NUMERO: 611

DATA: 0409/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Arlotta

MATERIA: Analisi Matematica II
Prof. Baciotti

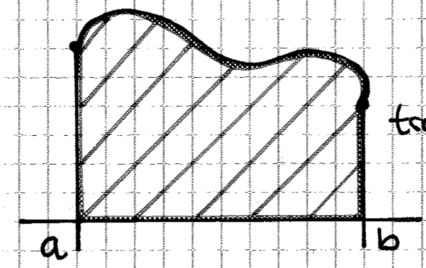
INTEGRALI MULTIPLI

DEFINITI

- $f(x)$ mi serve un intervallo su integrare $\longrightarrow [a,b] \subseteq \text{dom} f$

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \text{misura l'area}$$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

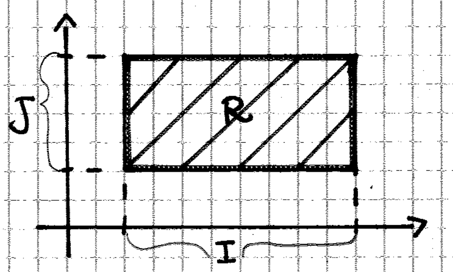


trapezoide di f

- $z = f(x,y)$

$\left.\begin{array}{l} x \in I \\ y \in J \end{array}\right\}$ intervalli di appartenenza

f è continua su $R = I \times J$



$c, d \in J$ (supposto $c < d$)

posso ignorare x e integrare rispetto a y tra c e d

$$\int_c^d f(x,y)\,dy = F(x)$$

integrando, y sparisce (viene sostituita dai valori di c e d): ottengo una funzione di x

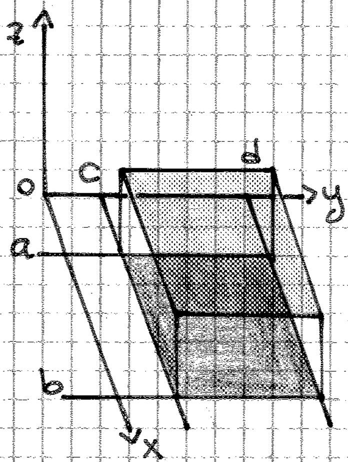
TEOREMA Se f è continua, comunque siano c e d, (con $c < d$), allora $F(x)$ è continua.

DEFINIZIONE integrale definito doppio di $f(x,y)$ sul rettangolo $[a,b] \times [c,d]$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dx\, dy$$

CASO PARTICOLARE

$f(x,y) = 1$



$$\int_{[a,b]\times[c,d]} 1\, dx\, dy =$$

$$= \int_a^b 1\, dx = (b-a)$$

$$= \int_c^d (b-a)\, dy = (b-a)\int_c^d 1\, dy =$$

$$= \underbrace{(b-a)(d-c)}_{\text{AREA del RETTANGOLO}}$$

Il risultato ha un doppio significato:
1) area rettangolo base
2) volume parallelepipedo

PROPRIETA'

① dato $[a,b] \times [c,d] = H$

$$\iint_H [f(x,y) + g(x,y)]\, dx\, dy =$$

$$\iint_H f(x,y)\, dx dy + \iint_H g(x,y)\, dx dy$$

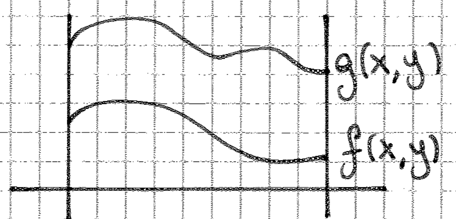
② α = costante

$$\iint_H \alpha f(x,y)\, dx dy = \alpha \iint_H f(x,y)\, dx dy$$

③ Monotonicità

$$f(x,y) \le g(x,y) \quad \forall (x,y) \in H$$

$$\iint_H f(x,y)\, dx dy \le \iint_H g(x,y)\, dx dy$$



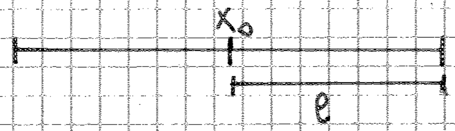
INTERVALLI e AREE

In $\mathbb{R}$, posso definire l'intervallo in due modi

$a < b$

$I = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

I si definisce aperto se < >
oppure chiuso se ≤ ≥
(altrimenti può essere
semiaperto o semichiuso)



$I = x_0 - \ell < x < x_0 + \ell$

I si definisce come "intorno
di un punto (x_0)"
$= |x - x_0| < \ell$

In $\mathbb{R}^2$ ho due 'equivalenti' delle definizioni in $\mathbb{R}$

Un rettangolo
$[a, b] \times [c, d]$

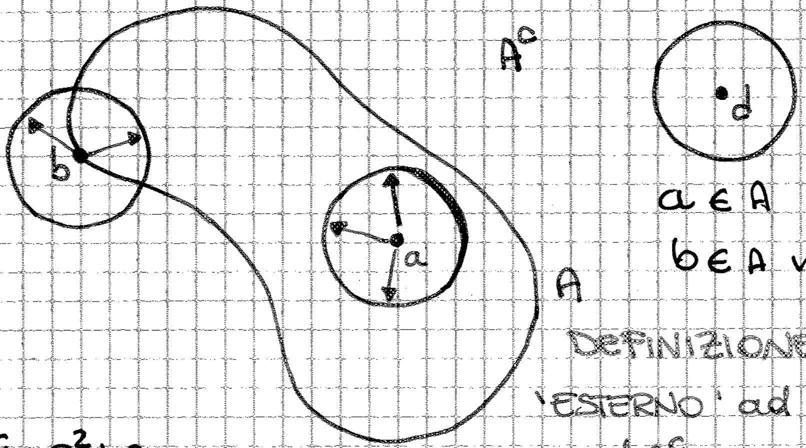
Un disco di raggio ℓ,
centro x_0 e vettore x
$\|x - x_0\| < \ell$

! Come faccio ad affermare che un qualunque sottoinsieme
di $\mathbb{R}^2$ è aperto, chiuso?

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $A \neq \emptyset$ (insieme vuoto)

prendo un punto a / $a \in A$

DEFINIZIONE a si dice 'INTERNO' ad A se esiste un
disco di raggio non nullo, di centro a, interamente
contenuto in A.



$a \in A$ ed è interno;
$b \in A$ ma non è interno

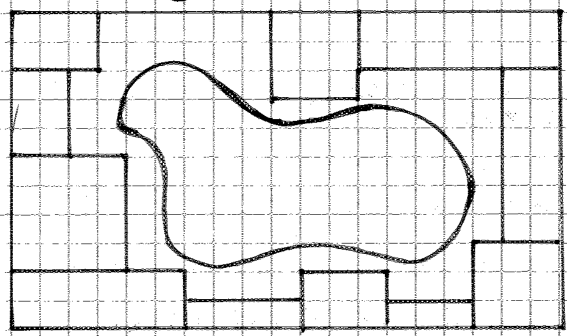
DEFINIZIONE d si dice
'ESTERNO' ad A se è interno
ad A^c.

$A^c = \mathbb{R}^2 \setminus A$

Ma una figura come questa non si può decomporre in figure regolari.

Come faccio a calcolarne l'area?

Nonostante il METODO di ESAUSTIONE di Eudosso e Archimede, un concetto sufficiente di area si ottenne nel 1800 con il metodo di PEANO e JORDAN



R_0

A sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ limitato

L'area di R_0 so calcolarla, è un rettangolo. Inizio a togliere pezzi solo di R_0 e non di A.

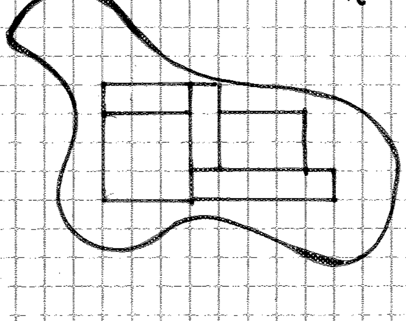
$R_1 \subset R_0 \mapsto$ so calcolare quest'area: è R_0 - (il rettangolino che tolgo)

$$\ldots \subset R_2 \subset R_1 \subset R_0$$

Se A è curvilineo, i rettangolini diventano sempre più piccoli: ma questa tecnica è un lavoro infinito.

$$A \subset \ldots \subset R_2 \subset R_1 \subset R_0$$

Faccio lo stesso procedimento all'interno di A. Chiamo S_n i rettangoli interni ad A.



$$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \ldots \subset A$$

Sto cercando di approssimare l'area di A dall'esterno (R_n) e dall'interno (S_n)

$$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset A \subset \ldots \subset R_2 \subset R_1 \subset R_0$$

$$m(S_0) \le m(S_1) \le m(S_2) \le \ldots \le m(R_2) \le m(R_1) \le m(R_0)$$

crescente $\rightarrow$ limitate $\leftarrow$ decrescente ha delle proprietà

1) $m(A) \geq 0$

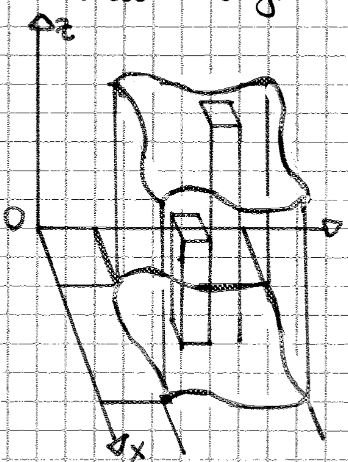
2) $A \subseteq B \longmapsto m(A) \leq m(B)$

3) $A \cap B = \emptyset \longmapsto m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

e questo determina la compatibilità con la geometria elementare.

Riassumendo...

Sia R un rettangolo



$f(x,y): R \longrightarrow \mathbb{R}$

Posso rimanere sopra o sotto al grafico di f (secondo l'integrale di Riemann)

$$\iint_R f(xy)\,dxdy = \text{VOLUME } m(V_{f,R})$$

con $f \geq 0$

Se $f<0$, è il bilancio dei volumi

TEOREMA Se f è continua, l'integrale esiste e se $R=[a,b]\times[c,d]$, allora

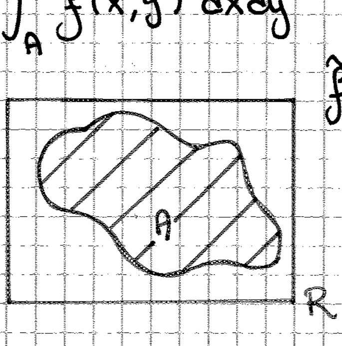
$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy$$

A misurabile $\longmapsto$ è anche limitato

$$\tilde{f}(xy) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) \in R \setminus A \end{cases}$$



$$\iint_A f(xy)\,dxdy \underset{def}{=} \iint_A \tilde{f}(x,y)\,dxdy$$

Il caso più comune è il verticalmente o orizzontalmente convesso.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 163

- $f(x;y) = f(-x;y)$ pari rispetto a x $\forall y$

A dominio simmetrico rispetto all'asse y

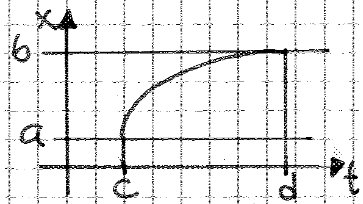
→ il valore di f è uguale da entrambe le ali del grafico e non si semplifica ma raddoppia

$$\iint_A f(x;y)\,dx\,dy = 2\iint_{A^+} f(x;y)\,dx\,dy = 2\iint_{A^-} f(x;y)\,dx\,dy$$

