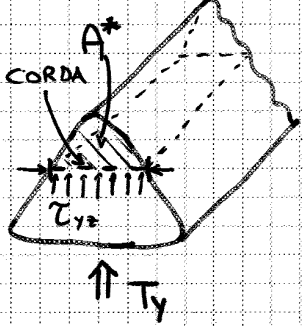
$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{2} dz \int_A \tau \gamma dA = \frac{1}{2G} dz \int_A \tau^2 dA \\ &= \frac{1}{2G} dz \tau^2 \int_A \frac{s^2}{s^2} dA \end{aligned}$$

EGUAGLIANZA ENERGIA INTERNA E ESTERNA

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_c \frac{d\theta}{dz} &= \frac{1}{2G} dz \frac{M_c^2}{4 \cdot \Omega^2} \int \frac{dA}{s} \\ g_1 &= \frac{M_c}{G} \frac{\int \frac{dA}{s}}{4 \cdot \Omega^2} \quad g_1 = \frac{M_c}{2 \cdot \Omega} \end{aligned}$$

$T_y = \text{COST.}$ → EQ P): $M_x + dM_x - M_x - T_y dz = 0$

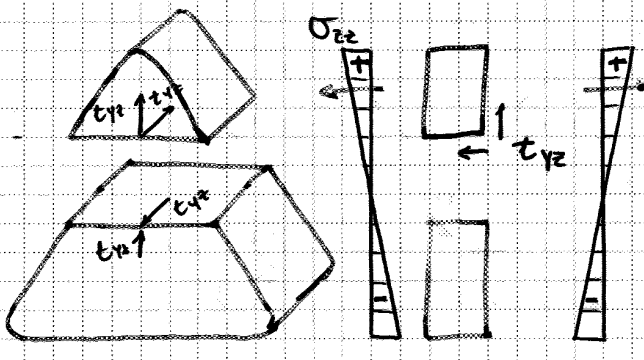
$T_y = \frac{dM_x}{dz}$ → $M_x = M_x(z)$



z_{yz} ATRAVERSO LA CORDA

FLUSSO $t_{yz} = \int_C z_{yz} dx$ t_{yz}, z_{yz} ENTRANTI IN A^*

EQUILIBRIO ASSIALE (z) DELLA ZONA SOPRA ALLA CORDA



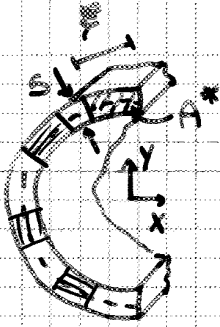
MOMENTI CERCANO DI TIRARLO UNO A DX E UNO A SX

$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y$ → $d\sigma_{zz} = \frac{1}{J_{xx}} \frac{dM_x}{dz} y dz = \frac{T_y}{J_{xx}} y dz$

EQUILIBRIO ASSIALE: $\int_{A^*} (\sigma_{zz} + d\sigma_{zz}) dA - \int_{A^*} \sigma_{zz} dA - t_{yz} dz = 0$

$\frac{T_y}{J_{xx}} \int_{A^*} y dA \cdot dz = t_{yz} \cdot dz$ → $t_{yz} = \frac{T_y S_x^*}{J_{xx}}$

FLUSSO CAUSATO DA T_y ATRAVERSO LA CORDA CHE "STACCA" L'AREA A^*

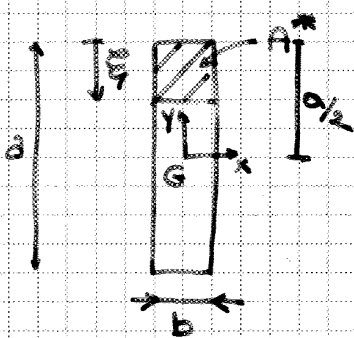


$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{T_y S_x^*}{J_{xx} S} + \frac{T_x S_y^*}{J_{yy} S}$$

ASCISSA CURVILINEA ξ
(ORIGINE SULL' ORLO SUPER.)

SEZIONE RETANGOLARE

TAGLIO T_y $b \ll a$



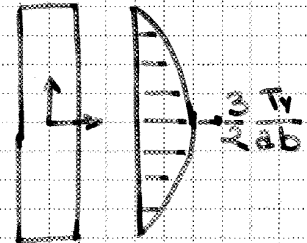
$$S_x^* = b \xi \left(\frac{a}{2} - \frac{\xi}{2} \right)$$

$$\xi = 0 \text{ BORDO SUP.} \rightarrow S_x^* = 0 \rightarrow \tau = 0$$

$\xi = \frac{a}{2}$ BARICENTRO DELLA SEZIONE (COMPLETA)

$$S_x^* = b \frac{a}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2 \cdot 2} \right) = \frac{ba^2}{8}$$

$$\tau = \frac{T_y}{J_{xx} S} \frac{ba^2}{8} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{ab}$$



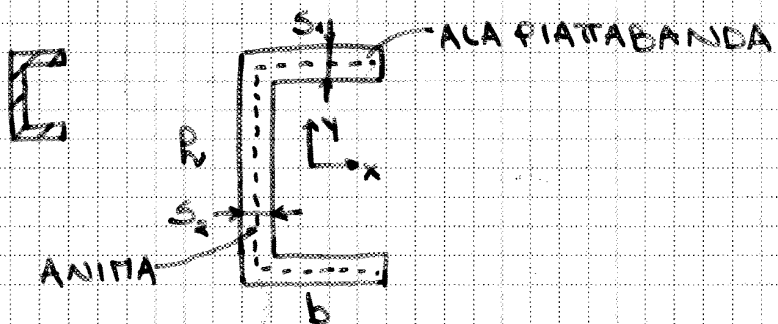
$\xi = a$ $S_x^* = 0$ BORDO INFERIORE $\rightarrow \tau = 0$

