NUMERO: 606

DATA: 0409/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Francia

MATERIA: Geometria
Prof. Caire

$f: V \to V$ B = QUALUNQUE ALTRA BASE DI V

$A = M_f^{B,D}$

$M_f^{A,A} = D$ = DIAGONALE

A, D SONO MATRICI DELLA STESSA f (RISPETTO A BASI DIVERSE).

A, D SONO SIMILI $\Rightarrow \exists P / D = P^{-1} \cdot A \cdot P$

(P = MATRICE DI PASSAGGIO DA B AD A)

A È DIAGONALIZZABILE (SIMILE A UNA MATRICE DIAGONALE)

ESERCIZIO (TIPO ESAME):

SIA DATA L'APPLICAZIONE LINEARE $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ DEFINITA DA $f(a+b, 2b, -a+b+2c)$

1) DETERMINARE LA MATRICE $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ DI f

2) VERIFICARE CHE A È INVERTIBILE.

3) DETERMINARE AUTOVALORI E AUTOSPAZI DI A

4) DETERMINARE AUTOVETTORI DI A

5) DETERMINARE $D, P \in \mathbb{R}^{3,3}$ CON D = DIAGONALE E P = INVERTIBILE $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $|A| = 1 \cdot (4) - 1 \cdot (0) = 4$ $|A| \neq 0$ INVERTIBILE

3) AUTOVALORI DI f = AUTOVALORI DI A

$P_A(t) = |A - tI|$

$A - tI = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -1 & 1 & 2-t \end{vmatrix}$ $p(t) = (2-t) \cdot (2-t) \cdot (1-t)$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = 1$

SE LA MATRICE È INVERTIBILE, NON C'È AUTOVALORE NULLO

4) AUTOSPAZI

$V_{(2)} = \operatorname{Ker} f_2$ $f_2 = f - 2id$

$\hookrightarrow (A - 2I)X = 0$

$V_{(2)}$ = SPAZIO DELLE SOLUZIONI SISTEMA $(A - 2I)X = 0$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ SISTEMA EQUIVALENTE $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$

SOLUZIONI $S = V_{(2)} = \{(x_1, x_2, x_3), x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$\dim S = \dim V_{(2)} = 3 - \rho(A - 2I) = 3 - 1 = 2$

BASE DI $V_{(2)}$: $B = (b_1, b_2)$ $b_1 = (1,1,0)$ $b_2 = (0,0,1)$

$V_{(2)} = L((1,1,0),(0,0,1))$

$V_{(1)} = (A - I)X = 0$ $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

SPAZI VETTORIALI CON PRODOTTO SCALARE

PRODOTTO SCALARE

DEFINIZIONE → SIA V UN $\mathbb{R}$-SPAZIO VETTORIALE. SI DICE PRODOTTO SCALARE UNA APPLICAZIONE $p: V\times V \to \mathbb{R}$ CHE SIA:

1) BILINEARE CIOÈ LINEARE IN CIASCUNO DEI DUE ARGOMENTI

$p(au+bu', v) = a\cdot p(u,v) + b\cdot p(u',v)$

$p(u, cv+dv') = c\cdot p(u,v) + d\cdot p(u,v')$

2) SIMMETRICA CIOÈ $p(u,v) = p(v,u)$

3) DEFINITA POSITIVA, CIOÈ $p(u,u) \geq 0$ $p(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

NOTAZIONE: IL PRODOTTO SCALARE DI u, v ANZICHÉ $p(u,v)$ SI USA SOLITAMENTE DENOTARE CON (u,v) OPPURE $\langle u,v \rangle$ OPPURE $u\cdot v$

ESEMPI

1) PRODOTTO SCALARE ORDINARIO IN V_3

2) PRODOTTO SCALARE EUCLIDEO IN $\mathbb{R}^n$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)\cdot(y_1, y_2, \dots, y_n) := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

3) PRODOTTO SCALARE FUNZIONALE DI $f, g \in C^{(0)}[a,b]$, CON $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$

$$(f,g) := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

1) BILINEARITÀ

$$(af_1+bf_2, g) = \int_a^b \left(af_1(x)+bf_2(x)\right)\cdot g(x)\,dx = a\cdot\int_a^b f_1(x)\cdot g(x)\,dx + b\cdot\int_a^b f_2(x)\cdot g(x)\,dx$$

$a\cdot(f_1,g) + b\cdot(f_2,g) = \dots = c(f,g) + d\cdot(f,g)$

2) SIMMETRICO

$(f,g) = (g,f)$

3) DEFINITA POSITIVA

$$(f,f) = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0 \quad = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ in } [a,b]$$

f È CONTINUA PER IPOTESI

$V = C^{(0)}([0,1])$

$$(x, x^2) = \int_0^1 x\cdot x^2\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\|x\| = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \|1\| = \sqrt{\pi}$$

ESERCIZIO

$V = C^{(0)}([-\pi,\pi])$

$\mathcal{F}_{2\pi} = \{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \cos Kx, \operatorname{sen} Kx\}$ INSIEME ORTOGONALE

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

$(1, \cos Kx) = 0$ $(1, \operatorname{sen} Kx) = 0$

METODO DI GRAM SCHMIDT

PROPRIETÀ:

SIA $(V,\cdot)$ UN $\mathbb{R}$-SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO CON PRODOTTO SCALARE. ESISTE SEMPRE IN V UNA BASE ORTONORMALE.

UNA BASE ORTONORMALE DI V SI PUÒ DETERMINARE CON IL METODO DI ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT

SIA $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ UNA BASE DI V. SI CONSIDERINO I VERSORI:

$o_1 = vers(v_1)$

$o_2 = vers(v_2 - (v_2 \cdot o_1) \cdot o_1)$

$o_3 = vers(v_3 - [(v_3 \cdot o_1) o_1 + (v_3 o_2) o_2])$

ETC...

SI PROVA CHE

PROPRIETÀ:

$(o_1, o_2, \dots, o_n)$ È UNA BASE ORTONORMALE DI V.

PROPRIETÀ:

SIA $O = (o_1, o_2, \dots, o_n)$ UNA BASE ORTONORMALE DI V E SIA $v = a_1 o_1 + a_2 o_2 + \dots + a_n o_n$ ALLORA $a_k = v \cdot o_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ CIOÈ LE COMPONENTI DI UN VETTORE RISPETTO A UNA BASE ORTONORMALE O SONO DATE DAI PRODOTTI SCALARI DEL VETTORE PER GLI ELEMENTI DI O.

ESEMPIO

V_3: $S = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ BASE STANDARD ORTONORMALE

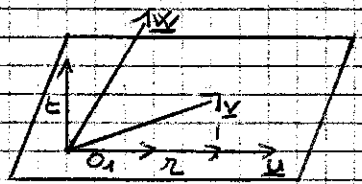
$B = (u, v, w)$ BASE NON ORTONORMALE $u = (1,0,1)$ $v = (1,1,0)$ $w = (0,1,1)$

$u = \vec{i} + \vec{k}$ $\quad v = \vec{i} + \vec{j}$ $\quad w = \vec{j} + \vec{k}$

$u \cdot v = 1 + 0 + 0 = 1 \neq 0$

$\|u\| = \sqrt{2}$

$o_1 = vers(u) = \dfrac{u}{\|u\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \vec{k}$



$o_2 = vers(v - \underbrace{(v \cdot o_1) \cdot o_1}_{\text{PROIEZIONE DI } v \text{ SU } o_1})$

$(v \cdot o_1) \cdot o_1 = \vec{r}$

$B \Rightarrow O$ ORTONORMALE DI V_3

$O = (o_1, o_2, o_3)$

$o_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{k}\right)$

$v \cdot o_1 = (\vec{i} + \vec{j}) \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \vec{k}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$v - (v \cdot o_1) \cdot o_1 = \vec{i} + \vec{j} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \vec{k}\right) = \vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2} \vec{i} - \frac{1}{2} \vec{k} = \frac{1}{2} \vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2} \vec{k}$

$o_3 = (o_1 \wedge o_2)$ $\quad o_3 = v_3 - [(v_3 \cdot o_1) \cdot o_1 + (v_3 \cdot o_2) \cdot o_2]$

$o_3 = w - [(w \cdot o_1) o_1 + (w \cdot o_2) o_2]$

$O_3 = 6\sqrt{5}\cdot(x^2 - x + \frac{1}{6}) = 6\sqrt{5}x^2 - 6\sqrt{5}x + \sqrt{5}$

$a = p\cdot \underline{o_1} \quad b = p\cdot \underline{o_2} \quad c = p\cdot \underline{o_3}$

$a = \int_0^1 (1-5x+8x^2)\,dx \qquad b = \int_0^1 (1-5x+8x^2)\cdot(2\sqrt{3}x - \sqrt{3})\,dx$

$c = \int_0^1 (1-5x+5x^2)(6\sqrt{5}x^2 - 6\sqrt{5}x + \sqrt{5})\,dx$

MATRICI ORTOGONALI

DEFINIZIONE → UNA MATRICE $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ SI DICE ORTOGONALE SE $P\cdot{}^tP = I$ CIOÈ SE ${}^tP = P^{-1}$

PROPRIETÀ (MATRICI ORTOGONALI E CAMBI DI BASI):

SIA V UN $\mathbb{R}$-SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO CON PRODOTTO SCALARE; SIA $O = (o_1, o_2, \dots$ UNA BASE ORTONORMALE DI V E $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ UNA BASE DI V. SIA P LA MATRICE DI PASSAGGIO DALLA BASE O ALLA BASE D.

P È ORTOGONALE ⟺ D È UNA BASE ORTONORMALE DI V

PROPRIETÀ:

SIA $P \in \mathbb{R}^{n,n}$. SONO TUTTE CONDIZIONI EQUIVALENTI:

1) P È ORTOGONALE (CIOÈ $P\cdot{}^tP = I$)
2) ${}^tP\cdot P = I$
3) ${}^tP$ È ORTOGONALE
4) LE RIGHE DI P FORMANO UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^n$ EUCLIDEO
5) LE COLONNE DI P FORMANO UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^n$ EUCLIDEO

PROPRIETÀ:

SIA $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ ORTOGONALE. ALLORA $|P| = \pm 1$

DEFINIZIONE → UNA MATRICE $P \in \mathbb{R}^{2,2}$ SI DICE ORTOGONALE SPECIALE SE $|P| = 1$

ESEMPIO: LE MATRICI $P \in \mathbb{R}^{2,2}$ ORTOGONALI SONO TUTTE E SOLE DELLA FORMA

$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ SE $|P| = 1$ (SE SPECIALI), OPPURE, $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ SE $|P| = -1$

MATRICI ORTOGONALI E ROTAZIONI

NEL PIANO (O,X,Y) SIANO ASSEGNATI DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO (O,X,Y) E (O,X',Y'), IN CUI GLI ASSI X' E Y' SI OTTENGONO DA X E Y MEDIANTE UNA ROTAZIONE ANTIORARIA DI ANGOLO θ. SIANO $(\vec{i}, \vec{j})$ I VERSORI DEGLI ASSI X,Y E $(\vec{i}', \vec{j}')$ I VERSORI DEGLI ASSI X', Y'. SI HA:

$\vec{i}' = \cos\theta\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j} \qquad \vec{j}' = -\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

LA MATRICE P DI PASSAGGIO DALLA BASE ORTONORMALE $(\vec{i}, \vec{j})$ ALLA BASE ORTONORMALE $(\vec{i}', \vec{j}')$ È LA MATRICE ORTOGONALE SPECIALE $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

IN GENERALE VALE CHE:

PROPRIETÀ: OGNI MATRICE $P \in \mathbb{R}^{2,2}$ ORTOGONALE SPECIALE È LA MATRICE DI UN CAMBIAMENT DI BASI ORTONORMALI ANTIORARIE, E QUINDI CORRISPONDE A UNA ROTAZIONE ANTIORARIA DE

$V_4: (A-4I)X=0 \qquad A-4I=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$2x+y=0 \qquad y=-2x$

$V_4 = \{(x,-2x) \, x \in \mathbb{R}\} = L(1,-2) \qquad a_2=(1,-2)$

BASE $\mathbb{R}^2$ FORMATA DA AUTOVETTORI

$M_a^{aa} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ MATRICE DIAGONALE

P = MATRICE PASSAGGIO DA $E \to a \qquad P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad D=P^{-1} \cdot A \cdot P$

$o_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \qquad o_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$O(o_1, o_2)$ È UNA BASE ORTONORMALE DI AUTOVETTORI

Q = PASSAGGIO $E \to O \qquad D=Q^{-1} \cdot A Q = {}^tQ \cdot A \cdot Q$

$Q=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = {}^tQ$ È ORTOGONALE

FORME QUADRATICHE

DEFINIZIONE → SI DICE FORMA QUADRATICA (F.Q) (REALE) NELLE VARIABILI $x_1, x_2, \dots, x_n$ UN POLINOMIO OMOGENEO DI 2° GRADO IN $x_1, x_2, \dots, x_n$ (A COEFFICIENTI REALI):

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} x_h x_k$$

DOVE $a_{hk} = a_{kh}$ SE $h \neq k$. DUNQUE, TENENDO CONTO DI QUEST'ULTIMA CONDIZIONE, SI PUÒ SCRIVERE

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} x_h x_k &= a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + \dots + 2a_{1n} x_1 x_n + \\ &+ a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{24} x_2 x_4 + \dots + 2a_{2n} x_2 x_n + \\ &+ a_{33} x_3^2 + 2a_{34} x_3 x_4 + 2a_{35} x_3 x_5 + \dots + 2a_{3n} x_3 x_n \dots + a_{nn} x_n^2 \end{aligned}$$

FORME QUADRATICHE E MATRICI SIMMETRICHE

AD OGNI FORMA QUADRATICA SI PUÒ ASSOCIARE LA MATRICE $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ SIMMETRICA REALE $A=(a_{hk})$, CHE SI DICE MATRICE ASSOCIATA ALLA FORMA QUADRATICA.