CAMBIAMENTO di COORDINATE

→ **INTEGRALI SEMPLICI** ⇝ formule di sostituzione

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t) \_\_\,dt$$



Se voglio sostituire con $\varphi(t)$
1) cambio gli estremi di integrazione
2) f diventa composta
3) devo compensare la nuova funzione

$c = \varphi^{-1}(a)$

$d = \varphi^{-1}(b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

→ **INTEGRALI DOPPI** ⇝ cambio estremi → cambio dominio

- $f(x,y) = 1$ rettangolo $= [a,b] \times [c,d]$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = (b-a)(d-c)$$

provo a cambiare coordinate

$$\begin{cases} x = pu \\ y = qv \end{cases} \qquad p,q > 0$$

(u e v sostituiscono x e y)

$$a \le x \le b \longmapsto a/p \le u \le b/p$$

$$c \le y \le d \longmapsto c/q \le v \le d/q$$

$$R \longrightarrow S = \left[\frac{a}{p}; \frac{b}{p}\right] \times \left[\frac{c}{q}; \frac{d}{q}\right]$$

il valore assoluto è il fattore che mi interessa

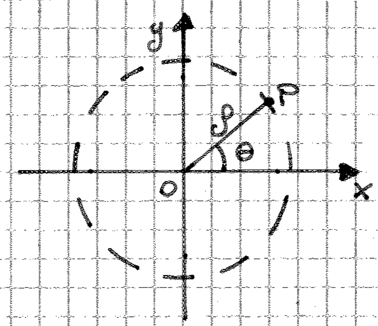
$$\iint_a 1 \cdot \overset{\downarrow}{11} \, dv\,du$$

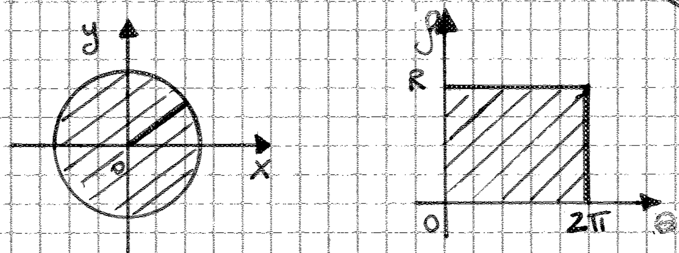
lo posso ricavare dai coefficienti del cambiamento di coordinate

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 12 = -11$$

- Coordinate Polari

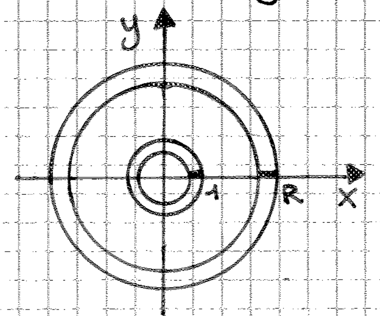
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$





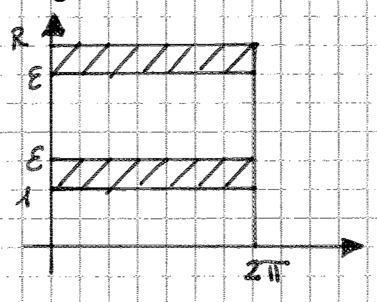
πR^2 — $2\pi R$

ci sarà un fattore di compensazione!



Rendo de segmenti lunghi ε e diminuisco i raggi.

Trasformo nel sistema $\rho\theta$



I due anelli circolari contribuiscono in modo diverso all'area (quello di 1 <, quello di R >)

area della corona più grande $\rightarrow \pi R^2 - \pi(R-\varepsilon)^2 =$

$$= \cancel{\pi R^2} - \cancel{\pi R^2} + 2\pi R\varepsilon - \pi\varepsilon^2 =$$

$$= 2\pi R\varepsilon - \pi\varepsilon^2$$

del tipo

$$(x,y) = T(u,v).$$

Sia B una regione di (u,v) tale che $T(B) = A$ e sia infine $JT(u,v)$ la matrice jacobiana di T, allora l'integrale

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_B f(\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y))\,|\det JT(u,v)|\,dudv$$

INTEGRALI TRIPLI

$U = f(x,y,z): V \longmapsto \mathbb{R}$

$V \subset \mathbb{R}^3$

Il grafico è contenuto in $\mathbb{R}^4$ $(\mathbb{R}^3 + \mathbb{R} = \mathbb{R}^4)$

MISURA per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$

$l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4$

$x \quad y \quad z \quad U$

misura del 'RETTANGOLO GENERALIZZATO': $l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot l_4$

$A \subset \mathbb{R}^4$ limitato

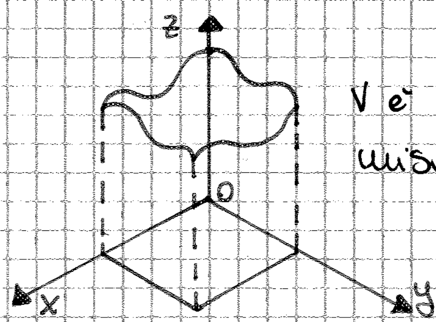
$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots \quad \dots A \dots \quad \dots \subset R_2 \subset R_1 \subset R_0$

$m(S_0) \leq m(S_1) \qquad m(R_1) \leq m(R_0)$

Dominio di integrazione $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ (parallelepipedo)

$f(x,y,z) \geq 0$

f è integrabile $\iff$ V è misurabile



$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_A \tilde{f}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$ A misurabile

Se $f = 1$

$$\iiint_A 1\,dxdydz \Rightarrow$$ ha una doppia interpretazione $\begin{cases} \text{misura volume di } A \\ \text{misura rettangolo generalizzato} \end{cases}$

Ridurla per fili non è così scontato: ad un certo punto il filo 'salta' (c'è una soglia).
È meglio lavorare per strati orizzontali ('strategia 2+1'), congelando la z

$$\int_a^b \left[\iint_{S_z} f(x,y,z)\, dx\, dy \right] dz$$
$$\parallel$$
$$\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Questo metodo si chiama RIDUZIONE per STRATI

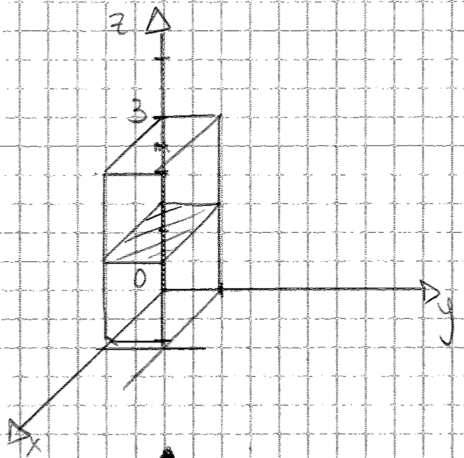
ESERCIZIO 2

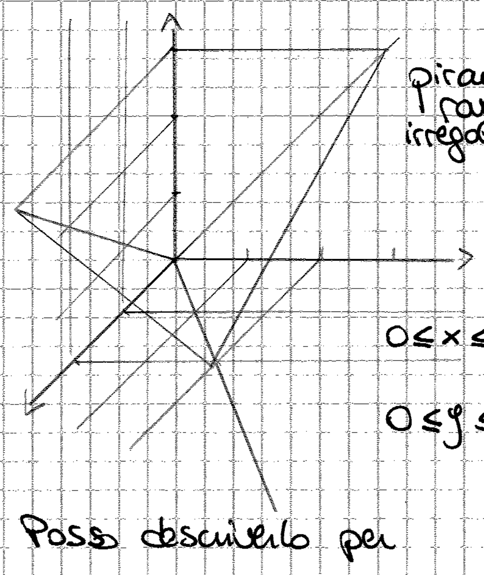
$$\iiint_V z\, dx\, dy\, dz$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ x+y \le z \le 3 \end{cases}$$

- REGIONI di INTEGRAZIONE -

$x+y=z$ equazione di un piano

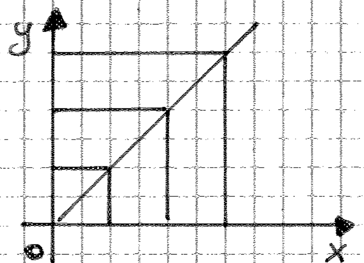




piramide rovesciata irregolare

$0 \le x \le z \le 1$ (r)

$0 \le y \le z \le 1$ (s)



Posso descriverlo per strati: sono quadrati di lato z e area z^2

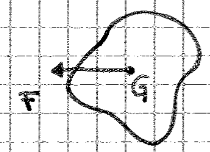
INTEGRALI PER IL CALCOLO delle MASSE

$m \cdot a = F$
$m \cdot a - F = 0$

A parità di a, masse più grandi richiedono più forza per essere spostate: si può interpretare come resistenza al moto e può essere quindi rappresentativa dell'inerzia.

→ Moto TRASLATORIO

la resistenza che fa il corpo è diversa nei due moti



centro di massa e baricentro

→ Moto ROTATORIO

$J \cdot \dot{\omega} = M$

M: momento della forza che agisce

ω: velocità angolare

$\dot{\omega}$ accelerazione angolare

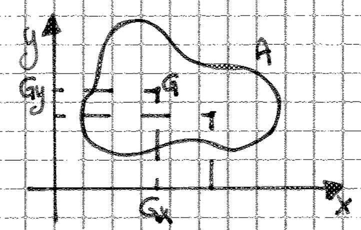
J: momento di inerzia (svolge lo stesso ruolo della massa)

Come si calcolano G e J?

G è una media

→ nel piano

distribuzione uniforme



$$G_x = \frac{1}{m(A)} \iint_A x \, dx\, dy$$

$$G_y = \frac{1}{m(A)} \iint_A y \, dx\, dy$$

→ nello spazio $\mathbb{R}^3$

ho una coordinata in più (G_z) e gli integrali sono tripli

$$G_x = \frac{1}{m(A)} \iiint x \, dx\, dy\, dz$$

$$G_y = \frac{1}{m(A)} \iiint y \, dx\, dy\, dz$$

$$G_z = \frac{1}{m(A)} \iiint z \, dx\, dy\, dz$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 163

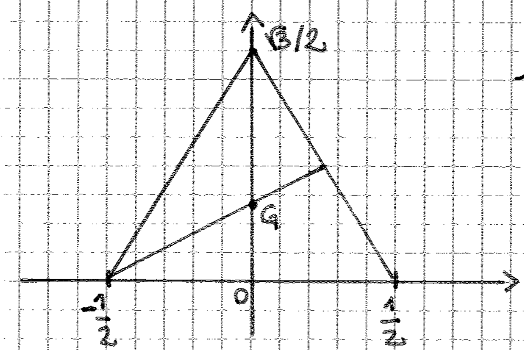
Se ruota attorno all'asse, i punti sull'asse hanno la stessa distanza dall'oggetto

$$J = \iiint_A (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz \qquad \text{(attorno a } z\text{)}$$

Se la distribuzione non è uniforme, devo mettere un fattore

$$\underbrace{\frac{1}{\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}}_{\text{Integrale della funzione di distribuzione}} \iiint_A (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$$

ESERCIZIO 3

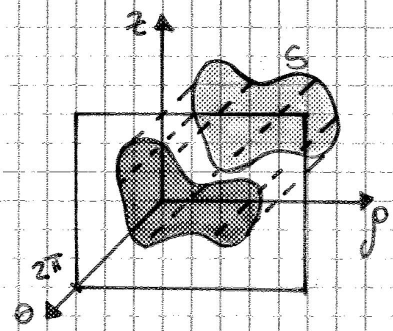


$l = 1$ (triangolo equilatero)