OSSERVAZIONE

- VALORI NULLI DI τ DOVE σ_{zz} E' MASSIMA
- VALORI MASSIMI DI τ DOVE σ_{zz} E' NULLA

SEZIONE A C

T_y



T_x

PIATTAFORMA SUPERIORE



$$S_y^* = s_1 \xi_1 \left(b - e - \frac{b \xi_1}{2} \right)$$

$$\xi = 0 \rightarrow S_y^* = 0 \quad \tau = 0$$

$$\xi = b - e \rightarrow S_y^* = s_1 \frac{(b - e)^2}{2} \quad \tau = \frac{T_x s_1 (b - e)^2}{J_{yy} 2 s_1}$$

$$\xi = b \rightarrow S_y^* = s_1 b \left(\frac{b}{2} - e \right) \quad \tau = \frac{T_x s_1 b \left(\frac{b}{2} - e \right)}{J_{yy} s_y \frac{b}{2}}$$

ANIMA

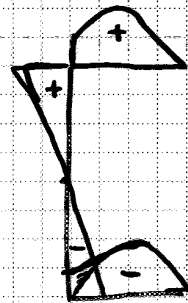
$$S_y^* = s_1 b \left(\frac{b}{2} - e \right) - s_2 \xi_2 e$$

$$\xi_2 = 0 \rightarrow S_y^* = s_1 b \left(\frac{b}{2} - e \right)$$

$$\xi_2 = \frac{h}{2} \rightarrow S_y^* = s_1 b \left(\frac{b}{2} - e \right) - s_2 \frac{h}{2} e = 0 \rightarrow \tau = 0$$

PIATTAFORMA INFERIORE

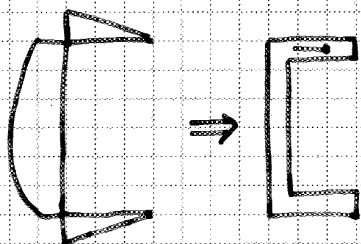
$$S_y^* = -s_1 \xi_3 \left(e - \frac{\xi_3}{2} \right) - s_2 b \left(\frac{b}{2} - e \right)$$



DOVE AGISCE IL TAGLIO (T_y, T_x) PER EQUIVALERE ALLE τ TROVATE

CASO

T_y



$$F_x = \int_0^b \tau s_1 d\xi_1 = \frac{T_y b h s_1}{a J_{xx}}$$

T_x EQUIVALE A F_x (2 VOLTE), F_y

(Handwritten mark)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{zz}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_{zz}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

FORMULE PARTICOLARI (ABBREVIATE) X TENS. IDEALI
VALIDE SOLO X SOLIDO SAINT VENANT

MAT. FRAGILI

$$\sigma_{ID} = \sigma_1 = \frac{\sigma_{zz}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

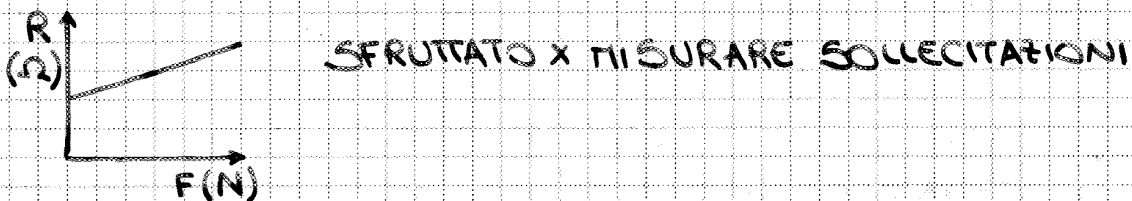
MAT. DUTILI

$$\text{MAX } \tau : \sigma_{ID} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau^2}$$

$$\text{ENERGIA DIST. } \sigma_{ID} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\dots} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\tau^2}$$

ESTENSIMETRIA ELETTRICA A RESISTENZA

CONDUTTORE FILIFORME VARIA R OC TRAZIONE



1) ANALISI SPERIM. SOLLECITAZIONI

2) COSTRUZIONE DI TRASDUTTORI DI GRANDEZZE MECCANICHE

ES: X BILANCIA PESAPERSONE ELETTRONICO

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta A}{A}$$

↗ E

DISTURBO INDOTTO DALLA TEMPERATURA

- CONDIZ. AMBIENTALI \neq
- FUNZIONAMENTO MACCHINARIO
- EFFETTO JOULE DELL'ESTENSIMETRO

↓
3 EFFETTI DISTINTI:

1) VARIAZIONE FATTORE DI TARATURA

2) VARIAZIONE R

3) DILATAZIONE TERMICA \neq TRA ESTENSIMETRO/COMPONENTE

1) $K_T \rightarrow$ FATTORE TARATURA A TEMP. $T \neq T_0$

$$K_T = K [1 + \beta_K (T - T_0)]$$

↓
COEFF. TEMPERATURA DEL FATTORE DI TARATURA

$$2) \left(\frac{\Delta R}{R} \right)_T = \beta (T - T_0)$$

↓
COEFF. DI TEMPERATURA DELLA RESISTENZA

3) ESTENSIMETRO + DEFORMABILE DEL PEZZO

$\alpha \rightarrow$ COEFF. DILATAZ. TERMICA COMPONENTE

$\alpha_e \rightarrow$ " " " " ESTENSIMETRO

$$E_\alpha = (\alpha - \alpha_e) (T - T_0) \text{ SUBITO DA ESTENSIMETRO}$$

CORREZIONE DEGLI EFFETTI DELLA TEMPERATURA

$$\frac{\Delta R}{R} = K_T E + K_T (\alpha - \alpha_e) (T - T_0) + \beta (T - T_0)$$

$$E = \frac{\Delta R / R}{K_T} - \frac{[\beta + K_T (\alpha - \alpha_e)] (T - T_0)}{K_T}$$

$$E = \left\{ \frac{\Delta R / R}{K} - \frac{[\beta + K (\alpha - \alpha_e)] (T - T_0)}{K} - \frac{(K_T - K) (\alpha - \alpha_e) (T - T_0)}{K} \right\} \frac{K}{K_T}$$

$E' =$ MISURA $\leftarrow E_a =$ DEF. APPARENTE $\leftarrow \text{SO}$

② SUPPORTO → X ISOLARE LA GRIGLIA DAL COMP.

↓
POLIAMMIDE

③ TERMINALI → A FILO } COLLEGANO AL CIRCUITO
 ↓ A PIATTOLA } L'ESTENSIMETRO

CON ELET. RACCORDO X NON INQUINARE MISURA TIRANDO I CAVI

④ ADESIVO → INCOLLAGGIO

- CIANOCRIATO → $T_{MAX} < 100^\circ C$, DURATA NON ELEVATA
- EPOSSIDICO → + COMPLESSO, T + ALTA, + DURATURO
X TRASDUTTORI (BILANCIA)

⑤ PROTETTIVO

- RESINE SILICONE → ISOLANTE / VS URTI
- COPERTURE IN GOMMA
- GUSCIO Me.

RELAZIONE FONDAMENTALE

$$\frac{\Delta R}{R} = K E \quad \left. \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right\} \frac{\sigma}{E}$$

CIRCUITO DI MISURA

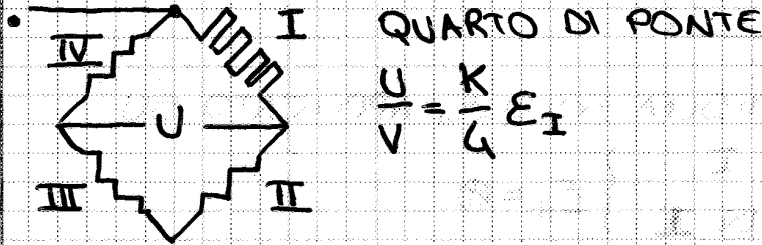
$$\Delta R = R K E$$

VALORI DI ESEMPIO

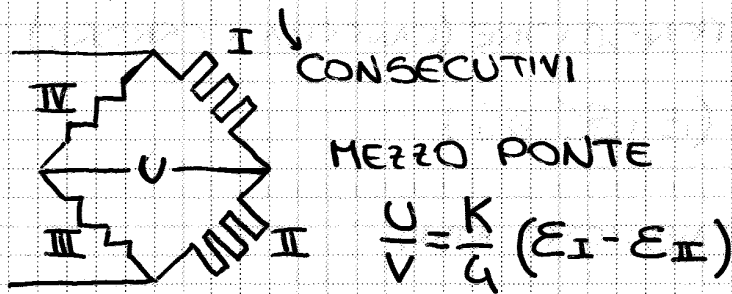
$$\Delta R = 120 \Omega \cdot 2 \cdot \frac{100 \text{ MPa}}{200 \cdot 10^3 \text{ MPa}} = 120 \cdot 10^{-3} \Omega = 0,12 \Omega$$

VALORI DIFFICILI DA MISURARE POICHE' BASSO

NON NECESSARIAMENTE I 4 LATI DEL PONTE SONO ESTENSIMETRI

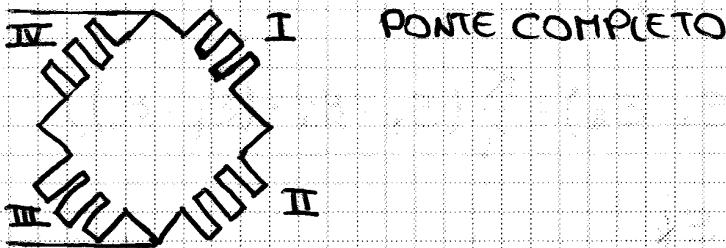


• 2 ESTENSIMETRI + 2 RESISTENZE



NON SI USANO
3 ESTENSIMETRI
↓
NON UTILE

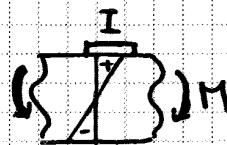
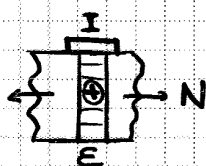
• 4 ESTENSIMETRI



SCELTA

- COSTO → MATERIALE (~10€/GRIGLIA)
→ TEMPO INSTALLAZIONE
- APPLICAZIONE → MISURA DEFORM/TENSIONI → 1/4; 1/2 PONTE
→ TRASDUTTORE → PRECISIONE, DURATA
↓
1 PONTE COMPLETO