SE A È LA MATRICE ASSOCIATA ALLA FORMA QUADRATICA QUESTA SI PUÒ SCRIVERE IN FORMA MATRICIALE

$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) A \, {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$q(x) = {}^tX \cdot A \cdot X$ DOVE X È LA MATRICE COLONNA DELLE VARIABILI $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

VICEVERSA, DATA LA MATRICE SIMMETRICA $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ SI PUÒ ASSOCIARLE LA FORMA QUADRATICA:

$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n) A \, (x_1, x_2, \dots, x_n) = {}^tX \cdot A \cdot X$

PROPRIETÀ

C'È CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA MATRICI SIMMETRICHE REALI $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ E FORME QUADRATICHE REALI $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$

DEFINIZIONE → SI DICE RANGO DI UNA FORMA QUADRATICA IL RANGO DELLA MATRICE A AD ESSA ASSOCIATA.

SEGNO DI UNA FORMA QUADRATICA

UNA FORMA QUADRATICA SI DICE:

DEFINITA POSITIVA → SE $q(X)>0$ PER OGNI $X\neq 0$

SEMIDEFINITA POSITIVA → SE $q(X)\geq 0$ PER OGNI $X\in\mathbb{R}^n$

DEFINITA NEGATIVA → SE $q(X)<0$ PER OGNI $X\neq 0$

SEMIDEFINITA NEGATIVA → SE $q(X)\leq 0$ PER OGNI $X\in\mathbb{R}^n$

NON DEFINITA O INDEFINITA → SE ESISTONO $X\in\mathbb{R}^n$ PER CUI $q(X)>0$ E SE ESISTONO $X\in\mathbb{R}^n$ PER CUI $q(X)<0$

PROPRIETÀ:

DUE FORME QUADRATICHE EQUIVALENTI HANNO LO STESSO SEGNO

DUNQUE, PER STUDIARE IL SEGNO DI UNA FORMA QUADRATICA È SUFFICIENTE STUDIARE IL SEGNO DI UNA SUA FORMA CANONICA, SI PROVA CHE:

PROPRIETÀ:

UNA FORMA QUADRATICA $q(X)={}^tXAX$ È

DEFINITA POSITIVA	SE A HA TUTTI GLI AUTOVALORI >0
SEMIDEFINITA POSITIVA	SE A HA TUTTI GLI AUTOVALORI ≥ 0
DEFINITA NEGATIVA	SE A HA TUTTI GLI AUTOVALORI <0
SEMIDEFINITA NEGATIVA	SE A HA TUTTI GLI AUTOVALORI ≤ 0
NON DEFINITA	SE A HA AUTOVALORI DI SEGNI DIVERSI

REGOLA DEI SEGNI E SEGNO DI UNA FORMA QUADRATICA

PROPRIETÀ (REGOLA DEI SEGNI DI CARTESIO):

SIA $p(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$ UN POLINOMIO A COEFFICIENTI REALI CHE HA TUTTE LE RADICI REALI; ALLORA IL NUMERO DELLE RADICI POSITIVE DI $p(X)$ È UGUALE AL NUMERO DI CAMBIAMENTI DI SEGNO NELLA SUCCESSIONE DEI COEFFICIENTI $(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n)$

ESEMPIO

(X^3+X^2-X-1) 1 RADICE POSITIVA, 2 NEGATIVE.

STUDIO DEL SEGNO DI UNA FORMA QUADRATICA.

PER TROVARE IL SEGNO DI UNA FORMA QUADRATICA $q(X)={}^tXAX$ SI PUÒ APPLICARE LA REGOLA DEI SEGNI DI CARTESIO AL POLINOMIO CARATTERISTICO $p(t)$ DI A, PERCHÉ, ESSENDO A SIMMETRICA REALE, $p(t)$ HA TUTTE LE RADICI REALI.

DUNQUE: SI SCRIVA $p(t)=t^r g(t)$, CON $g(0)\neq 0$

SIANO V LE VARIAZIONI DI SEGNI IN $g(t)$

CI SONO r RADICI NULLE

CI SONO V RADICI POSITIVE

CI SONO $n-(r+V)$ RADICI NEGATIVE

QUESTO È SUFFICIENTE PER STUDIARE IL SEGNO DI $q(X)$.

CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE

SE $A=(a_{hk})$ $(h,k=1,2,3)$ E $A'=(a_{hk})$ $(h,k=1,2)$, SONO LE DUE MATRICI ASSOCIATE ALLA CONICA Γ

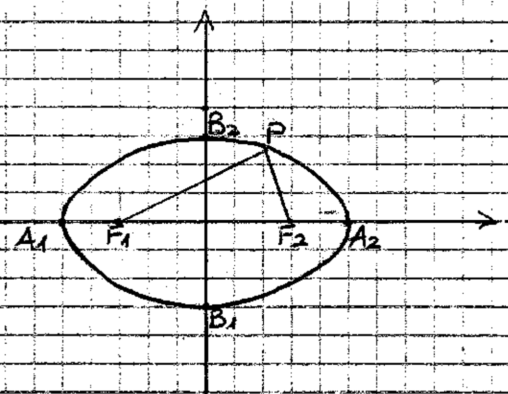
SI PROVA CHE Γ È NON DEGENERE $\Leftrightarrow |A|\neq 0$. INOLTRE:

	ESEMPIO		NOME
$\det(A')<0$	$\det(A)\neq 0$	$xy=1$	IPERBOLE
	$\det(A)=0$	$xy=0$	RETTE REALI INCIDENTI
$\det(A')>0$	$\det(A)\neq 0$	$x^2+y^2=1$	ELLISSE
		$x^2+y^2=-1$	ELLISSE IMMAGINARIA $\tau(A')\lvert A\rvert>0$
	$\det(A)=0$	$x^2+y^2=0$	RETTE COMPLESSE CONIUGATE INCIDENTI
$\det(A')=0$	$\det(A)\neq 0$	$x^2=y$	PARABOLA
	$\det(A)=0$	$x^2=1$	RETTE REALI PARALLELE SE $\rho(A)=2$
		$x^2=0$	RETTA DOPPIA SE $\rho(A)=1$
		$x^2+1=0$	RETTE CONIUGATE PARALLELE SE $\rho(A)=2$

ELLISSE - CIRCONFERENZA

L'ELLISSE È UNA CURVA PIANA DI EQUAZIONE (IN FORMA CANONICA $\alpha x^2+\beta y^2=\gamma$ CON $\alpha\cdot\beta>0$):

ELLISSE A PUNTI REALI $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ A PUNTI IMMAGINARI $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$



SE IL CENTRO È $C(x_0,y_0)$, L'EQUAZIONE DIVENTA $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$

SE $a=b=R$ L'EQUAZIONE DELL'ELLISSE DIVENTA $x^2+y^2=R^2$ OSSIA UNA CIRCONFERENZA DI CENTRO L'ORIGINE E RAGGIO R.

CONICHE DEGENERI

$\rho(A)=3$ DEGENERANO IN CONI E CILINDRI

$\rho(A)=2$ DEGENERANO IN PIANI DISTINTI

$\rho(A)=1$ DEGENERANO IN 2 PIANI INCIDENTI

UN'EQUAZIONE DEL TIPO $f_2(x,y,z)=0$, DOVE f_2 È UN POLINOMIO DI 2° GRADO A COEFFICIENTI REALI, DEFINISCE UNA QUADRICA.

L'EQUAZIONE GENERALE SI SCRIVE:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{14}x+a_{22}y^2+2a_{23}yz+2a_{24}y+a_{33}z^2+2a_{34}z+a_{44}=0$$

SCEGLIENDO UN OPPORTUNO SISTEMA DI COORDINATE CARTESIANE, L'EQUAZIONE DI UNA QUADRICA SI PUÒ RISCRIVERE IN UNA DELLE SEGUENTI FORME:

1) $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=\delta$ 2) $\alpha x^2+\beta y^2=2\delta z$

UNA QUADRICA LA CUI EQUAZIONE SIA COSÌ SCRITTA SI DICE IN FORMA CANONICA; INOLTRE SE I COEFFICIENTI SONO TUTTI NON NULLI SI DICE NON DEGENERE.

ELLISSOIDE

ELLISSOIDE A PUNTI REALI

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

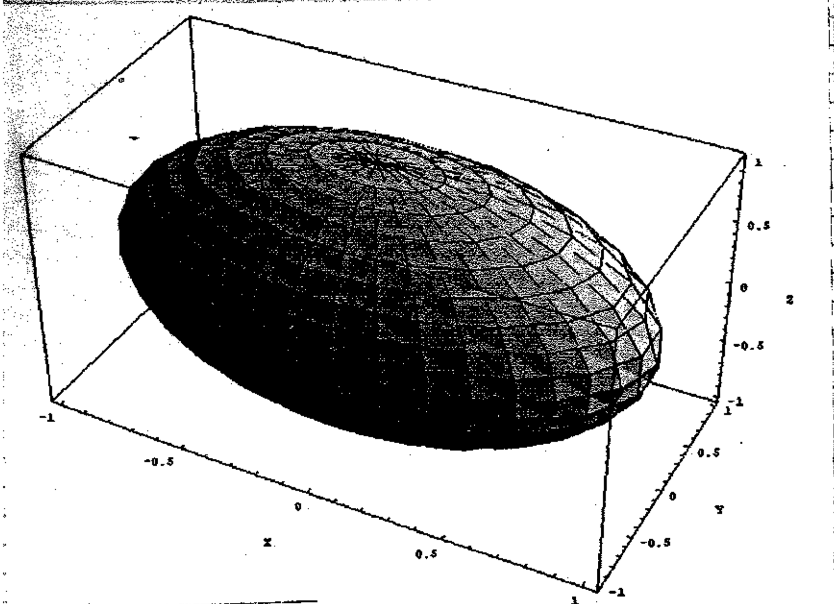
SE $a=b=c=R$ L'ELLISSOIDE È UNA SFERA DI RAGGIO R

ELLISSOIDE A PUNTI IMMAGINARI

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

ELLISSOIDE A PUNTI REALI O IMMAGINARI DI CENTRO $C(x_0,y_0,z_0)$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm 1$$



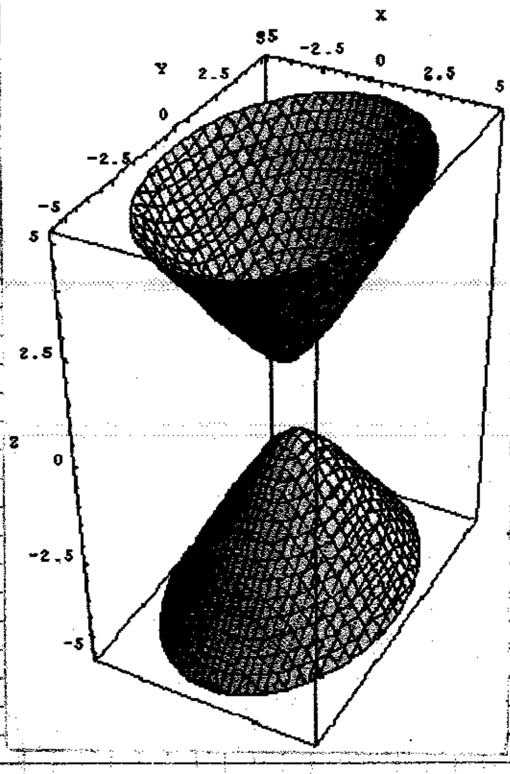
SE FACCIO UN'INTERSEZIONE CON UN PIANO TROVO SEMPRE UN'ELLISSE.