G posso ricavarlo senza usare ma solo con la geometria elementare.

$$G = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Proviamo con l'integrale



È come un cilindro che inizia con $\theta = 0$ e finisce con $\theta = 2\pi$

Ora riduco per FILI

$$\iiint_V \rho \, d\theta \, d\rho \, dz =$$

$$= \iint_S \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \rho \, d\theta \right)}_{} d\rho \, dz$$

Integro la "profondità" → Integro su S

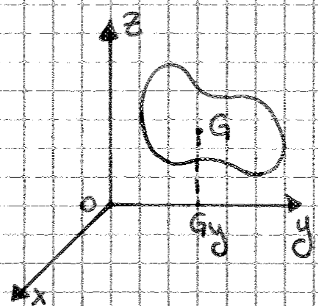
ma ρ non dipende da θ $\quad \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta = \rho \int_0^{2\pi} d\theta = \rho \, 2\pi$ costante
è ancora da integrare

$$= 2\pi \iint_S \rho \, d\rho \, dz$$

$$= 2\pi \iint_S y \, dy \, dz$$

S sta sul piano yz, dove ρ coincide con y → posso tornare alle coordinate cartesiane

$\iint_S y \, dy \, dz$ ⇒ compare nella coordinata y del Baricentro ma va mediato sull'area di S



$$G_y = \frac{1}{m(S)} \iint_S y \, dy \, dz$$

$$= 2\pi \, m(S) \cdot \frac{1}{m(S)} \iint_S y \, dy \, dz$$

$$= 2\pi \, m(S) \cdot G_y$$

$2\pi G_y$ → il punto G_y ruotando descrive una circonferenza, avere $2\pi G_y$

Il volume del solido di rotazione alla lunghezza della C è descritto da G come se l'area fosse tutta in G.

La **PARAMETRICA** dà maggiori informazioni sul modo in cui la curva viene descritta.

CURVA CHIUSA gli estremi di γ coincidono

$$\gamma(a) = \gamma(b) \qquad (\gamma \text{ è un vettore})$$

CURVA SEMPLICE se non ripassa mai un punto già già passato in precedenza (estremi esclusi)

↓

INIETTIVA su (a,b) Se sto su un P della curva, so quanto vale il parametro

Perché è meglio che sia <u>SEMPLICE</u>?

Prendiamo

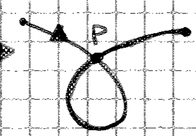
$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \text{Imm} \in \mathbb{R}^n$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \cdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$ continua. La sua derivata

$$\gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \cdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}$$

è il vettore tangente alla curva nel punto P corrispondente ad un certo $\bar{t}$.

Se la curva γ ha <u>questa immagine</u> →

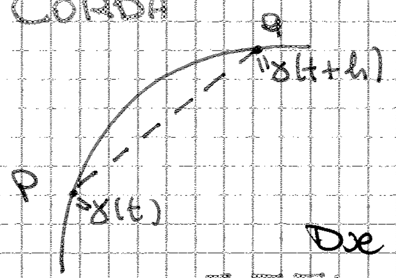


P corrisponde a due valori di γ

$\gamma(t_1)$
$\gamma(t_2)$ dove $t_1 < t_2$

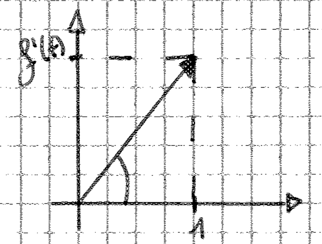
↳ quando derivo rispetto a t_1 ottengo un risultato diverso dalla derivata rispetto a t_2!

CORDA



$$\begin{pmatrix} \gamma_1(\bar{t}+h) \\ \cdots \\ \gamma_n(\bar{t}+h) \end{pmatrix}$$

Due punti su una curva individuano una CORDA. Più i punti si avvicinano, più si definisce 'tangenziale' la corda.



Il versore tangente mi dà il verso della retta tangente.

COME DEVE ESSERE UNA CURVA?

1) derivabile
2) con derivata continua
3) semplice
4) il vettore tangente deve essere $\neq 0$ in ogni punto

$$\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in (a,b)$$

$\Downarrow$

CURVA REGOLARE

Curve diverse possono avere lo stesso sostegno

$$\gamma : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}^n$$

$$\underbrace{\underset{\tau}{[c,d]} \xrightarrow{\alpha} \underset{t}{[a,b]}}_{\substack{\text{metto un parametro} \\ \text{in modo da trasformare} \\ [c,d] \text{ tramite } \alpha, \\ \text{in } [a,b]}} \overset{\gamma}{\longmapsto} \mathbb{R}^n$$

Considero una funzione COMPOSTA

$$\delta(\tau) = \gamma(\alpha(\tau)) = (\gamma \circ \alpha)(\tau)$$

$$\begin{cases} x = R\cos(t) \\ y = R\sin(t) \end{cases}$$

$t \in [0, 2\pi)$

$t = 2\tau$ $\qquad$ α = funzione che manda τ in t

$\downarrow$

τ non varia tra 0 e 2π ma raddoppia

$$\begin{cases} x = R\cos(2\tau) \\ y = R\sin(2\tau) \end{cases}$$

L'intervallo $[c,d]$ è più piccolo: $\tau \in [0, \pi)$

$$\tau \longrightarrow t \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n$$

due funzioni ottenute con composizione hanno lo STESSO SOSTEGNO ma cambia il vettore TANGENTE.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 163

$$\frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_i - 1)}{t_i - (t_i - 1)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_i - 1)}{t_i - (t_i - 1)}$$

ricorda il rapporto incrementale

Il vettore tangente, tra le altre cose, mi da anche informazioni sulla lunghezza della curva.

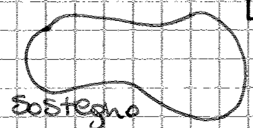
$$\sqrt{|\delta t|} = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2} \cdot dt$$ lunghezza d'un pezzettino

$$l_\gamma \triangleq \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt$$ (integrale in senso di Riemann per una funzione di una sola variabile)

$\gamma(t)$ $\qquad \delta(r) = (\gamma \circ \alpha)(r)$

Se rispetta le condizioni, γ è semplice

↳ $\delta(r)$ è semplice e si tiene il sostegno, che viene percorso una sola volta.



→ lunghezza secondo la parametrizzazione δ

$$l_\delta = \int_c^d \sqrt{(\delta_1'(r))^2 + \dots + (\delta_n'(r))^2}\, dr$$

$$= \int_c^d \sqrt{(\alpha'(r)\,\gamma_1'\alpha(r))^2 + \dots + (\alpha'(r)\,\gamma_n'\alpha(r))^2}\, dr$$

$$= \int_c^d \sqrt{(\alpha'(r))^2 \left[(\gamma_1'\alpha(r))^2 + \dots + (\gamma_n'\alpha(r))^2\right]}\, dr$$

$$(\alpha' > 0) \quad = \int_c^d \sqrt{(\gamma_1'\alpha(r))^2 + \dots + (\gamma_n'\alpha(r))^2} \cdot \alpha'(r)\, dr$$

$t = \alpha(r)$

$$= \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt = l_\gamma$$

$\delta(\sigma) = \gamma(S^{-1}(\sigma))$ vettore tangente unitario → VERSORE

$S(t) = \sigma$ è detta ASCISSA CURVILINEA (o 'PARAMETRO ad ARCO') → permette di percorrere la curva con velocità uniforme

$$ds = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \ldots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt$$

ALTRI INTEGRALI

INTEGRALI CURVILINEI di un CAMPO SCALARE

INTEGRALI di LINEA di un CAMPO VETTORIALE

Sono termini (a prestito dalla fisica) per indicare due diversi CAMPI di ESISTENZA

valori scalari e valori vettoriali (forze)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$

$A \subset \mathbb{R}^n$ $\quad$ vettore

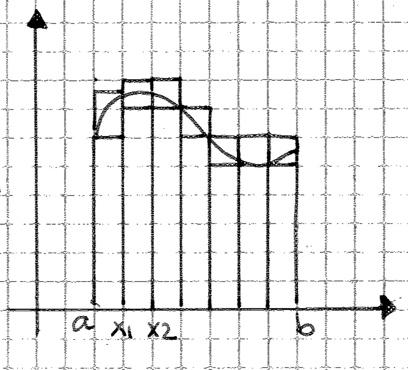
INTEGRALI CURVILINEI di un CAMPO SCALARE

Dati
- una curva $\gamma(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
- un campo scalare

$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n)$

il sostegno della curva deve essere contenuto in A

$f > 0$



Questa figura ha tre lati rettilinei. Approssimando con i rettangoli, intrappolo la funzione tra quelli superiori e quelli inferiori.

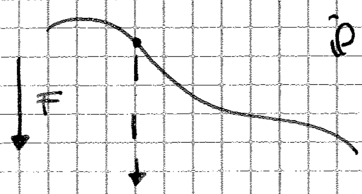
$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)}_{\text{Somma di Riemann}} = \int_a^b f(x)\,dx$$

INTEGRALI di LINEA di un CAMPO VETTORIALE

Dati
- curva regolare $\gamma(t)$
- campo vettoriale

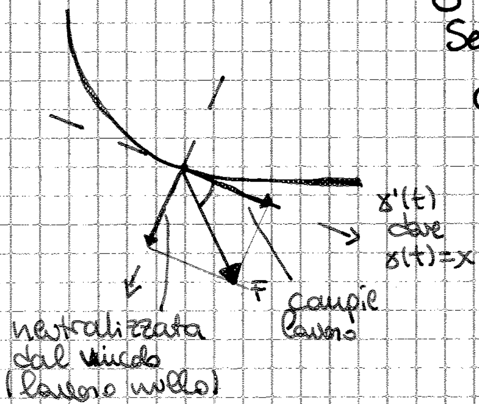
$$F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

calcolo del lavoro di una forza



il punto si muove lungo la curva. È come se la forza riuscisse ad agire solo in parte.

L'integrale misura la forza che riesce effettivamente a reagire.



Se questa curva vincola il movimento del corpo, punto per punto la direzione è indicata dalla tangente.

Se il vincolo è "PERFETTO", l'altra direzione sarà ortogonale al vincolo.

un VINCOLO è PERFETTO se la reazione ortogonale è perpendicolare al vincolo stesso

$$\varphi(x) = F(x) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$ è una quantità scalare

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\cancel{\|\gamma'(t)\|}} \cancel{\|\gamma'(t)\|}\, dt$$

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \begin{cases} \int F d\gamma \\ \int_\gamma F dp \end{cases}$$

Non è più esattamente uno che è indipendente dalla parametrizzazione

cambiamento di parametro

$$t = \alpha(\tau)$$ purché si rispetti certe condizioni

$\alpha'(\tau) > 0$ → in questo caso il valore dell'integrale non cambia

$\alpha'(\tau) < 0$ → il valore dell'integrale cambia di segno

- In $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \\ &\shortparallel \\ \frac{\partial g}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) &= \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

$$\downarrow$$

$$\text{rot}\, F = 0$$

$\hookrightarrow$ in $\mathbb{R}^2$ $\quad \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) \quad \forall x \in A$

Se $\underline{F}$ è conservativo e se g è un potenziale, aggiungendo a g una costante reale è ancora un potenziale.

$$g(x) + k \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

1° CONDIZIONE NECESSARIA — Il dominio deve essere un **INTERVALLO** (continuo)

Esempio $y = \log|x|$

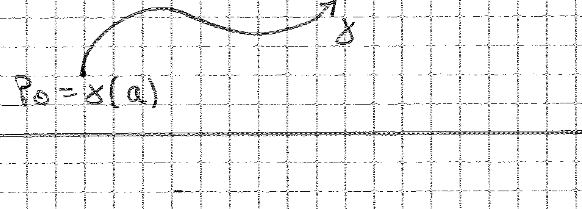
non è definito in 0 e $y' = \frac{1}{x}$: ma lo considero definito su due regioni separate.