* ESEMPI 1/4 PONTE

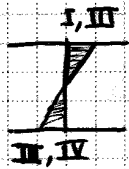


$\frac{U}{V} = \frac{K}{4} \epsilon_I = \frac{K}{4} (\epsilon + \epsilon_a)$

DEF. MECCANICA DEF. APPARENTE

* CIRCUITO A PONTE COMPLETO

ES: FLESSIONE



$$\frac{U}{V} = \frac{K}{4} (\epsilon_p + \epsilon_a - (-\epsilon_p) - \epsilon_a + \epsilon_p + \epsilon_a - (-\epsilon_p) - \epsilon_a)$$

$$= \frac{K}{4} \cdot 4 \epsilon_f$$

ES: TRAZIONE

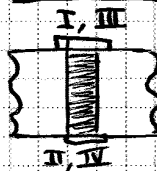


$$\frac{U}{V} = \frac{K}{4} (\epsilon_t + \epsilon_a - (-\nu \epsilon_t) - \epsilon_a + \epsilon_t + \epsilon_a - (\nu \epsilon_t) - \epsilon_a)$$

$$= \frac{K}{4} 2(1+\nu) \epsilon_t$$

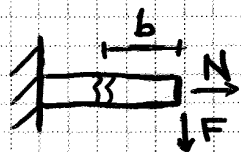


SELETTIVITA' DELLA MISURA ⇒ SENSIBILITA' A UN SOLO TIPO DI SOLLECITAZIONE



$$\frac{U}{V} = \frac{K}{4} (\epsilon_I - \epsilon_{II} + \epsilon_{III} - \epsilon_{IV})$$

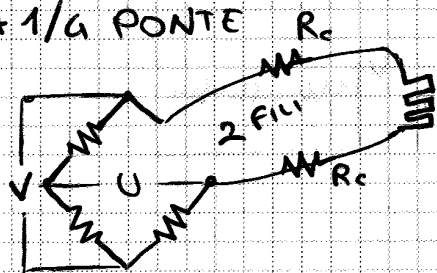
$$= \frac{K}{4} (\epsilon_t - \epsilon_a - \epsilon_t + \epsilon_a + \epsilon_t + \epsilon_a - \epsilon_t - \epsilon_a) = 0$$



$$M = F \cdot b$$

ERRORE DOVUTO AI CAVI

* 1/4 PONTE



2 EFFETTI

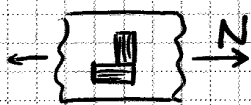
- CADUTA DI TENSIONE TRA I CAPI DEL CAVO
- VARIAZ. RESIST. CAVO (ES: RISCALDAM)
- ↳ CAVI IN SERIE CON ESTENS.

VALORI DI TENSIONE SOPPORTABILI FORNITI DAI PRODUTTORI (1 ÷ 10 V)

DIREZIONE MISURA

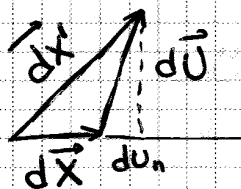
= ALLINEAMENTO ESTENSIMETRO

ESSI FINORA FISSATI SULLE DIR. PRINCIPALI



NOTA: L'ESTENSIMETRO MISURA ϵ , NON σ

PREMESSA: DILATAZIONE SU UNA DIREZIONE GENERICA



$$\{dU\} = [E] \{dX\}$$

↳ DILATAZIONE E SCORRIM.

SCRIVO $d\vec{x}$ COME

$$\{dX\} = \{m\} de$$

↳ DIREZIONE

↳ LUNGHEZZA

PROIEZIONE DI $d\vec{U}$ SU \vec{n}

$$dU_n = \{m\}^T \{dU\} = \{m\}^T [E] \{dX\} \\ = \{m\}^T [E] \{m\} de$$

$$\frac{dU_n}{de} = \{m\}^T [E] \{m\} = E \quad \text{DILATAZIONE LUNGO } \{m\}$$

NOTARE AFFINITA' CON $\sigma = \{m\}^T [\sigma] \{m\}$

ESTENSIMETRO APPLICATO SU UNA SUPERF. \Rightarrow TENS. PIANA

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & 0 \\ E_{xy} & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & E_{zz} \end{bmatrix}$$

APPLICAZIONI DELLE SOLUZIONI SOLIDO DI SAINT VENANT X STRUTTURE ELEMENTARI

ELEMENTI STRUTT. MONODIMENSIONALI (UNA DIM >> DELLE ALTRE 2) SI DISCOSTANO DA IPOTESI DI SAINT VENANT

↓
CARICHI E VINCOLO NON SOLO AGLI ESTREMI

↓
FORZE N, T, M , MOM. TORCENTE VARIABILI LUNGO L'ASSE

OGNI SEZIONE TRATTATA COME SEZ. DI UN SOLIDO DI SAINT VENANT

↳ AGISCONO $\sigma_{xz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ → SOLLECITA 2 VARIABILI

↓
LE ALTRE COMPONENTI DI TENSIONE SONO DI SOLITO TRASCURABILI O CALCOLABILI SEPARATAN.