IPERBOLOIDE A 2 FALDE

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

SE IL CENTRO È $C(x_0, y_0, z_0)$

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

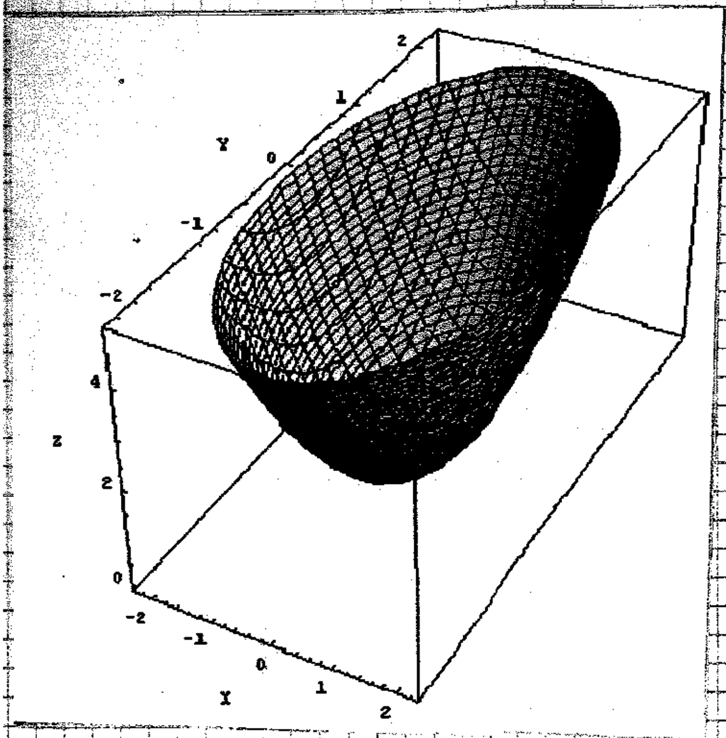


PARABOLOIDE ELLITTICO

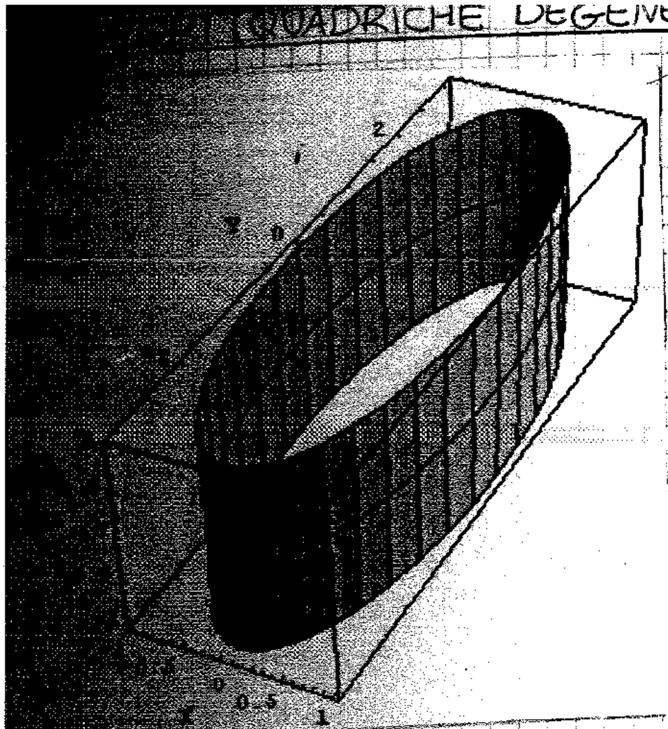
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

SE IL CENTRO È $C(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 2p \cdot (z-z_0)$$

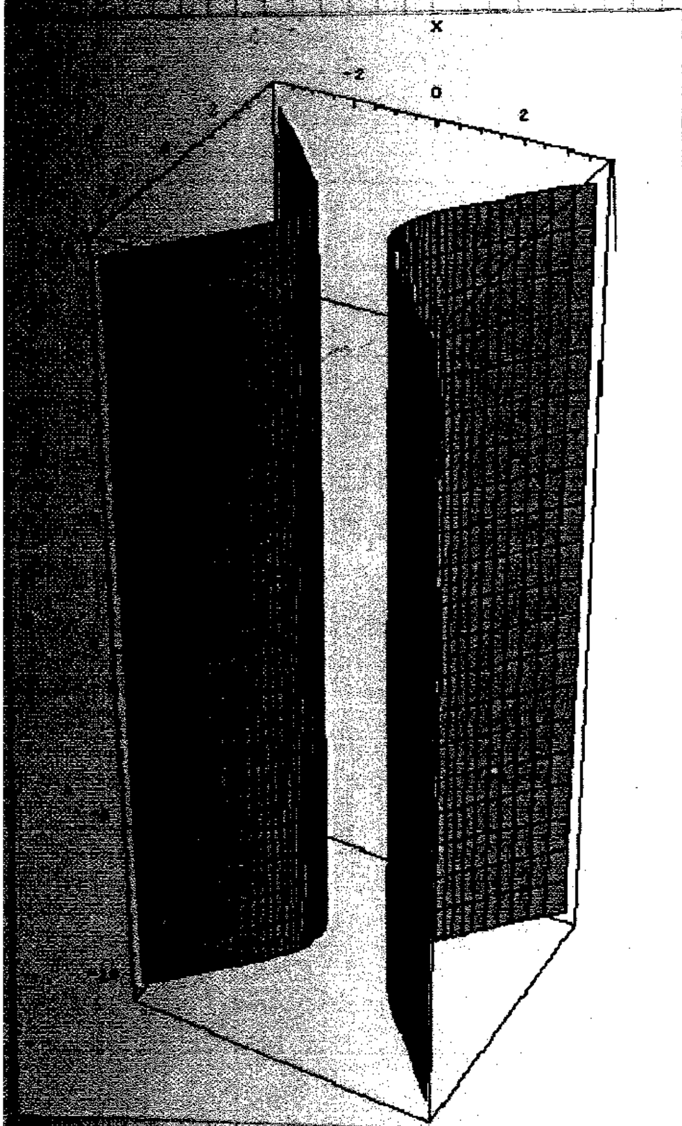


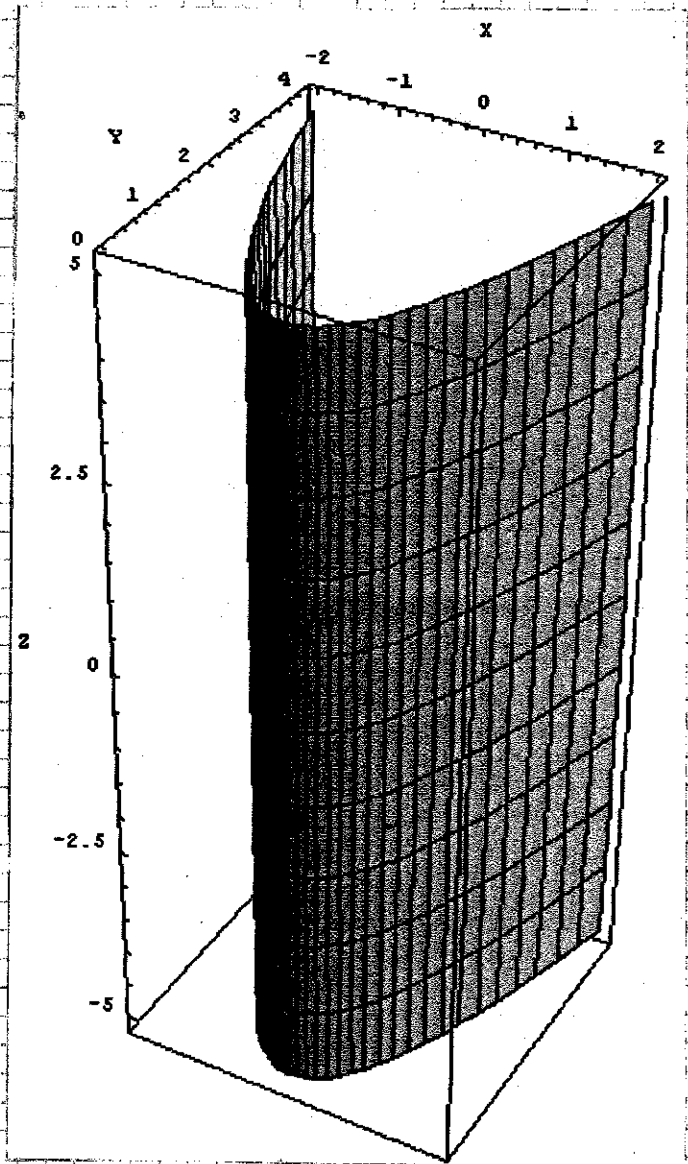
QUADRICHE DEGENERI IRRIDUCIBILI



CILINDRO ELLITTICO

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$





...INDRO IPERBOLICO

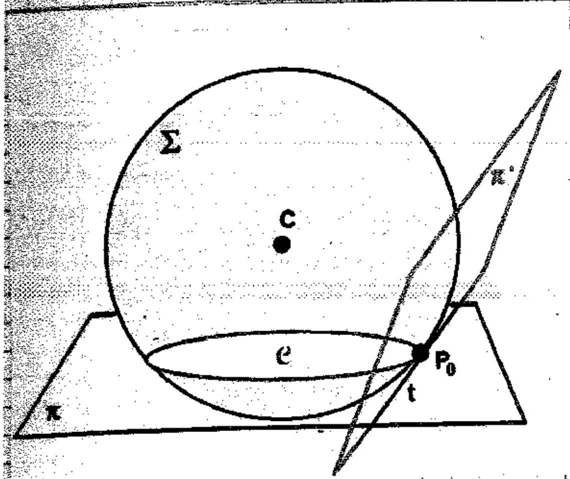
$$\frac{y^2}{b^2} = 1$$

CILINDRO PARABOLICA

$$ax^2 - y = 0$$

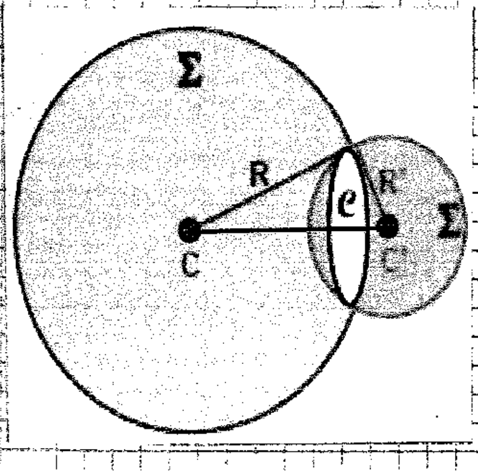
SONO SUPERFICI RIGATE

LA RETTA t TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$ IN UN SUO PUNTO P_0 È L'INTERSEZIONE DEL PIANO π CON IL PIANO π' TANGENTE A Σ IN P_0



FASCI DI SFERE

SIANO $\Sigma: f(x,y,z)=0$ E $\Sigma': g(x,y,z)=0$ DUE SFERE DI CENTRI C E C' E RAGGI R ED R'.
SE LA DISTANZA TRA C E C' È MINORE DI $R+R'$, LE DUE SFERE SI INTERSECANO LUNGO UNA CIRCONFERENZA (A PUNTI REALI)
$\mathcal{C} = \Sigma \cap \Sigma'$, CHE GIACE SUL PIANO $\pi: p(x,y,z)=0$
SI DICE FASCIO DI SFERE $\Phi_{\mathcal{C}}$ SU $\mathcal{C}$ L'INSIEME DI TUTTE LE SFERE (EVENTUALMENTE CON RAGGIO NON REALE) PASSANTI PER $\mathcal{C}$.
UNA QUALUNQUE COMBINAZIONE LINEARE DELL'EQUAZIONE DI DUE SFERE DI $\Phi_{\mathcal{C}}$ È ANCORA L'EQUAZIONE DI UNA SFERA DI $\Phi_{\mathcal{C}}$.
DUNQUE, AL VARIARE DI $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ L'EQUAZIONE $\Phi_{\mathcal{C}}: \lambda f + \mu g = 0$ FORNISCE TUTTE LE SFERE DEL FASCIO.
COME CASO PARTICOLARE, SE $\lambda = -\mu$ LA SFERA DIVENTA IL PIANO π, CHE SI DICE PIANO RADICALE DEL FASCIO.
L'EQUAZIONE DEL FASCIO SI PUÒ OTTENERE COMBINANDO LINEARMENTE UNA QUALUNQUE SFERA DEL FASCIO CON IL PIANO RADICALE $\Phi_{\mathcal{C}}: \lambda f + \mu p = 0$ OPPURE, IN FORMA NON OMOGENEA (IN CUI NON SI RITROVA IL PIANO RADICALE) $\Phi_{\mathcal{C}} \setminus \{\pi\}: f + kp = 0$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 137

SUPERFICI DI ROTAZIONE INTORNO AGLI ASSI COORDINATI

SIA $C: f(x,z) = y = 0$ UNA CURVA CHE GIACE NEL PIANO $(0,x,z)$.