2° CONDIZIONE -Teorema- — Dato un campo conservativo F su un insieme A (aperto) e sia g un potenziale di F su A. Sia $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare con sostegno contenuto in A.

$$\int F \, d\gamma = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

! Per calcolare questo integrale mi basta il potenziale agli estremi.

INDIPENDENZA dal PERCORSO



TEOREMA di GREEN

Sia $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto

Sia $\gamma(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva chiusa, semplice e regolare con sostegno $\Gamma \subset A$ e orientata in senso antiorario.

Sia Ω la parte del piano delimitata da Γ

Se $\Omega \subset A$

$$\int F d\gamma = \iint_K \left(\frac{\delta f_2}{\delta x_1} - \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \right) dx_1 dx_2$$

dove $K = \Omega \cup \Gamma$

<u>Applicazioni ai Campi Conservativi</u>

1) Se ho un campo dove $\frac{\delta f_2}{\delta x_1}(x) = \frac{\delta f_1}{\delta x_2}(x) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in A$

$$\left. \iint_K \underbrace{\left(\frac{\delta f_2}{\delta x_1} - \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \right)}_{\emptyset} dx_1 dx_2 \right\} \text{la circuitazione è } 0$$

IL TEOREMA di GREEN MI DA' UNA <u>CONDIZIONE SUFFICIENTE</u> PER UN CAMPO CONSERVATIVO (se $\Omega \subset A$)

2) DEFINIZIONE $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto e connesso. E' <u>SEMPLICEMENTE CONNESSO</u> se $\forall \gamma$ chiusa, semplice e regolare, con $\Gamma \subset A$, allora la parte di piano interna a γ è tutta contenuta in A

Se F è tale che $\frac{\delta f_2}{\delta x_1} = \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \quad \forall x \in A$

ed A è semplicemente connesso $\Rightarrow$ F è conservativo su A, quindi ammette un potenziale.

$$\gamma(t) = \begin{cases} t & t \in [\bar{x}_1, x_1] \\ \bar{x}_2 \end{cases} \qquad \gamma' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

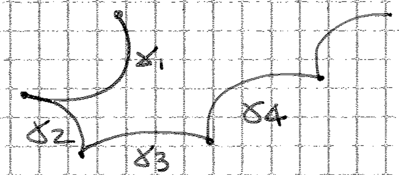
$$\gamma(t) = \begin{cases} x_1 \\ t & t \in [\bar{x}_2, x_2] \end{cases} \qquad \gamma' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

integro la seconda componente f su la seconda x.

→ trovo una funzione in x_1 e x_2 → $g(x_1, x_2)$

ESTENSIONI del TEOREMA di GREEN

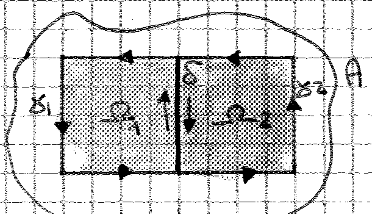
1 DEFINIZIONE Una curva si dice REGOLARE A TRATTI se è continua e lungo il suo percorso presenta non più di un numero definito di punti in cui la derivata salta.



$$\int F\,d\gamma = \int F\,d\gamma_1 + \int F\,d\gamma_2 + \int F\,d\gamma_3 + \dots$$

↳ posso applicare il teorema di Green

2



Deve essere percorsa in senso antiorario.

Se il dominio è unione di due domini, c'è una parte che non posso parametrizzare in un senso solo ma cambierà parametrizzazione in base a quale sottodominio sto considerando.

$$\int F\,d\gamma_1 = \iint_{K_1} \frac{\delta f_2}{\delta x_1} - \frac{\delta f_1}{\delta x_2}\,dx_1\,dx_2 \qquad K_1 = \Gamma_1 \cup \Omega_1$$

$$\int F\,d\gamma_2 = \iint_{K_2} \frac{\delta f_2}{\delta x_1} - \frac{\delta f_1}{\delta x_2}\,dx_1\,dx_2 \qquad K_2 = \Gamma_2 \cup \Omega_2$$

$$\frac{\delta f_1}{\delta x_2} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{\delta f_2}{\delta x_1} = \frac{1}{2}$$

$$\iint_K \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) dx_1\, dx_2 = \iint_K 1\, dx_1\, dx_2 = \text{trovo la misura dell'area} = m(K)$$

Se la funzione integranda è 1, posso calcolare l'area calcolando F sul bordo di γ.

INTEGRALI di SUPERFICIE

Gli integrali di superficie si possono fare sia su un campo scalare ma su uno vettoriale.

Per quanto riguarda le superfici parametriche, ho bisogno di due parametri:

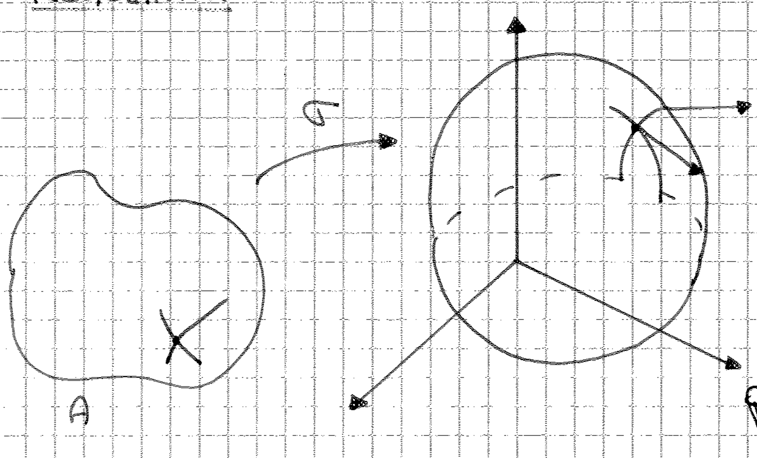
$$\underbrace{U = (u_1, u_2)}_{\text{gioca il ruolo della } t \text{ nelle curve}} \in A \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \text{(aperto)}$$

$$\sigma(U) : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

- $u', u'' \in A$

  $u' \neq u'' \Rightarrow \sigma(u') \neq \sigma(u'')$ — la superficie non si autointerseca, non si attorciglia su se stessa.

REGOLARITA'



(il sostegno è l'immagine)

Prendo una curva γ nello spazio dei parametri per il punto fissato.

$$\begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ x_3 - \bar{x}_3 \end{pmatrix} \cdot N = 0$$

$$\frac{\delta\sigma}{\delta u_1} \wedge \frac{\delta\sigma}{\delta u_2} = N = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

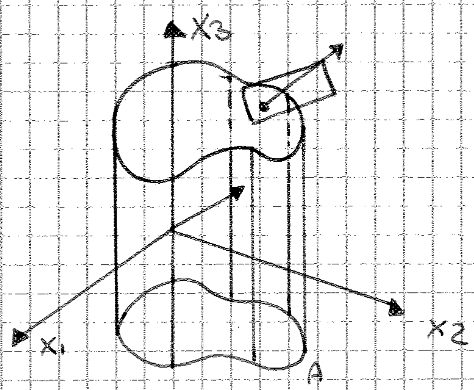
Se la curva è regolare, almeno una componente tra I_1, I_2 e I_3 sarà diversa da 0. I_1, I_2 e I_3 sono i minori principali della matrice che aveva per colonne $\frac{\delta\sigma}{\delta u_1}$ e $\frac{\delta\sigma}{\delta u_2}$

- $x_3 = f(x_1, x_2)$

superficie $\begin{cases} x_1 = u_1 \\ x_2 = u_2 \\ x_3 = f(x_1, x_2) \end{cases}$

di C^1

se $f \in C^1$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\delta f}{\delta u_1} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\delta f}{\delta u_2} \end{pmatrix}$$

derivate parziali rispetto a u_1, u_2

Con '$\wedge$' trovo il vettore tangente.

$$N = \begin{pmatrix} -\frac{\delta f}{\delta u_1} \\ -\frac{\delta f}{\delta u_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

è un vettore che punta sempre verso l'alto

$$\|N\| = \sqrt{\frac{\delta f}{\delta u_1}^2 + \frac{\delta f}{\delta u_2}^2 + 1}$$

il vettore normale è un modo per descrivere il piano tangente.

$$-\frac{\delta f}{\delta u_1}(x_1 - \bar{x}_1) - \frac{\delta f}{\delta u_2}(x_2 - \bar{x}_2) + 1(x_3 - \bar{x}_3) = 0$$

$$x_3 = \bar{x}_3 + \frac{\delta f}{\delta u_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\delta f}{\delta u_2}(x_2 - \bar{x}_2)$$

equazione del piano tg al grafico inteso come SUPERFICIE

PARAMETRIZZAZIONE σ

$$\underbrace{B \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^3}_{\rho = \sigma\circ\varphi}$$

$A \subset \mathbb{R}^2$ aperto

B è un altro insieme di $\mathbb{R}^2$

$v = (v_1, v_2)$ $\qquad$ $u = \varphi(v)$

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(v_1, v_2) \\ u_2 = \varphi_2(v_1, v_2) \end{cases}$$

• deve essere C^1 e invertibile

$$\rho(v) = (\sigma \circ \varphi)(v)$$

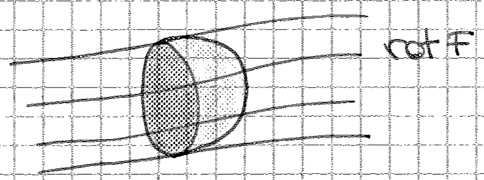
TEOREMA di STOKES

$F : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad$ V aperto di $\mathbb{R}^3$ di classe C^1

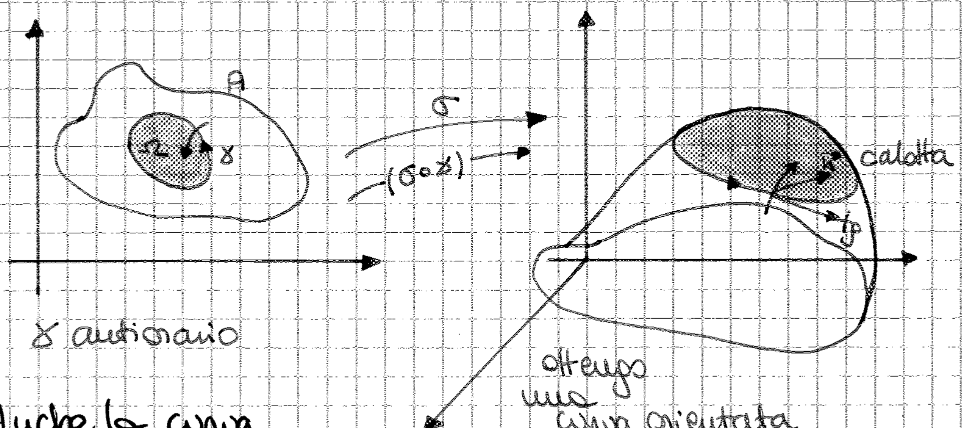
Sia σ una calotta regolare con sostegno contenuto in V.