RELAZIONE MOMENTI FLETTENTI / TAGLIO

↓
RELAZIONE DIFFERENZIALE

$$T = \pm \frac{dM}{dz}$$

VALEVOLE X SAINT VENANT

X STRUTTURE REALI, ANCHE IN PRESENZA DI F. DISTRIBUITE (ES: PESO PROPRIO) SI PUO' RITROVARE LA RELAZ.

$$T = \pm \frac{dM}{dz}$$

$$T_y = \frac{dM_x}{dz} \quad T_x = - \frac{dM_y}{dz}$$

ALLO STESSO TEMPO → $q = \pm \frac{dT}{dz}$

DIAGRAMMA DELLE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

(N, T, M)

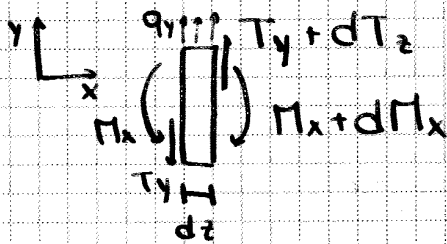


RELAZIONE DI DERIVAZIONE

• ABBIAMO GIÀ VISTO $T = \pm \frac{dM}{dz}$

• AMMETTENDO LA PRESENZA DI CARICO DISTRIBUITO TRASVERSALE

PIANO ZY



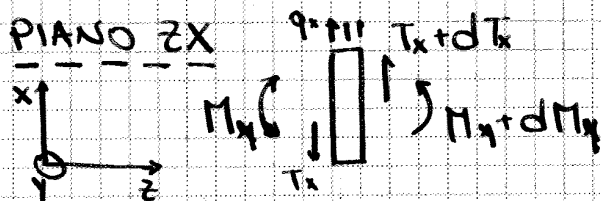
$$\uparrow: T_y + dT_y - T_y + q_y dz = 0$$

$$q_y = -\frac{dT_y}{dz}$$

$$\curvearrow: M_x + dM_x - M_x - (T_y + dT_y) dz - q_y dz \frac{dz}{2} = 0$$

$$T_y = \frac{dM_x}{dz}$$

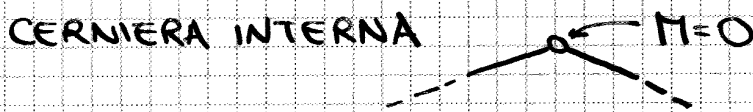
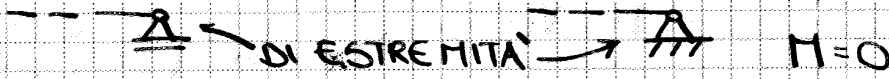
INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE



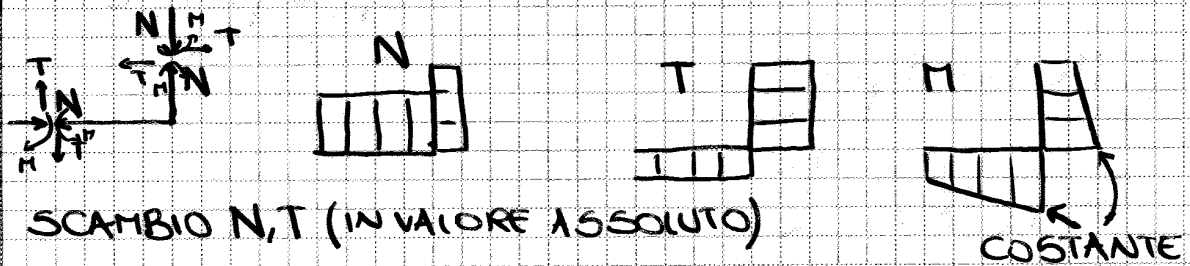
$$\uparrow: T_x + dT_x - T_x + q_x dz = 0 \Rightarrow q_x = \frac{dT_x}{dz}$$

$$\curvearrow: M_y + dM_y - M_y + (T_x + dT_x) dz + q_x \frac{dz^2}{2} = 0 \Rightarrow T_x = -\frac{dM_y}{dz}$$

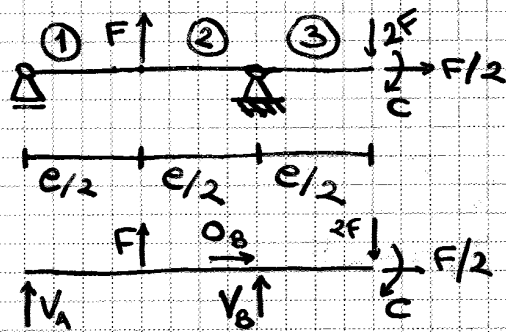
VINCOLI
 ↳ APPOGGIO ↳ CERNIERA



VARIAZIONE DI ASSE (GOMITI) A 90°



ES: UN ELEMENTO, CARICHI CONCENTR.