L'EQUAZIONE DELLA SUPERFICIE S CHE SI OTTIENE RUOTANDO C INTORNO ALL'ASSE z SI TROVA SOSTITUENDO x CON $\sqrt{x^2+y^2}$ $S_z: f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$

RUOTANDO C INTORNO ALL'ASSE x SI TROVA SOSTITUENDO z CON $\sqrt{y^2+z^2}$

$S_x = f(x, \sqrt{y^2+z^2}) = 0$

SE $C: f(y,z) = x = 0$ GIACE NEL PIANO $(0,y,z)$: $S_z = f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$ $S_y = f(y, \sqrt{x^2+z^2}) = 0$

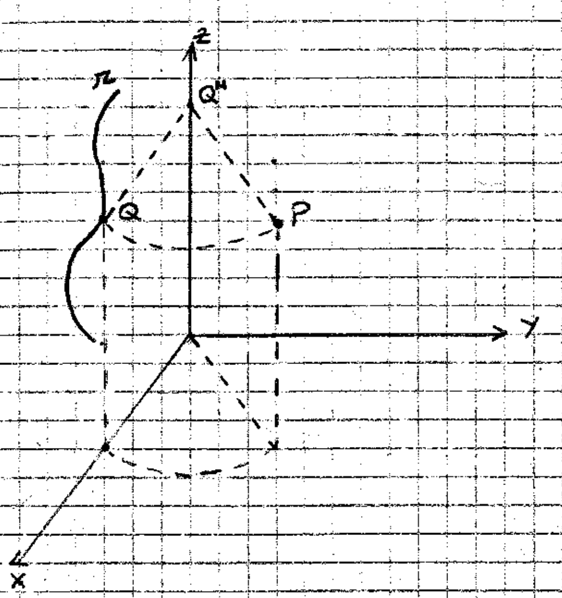
S_z: SUPERFICIE DI ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE z

S_y: SUPERFICIE DI ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE y

SE $C: f(x,y) = z = 0$ GIACE NEL PIANO $(0,x,y)$:

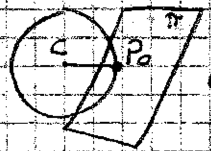
$S_y = f(\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0$ → SUPERFICIE DI ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE y

$S_x = f(x, \sqrt{y^2+z^2}) = 0$ → SUPERFICIE DI ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE x



ESEMPIO (INTERSEZIONE RETTA-SFERA)

$x^2+y^2+z^2-2x-4z=0$ $C=(1,0,2)$ $R=\sqrt{5}$



$\pi_{tg} \perp \vec{CP_0}$

$\vec{CP_0} = \vec{CO} = (1,0,2)$

$\pi_{tg}: 1\cdot(x-0)+2\cdot(z-0) = x+2z=0$

$P_0 \neq 0$ $P_0 \in S$ SE $P_0(0,0,0)$ $C(1,0,2)$

$\vec{CP_0} = (1,0,-2)$ SE $P_0 = (2,0,0)$

$\alpha: 1\cdot(x-2)+0\cdot(y-0)-2\cdot(z-0)=0$

$\alpha = x-2z-2=0$

DISTANZA PUNTO-RETTA $d = R = \text{VERS}\,\vec{\pi} \wedge \vec{P_0R}$

$f(x,y)=0$ IN $\mathbb{R}^2$ È UNA CURVA C $\quad x^2+y^2-1=0 \quad \mathbb{R}^2$

$f(x,y)=0$ IN $\mathbb{R}^3$ È UN CILINDRO SU C // ASSE z

$f(x,y,z)=0$ SUPERFICIE S IN $\mathbb{R}^3$

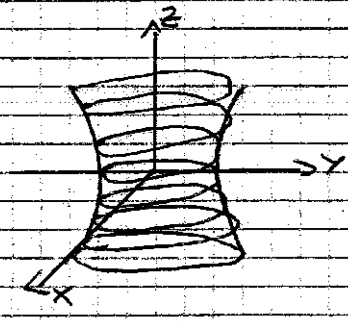
S DI ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE z.

x,y SONO LEGATE SOLO DA $\sqrt{x^2+y^2}$

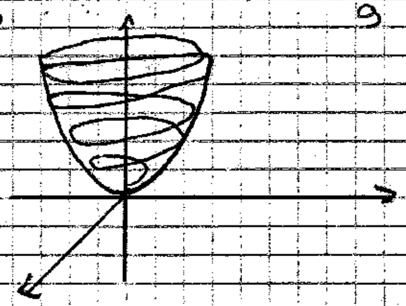
ESEMPI DI ROTAZIONE

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=y \qquad \begin{cases} \frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$$

$f(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$



$$C=\begin{cases} -\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases} \qquad 4z=\frac{x^2+y^2}{9} \qquad a=b \qquad C=\begin{cases} 4z=\frac{y^2}{9} \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=\frac{16}{36} \end{cases}$$

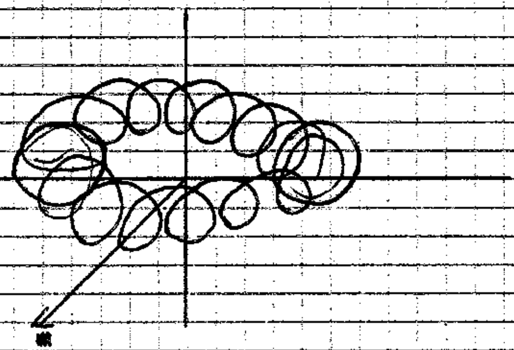


$$(x^2+y^2+z^2+a)^2=4b^2(x^2+y^2)$$

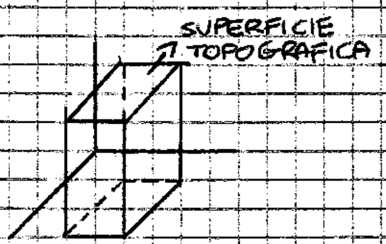
$$\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow y \qquad (y^2+z^2+a^2)^2=4b^2y^2$$

$$y^2+z^2+a=\pm 2by \qquad \begin{cases} y^2-2by+z^2+a=0 \\ x=0 \quad (b,0) \end{cases}$$

$$b^2>a \quad a>0 \quad R=\sqrt{b^2-a}<b$$



$f(x,y,z) \quad z=f(x,y)$



TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ SPAZIO CON LA METRICA EUCLIDEA

INTORNO DI CENTRO P_0 E RAGGIO r:

$I_r(P_0) := \{P \in \mathbb{R}^n : d(P, P_0) < r\}$

INTORNO FORATO DI CENTRO P_0 E RAGGIO r

$I_r^*(P_0) := I_r(P_0) \setminus \{P_0\}$

INTORNO DEL "PUNTO ALL'INFINITO" DI "RAGGIO" r

$I_r(\infty) := \{P \in \mathbb{R}^n : d(P, O) > r\}$

DATI $A \subseteq \mathbb{R}^n$ E $P_0 \in \mathbb{R}^n$

- P_0 PUNTO INTERNO AD A SE $\exists$ UN INTORNO DI P_0 TUTTO CONTENUTO IN A
- P_0 PUNTO ESTERNO AD A SE $\exists$ UN INTORNO DI P_0 TUTTO CONTENUTO IN $\mathbb{R}^n \setminus A$
- P_0 PUNTO DI FRONTIERA DI A SE $\forall$ INTORNO DI P_0 INTERSECA SIA A CHE $\mathbb{R}^n \setminus A$
- P_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A SE $\forall$ INTORNO DI P_0 INTERSECA A IN PUNTI DIVERSI DA P_0
- P_0 PUNTO ISOLATO DI A SE $\exists$ UN INTORNO DI P_0 CHE INTERSECA A SOLO IN P_0.

SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}^n$

DATO $A \subseteq \mathbb{R}^n$

- INTERNO DI A $\quad \mathrm{Int}(A) := \{P \in \mathbb{R}^n : P \text{ È INTERNO AD } A\} = \mathring{A}$
- ESTERNO DI A $\quad \mathrm{Ext}(A) := \{P \in \mathbb{R}^n : P \text{ È ESTERNO AD } A\} = \mathrm{Int}(\mathbb{R}^n / A)$
- FRONTIERA DI A $\quad \partial A := \{P \in \mathbb{R}^n : P \text{ È UN PUNTO DI FRONTIERA DI } A\}$
- CHIUSURA DI A $\quad \bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A \; (\Rightarrow \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A})$
- A APERTO SE TUTTI I SUOI PUNTI SONO INTERNI AD A $(\Leftrightarrow A = \mathring{A} \Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset)$
- A CHIUSO SE UN INTORNO DI CENTRO O CHE LO CONTIENE INTERAMENTE
- A COMPATTO SE A È CHIUSO E LIMITATO
- A CONVESSO SE $\forall P_1, P_2 \in A$, IL SEGMENTO P_1P_2 È TUTTO CONTENUTO IN A
- A CONNESSO (PER ARCHI) SE $\forall P_1, P_2 \in A$, ESISTE UN ARCO DI CURVA CONGIUNGENTE P_1 CON P_2 TUTTO CONTENUTO IN A
- R REGIONE DI $\mathbb{R}^n$ È UN SOTTOINSIEME NON VUOTO DI $\mathbb{R}^n$ IL CUI INTERNO È CONNESSO (È LA GENERALIZZAZIONE AD $\mathbb{R}^n$ DEL CONCETTO DI INTERVALLO).

LIMITI FINITI DI $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

DEFINIZIONE → $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, P_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI D

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \lambda$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: P \in I_\delta^*(P_0) \cap D \Rightarrow f(P) \in I_\varepsilon(\lambda)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: P \in D \wedge 0 < \|P - P_0\| < \delta \Rightarrow |f(P) - \lambda| < \varepsilon$

PROPRIETÀ: SE $P_0 \in D$, f È CONTINUA IN $P_0 \Leftrightarrow \lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$

DEFINIZIONE → $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D ILLIMITATO

$$\lim_{P \to \infty} f(P) = \lambda$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0: P \in I_r(\infty) \cap D \Rightarrow f(P) \in I_\varepsilon(\lambda)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0: P \in D \wedge \|P - O\| > r \Rightarrow |f(P) - \lambda| < \varepsilon$

LIMITI INFINITI DI $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

DEFINIZIONE → $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, P_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI D

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = +\infty$$

$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0: P \in D \wedge 0 < \|P - P_0\| < \delta \Rightarrow f(P) > M$

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = -\infty$$

$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0: P \in D \wedge 0 < \|P - P_0\| < \delta \Rightarrow f(P) < -M$

DEFINIZIONE → $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D ILLIMITATO

$$\lim_{P \to \infty} f(P) = +\infty$$

$\forall M > 0 \ \exists r > 0: P \in D \wedge \|P - O\| > r \Rightarrow f(P) > M$

$$\lim_{P \to \infty} f(P) = -\infty$$

$\forall M > 0 \ \exists r > 0: P \in D \wedge \|P - O\| > r \Rightarrow f(P) < -M$

TEOREMI SUI LIMITI (PER FUNZIONI $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

- TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE
- LIMITE DELLA SOMMA, DEL PRODOTTO, DEL QUOZIENTE
- LIMITE DI FUNZIONI COMPOSTE (SOSTITUZIONE NEL CALCOLO DEI LIMITI, SCAMBIO TRA LIMITE E FUNZIONE ESTERNA, SE CONTINUA).
- TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO
- TEOREMI DEL CONFRONTO.