Allora

$$\int F \, d(\delta\sigma) = \int_\sigma \text{rot } F \cdot \underline{n}$$



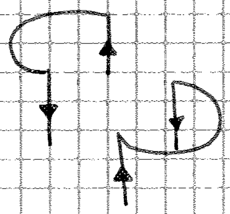
! CALOTTA REGOLARE



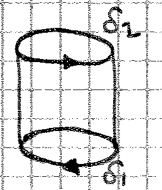
Anche la curva trasversale si mette sulle tre 3 dimensioni.

Se cambio l'orientamento, cambio il segno all'integrale rimane vera in valore assoluto.

Devo considerare il solito problema con i bordi:



in realtà i due tagli fittizi hanno contributo nullo.
Mi sono rimasti i due bordi sopra e sotto.



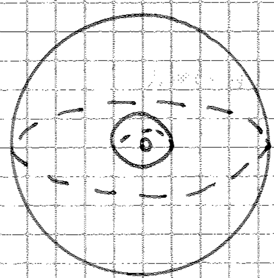
→ APPLICAZIONE ad un CAMPO CONSERVATIVO

↓

è IRROTAZIONALE (ma il viceversa non è detto)

DEFINIZIONE $V \subseteq \mathbb{R}^3$ è un DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO se è aperto e connesso, e inoltre, per ogni curva chiusa / semplice, regolare (anche a tratti) δ con sostegno contenuto in V, se esiste una calotta che ha per bordo δ e ha sostegno $\subset V$.

Una sfera è SEMPLICEMENTE CONNESSA?



Se tolgo il centro è ancora semplicemente connesso: trovo una cupola.

Se tolgo un asse intero, non è più semplicemente connesso.

! Se F è irrotazionale e il suo dominio è semplicemente connesso
↳ F è conservativo.

TEOREMA di GAUSS

$F: V \to \mathbb{R}^3$ $\quad V$ insieme aperto di $\mathbb{R}^3$
di classe C^1

Sia $U \subseteq V$ limitato, delimitato da un numero finito di sostegni di calotte regolari $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ ($\Sigma_1 \dots \Sigma_n$ sono i rispettivi sostegni)

→ SUPERFICI di ROTAZIONE

Data una curva qualunque di $\mathbb{R}^3$

$$\gamma = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \qquad t \in [a,b]$$

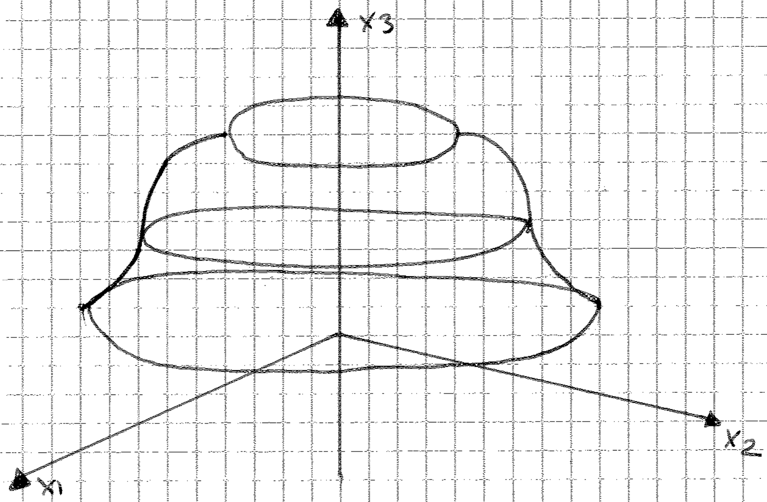
definiamo cosa si intende per <u>BARICENTRO</u> della curva (vuol dire che c'è una distribuzione di massa): ho una distribuzione di massa uniforme e densità unitaria (= 1). Devo usare un integrale adeguato: curvilineo.

(b_1, b_2, b_3)

$$b_1 = \frac{1}{l_\gamma} \int x_1 \, d\gamma$$

$$b_2 = \frac{1}{l_\gamma} \int x_2 \, d\gamma$$

$$b_3 = \frac{1}{l_\gamma} \int x_3 \, d\gamma$$



$$\gamma(t) = (\underset{\substack{\downarrow \\ \text{sta su} \\ (x_2, x_3)}}{0}, \underbrace{\gamma_2(t)}_{>0}, \gamma_3(t))$$

la superficie di rotazione è

$$2\pi \int x_2 \, d\gamma \overset{l_\gamma}{=} 2\pi l_\gamma \underbrace{\frac{1}{l_\gamma} \int x_2 \, d\gamma}_{b_2} = 2\pi l_\gamma b_2$$

<u>Perché b_2?</u> Sta in $x_2 x_3$: x_3 ai fini della misura è indifferente, x_1 è 0, b_2 è la distanza dall'asse x_3.

$$df(x_0)(v) = \nabla f(x_0) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0) v_i$$

Sia in particolare f la funzione che associa al vettore $x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ la sua componente i-esima x_i.
Tali funzioni si chiamano FUNZIONI-COORDINATE:

$$df(x_0)(v) = v_i$$

(f e df coincidono)

Applicando gli stessi abusi notazionali citati in precedenza, si può scrivere

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0) dx_i$$

Il differenziale di una funzione f di classe C^1 è, comunque si prenda x_0, una combinazione lineare dei differenziali delle funzioni coordinate. I coefficienti di tale combinazione lineare coincidono ordinatamente con le derivate parziali di f calcolate in x_0.

- In $\mathbb{R}^n$, CAMPO VETTORIALE

Sia $G(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ un campo vettoriale continuo. Si chiama 1 FORMA-DIFFERENZIALE, l'espressione

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) dx_i$$

Il nome FORMA-DIFFERENZIALE deriva dal fatto che (1) $\omega = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) dx_i$ somiglia molto a (2) $df(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0) dx_i$

ma la (1) rappresenta il vero differenziale di una funzione solo se G è conservativo e in tal caso, la (1) rappresenta la forma esatta

La forma differenziale si dice CHIUSA se

- $\frac{\delta g_2}{\delta x_1}(x) = \frac{\delta g_1}{\delta x_2}(x)$ in $\mathbb{R}^2$

- $\text{rot}\, G(x) = 0$ in $\mathbb{R}^3$

Viceversa è possibile solo se il dominio del campo è semplicemente connesso

SERIE NUMERICHE

Definizione Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Si chiama <u>SERIE di a_n</u> la scrittura formale

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Pongo $S_0 = a_0$

$$S_n = \sum_{k=0}^{k} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \qquad \forall n \geq 1$$

Somma parziale n-esima della serie a_n

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE se il $\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ e in tal caso chiamo S somma della serie e pongo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ DIVERGE positivamente (o negativamente) se $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \ (-\infty)$

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è INDETERMINATA se $\nexists \lim_{n\to\infty} S_n$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE assolutamente se converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Serie NOTEVOLI

⇝ Serie GEOMETRICA

Sia $a \in \mathbb{R}$. La serie geometrica di ragione a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \begin{cases} \text{Converge a } \dfrac{1}{1-a} & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{diverge positivamente} & \text{se } a \geq 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

(o negativamente) allora $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge positivamente (o negativamente)

<u>La divergenza vince sulla convergenza.</u>

Teorema <u>della CONDIZIONE NECESSARIA</u>

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Teorema <u>CRITERIO di CONVERGENZA ASSOLUTA</u>

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge puntualmente

CRITERI per le SERIE a TERMINI POSITIVI

Teorema <u>ESISTENZA del LIMITE</u>

Sia $\{a_n\}$ una successione tale per cui $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge o diverge positivamente, non può essere indeterminata.

Teorema <u>CRITERIO del CONFRONTO</u>

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, valgono i seguenti fatti:

- Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e si ha che $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}_{\text{MINORANTE}} \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n}_{\text{MAGGIORANTE}}$
- Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

Teorema <u>CONFRONTO ASINTOTICO</u>

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Suppongo che esista $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty)$

Allora:

improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. In tal caso si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Teorema **CRITERIO di CAUCHY**

Sia $\{a_n\}$ una successione non negativa decrescente allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge. In tal caso si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \le 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

SERIE a SEGNO ALTERNO

Teorema **CRITERIO di LEIBNIZ**

Sia $\{b_n\}$ una successione tale che $b_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Suppongo che:

- $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$;
- $\{b_n\}$ decrescente.

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \text{ converge.}$$

SUCCESSIONI di FUNZIONI

Definizione

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto, $\{f_n\}$ una successione di funzioni da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che $\{f_n\}$ CONVERGE PUNTUALMENTE a f in Ω se

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

f è il limite puntuale della successione $\{f_n\}$

- $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente in Ω alla funzione f se la successione $\{S_n\}$ converge puntualmente a f in Ω in tal caso f è la somma della serie di f_n

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = f(x) \quad \forall x \text{ fisso in } \Omega$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente se converge puntualmente $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$

- Siano $\Omega \in \mathbb{R}^n$ non vuoto, $\{f_n\}$ una successione di funzioni limitate da Ω in $\mathbb{R}$, $\{S_n\}$ la successione delle somme parziali della serie di f_n e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.
Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a f in Ω se la successione $\{S_n\}$ converge uniformemente a f in Ω, cioè se

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \Omega} |S_n(x) - f(x)| = 0$$

Siano Ω in $\mathbb{R}^n$ non vuoto, $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue e limitate da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a f in Ω allora f è continua.

SUCCESSIONE di FUNZIONI

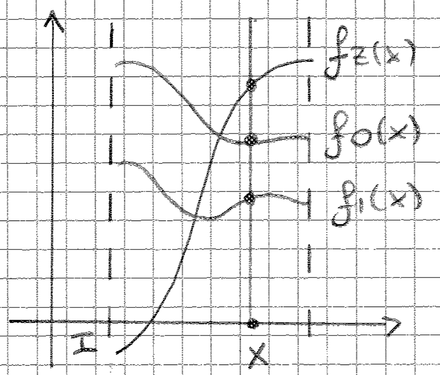
Una successione è una particolare funzione definita solo per valori interi della variabile indipendente. Si definisce una <u>successione di funzioni</u> assegnando una funzione $f_n(x)$ definita per $x \in I$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e la si indica con

$$\{f_n(x)\}$$

- Successione di numeri $\{a_N\}$ $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

Successione di funzioni $\{f_N(x)\}$ $x \in I$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

Immagino un'applicazione che associa ad ogni N una funzione che non dipende dall'indice, per cui una applicazione che vada da N $\longmapsto$ Insieme di funzioni con lo stesso dominio



$\{f_N(x)\}$ $x \in I$
$n = 0, 1, 2, \ldots$

La difficoltà sta nel fatto che nel calcolo del limite ho due variabili (x ed n)

~~DEFINIZIONE di LIMITE rispetto a N~~

Si dice che la successione $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in I se

$$\lim_{n\to\infty} f_N(x) = \exists \text{ finito } \forall x \in I$$

tenendo fissa la x, la successione diventa la SUCCESSIONE di NUMERI Re.

! La convergenza puntuale di una successione è una condizione necessaria ma NON sufficiente a provare la convergenza uniforme di una successione.
Una successione di funzioni che converge uniformemente allora converge anche puntualmente ma non viceversa.
Infatti la convergenza puntuale di una successione di funzioni è un punto di partenza (tengo x fisso e osservo come varia N) ma non basta perchè, per verificare la convergenza uniforme della successione, bisogna anche verificare come varia x all'infinito.