$$B) : V_A e + F \frac{e}{2} + 2F \frac{e}{2} + C = 0$$

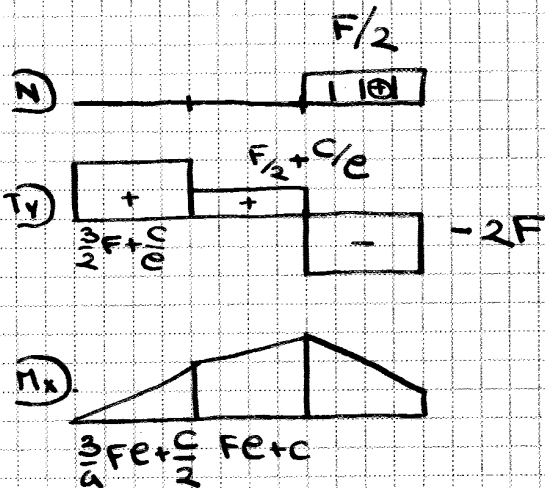
$$V_A = -\frac{3}{2} F - \frac{C}{e}$$

$$A) : V_B e + F \frac{e}{2} - 2F \frac{3}{2} e - C = 0$$

$$V_B = \frac{5}{2} F + \frac{C}{e}$$

$$\rightarrow : O_B + F/2 = 0$$

$$O_B = -F/2$$



3 BIS

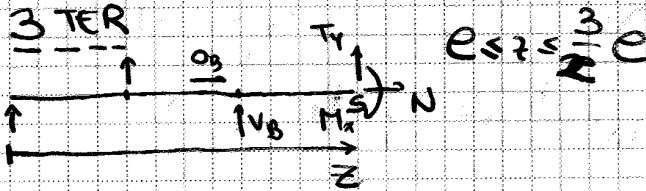
ORIGINE DI z IN $B \rightarrow z^*$

$$0 \leq z^* \leq \frac{c}{2}$$

$$S): M_x - 2F \left(\frac{c}{2} - z^* \right) - C = 0$$

TENERE VERSO DELLE PARTI PRECEDENTI

3 TER

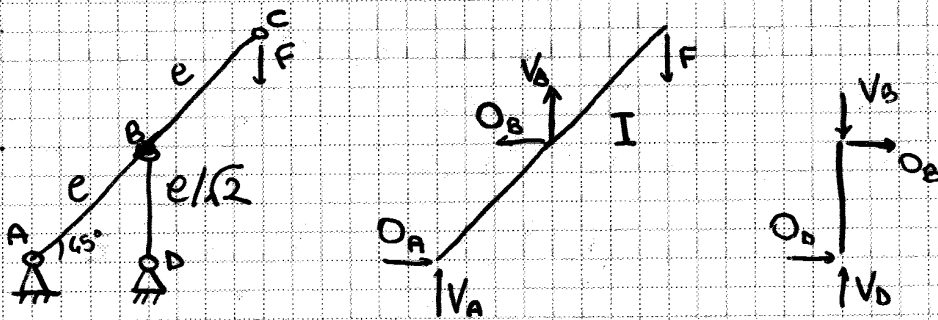


$$\rightarrow: N + O_B = 0$$

$$\uparrow: T_y + V_A + F + V_B = 0 \rightarrow T_y = -2F$$

$$S): M_x + V_A + F \left(z - \frac{c}{2} \right) + V_B (z - e) = 0$$

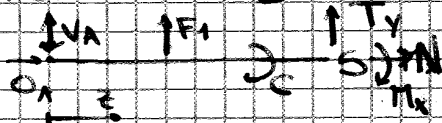
ES 2 ELEMENTI, CARICHI CONC.



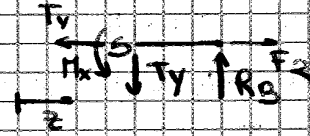
$$I) \rightarrow: O_A - O_B = 0$$

$$A): O_B \frac{e}{\sqrt{2}} + V_A \frac{e}{\sqrt{2}} - 2Fe/\sqrt{2} = 0$$

* $a + b \leq z \leq e$



OPPURE



$N = F_2$

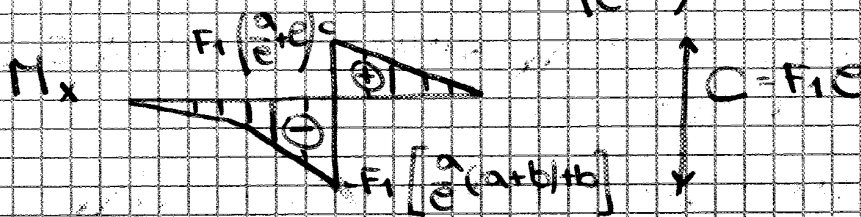
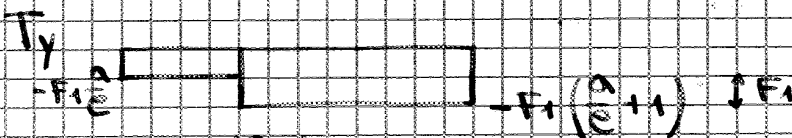
$\uparrow: V_A + F_1 + T_y = 0 \rightarrow T_y = -F_1 \left(\frac{a}{e} + e \right)$

$\curvearrowright: M_x + C + F_1(z - a) + V_A z = 0 \quad M_x = -F_1 \left(\frac{az}{e} + z^2 \right) + F_1 a + F_1 e$

$z = b \quad M_x = F_1 \left(a - \frac{ab(a)}{e} - (b)^2 \right) + F_1 e = F_1 (a/e + 1) C$

$z =$

$z = C \quad M_x = F_1 \left(a - \frac{ae}{e} - e^2 \right) + F_1 e = 0$



EQUAZ. DELLA LINEA ELASTICA

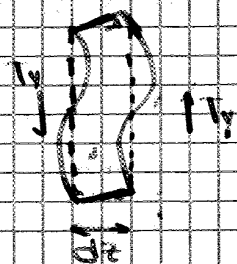
- TAGLIO \rightarrow FA SCORRERE TRASVERS. SEZIONI
- $M_x \rightarrow$ RUOTA SEZIONI, CURVANDO LINEA D'ASSE

X ELEM. SNELLI SI DEENTE SOLO M_x (T_y TRASCURAB.)