LIMITI DI FUNZIONI OMOGENEE

DEFINIZIONE → $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ È OMOGENEA DI GRADO K SE $f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^K f(x_1, x_2, x_n)$

PROPRIETÀ:

SE $f(x,y)$ È OMOGENEA DI GRADO K, PASSANDO f IN COORDINATE POLARI SI HA:

$f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = \rho^K f(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$

PROPRIETÀ:

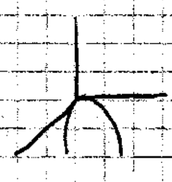
SE $f(x,y)$ È OMOGENEA DI GRADO 0 (E QUINDI $f(x,y) = \phi(y/x)$), NON ESISTE $\lim_{P\to 0} f(x,y)$

SE $f(x,y)$ È OMOGENEA DI GRADO $K>0$ $\lim_{P\to 0} f(x,y) = 0$

SE $f(x,y)$ È OMOGENEA DI GRADO $K<0$ f NON È LIMITATA NELL'INTORNO DI 0

(SE ESISTE $\lim_{P\to 0} f(x,y) = \pm\infty$)

$\lim_{P\to 0}(1-x^2-y^2) = 1$ $P\to 0 \Rightarrow (x,y)\to 0$ $z = -x^2-y^2 \to$



$z = 1-x^2-y^2$

SUPERFICIE DI ROTAZIONE

ASSE z $\begin{cases} z = 1-y \\ x = 0 \end{cases}$

CURVE PIANE (Oxy)

$y = f(x)$ $f(x,y) = 0$

y - RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA $\gamma = \begin{cases} x = f(t) & t \in I \subseteq \mathbb{R} \\ y = g(t) & g, f \in C^{(1)}(I) \end{cases}$

$\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (f(t), g(t))$

$f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

$\lim_{P\to 0} f(x,y) < \begin{matrix} \lim_{P\to 0} f_{/x} = 0 \\ \lim_{P\to 0} f_{/y=x} \end{matrix}$ $\nexists$ LIMITE

ASSE $x = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ $f_{/x}(t) = \dfrac{2t\cdot 0}{t^2} = 0$

$y = x \cdot \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$ $\lim_{t\to 0} \dfrac{2t^2}{2t^2} = 1$

ESEMPIO

$f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$ $\lim_{P\to 0} f(x,y)$ $y = mx$ $\begin{cases} x = t \\ y = mt \end{cases}$

$\lim_{t\to 0} f_{/t}(t) = \dfrac{mt^2\cdot t}{t^4+m^2t^4} = 0$ $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^4}{t^4+t^4} = \dfrac{1}{2}$ $\nexists$ LIMITE

$\lim_{\rho \to 0} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$ SE $\exists$ $\quad x=\rho\cos\theta \quad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\left|\frac{\rho^3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2} - 0\right| = \rho\cdot\left|\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right| \le \rho$

$\lim_{\rho\to 0} \rho = 0$

$\lim_{(x,y)\to(1,1)} = \frac{(y-1)^4}{x^2+y^2+2(1-x-y)} = 0$ (SE $\exists$) $\quad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta+1 \quad x=\rho\cos\theta+1$

$r: y=1 \quad f/_r = 0$

$x^2+y^2-2(1-x-y) = (1+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + (1+\rho\cos\theta)^2 + 2(\cancel{1}-\rho\cos\theta-\cancel{1}-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta-1) =$

$\cancel{1}+\rho^2\cos^2\theta+\cancel{2\rho\cos\theta}+\cancel{1}+\rho^2\mathrm{sen}^2\theta+\cancel{2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}-\cancel{2\rho\cos\theta}-\cancel{2}-\cancel{2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta} =$

$= \rho^2\cos^2\theta+\rho^2\mathrm{sen}^2\theta = \rho^2\cdot(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta) = \rho^2$

$\frac{\rho^{\cancel{4}\,2}\,\mathrm{sen}^4\theta}{\cancel{\rho^2}} = \rho^2\cdot|\mathrm{sen}^4\theta| \le \rho^2 \quad \lim_{\rho\to 0}\rho^2 = 0$

$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x+\bar{y})\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f/_r\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(\bar{x}+y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f/_s\right)$

OMOGENEA DI GRADO u

$f(x,y) = \frac{P_k(x,y)\ \text{OMOGENEO DI GRADO } K}{Q_h(x,y)\ \text{OMOGENEO DI GRADO } h}$ } OMOGENEA DI GRADO $K-h$

$\lim_{\rho\to 0} f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{SE } u>0 \\ \nexists & \text{SE } u=0 \\ f \text{ NON È LIMITATA IN } I(0) & \text{SE } u<0 \end{cases}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} = 0$

DERIVATE DIREZIONALI DI $f: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$f: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad P_0=(x_0,y_0)\in D \quad v=(\alpha,\beta)$ VERSORE

DEFINIZIONE → SI DICE DERIVATA DIREZIONALE DI f IN P_0 LUNGO LA DIREZIONE DI v IL LIMITE (SE ESISTE FINITO): $\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+\alpha t, y_0+\beta t)-f(x_0,y_0)}{t}$

DEFINIZIONE → DERIVATE PARZIALI RISPETTO AD X E AY SONO LE DERIVATE DI f LUNGO LA DIREZIONE DEI VERSORI $i=(1,0)$ E $j=(0,1)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial i}\right)(P_0) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial j}\right)(P_0)$

DERIVATA PARZIALE RISPETTO A X DI $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad P_0 = (x_0, y_0)$ INTERNO A D

PROPRIETÀ:

LA DERIVATA PARZIALE RISPETTO AD X IN P_0 È LA DERIVATA (CALCOLATA IN x_0) DELLA FUNZIONE (DELLA SOLA VARIABILE X) $f(x, y_0)$ CHE SI OTTIENE FISSANDO $y = y_0$.

$$f_x(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(P_0) = \left(\frac{d f(x, y_0)}{dx}\right)(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

DERIVATA PARZIALE RISPETTO A Y DI $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

PROPRIETÀ:

LA DERIVATA PARZIALE RISPETTO AD Y DI f IN P_0 È LA DERIVATA (CALCOLATA IN y_0) DELLA FUNZIONE (DELLA SOLA VARIABILE Y) $f(x_0, y)$ CHE SI OTTIENE FISSANDO $x = x_0$

$$(f_y)(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(P_0) = \left(\frac{d f(x_0, y)}{dy}\right)(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

ESEMPIO

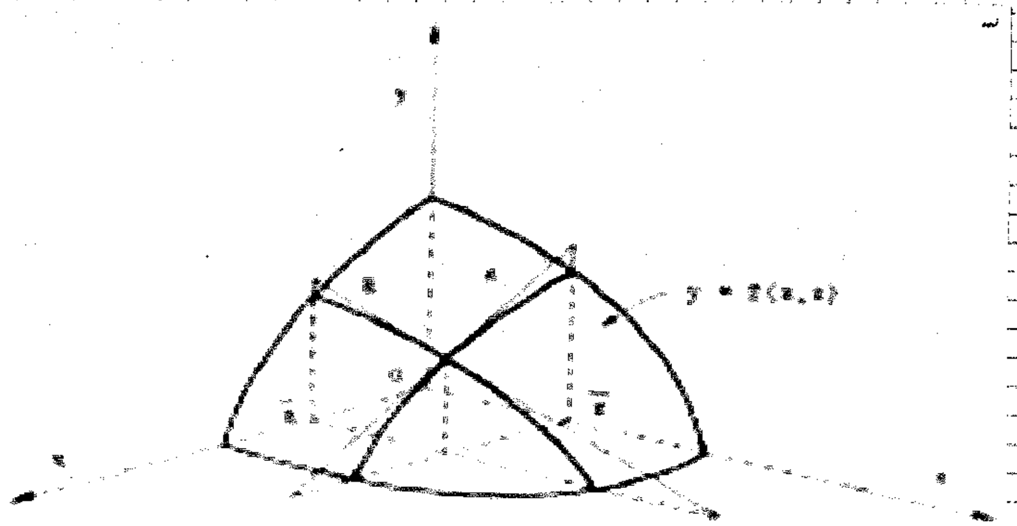
$f(x, y) = x e^{xy}$ $\quad P_0(2, 0)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(2+t, 0) - f(2, 0)}{t} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x, 0) - f(2, 0)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(2, t) - f(2, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2e^{2t} - 2e^{2 \cdot 0}}{t} = \frac{2 \cdot (e^{2t} - 1)}{t} \cdot \frac{2}{2} = 4$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLE DERIVATE PARZIALI DI $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

- $(f_x)(P_0)$ È LA TANGENTE TRIGONOMETRICA DELL'ANGOLO CHE FORMA CON IL PIANO (O, x, y) LA RETTA t_1 TANGENTE ALLA CURVA γ_1 INTERSEZIONE DI GRAF(f) CON IL PIANO π_1 PASSANTE PER P_0 ORTOGONALE ALL'ASSE Y
- $(f_y)(P_0)$ È LA TANGENTE TRIGONOMETRICA DELL'ANGOLO CHE FORMA CON IL PIANO (O, x, y) LA RETTA t_2 TANGENTE ALLA CURVA γ_2 INTERSEZIONE DI GRAF(f) CON IL PIANO π_2 PASSANTE PER P_0 ORTOGONALE ALL'ASSE X



[Dati] $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ P_0 INTERNO A D

[DEF]INIZIONE → f È DIFFERENZIABILE IN P_0 SE ESISTE UN INTORNO I DI P_0 TALE CHE $\forall P \in I$

$f(P) - f(P_0) = (\nabla f)(P_0) \cdot (P - P_0) + \sigma(\|P - P_0\|)$ *

[CIO]È SE

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0) - (\nabla f)(P_0) \cdot (P - P_0)}{\|P - P_0\|} = 0$$

[D]IFFERENZIABILITÀ PER $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

[D]ATI $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ P_0 INTERNO A D

[DE]FINIZIONE → f È DIFFERENZIABILE IN P_0 SE ESISTE UN INTORNO I DI P_0 TALE CHE $\forall P \in I$

$f(x,y) - f(x_0, y_0) = (f_x)(P_0) \cdot (x - x_0) + (f_y)(P_0)(y - y_0) + \sigma\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$

[CI]OÈ SE

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - (f_x)(P_0)(x-x_0) - (f_y)(P_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

[O]SSERVAZIONE: LA ** È LA I° F.I.F (PER FUNZIONI DI 2 VARIABILI)

[D]IFFERENZIALE COME APPLICAZIONE LINEARE

DATI $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ E P_0 INTERNO A D, SI CONSIDERI LA FUNZIONE $d_{P_0} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DEFINITA DA:

$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad (d_{P_0} f)(v) := (\nabla f)(P_0) \cdot v$

SI PROVA FACILMENTE CHE TALE FUNZIONE È LINEARE.