INTEGRALI DOPPI

$f(x,y)$ continua su $R = I \times J$, $\forall a, b \in I$, $\forall c, d \in J$

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \quad (\text{con } a<b,\ c<b)$$ INTEGRALE DEFINITO DOPPIO

PROPRIETA'

1) $\iint_H f(x,y) + g(x,y)\,dx\,dy = \iint_H f(x,y)\,dx\,dy + \iint_H g(x,y)\,dx\,dy$

2) α = costante

$$\iint_H \alpha f(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_H f(x,y)\,dx\,dy$$

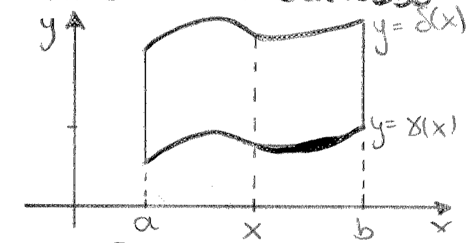
3) $f(x,y) \le g(x,y)$ (monotonicità)

$$\iint_H f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_H g(x,y)\,dx\,dy$$

4) $H = H_1 \cup H_2$ (additività del dominio)

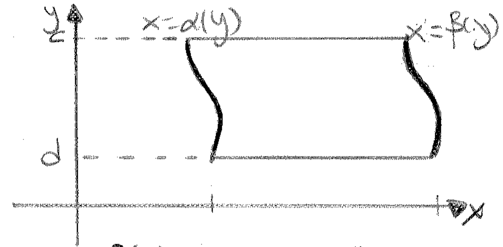
$$\iint_{H_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{H_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_H f(x,y)\,dx\,dy$$

VERTICALMENTE CONVESSO



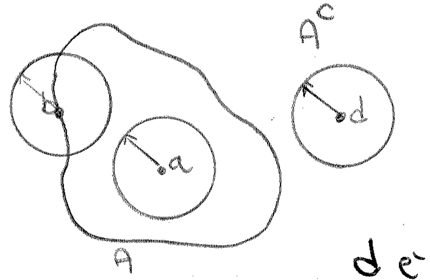
$$\int_a^b \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

ORIZZONTALMENTE CONVESSO



$$\int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

INTERVALLI e AREE



$A^c = \mathbb{R}^2 \setminus A$

<u>a è INTERNO ad A</u> se esiste un disco di raggio non nullo (e centro a) interamente contenuto in A.

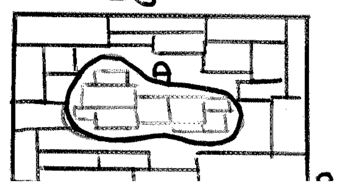
<u>d è ESTERNO ad A</u> se è INTERNO a A^c

$\mathring{A}$ (int A) = PARTE INTERNA (tutti i punti interni)
∂A (Fr A) = FRONTIERA (né interni né esterni)
$\bar{A}$ (clos A) = CHIUSURA ($A \cup$ Fr A)

A si dice APERTO se $A = \mathring{A}$; CHIUSO se $A = \bar{A}$

AREA = misura d'una figura di $\mathbb{R}^2$

Se la figura non è decomponibile in figure elementari, uso il metodo di JORDAN e PEANO: tolgo rettangoli <u>Rn</u> da fuori e ne metto di <u>Sn</u> da dentro la <u>figura</u> e misuro le due aree.

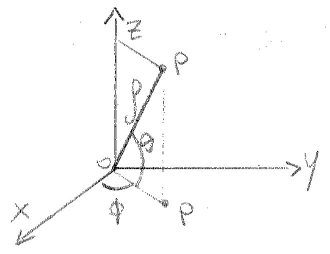


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 163

sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \sin\phi \\ y = \rho \sin\theta \sin\phi \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

$$|\det J| = \rho^2 \sin\phi$$



INTEGRALI TRIPLI

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

COME SI CALCOLANO?

→ RIDUZIONE per FILI (1+2)

$$\iint_A \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dx\,dy$$

→ RIDUZIONE per STRATI (2+1)

$$\int_a^b \left[\iint_{S_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right] dz$$

INTEGRALI per il CALCOLO delle MASSE

G centro di massa e baricentro

nel piano (è una media - distribuzione uniforme)

$$G_x = \frac{1}{m(A)} \iint_A x\,dx\,dy \quad ; \quad G_y = \frac{1}{m(A)} \iint_A y\,dx\,dy$$

nello spazio

$$G_x = \frac{1}{m(A)} \iiint_A x\,dx\,dy\,dz$$

$$G_y = \frac{1}{m(A)} \iiint_A y\,dx\,dy\,dz$$

$$G_z = \frac{1}{\ } \iiint z\,dx\,dy\,dz$$

Se la distribuzione NON è uniforme

$$m(A) = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

$$G_x = \frac{1}{m(A)} \iint_A x\, f(x,y)\,dx\,dy$$

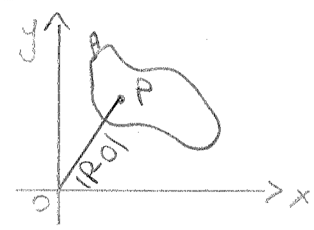
$$G_y = \frac{1}{\ } \iint y\, f(x,y)\,dx\,dy$$

J momento d'inerzia

nel piano

$$|P-O| = \sqrt{(x^2+y^2)^2} = (x^2+y^2)$$

$$\iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy$$



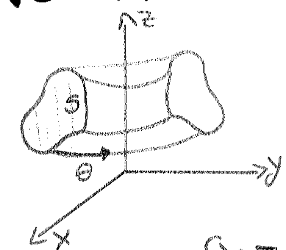
nello spazio

$$\iiint_A (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$ se ruota attorno ad un punto P

$$\iiint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$ se ruota attorno ad un asse (qui è z)

Se la distribuzione non è uniforme, aggiungo un fattore $\dfrac{1}{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$ prima di $\iiint_A$

VOLUMI



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x \\ z = z \end{cases}$$

$(x,y) \in S$

$S \subseteq$ semipiano (x,y), $x \geq 0$, ruota attorno all'asse z

$$\begin{cases} x = x \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Omega = \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$(r, z) \in S$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\det J = r \geq 0$

Volume

$$\int_\Omega dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} r\,dr\,d\theta\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\iint r\,dr\,dz \right) d\theta = 2\pi \iint x\,dx\,dz = 2\pi \iint y\,dy\,dz$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 163

VETTORE TANGENTE

- il vettore tangente non è la retta tangente: il vettore mi dà il verso della retta, la lunghezza e cambia in base alla parametrizzazione.

➜ Data una curva $\gamma(t) = (\gamma_1(t) \dots \gamma_n(t)) : I \to \mathbb{R}^n$, dove le funzioni $\gamma_1(t) \dots \gamma_n(t)$ siano tutte derivabili in I e che le derivate siano continue.

$$\gamma' = \frac{d}{dt}\gamma(t)$$

$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$ si dice <u>VETTORE TANGENTE</u> alla curva nel punto $x = \gamma(t)$ corrispondente al valore del parametro t.

CURVE REGOLARI

1. derivabile $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$
2. con derivata continua $\gamma'(t)$ continue
3. semplice
4. il vettore tangente deve essere diverso da 0 in ogni punto. $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a,b)$

Si dice regolare a tratti se I è l'unione di un numero finito di intervalli su cui γ è regolare.

CAMBIAMENTI di PARAMETRO

Data $\gamma(t): I \to \mathbb{R}^n$, sostituisco $t = \alpha(\tau)$ $(\tau \in J)$. α è una biezione che mette in corrispondenza biunivoca I e J. La nuova curva $\delta(t) = \gamma(\alpha(\tau)) : J \to \mathbb{R}^n$, $\delta'(t) = \alpha'(\tau)\gamma'(\alpha(\tau))$.

$$\begin{cases} \text{se } \gamma \text{ è regolare, } \delta \text{ è regolare se } \alpha'(\tau) \neq 0; \\ \text{se } \gamma \text{ è semplice, } \delta \text{ è semplice.} \end{cases}$$

LUNGHEZZA della CURVA

- È la misura della distanza che si percorre partendo da un punto A arrivando ad un punto B non su una traiettoria rettilinea ma seguendo una generica traiettoria γ.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - (t_{i-1})}$$

divido l'intervallo in n parti in modo da calcolare segmenti rettilinei e li "sommo" portandoli al limite. Ricorda il rapporto incrementale

$$l_\gamma \triangleq \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt$$

è l'integrale in senso di Riemann di una funzione ad una sola variabile.

Dim INDIPENDENZA dalla PARAMETRIZZAZIONE

$\gamma(t)$, $\delta(\tau) = (\gamma \circ \alpha)(\tau)$

$$l_\delta \triangleq \int_c^d \sqrt{(\delta_1'(\tau))^2 + \dots + (\delta_n'(\tau))^2}\, d\tau =$$

$$= \int_c^d \sqrt{(\alpha'(\tau)\gamma_1'\alpha(\tau))^2 + \dots + (\alpha'(\tau)\gamma_n'\alpha(\tau))^2}\, d\tau =$$

$$= \int_c^d \sqrt{(\alpha'(\tau))^2\left[(\gamma_1'\alpha(\tau))^2 + \dots + (\gamma_n'\alpha(\tau))^2\right]}\, d\tau =$$

$(\alpha' > 0)$
$$= \int_c^d \sqrt{(\gamma_1'\alpha(\tau))^2 + \dots + (\gamma_n'\alpha(\tau))^2} \cdot \alpha'(\tau)\, d\tau =$$

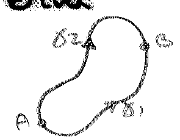
$t = \alpha(\tau)$

$$= \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt = l_\gamma$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 163

Teo F è conservativo, continuo su Ω aperto e convesso e γ una curva chiusa regolare (a tratti) $\Longrightarrow \oint_\gamma F dP = 0$ circuitazione

Dim



$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$

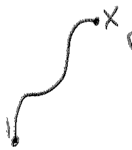
$$\oint F dP = \int_{\gamma_1} F dP + \int_{-\gamma_2} F dP = \int_{\gamma_1} F dP - \int_{\gamma_2} F dP$$

g potenziale di F su Ω

$$\oint F dP = [g(B) - g(A)] - [g(B) - g(A)] = 0$$

Dim°2 Devo dimostrare che g_1 e g_2 sono potenziali di F su Ω, allora $\exists\, K$ tale che

$$g_2(x) = g_1(x) + K \quad \forall x \in \Omega$$



Prendo γ arco di curva che unisce un punto fisso A a un punto variabile x.

$\exists$ sempre una curva che unisce x con A poiché Ω convesso

$$\int F \cdot dP = g_1(x) - g_1(A) = g_2(x) - g_2(A)$$

$$g_2(x) = g_1(x) \underbrace{- g_1(A) + g_2(A)}_{K = g_2(A) - g_1(A)}$$

INTEGRABILE nel SENSO di RIEMANN

$T_{f,I}$ trapezoide di f relativo all'intervallo I

$$\int_I f dx = \int_{[a,b]} f dx = m(T_{f,I})$$

- ogni f continua su $I = [a,b]$
- ogni f monotona su $I = [a,b]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 163

$$\frac{\delta\sigma}{\delta u_1} \wedge \frac{\delta\sigma}{\delta u_2} = N = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

Se la curva è regolare, almeno uno delle 3 componenti sarà diversa da 0

TEOREMA di STOKES

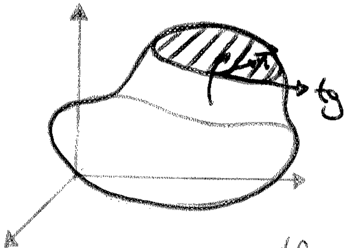
Teo $F: V \to \mathbb{R}^3$ V aperto di $\mathbb{R}^3$ di classe C^1

Sia σ una calotta regolare con sostegno contenuto in V.