PIANO zy

- TAGLIO $\rightarrow z$ (E QUINDI T_y) VARIANO LUNGO LA SEZ.
- M_x MAX IN ASSE BARICENTRICO
- $= 0$ IN BORDI

δ HANNO LO STESSO ANDAM. VARIABLE



$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_{xx}} \quad \text{EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA}$$

PIANO ZX

STESSE PROPRIETÀ

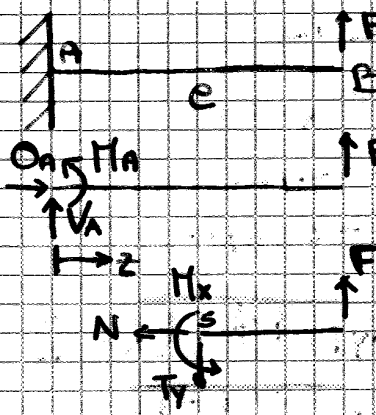
$$\delta = \frac{\Delta T_x}{AG} \rightarrow \text{SCORRIM. MEMO X TAGLIO}$$

$$\frac{du}{dz} = \alpha_y$$

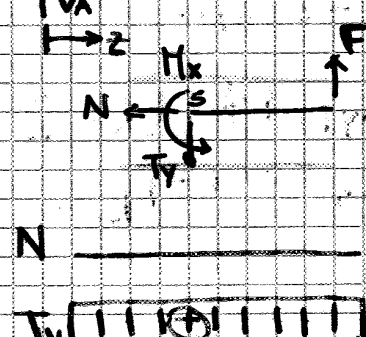
$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{d\alpha_y}{dz} = \kappa_y = \frac{M_y}{EJ_{yy}}$$

CAMBIANO SOLO I SEGNI

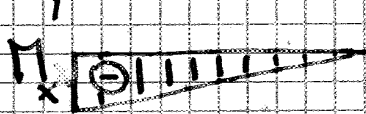
ESEMPIO 1



$\uparrow F \rightarrow O_A = 0$
 $\uparrow: V_A + F = 0 \rightarrow V_A = -F$
 $\uparrow A): M_A + Fe = 0 \rightarrow M_A = -Fe$



$0 \leq z \leq e$
 $\rightarrow: N = 0$
 $\uparrow: -T_y + F = 0 \rightarrow T_y = F$
 $\circlearrowleft): M_x + (e-z)F = 0 \rightarrow M_x = -(e-z)F$
 $z=e \rightarrow M_x = 0$
 $z=0 \rightarrow M_x = -Fe$



$$-\frac{d\alpha_x}{dz} = \frac{M_x}{J_{xx}E} = \frac{d^2 v}{dz^2}$$

$$\alpha_x = \int \frac{M_x}{J_{xx}E} dz = -\frac{F}{J_{xx}E} \left(e z - \frac{z^2}{2} \right) + C_1$$

$$v = -\int \alpha_x dz = \frac{F}{J_{xx}E} \left(\frac{e z^2}{3} - \frac{z^3}{3} \right) - C_1 z + C_2$$

IN CASO

\hookrightarrow IN $z=0$
 $\alpha_x = 0 = +0 - \frac{F}{J_{xx}E} + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$
 $v = 0 = 0 + 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 0$

IPERSTATICITA'

$$R = N \cdot \text{REAZ} - N \cdot \text{EQUAZ.}$$

IPERSTATICO $R > 0 \rightarrow$ SOVRAVINCOLATO

SI SCRIVONO, OLTRE LE EQUAZ. DELLA STATICA, R
EQUAZ. AGGIUNTIVE

CONSIDERANO DEFORMABILITA'

APPROCCI:

① METODO DELLE FORZE

- R COMPONENTI DI REAZIONE SOVRABBONDANTI
 - INCOGNITE DETERMINATE RISPETTANDO VINCOLI
- ↓
ADATTO SE R PICCOLO ($= 1, 2, \dots$)

② METODO DEGLI SPOSTAMENTI \rightarrow METODI NUMERICI

- SPOSTAM. DEI NODI \rightarrow PUNTI NOTEVOLI
- REAZIONI ESPRESSE IN FUNZ. DEGLI SPOSTAM. DEI NODI

METODO DELLE FORZE

- SIST. RIDOTTO: STRUTTURA ISOSTATICA CANCELLANDO R VINCOLI, ASSUNTI COME SOVRABBONDANTI
- ↳ SCELTA ARBITRARIA

NON RISPETTA + CONDIZ. DI VINCOLO DELLA PARTENZA

- SIST. SUPPLEMENTARE: STRUTTURA ISOSTATICA, CARICATA DA UNA REAZ. VINCOLARE ELIMINATA

↓
 R SIST. SUPPLEMENTARI

↓
SPOSTAM. RESO LIBERO IN FUNZIONE

ALLO STESSO MODO:

$${}^{(1)}M_x + {}^{(1)}M_x = M_x = 0$$

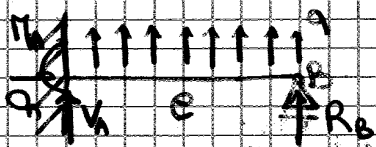
NEI PROCESSI INDUSTRIALI RARAMENTE SI ADOPTANO CONFIG. IPERSTATICHE

OSTACOLA DILATAZIONI TERMICHE

CAUSA TENSIONI IN CASO DI DIFETTI DI COSTRUZIONI O MONTAGGIO (TOLLERANZE)