DEFINIZIONE → SI DICE DIFFERENZIALE DI f IN P_0 L'APPLICAZIONE LINEARE $d_{P_0} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

DEFINITA DA $(d_{P_0} f)(v) := (\nabla f)(P_0) \cdot v$

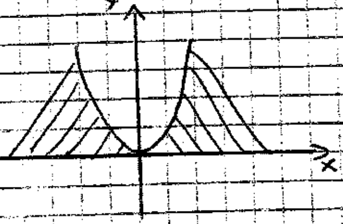
OSSERVAZIONE: LA MATRICE ASSOCIATA ALL'APPLICAZIONE LINEARE MEDIANTE LE BASI CANONICHE È

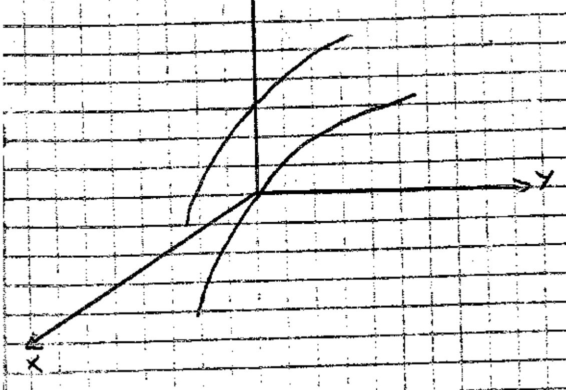
LA MATRICE RIGA CHE CONTIENE LE COMPONENTI DEL VETTORE $(\nabla f)(P_0)$

LA * SI PUÒ SCRIVERE $f(P) - f(P_0) = (d_{P_0} f)(P - P_0) + \sigma(\|P - P_0\|)$

ESERCIZIO

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{SE } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases} \qquad P_0(0,0)$$





f NON È CONTINUA IN $(0,0)$ O

$\lim f(x,y)$ — LUNGO r: $y = mx$; LUNGO γ: $y = \frac{1}{2}x^2$

$f_{/r} = 0 \ \forall r \qquad \lim_{P \to O} f_{/r} = 0$

$f_{/\gamma} = 1 \qquad \lim_{P \to O} f_{/\gamma} = 1$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL GRADIENTE

PROPRIETÀ: IL GRADIENTE È ORTOGONALE ALLA LINEA DI LIVELLO $c=f(P_0)$

DIMOSTRAZIONE: DAL TEOREMA DEL GRADIENTE, ABBIAMO CHE, SE f È DIFFERENZIABILE IN P_0

SIA θ L'ANGOLO TRA $\nabla f(P_0)$ E IL VERSORE v

$\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = \nabla f(P_0)\cdot v = \|\nabla f(P_0)\|\cos\theta$

QUINDI SE $(\nabla f)(P_0) \neq 0$:

$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad -\|(\nabla f)(P_0)\| \leq \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(P_0) \leq \|(\nabla f)(P_0)\|$

$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(P_0)$ RISULTA MASSIMA ($\Rightarrow$ CRESCITA DI f È MASSIMA) SECONDO LA DIREZIONE E IL VERSO DEL GRADIENTE, CIOÈ SE $v = \frac{(\nabla f)(P_0)}{\|(\nabla f)(P_0)\|}$

$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(P_0)$ RISULTA MINIMA ($\Rightarrow$ CRESCITA DI f È MINIMA) NELLA DIREZIONE DEL GRADIENTE MA NEL VERSO OPPOSTO, CIOÈ SE $v = -\frac{(\nabla f)(P_0)}{\|(\nabla f)(P_0)\|}$

LA DERIVATA DIREZIONALE È NULLA NELLA DIREZIONE ORTOGONALE AL GRADIENTE ($\Rightarrow$ f RESTA STAZIONARIA MUOVENDOSI LUNGO LA LINEA DI LIVELLO PER P_0), CIOÈ SE v È UN VERSORE ORTOGONALE A $(\nabla f)(P_0)$.

RELAZIONI TRA DIFFERENZIABILITÀ, DERIVABILITÀ, CONTINUITÀ, GRADIENTE E PIANO TANGENTE

- $f \in C^{(1)}(P_0) \Rightarrow f$ DIFFERENZIABILE IN $P_0 \Rightarrow f \in C^{(0)}(P_0)$
- f DIFFERENZIABILE IN $P_0 \Rightarrow f$ DERIVABILE IN P_0
- f DIFFERENZIABILE IN $P_0 \Rightarrow \exists$ PIANO TANGENTE
- f DIFFERENZIABILE IN $P_0 \Rightarrow$ VALE IL TEOREMA DEL GRADIENTE

OSSERVAZIONI:

- SI USANO LE CONTRONOMINALI
- NON VALGONO, IN GENERALE, LE IMPLICAZIONI INVERSE.

ESEMPIO

f (DERIVABILE IN P_0) È DIFFERENZIABILE IN P_0 SE $f(P)-f(P_0) = \vec{\nabla}_{P_0} f \cdot (P-P_0) + o(\|P-P_0\|)_{P\to P_0}$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \quad g(v) = \vec{\nabla}_{P_0} f \cdot \vec{v}$ DATA f DIFFERENZIABILE IN P_0.

g LINEARE SE:

I) $g(v+w) = \vec{\nabla}_{P_0} f \cdot (\vec{v}+\vec{w}) = \nabla_{P_0} f \cdot \vec{v} + \vec{\nabla}_{P_0} f \cdot \vec{w} = g(v) + g(w)$

II) $\forall a \in \mathbb{R} \quad g(a\cdot v) = \nabla f \cdot (a v) = a \cdot (\nabla f \cdot \vec{v}) = a \cdot g(v)$

$g = d_{P_0} f$ DIFFERENZIALE DI f IN P_0

...ATE DI ORDINE SUPERIORE

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left< \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx} \end{array} \right. \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \left< \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx} \end{array} \right.$$

...PIO

...$x^2y + \operatorname{sen}(x+y)$

...$2xy + \cos(x+y)$ $\quad f_y = x^2 + \cos(x+y) \quad f_{xy} = f_{yx}$

...$2x - \operatorname{sen}(x+y)$ $\quad f_{yx} = 2x - \operatorname{sen}(x+y)$

...RIVATE PARZIALI SECONDE

...FINIZIONE → SIA $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, P_0 INTERNO A D. SE f È DERIVABILE RISPETTO A x_i ... INTORNO DI P_0 E SE LA FUNZIONE f_{x_i} È DERIVABILE RISPETTO A x_j IN P_0, SI DEFINISCE ...RIVATA PARZIALE SECONDA RISPETTO A x_i E x_j IN P_0

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(P_0) = f_{ji}(P_0) = f_{x_j x_i}(P_0)$$

...EOREMA DI SCHWARZ

SE LE DERIVATE MISTE f_{ij} E f_{ji} ESISTONO IN UN INTORNO DI P_0 E SONO CONTINUE IN P_0, ALLORA COINCIDONO IN P_0.

MATRICE HESSIANA

DEFINIZIONE → SIA $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, P_0 INTERNO A D; SE f POSSIEDE TUTTE LE DERIVATE SECONDE IN P_0, SI DEFINISCE MATRICE HESSIANA DI f IN P_0 LA MATRICE $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ PER CUI $h_{ij} = f_{ji}$

$$Hf(P_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(P_0) & f_{x_2x_1}(P_0) & \cdots & f_{x_nx_1}(P_0) \\ f_{x_1x_2}(P_0) & f_{x_2x_2}(P_0) & \cdots & f_{x_nx_2}(P_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_1x_n}(P_0) & f_{x_2x_n}(P_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(P_0) \end{pmatrix}$$

SE $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$Hf(P_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{yx}(P_0) \\ f_{xy}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ:

SE TUTTE LE DERIVATE SECONDE MISTE DI f ESISTONO IN UN INTORNO DI P_0 E SONO CONTINUE IN P_0, LA MATRICE HESSIANA DI f IN P_0 È SIMMETRICA

FORMULA DI TAYLOR AL 1° ORDINE

TEOREMA

SE f È DIFFERENZIABILE IN P_0 ESISTE UN INTORNO I DI P_0 TALE CHE $\forall P \in I$

$$f(P) = f(P_0) + (\nabla f)(P_0) \cdot (P - P_0) + o_{P \to P_0}(\|P - P_0\|)$$

FORMULA DI TAYLOR DI 1° ORDINE

$$f(P) = f(P_0) + (d_{P_0} f)(P - P_0) + o_{P \to P_0}(\|P - P_0\|)$$

FORMULA DI TAYLOR AL 2° ORDINE

TEOREMA: SIANO $H = Hf(P_0)$ LA MATRICE HESSIANA DI f IN P_0, Q_H LA FORMA QUADRATICA ASSOCIATA AD H. SE ESISTE UN INTORNO I DI P_0 TALE CHE $f \in C^{(2)}(I)$, ALLORA $\forall P \in I$ SI HA:

$$f(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0) + \tfrac{1}{2}(P - P_0) \cdot H^t (P - P_0) + o_{P \to P_0}(\|P - P_0\|^2)$$

OVVERO

$$f(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0) + \tfrac{1}{2} Q_H(P - P_0) + o_{P \to P_0}(\|P - P_0\|^2)$$

FORMULA DI TAYLOR AL 2° ORDINE

RICONOSCIMENTO DEI PUNTI CRITICI PER FUNZIONI DI 2 VARIABILI

TEOREMA - SIANO $f: D\subseteq\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in D$ PUNTO CRITICO DI f, $H = Hf(P_0)$ MATRICE HESSIANA DI f

TESI: ALLORA

$\det H < 0 \Rightarrow P_0$ PUNTO DI SELLA

$\det H > 0 \wedge f_{xx}(P_0) > 0 \Rightarrow P_0$ PUNTO DI MINIMO RELATIVO

$\det H > 0 \wedge f_{xx}(P_0) < 0 \Rightarrow P_0$ PUNTO DI MASSIMO RELATIVO.

$\det H = 0$: NULLA SI PUÒ CONCLUDERE

ESERCIZIO (MATRICE HESSIANA)

$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy + 3y^2$

$f_x = 6x^2 - 6x - 6y \quad O(0,0) \qquad \begin{cases} f_{xx} = 12x - 6 \\ f_{xy} = -6 = f_{yx} \\ f_{yy} = 6 \end{cases} \qquad H_O f = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \quad H_A f = \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$

$f_y = -6x + 6y \quad A(2,2)$

$Q_{H_1}(x,y) = -6x^2 - 12xy + 6y^2$

$Q_{H_2}(x,y) = 18x^2 - 12xy + 6y^2 \qquad Q_{H_2} = (x-2, y-2) = 18\cdot(x-2)^2 - 12\cdot(x-2)(y-2) + 6\cdot(y-2)^2$

$Q_{H_{P_0}f}(x - x_0, y - y_0)$

$\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x - 6y \\ -6y + 6x \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18(x-2) - 6(y-2) \\ -6(x-2) + 6(y-2) \end{pmatrix}$

$(-6x - 6y, -6x + 6y)\cdot(x,y) = -6x^2 - 6xy - 6xy + 6y^2$

IN O

$f(x,y) = 0 + (0,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}(-6x^2 - 12xy + 6y^2) + \underset{(x,y)\to(0,0)}{o(x^2+y^2)}$

$f(x,y) = -3x^2 - 6xy + 3y^2 + \underset{(x,y)\to(0,0)}{o(x^2+y^2)}$

IN A

$f(x,y) = -8 + (0,0)\cdot(x-2, y-2) + \frac{1}{2}(18\cdot(x-2)^2 - 12\cdot(x-2)(y-2) + 6\cdot(y-2)^2) + \underset{(x,y)\to(2,2)}{o((x-2)^2 + (y-2)^2)}$

$S = \text{GRAF } f$

PIANO tg A $S \to$ IN $O(0,0,\ )$ (π_1) $\quad \pi_1: z = 0$

$\qquad\qquad\quad\ \to$ IN $Q(2,2,-8)$ (π_2) $\quad \pi_2: z = -8$

SE f È DIFFERENZIABILE IN P_0 E $\exists$ IL PIANO tg A $S = \text{GRAF} f$ IN $Q_0 = (P_0, f(P_0))$

SE $\vec{\nabla}_{P_0} f = \vec{0} \qquad \pi: z = f(P_0)$

$H_O = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \qquad H_A = \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$

$P_O(t) = (-6-t)(6-t) - 36 \quad t^2 - 72 \begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$ P_0 PUNTO DI SELLA

$P_A(t) = (18-t)\cdot(6-t) - 36$

$P_A(t) = 108 - 6t - 18t + t^2 - 36 = t^2 - 24t + 72 \begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$ PUNTO DI MINIMO RELATIVO.