Allora

$$\int F \, d(\delta\sigma) = \int_\sigma \text{rot}\, F \cdot n$$

CALOTTA REGOLARE



È percorsa in senso antiorario. Se non lo è cambio segno all'integrale.

- Applicazione al campo conservativo
  $\Downarrow$
  è irrotazionale

Def $V \subseteq \mathbb{R}^3$ è un DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO se è aperto e connesso, e inoltre, per ogni curva chiusa/semplice, regolare (anche a tratti) δ con sostegno contenuto in V, se esiste una calotta che ha per bordo δ e sostegno $\subset V$.

TEOREMA di GAUSS

Teo $F: V \to \mathbb{R}^3$ V insieme aperto di $\mathbb{R}^3$ di classe C^1

Sia $U \subseteq V$ limitato, delimitato da un numero finito di sostegni di calotte regolari $\sigma_1 \dots \sigma_m$ ($\Sigma_1 \dots \Sigma_n$ sono i rispettivi sostegni)

$$W = U \cup \Sigma_1 \dots \cup \Sigma_n$$

Supponiamo che $\Sigma_1 \dots \Sigma_n$ siano orientate in modo che i rispettivi vettori normali siano orientati verso l'esterno

$$\underbrace{\int_{\sigma_1} F \cdot \underline{n} + \dots \int_{\sigma_m} F \cdot \underline{n}}_{\text{flusso uscente}} = \iiint_W \text{div}\, F \, dx_1 dx_2 dx_3$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 163

SERIE NUMERICHE

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ può

- convergere $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$
- divergere $\begin{cases} \text{positivamente} & \lim_n S_n = +\infty \\ \text{negativamente} & \lim_n S_n = -\infty \end{cases}$
- essere indeterminata $\nexists \lim_n S_n$
- convergere assolutamente $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge

SERIE NOTEVOLI

- **GEOMETRICA**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \begin{cases} \text{converge a } \frac{1}{1-a} & |a|<1 \\ \text{diverge}^+ & a \geq 1 \\ \text{indeterminata} & a \leq -1 \end{cases}$$

- **ARMONICA** (GENERALIZZATA $p \neq 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{converge} & p>1 \\ \text{diverge} & p \leq 1 \end{cases}$$

- **TELESCOPICA**

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

$$S_n = a_{n+1} - a_0$$

- **MENGOLI**

$$\sum_{K=2}^{\infty} \frac{1}{(K-1)K} = 1$$

- **e**

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

CRITERI di CONVERGENZA

1) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergono,
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge;

2) λ costante $\in \mathbb{R}$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge,
$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;

3) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergono$^{+(-)}$ entrambe,
$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge$^{+(-)}$;

4) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge$^{+(-)}$,
$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge$^{+(-)}$

TEO Condizione Necessaria: Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge,
allora $\lim_n a_n = 0 \in \mathbb{R}$

TEO Convergenza Assoluta Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 163

SUCCESSIONI di FUNZIONI

$f_n(x): I \to \mathbb{R}$
$\downarrow$
$f(x): J \to \mathbb{R}$

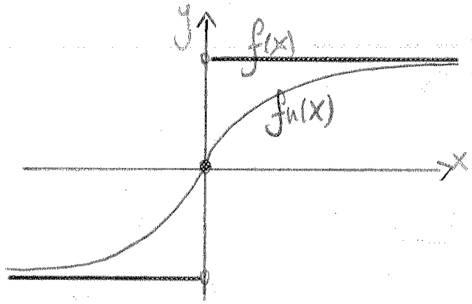
$f_n(x) \to f(x)$
$(J \subset I)$

Def $f_n: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Si dice che $f_n(x)$ converge PUNTUALMENTE su $J \subseteq I$
se $\forall x \in J, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x)$
$n > n_0 \longmapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

- $f_n(x) = \arctan(n, x)$

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = \begin{cases} \pi/2 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\pi/2 & x<0 \end{cases}$$

converge a $f(x) = \begin{cases} \pi/2 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\pi/2 & x<0 \end{cases}$



Def $f_n(x): I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Si dice che $f_n(x)$ converge UNIFORMEMENTE su $J \subseteq I$
se $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon), n > n_0,$
$\forall x \in J \longmapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

→ Se $f_n(x)$ converge UNIFORMEMENTE su J allora $f_n(x)$ converge PUNTUALMENTE a $f(x)$ su J.
(e non viceversa)

- $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ su J se

$$\lim_{x \to x_0} \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, n > n_0 \to \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall x \in J, |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

CONTINUITA' della $f(x)$

Teo Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni continue su I, $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \longmapsto f$ è continua su I

Dim
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon), n > n_0$
$\longmapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$f_n(x)$ è continua in $x_0 \in I$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_n > 0, |x - x_0| < \delta_n \longmapsto |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$

(Devo dimostrare che f è continua su $x_0 \in I$)
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \longmapsto |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

- fissato $\varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$
$n > n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x$
$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$

$|f(x) - f(x_0)| = |f_n(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$
$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$

$\exists \delta_n > 0 \quad |x - x_0| < \delta_n$
$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 163

Teo Siano $f_n(x)$ continue su I e $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ su I
$\longmapsto S(x)$ è continua su I

Teo INT della S(x) Se $f_n(x)$ sono continue su un intervallo I, se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ su qui $[a,b] \in I$ $\longmapsto$ $\forall x_0 (\in I)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} \underbrace{\left(\sum f_n(t)\right)}_{= S(t)} dt$$

Teo DER della S(x) $f_n(x) \in \mathcal{C}^1(I)$
$\sum_{0}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente a $t(x)$ su $[a,b] \subseteq I$
$\exists x_0 \in I$, $\sum f_n(x_0) = S(x_0)$
$\longmapsto \sum f_n(x)$ converge uniformemente su I a $S(x)$ funzione di classe $\mathcal{C}^1$
e $S'(x) = t(x)$ $\forall x$ cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \frac{d}{dx}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)}_{S(x)} = S'(x) = t(x)$$

Teo: Criterio di Weierstrass
- $f_n(x)$ definite e limitate su I
- $\forall n$ $\exists M_n \geq 0$, $\forall x \in I$, $|f_n(x)| \leq M_n$
- $\sum M_n$ convergente

$\longmapsto \sum f_n(x)$ converge uniformemente su I e
$|\sum f_n(x)| \leq \sum M_n$

SERIE di POTENZE

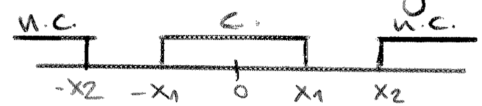
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e a_k una successione numerica.
Chiamiamo <u>SERIE di POTENZE</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

dove <u>x_0 è il centro</u> della serie e <u>a_k i coefficienti</u>.

- Se $\sum a_n x^n$ converge in $x_i \neq 0 \longmapsto$ converge assolutamente e puntualmente $\forall x \in (-|x_i|, |x_i|)$

Se $\sum a_n x^n$ non converge in $x_2 \neq 0 \longmapsto \sum a_n x^n$ non converge $\forall x \,/\, |x| > |x_2|$



Def Data $\sum a_n x^n$, si definisce RAGGIO di CONVERGENZA

$$R = \sup\left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ converge} \right\}$$

1) $R \geq 0$
2) se $\sum a_n x^n$ converge solo su $x=0$, $R=0$
3) se $\sum a_n x^n$ converge su $\mathbb{R}$, $R=+\infty$
4) se $R \neq 0$, $R \neq +\infty$, e la serie converge assolutamente e puntualmente in $(-R,R)$ e uniformemente in sottointervalli $[a,b] \subseteq (-R,R)$, non so se converge in $x=-R$, $x=R$.

Teo $\sum a_n x^n$ converge uniformemente $\forall$ sottointervallo chiuso dell'insieme di convergenza.

Def f è analitica in $f \in C^\infty$ in $B(x_0)$ e la serie di Taylor di f in x_0 converge puntualmente a f in $B(x_0)$.

CRITERIO per l'ANALITICITA' di f

Se $f \in C^\infty$ su $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ e $\exists\, n_0 / \forall n \geq n_0$

$$|f^{(n)}(x)| < M \frac{n!}{\delta^n} \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \Longrightarrow f \text{ analitica in } x_0$$

Teo $|z| = x$

se la $\sum a_n x^n$ ha raggio R

- $\sum a_n z^n$ converge $\forall\, |z|<R$
- non converge per $|z|>R$
- converge uniformemente su $|z| \leq R_1 < R$

Prodotto Scalare $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Norma Euclidea $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Distanza $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$

$$\|x\|^2 = x \cdot x$$

Il problema di minima distanza consiste nel trovare (se $\exists$) e caratterizzare i punti $\bar{x} \in C /$

$$d(p,\bar{x}) = \min_{x\in C} d(p,x) = \min_{x \in C} \sqrt{(p_1-x_1)^2 + \dots + (p_n-x_n)^2}$$

I punti $\bar{x}$ che corrispondono ai minimi di una funzione si dicono di MINIMO LIBERO; se invece è limitato ad un sottoinsieme C si dice MINIMO VINCOLATO.

Teo della PROIEZIONE

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, e sia ω un sottospazio di V,

$$0 < \dim \omega = m < \dim V = n.$$

Sia $p \in V$, $p \notin \omega$. Allora esiste un unico $q \in \omega$ tale che

$$d(p,q) = \min_{x \in \omega} d(p,x)$$

Sia $e_1 \dots e_n$ una base ortonormale di V, i cui primi m vettori costituiscano una base ortonormale di ω. Allora

$$q = (p \cdot e_1)e_1 + \dots + (p \cdot e_m)e_m$$

Il vettore $p-q$ è ortonormale a ogni e_i (i da 1 a m) e quindi a ogni $x \in \omega$.

$$d^2(p,q) = \sum_{i=m+1}^{n} (p \cdot e_i)^2 = \|p\|^2 - \sum_{i=1}^{m} (p \cdot e_i)^2 \quad ①$$

Dim $p = \sum_{i=1}^{n} p_i e_i$, dove $p_i = e_i \cdot p$. Posto $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$,

si ha

$$d^2(a,x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i)^2$$

ω si identifica con l'insieme di tutti e soli i vettori x per cui $x \cdot e_{m+1} = \dots = x \cdot e_n = 0$.

$$(x_1, \dots, \cancel{x_n}) \to g(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - p_i)^2 + p_{m+1}^2 + \dots + p_n^2$$

$x_1 = p_1, \; x_m = p_m$ cioè $q = \sum_{i=1}^{m} p_i e_i$

Il minimo di $g(x_1, \dots, x_m)$ è in $\sum_{i=m+1}^{n} p_i^2$ ①

② $\begin{cases} (p-q)\cdot e_i = p_i - (p_1 e_1 + \dots + p_m e_m)\cdot e_i = p_i - p_i = 0 \\ q \text{ è la proiezione ortogonale di } p \text{ su } \omega. \end{cases}$

CONVERGENZA QUADRATICA

$[a,b]$, $k \geq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right|^2 dx =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_2^2 = 0$$

Teo $f \in \tilde{C}_{2\pi}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \| f - S_{n,f} \|_2 = 0$$

la serie di Fourier converge a f in norma quadratica

Identità di Parseval

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

PUNTUALE

Teo Sia $f \in \tilde{C}_{2\pi}$. Supponiamo che valgano:
- f è regolare a tratti in $[0,2\pi]$;
- f è monotona a tratti in $[0,2\pi]$,

allora la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[0,2\pi]$.

derivabile in tutti i punti di $[a,b]$ tranne al più in un numero finito di punti; continua a tratti

• se è possibile suddividere l'intervallo $[a,b]$ in un numero finito di sottointervalli su ognuno dei quali f è monotona

pseudo derivata sinistra/destra

$$f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0} \quad ; \quad f'(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0}$$

Teo Se in $x_0 \in [0,2\pi]$ esistono la pseudoderivata dx e sx, allora la serie di Fourier di f converge in x_0 al valore (regolarizzato) $f(x_0)$.