SIST. CIVILI INVECE MOLTI CASI IPERSTATICI

ESEMPIO



SCELTA (1) - CERNIERA IN A

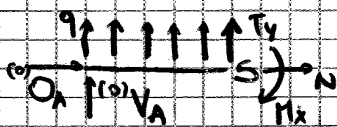
SIST. RIDOTTO



$${}^{(0)}V_A = -\frac{qL}{2}$$

$${}^{(0)}R_B = -\frac{qL}{2}$$

$${}^{(0)}O_A = 0$$



$$\rightarrow {}^{(0)}N = 0$$

$$1: {}^{(0)}T_y + V_A + qz = 0 \rightarrow {}^{(0)}T_y = -V_A - qz$$

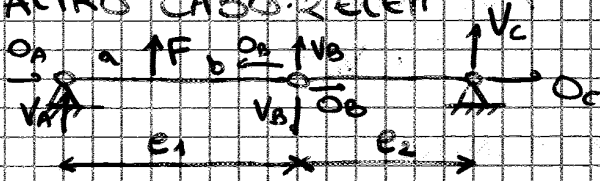
$$2: {}^{(0)}M_x + V_A z + qz^2/2 = 0$$

$${}^{(0)}M_x = -V_A z - \frac{qz^2}{2} = \frac{qL}{2}z - \frac{qz^2}{2}$$

CINCA ELASTICA
$$\alpha_x(z) = \int \frac{M_x}{EJ_{xx}} dz = \frac{qLz^2}{2EJ_{xx}} - \frac{qz^3}{6EJ_{xx}} + C_1$$

$$V(z) = \int \alpha_x dz = \frac{qLz^3}{6EJ_{xx}} + \frac{qz^4}{24EJ_{xx}} - qz + C_2$$

• ALTRO CASO: 2 ELEMT



AB

$\rightarrow: O_A - O_B = 0$

$\uparrow: V_A - V_B + F = 0$

$\downarrow: V_B e_1 - F e_1 = 0$

$V_B = \frac{F e_1}{e_1} \neq 0$

BC

$\rightarrow: O_B + O_C = 0$

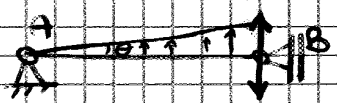
$\uparrow: V_B + V_C = 0 \rightarrow V_B = 0$

$\downarrow: V_C e_2 = 0 \rightarrow V_C = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_A \\ V_B \\ O_B \\ V_C \\ O_C \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ F e_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5) = \frac{(3)}{e_1} + \frac{(6)}{e_2}$$

COME RICONOSCERE SITUAZIONI ANOMALE (SENZA USARE IL DETERMINANTE)

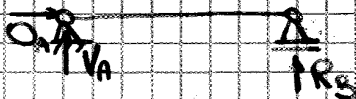
• MOTO RIGIDO "INFINITESIMO" NON IMPEDITO



VINCOLO SI FA SENTIRE QUANDO, OLTRE CHE VERTICALMENTE, SI MUOVE PURE ORIZZONTALMENTE



• POSSIBILITÀ DI REAZ. FO, IN ASSENZA DI CARICO ESTERNO, CHE RISPETTANO L'EQUILIBRIO



FORGO $O_A = K \neq 0: \rightarrow$ IMPOSSIB.

$V_A = K \neq 0: \uparrow$ POSSIBILE

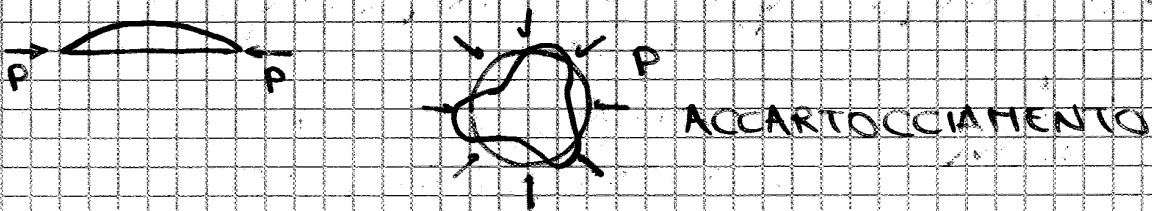
\downarrow IMPOSS.

- CERNIERA CILINDRICA → SOLO ROTAZ. COASSIALE
LIBERA, ALTRE ROTAZ. E TRASL. BLOCCATE → 5 REAZ.

INSTABILITÀ ELASTICA
APPLICATA UNA PERTURBAZIONE, EQUILIBRIO
RITROVATO SPONTANEAMENTE



STRUTTURE: FLESSIONE INCONTROLLATA DI ELEMENTI
SNELLI (1D), SOTTILI (2D)



ASTA DI EULERO

VARIAZ. FORMA NON + TRASCURABILI



REAZIONI VINCOLARI



SITUAZIONE
DEFORMATA
(NON + RETTILINEA)

$$O_A = P$$

$$V_A = V_B = 0$$



$$S) : M_x + V \cdot z - O_A \cdot v \Rightarrow M_x = P \cdot v$$

SPOSTAM. ELASTICO
V FORNISCE IL
BRACCIO ALLA FORZA
 $O_A = P$