CURVA IN FORMA PARAMETRICA

CURVA IN FORMA PARAMETRICA È UNA FUNZIONE

$\gamma: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \quad \gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$

$C = \mathrm{Im}(\gamma)$: C È IL SOSTEGNO DELLA CURVA (NEL PIANO SE $m=2$ NELLO SPAZIO SE $m=3$)

ESEMPI:

$\gamma(t) = (2-t, 1+2t, t),\ t \in \mathbb{R}$: $C = \mathrm{Im}(\gamma) \to$ RETTA NELLO SPAZIO

$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ t \in [0, 2\pi]$: $C = \mathrm{Im}(\gamma) \to$ CIRCONFERENZA NEL PIANO

$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t),\ t \in \mathbb{R}$: $C = \mathrm{Im}(\gamma) \to$ ELICA CILINDRICA

SUPERFICIE IN FORMA PARAMETRICA

SUPERFICIE IN FORMA PARAMETRICA È LA FUNZIONE $\sigma(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$

$S = \mathrm{Im}(\sigma)$: S È IL SOSTEGNO DELLA SUPERFICIE DELLO SPAZIO

ESEMPI:

$\sigma(u,v) = (1-u-v, u, v)$: $S = \mathrm{Im}(\sigma)$ È IL PIANO DI EQUAZIONE CARTESIANA $x+y+z-1=0$

$\sigma(u,v) = (R\cos u \operatorname{sen} v, R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, R\cos v)$: $S = \mathrm{Im}(\sigma)$ È LA SUPERFICIE SFERICA DI EQUAZIONE CARTESIANA $x^2+y^2+z^2=R^2$

$\sigma(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$: $S = \mathrm{Im}(\sigma)$ È IL PARABOLOIDE DI EQUAZIONE CARTESIANA $z = x^2+y^2$

IN GENERALE: $\sigma(u,v) = (u, v, f(u,v))$: $S = \mathrm{Im}(\sigma)$ È LA SUPERFICIE TOPOGRAFICA $z = f(x,y)$

CURVE IN FORMA PARAMETRICA

DEFINIZIONE → UNA CURVA IN FORMA PARAMETRICA È UNA FUNZIONE $\gamma: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ CONTINUA SU D, CIOÈ LE FUNZIONI:

$x_i(t): D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SONO CONTINUE SU D, $i = 1, 2, \dots, m$

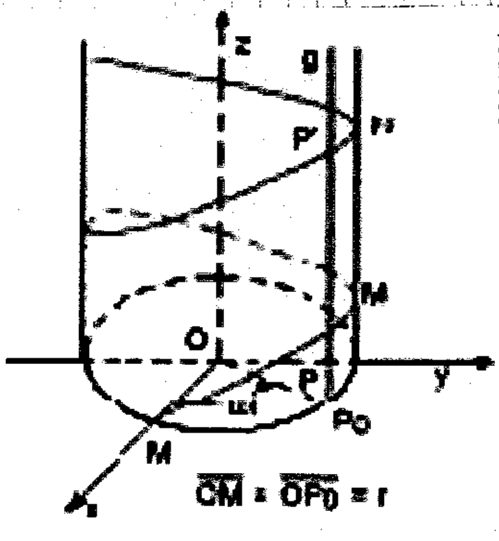
$C = \mathrm{Im}(\gamma)$: C È IL SOSTEGNO DELLA CURVA

ESEMPI:

$\gamma(t) = (2-t, 1+2t, t),\ t \in \mathbb{R}$: $C = \mathrm{Im}(\gamma)$ È UNA RETTA NELLO SPAZIO

$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ t \in [0, 2\pi]$: $C = \mathrm{Im}(\gamma)$ È UNA CIRCONFERENZA NEL PIANO.

$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t),\ t \in \mathbb{R}$: $C = \mathrm{Im}(\gamma)$ È UN'ELICA CILINDRICA

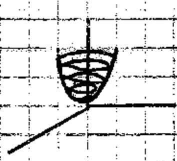


ESEMPIO:

$f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$\gamma(t) = x(t), y(t), z(t)$

$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ γ CURVA IN FORMA PARAMETRICA



$z = x^2 + y^2 \quad g(x,y) = x^2 + y^2$

$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$ $S = GRAF(g) \quad z = g(x,y)$

$S = Im f \quad f(u,v) = (u, v, u^2+v^2) \quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

CURVE REGOLARI - VETTORE TANGENTE

DEFINIZIONE → LA CURVA $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \quad f(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ SI DICE REGOLARE SE f È DERIVABILE CON DERIVATA CONTINUA SU I (CIOÈ SE $x_i(t) \in C^{(1)}(I)$ $i = 1, 2, \dots, n$) E SE $f'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$ (DOVE $f'(t) := (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t))$)

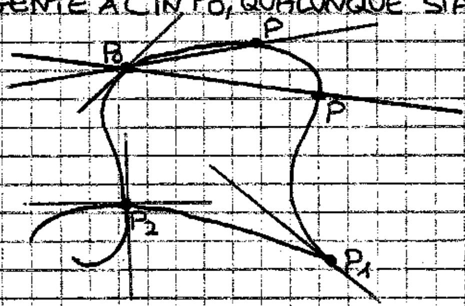
DEFINIZIONE → CURVA DI JORDAN È UNA CURVA CHIUSA, SEMPLICE, REGOLARE.

DEFINIZIONE (GEOMETRICA) → VETTORE TANGENTE A $C = Im(f)$ IN P_0 È (SE ESISTE) IL VETTORE $\lim_{P \to P_0} P - P_0$

SIA $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ UNA CURVA $C = Im(f)$, $t_0 \in I$, $P_0 = \gamma(t_0)$.

PROPRIETÀ:

SE f È REGOLARE, ESISTE IL VETTORE TANGENTE A C IN P_0, QUALUNQUE SIA P_0 ED È IL VETTORE PER P_0 PARALLELO A $\gamma'(t_0)$



CAMBIAMENTI DI PARAMETRO, CURVE CONGRUENTI

È DATA LA CURVA $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

- DEFINIZIONE → CAMBIAMENTO REGOLARE DI PARAMETRO È UNA BIEZIONE $\varphi: J \subseteq \mathbb{R} \to I$ DOVE $\varphi \in C^{(1)}(J)$ E $\varphi'(u) \neq 0 \ \forall u \in J$
- DEFINIZIONE → LA CURVA $\delta = \gamma \circ \varphi$ SI DICE CONGRUENTE ALLA CURVA γ
- OSSERVAZIONE: PER LE IPOTESI SU φ SI DEVE AVERE $\varphi'(u) > 0$ OPPURE $\varphi'(u) < 0 \ \forall u \in J$
- DEFINIZIONE → LA CURVA $\delta = \gamma \circ \varphi$ SI DICE EQUIVALENTE ALLA CURVA γ SE $\varphi'(u) > 0$; SI DICE ANTIEQUIVALENTE ALLA CURVA γ SE $\varphi'(u) < 0$

PROPRIETÀ:

DUE CURVE HANNO LO STESSO SOSTEGNO SE E SOLO SE SONO CONGRUENTI TRA LORO.

GEOMETRIA DELLE MASSE SU CURVE

SIA $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \in [a,b]$ UN ARCO DI CURVA REGOLARE, $(\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$. SE $C = \mathrm{Im}(\gamma)$ HA DENSITÀ LINEARE $\sigma(x_1, \dots, x_n)$, ALLORA

MASSA DI C

$$M = \int_\gamma \sigma(x_1, \dots, x_n)\, d\gamma$$

BARICENTRO

$$x_{iG} = \frac{1}{M} \int_\gamma x_i\, \sigma(x_1, \dots, x_n)\, d\gamma \quad i = 1, 2, \dots, n$$

MOMENTO DI INERZIA RISPETTO A P_0

$$I_{P_0} = \int_\gamma \|P - P_0\|^2 \sigma(x_1, \dots, x_n)\, d\gamma$$

IN PARTICOLARE

MOMENTO DI INERZIA RISPETTO A O

$$I_O = \int_a^b (x_1^2(t) + \dots + x_n^2(t)) \cdot \sigma(x_1(t), \dots, x_n(t)) (x_1'^2(t) + \dots + x_n'^2(t))^{1/2}\, dt$$

ESEMPI VARI

π: $3x - 2y + 5z + 1 = 0$ $\quad z = \frac{1}{5}(2y - 3x - 1)$ $\quad z = 0\ (x, y)$ $\quad g(x,y) = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}$

$$\gamma \begin{cases} x = w \\ y = v \\ z = -\frac{3}{5}w + \frac{2}{5}v - \frac{1}{5} \end{cases}$$

π: $2x - 3y + 5 = 0$ $\quad x = \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}$ $\quad \pi = \mathrm{Im} f$ $\quad f(u,v) = \left(\frac{3}{2}u - \frac{5}{2}, u, v\right)$

$$\pi = \begin{cases} x = \frac{3}{2}u - 5/2 \\ y = u \\ z = v \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases} \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad r = \mathrm{Im} f \text{ RETTA IN } \mathbb{R}^3$$

$$f \begin{cases} x = lu + l'v + x_0 \\ y = mu + m'v + y_0 \\ z = nu + n'v + z_0 \end{cases} \quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \pi = \mathrm{Im} f \text{ PIANO}$$

ESERCIZIO

$f(u,v) = (3u - 2v + 1, u - v, 2u + 5v - 3)$

$$\begin{cases} x = 3u - 2v + 1 \\ y = u - v \\ z = 2u + 5v - 3 \end{cases}$$ PRENDO 2 EQUAZIONI E RICAVO u E v IN FUNZIONE DI y, z

$$\begin{cases} u = y + v \\ z = 2y + 2v + 5v - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = y + v \\ v = \frac{z - 2y - 3}{7} \end{cases}$$

$$x = 3y + \frac{3}{7}z - \frac{6}{7}y + \frac{9}{7} - \frac{2}{7}z + \frac{4}{7}y - \frac{6}{7} + 1$$

$$x = \frac{19}{7}y + \frac{1}{7}z + \frac{10}{7} \Rightarrow 7x - 19y - z - 10 = 0 \quad \text{PIANO}$$

$\underline{u} = (3, 1, 2)$ $\quad \underline{v} = (-2, -1, 5)$ $\quad \underline{u} \wedge \underline{v} = (7, -19, -1)$

$t = \varphi(u) \quad \varphi \in C^{(1)}(J) \quad \varphi'(u) \neq 0 \quad \forall u \in J$

$I \subseteq \mathbb{R} \quad u \subseteq J \subseteq \mathbb{R}$

$\varphi'(u) > 0 \quad \forall u \in I \Rightarrow \delta, \gamma$ EQUIVALENTI

$\varphi'(u) < 0 \quad \forall u \in J \Rightarrow \gamma, \delta$ ANTIEQUIVALENTI

$\delta(u) = \gamma(\varphi(u)) \quad \gamma, \delta$ CONGRUENTI

$$\ell_{\widehat{AB}} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

$\gamma(a) \quad B = \gamma(b)$

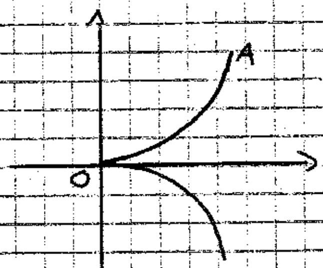
ESERCIZIO

$\gamma(t) = (t^2, t^3) \quad O, A(1,1) \qquad \gamma = \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$

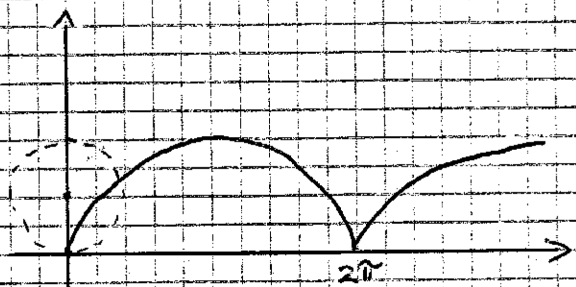
$$\ell_{\widehat{OA}} = \int_{t=0}^{t=1} \sqrt{4t^2 + 9t^4}\, dt = \int_0^1 t\,(4+9t^2)^{1/2} dt = \left[\frac{2}{18 \cdot 3} (4+9t^2)^{3/2} \right]_0^1$$

$$\frac{1}{27}\left(13^{3/2} - 4^{3/2}\right) = \frac{1}{27} \cdot \left(\sqrt{13^3} - \sqrt{4^3}\right)$$

$\begin{cases} x = t^2 \\ y = tx \end{cases} \quad \begin{cases} t = \pm\sqrt{x} \\ t = \frac{y}{x} \end{cases} \qquad y^2 = x^3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^3}$



$\begin{cases} x = R(t - \operatorname{sen} t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases} \leftarrow$ EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA CICLOIDE

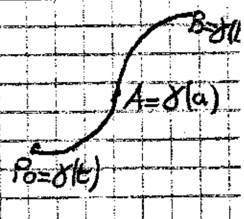


$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(1-\cos t)^2 + R^2\operatorname{sen}^2 t}\, dt = R\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$

$$= R\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = R\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt =$$

$$= R\sqrt{2} \cdot 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt = 2R\sqrt{2}\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8R$$

$\gamma(t)$ = CURVA REGOLARE $\quad t \subseteq I \subseteq \mathbb{R} \quad \gamma'(t) \neq 0, \forall t, \gamma \in C^{(1)}(I)$ FISSO L'ORIGINE



$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du \qquad s'(t) = \frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\| > 0$ È INVERTIBILE

ASCISSA CURVILINEA

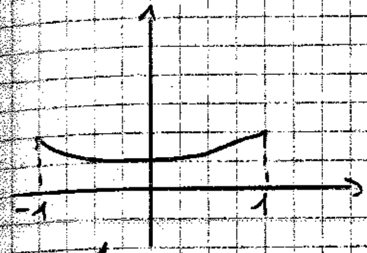
$t = t(s) \quad \gamma(t) \Rightarrow \gamma(t(s)) = \delta(s)$