UNIFORME

Teo Sia $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ di classe C^1 a tratti. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su tutto $\mathbb{R}$.

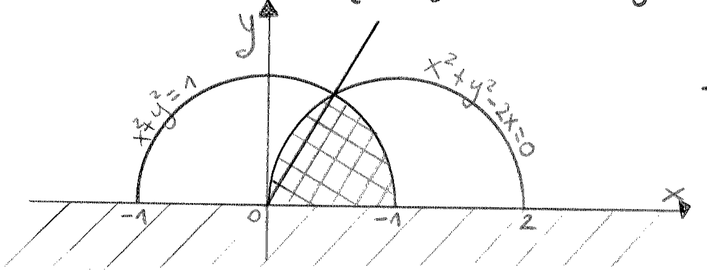
continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti su $[0,2\pi]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 163

INTEGRALE DOPPIO

$$\int_\Omega xy\,dx\,dy$$

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1,\ x^2+y^2 < 2x,\ y > 0\}$$



$$\begin{cases} 0 \le \rho \le 2\cos\theta \\ 0 \le \theta \le \pi/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases}$$

si incontrano in $\pi/3$

$$\int_0^{\pi/3}\int_0^1 (\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} (\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^3\cos\theta\sin\theta\,d\rho\,d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^3\cos\theta\sin\theta\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/3}\sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^1 \rho^3\,d\rho + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^{2\cos\theta} \sin\theta\cos\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{\sin^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi/3} \cdot \frac{1}{4} + 4\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^5\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} - 4\,\frac{\cos^6\theta}{6}\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{3}{32} - 4\,\frac{1}{6}\left(0 - \frac{1}{64}\right) = \frac{5}{48}$$

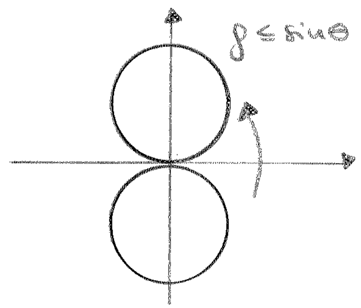
- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$

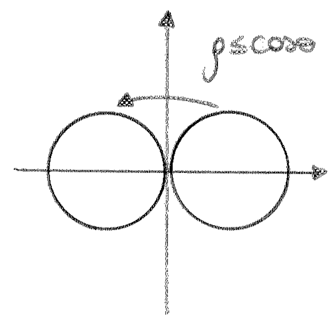
$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$$

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \gamma(y) \le x \le \delta(y),\ c \le y \le d\}$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx\right) dy$$

Cambiamento di coordinate
- polari
- ellittiche





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 163

INTEGRALE CURVILINEO di I SPECIE

$$\int_\Omega \sqrt{12+9x-12\sqrt{z}} \qquad \gamma(t)=(t^2, t^3-t^2, t^2) \quad t\in[1,2]$$

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2-2t, 2t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2+(3t^2-2t)^2+4t^2} =$$

$$= \sqrt{9t^4-12t^3+12t^2} = t\sqrt{9t^2-12t+12}$$

$$f(\gamma(t)) = \sqrt{12+9t^2-12t}$$

$$\int_1^2 \sqrt{12+t^2\cdot 9-12t}\; t\sqrt{9t^2+12-12t}\, dt =$$

$$\int_1^2 t(12+9t^2-12t)\,dt = \int_1^2 12t+9t^3-12t^2\,dt =$$

$$= \frac{12}{2}t^2\Big|_1^2 + \frac{9}{4}t^4\Big|_1^2 + \frac{12}{3}t^3\Big|_1^2 = \frac{95}{4}$$

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$\gamma(t) : [a,b] \to \Omega$$

1) Calcolo $\gamma'(t)$
2) Calcolo $\|\gamma'(t)\|$
3) Moltiplico scalarmente per $f(\gamma(t))$
4) Trovo un integrale in t

$$\gamma(t) = (at, bt, ct)$$

$$\gamma'(t) = (a, b, c)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 163

INTEGRALE di SUPERFICIE di una FUNZIONE REALE

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{z^4}\, d\sigma \qquad \Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1 \le z \le 2 \right\}$$

$$z = g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \le x^2+y^2 \le 1 \right\}$$

$$\Sigma = \sigma(K) \qquad \sigma : K \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \left(x, y, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$N(x,y) = \frac{d\sigma}{dx}(x,y) \wedge \frac{d\sigma}{dy}(x,y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{dg}{dx} \\ 0 & 1 & \frac{dg}{dy} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-i\frac{dg}{dx}; -j\frac{dg}{dy}; 1 \right) =$$

$$= \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}};\ \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}};\ 1 \right)$$

$$\| N(x,y) \| = \sqrt{\frac{x^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^3} + 1}$$

$$\int_K (x^2+y^2)\sqrt{1+(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \frac{1}{2} \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$

$$\int_{K'} (\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta)\sqrt{1+(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{1/2}^{1} \rho^3\sqrt{1+\rho^4}\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - \frac{17}{64}\sqrt{17}\right)$$

$$N(x,y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{d\sigma_x}{dx} & \frac{d\sigma_y}{dx} & \frac{d\sigma_z}{dx} \\ \frac{d\sigma_x}{dy} & \frac{d\sigma_y}{dy} & \frac{d\sigma_z}{dy} \end{vmatrix} =$$

$\| N(x;y) \| = \sqrt{\text{somma dei quadrati delle tre componenti}}$

Ottengo un integrale in due variabili che risolvo a seconda dei casi.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 163

TEOREMA di GREEN

$F(x,y) = (xy, xy^2)$ antiorario

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1, x > 0\}$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\frac{df_2}{dx} = y^2 \qquad \frac{df_1}{dy} = x$$

$$\int y^2 - x \, dx\, dy$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 \rho^3\sin^2\theta - \rho^2\cos\theta \, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 \rho^3 \sin^2\theta \, d\rho\, d\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 \rho^2\cos\theta\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho =$$

$$= \left(\frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{2}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right)\frac{1}{4} + \left(\sin\theta\Big[_{-\pi/2}^{\pi/2}\right)\frac{1}{3}$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{8}$$

$$\oint_{\delta A} F \cdot dP = \int_A \left(\frac{\delta f_2}{\delta x}(x,y) - \frac{\delta f_1}{\delta y}(x,y)\right) dx\, dy$$

1) Calcolo le derivate parziali

2) Risolvo un integrale in due variabili

δA deve essere orientato positivamente, ovvero con verso antiorario

$F: \Omega \to \mathbb{R}^2$ è un campo vettoriale di classe C^1

TEOREMA di GAUSS

$$\int_{\delta D} F \cdot n \qquad F(x,y,z) = (x, y, z^2)$$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < z < -x^2 - y^2\}$$

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dy} + \frac{df_3}{dz} = 1 + 1 + 2z = 2(1+z)$$

$$\int_D 2(1+z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$2\int_\Omega \int_{-1}^{-x^2-y^2} (1+z)\, dz\, dx\, dy = 2\int_\Omega \left[z + \frac{1}{2}z^2\right]_{-1}^{-x^2-y^2} dx\, dy =$$

$$= 2\int_\Omega -x^2 - y^2 + \frac{1}{2}(-x^2-y^2)^2 - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) dx\, dy =$$

$$= 2\int_\Omega \frac{1}{2} - x^2 - y^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2)\, dx\, dy =$$

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2} - \rho^2 + \frac{1}{2}\rho^4\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\int_{\delta D} F \cdot n = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\delta f_1}{dx}(x,y,z) + \frac{\delta f_2}{\delta y}(x,y,z) + \frac{\delta f_3}{\delta z}(x,y,z)$$

$F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe C^1

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 163

SERIE NUMERICHE

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\cdot n!} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n-1)!\,\cancel{n}} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n-1)!}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)(n-1)!} = 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)(n-1)!} =$

$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right) = 1$

CONVERGE a 1

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{5^n}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}\right|} =$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} =$

$= \frac{1}{5}e^{n} > 1$ DIVERGE

1) $\lim_{n\to+\infty}$ della SERIE $= 0$ CONVERGE

2) per vedere a cosa converge uso il CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO usando come bn una serie notevole

SUCCESSIONI e SERIE

- GEOMETRICA
- ARMONICA
- TELESCOPICA
- MENGOLI

3) Se la serie è a segni alterni

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
- a_n decrescente

$\Big\}$ converge

- $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n|$ converge $\mapsto$ converge assolutamente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 163

Propietà topologiche di $\mathbf{R}^n$

Sia x_0 un punto di $\mathbf{R}^n$, e sia $r > 0$. L'insieme

$$S(r, x_0) = \{x \in \mathbf{R}^n : ||x - x_0|| < r\}$$

si chiama *intorno sferico* di x_0 di raggio r. Si ricordi che se $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. L'insieme $S(r, x_0)$ rappresenta quindi in particolare:

1. l'intervallo aperto $(x_0 - r, x_0 + r)$, se $n = 1$;
2. un cerchio di raggio r e centro x_0 se $n = 2$;
3. una sfera (nel senso usuale del termine) di raggio r e centro x_0 se $n = 3$.

Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^n$. Un punto $x_0 \in A$ si dice *interno* ad A se esiste $r > 0$ tale che $S(r, x_0) \subseteq A$. In altre parole, x_0 è interno ad A se è possibile spostarsi da x_0 in una qualunque direzione per un tratto anche molto piccolo, ma senza uscire da A.

Un punto $x_0 \notin A$ si dice *esterno* ad A se è interno al suo complementare $A^c = \mathbf{R}^n \setminus A$. In altre parole, x_0 è esterno ad A se è possibile spostarsi da x_0 in una qualunque direzione per un tratto anche molto piccolo, ma senza entrare in A.

Un punto $x_0 \in \mathbf{R}^n$ che non sia né interno né esterno ad A si dice un *punto di frontiera* di A.

Esempio Sia $n = 1$, e siano $a, b \in \mathbf{R}$, con $a < b$. Un punto x_0 è interno all'intervallo $A = [a, b]$ se e solo se $a < x_0 < b$. I punti a e b sono punti di frontiera. Tutti gli altri sono esterni.

∎

Se A è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^n$, ha interesse considerare l'insieme di tutti i punti interni ad A. Tale insieme si dice *parte interna* di A e si indica con uno dei due simboli seguenti: $\overset{\circ}{A}$ oppure $\mathrm{Int}\, A$. In base alle definizioni date, è chiaro che

$$\overset{\circ}{A} \subseteq A\,. \tag{1}$$

Ha anche interesse considerare l'insieme di tutti i punti che sono di frontiera per A. Questo insieme si chiama *frontiera* di A e si indica con uno dei due simboli seguenti: ∂A oppure $\mathrm{Fr}\, A$. Si ha $\partial A = \partial A^c$.

Infine, siamo interessati a considerare anche l'insieme $A \cup \partial A$, che si chiama *chiusura* di A e si indica con $\overline{A}$ oppure $\mathrm{Clos}\, A$. È chiaro che $A \subseteq \overline{A}$.

Osservazione 1 *Alternativamente, si può definire $\overline{A}$ come il complementare della parte interna del complementare di A.*