$\|\delta'(s)\| = 1$ INFATTI $\delta'(s) = \frac{d\delta(s)}{ds} = \frac{d\gamma(t(s))}{ds} = \frac{d\gamma(t)}{dt} \cdot \frac{dt(s)}{dt}$

$\gamma'(t) \cdot \frac{1}{s'(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \qquad \delta'(s)$ È UN VERSORE $\|\delta'(s)\| = 1$

$$\int_{s_a}^{s_b} ds = s_b - s_a$$

BARICENTRO FILO OMOGENEO (DENSITÀ COSTANTE) ARCO CATENARIO DI ESTREMI



$A=((-1, ch(-1))$ $B=(1, ch(1))$ $Y=ch\,x$

$\gamma: \begin{cases} x=t \\ y=ch(t) \end{cases}$ $\gamma': \begin{cases} x=1 \\ y=sh(t) \end{cases}$

$$M=\int_\gamma d\gamma = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+sh^2(t)}\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{ch^2(t)}\, dt = \int_{-1}^{1} ch(t)\, dt = [senh]_{-1}^{1} = senh(1)-senh(-1)=$$

$$= 2senh(1) = e+e^{-1}$$

$$x_G = \frac{1}{e+e^{-1}} \int_{-1}^{1} t\sqrt{1+senh^2(t)}\, dt = t\,senh - \int senh(t)\,dt = t\,senh(t)-cosh(t)$$

$$y_G = \frac{1}{e+e^{-1}} \int ch(t)\cdot\sqrt{1+senh^2(t)}\, dt = \int \frac{(e^t+et)^2}{4}\,dt$$

$$x_G = \frac{1}{e+e^{-1}}\Big[t\,senh(t)-cosh(t)\Big]_{-1}^{1} = 0$$

$$y_G = \frac{1}{e+e^{-1}}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^{-2}}{2}+2-\frac{e^{-2}}{2}+\frac{e^2}{2}-2\right) = \frac{1}{e+e^{-1}}\cdot\frac{1}{4}\left(e^2-e^{-2}\right)=1$$

$\gamma: \begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^2-1 \end{cases}$ CURVA PIANA $\gamma: \begin{cases} y=x^2 & S \\ z=y-x & \pi \end{cases}$

$\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=t \\ z=t^2-t \end{cases}$ γ È PIANA $\Leftrightarrow \exists\, a,b,c,d \,/\, (ax+by+cz+d=0) \supset \gamma$

$\Leftrightarrow a\,x(t)+b\,y(t)+c\,z(t)+d=0 \quad \forall t$

$a(2t-t^2)+b(t)+c(t^2-t)+d=0$ $\begin{cases} -a+c=0 \\ 2a+b-c=0 \\ d=0 \end{cases}$ $\begin{cases} c=a \\ b=-a \\ d=0 \end{cases}$ $x-y+z=0$

$(-a+c)t^2+(2a+b-c)t+d=0$ PIANO CHE CONTIENE LA CURVA

$f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{8}{x}-y$ $D \in \mathbb{R}^2 \{x,y \neq 0\}$

$\vec{\nabla} f = \vec{0}$? $\begin{cases} f_x = \frac{1}{y}-\frac{8}{x^2} \\ f_y = -\frac{x}{y^2}-1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{y}=\frac{8}{x^2} \\ \frac{x}{y^2}=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{y}=\frac{8}{y^4} \\ x=-y^2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2 \\ x=-4 \end{cases}$

$A=(-4,2)$ PUNTO STAZIONARIO

$f_{xx}=-\frac{16}{x^3}$ $f_{xy}=-\frac{1}{y^2}$ $f_{yy}=\frac{2x}{y^3}$

$A\in D$ $\vec{\nabla} f_A=\vec{0}$

$H_A f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$ $|H_A f| = \frac{1}{4}-\frac{1}{16}>0$ A PUNTO DI MASSIMO RELATIVO

$f(1,1)=1+8-1=8>-6$

SUPERFICI REGOLARI

DEFINIZIONE → LA SUPERFICIE PARAMETRICA

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

SI DICE REGOLARE SE:

$$J_P f = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

- f È INIETTIVA
- $f \in C^{(1)}(A)$, PER OGNI APERTO $A \subseteq D$
- LA MATRICE JACOBIANA $J_P f$ HA RANGO 2 (IN OGNI PUNTO $P \in D$)

PROPRIETÀ:

SE f È REGOLARE, IN OGNI SUO PUNTO LE CURVE COORDINATE SONO REGOLARI

DUNQUE SI POSSONO CONSIDERARE I DUE VETTORI TANGENTI t_C E t_D ALLE CURVE COORDINATE C E D DI $S = \mathrm{IM}(f)$ IN UN PUNTO $P_0 \in S$, CHE SONO RISPETTIVAMENTE

$t_C = (\partial x/\partial v, \partial y/\partial v, \partial z/\partial v)$ E $t_D = (\partial x/\partial u, \partial y/\partial u, \partial z/\partial u)$

SE S È REGOLARE QUESTI DUE VETTORI NON SONO MAI PARALLELI.

PIANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE

DATA LA SUPERFICIE PARAMETRICA REGOLARE $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

SIA $S = \mathrm{IM}(f)$ E SIA $P_0 = f(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ UN PUNTO DI S.

SI PROVA CHE

PROPRIETÀ:

IL PIANO TANGENTE A S IN P_0 È IL PIANO PER P_0 PARALLELO AI VETTORI t_C E t_D (I VETTORI TANGENTI ALLE CURVE COORDINATE DI S PASSANTI PER P_0)

DUNQUE IL PIANO TANGENTE IN P_0 HA EQUAZIONE:

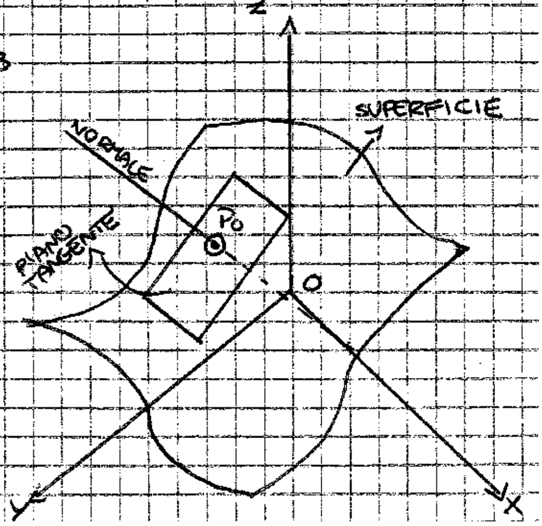
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{P_0} & \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{P_0} & \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{P_0} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{P_0} & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{P_0} & \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{P_0} \end{vmatrix} = 0$$

NORMALE A UNA SUPERFICIE

DATA LA SUPERFICIE PARAMETRICA REGOLARE $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

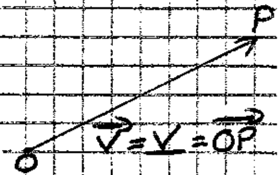
$f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ E UN SUO PUNTO P_0 SI DEFINISCE:

DEFINIZIONE → LA NORMALE A S IN P_0 È LA RETTA PER P_0 ORTOGONALE AL PIANO TANGENTE A S IN P_0.



VETTORI

- GRANDEZZE SCALARI (NUMERI REALI)
- GRANDEZZE VETTORIALI (VETTORI)



DEFINIZIONE → CHIAMIAMO VETTORE UN SEGMENTO ORIENTATO $\vec{V} = \underline{V} = \overrightarrow{OP}$ CARATTERIZZATO DA 3 ELEMENTI: DIREZIONE, VERSO E MODULO

- IL MODULO DI UN VETTORE È LA SUA LUNGHEZZA $|\underline{V}| = \|\underline{V}\| =$ LUNGHEZZA $OP \in \mathbb{R}^+$
- LA DIREZIONE
- IL VERSO È L'ORIENTAZIONE DEL VETTORE

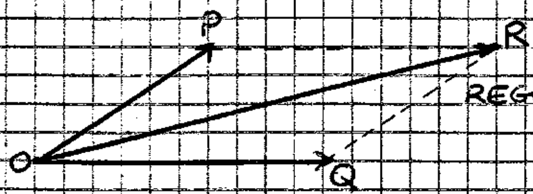
DEFINIZIONE → SI DICE VERSORE UN VETTORE DI MODULO (LUNGHEZZA) 1.

SOMMA DI VETTORI

$\vec{V} = \overrightarrow{OP}$

$\vec{W} = \overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$



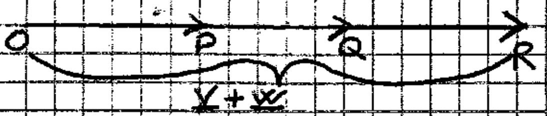
REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA

- CASO PARTICOLARE

$\underline{V} = \overrightarrow{OP}$

$\underline{W} = OQ$

$\underline{V} + \underline{W} = \overrightarrow{OR}$

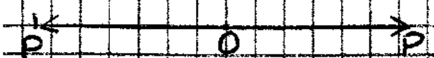


DEFINIZIONE → SI DEFINISCE VETTORE NULLO COME IL VETTORE $\overrightarrow{OO}$, OVVERO IL VETTORE DI LUNGHEZZA NULLA $\overrightarrow{OO} = \underline{0} = \vec{0}$

$\forall \underline{V},\ \underline{V} + \underline{0} = 0 + \underline{V} = \underline{V}$

DATO UN VETTORE $\underline{V}$, IL SUO OPPOSTO È IL VETTORE $-\underline{V}$: $\underline{V} + (-\underline{V}) = \underline{0}$

$\underline{V} = \overrightarrow{OP}$ $\quad -\underline{V} = \overrightarrow{OP'}$



DIFFERENZA DI VETTORI

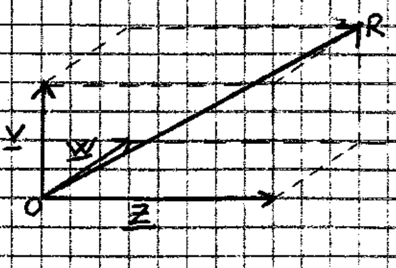
DATI 2 VETTORI $\underline{V}$ E $\underline{W}$ LA LORO DIFFERENZA È DATA DALLA SOMMA TRA $\underline{V}$ E L'OPPOSTO DI $\underline{W}$, CIOÈ $\underline{V} + (-\underline{W}) = \underline{V} - \underline{W}$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

DATI I VETTORI $\underline{V}, \underline{W}$

$|\underline{V} + \underline{W}| \leq |\underline{V}| + |\underline{W}|$

SOMMA DI 3 VETTORI



$\underline{V} + \underline{W} + \underline{Z} = \overrightarrow{OR}$

REGOLA DEL PARALLELEPIPEDO

PRODOTTO SCALARE

DEFINIZIONE → INDICHIAMO CON $\widehat{\underline{v}\ \underline{w}}$ L'ANGOLO TRA I DUE VETTORI $\underline{v}$ E $\underline{w}$

$\forall \underline{v}, \underline{w}$ SI DEFINISCE IL PRODOTTO SCALARE •

$\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos(\widehat{\underline{v}\ \underline{w}})$

IL PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI È UN NUMERO REALE.

PROPRIETÀ

$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ SE $|\underline{v}| = 0$ OPPURE $|\underline{w}| = 0$ OPPURE $\cos(\widehat{\underline{v}\ \underline{w}}) = 0$

$\underline{v} \perp \underline{w}$ (CIOÈ $\underline{v}$ ORTOGONALE A $\underline{w}$) SE E SOLO SE $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

$\cos \widehat{\underline{v} \cdot \underline{w}} = \dfrac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{|\underline{v}| \cdot |\underline{w}|}$

OSSERVAZIONE: $\forall \underline{v}$, $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2$ $\quad |\underline{v}| = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}}$

PROPRIETÀ:

- $\forall \underline{v}, \underline{w}$ $\quad \underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{v}$
- $\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0 \quad \forall \underline{v}$
- $\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{z}$ $\quad (\underline{v} + \underline{z}) \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} + \underline{z} \cdot \underline{w}$
- $\forall \underline{v}, \underline{w}, \forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot (\underline{v} \cdot \underline{w}) = (a\underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot (a\underline{w})$ (FILTRAZIONE DELLO SCALARE)

PRODOTTO SCALARE IN COMPONENTI

$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $\quad \underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$

$\forall \underline{v}$, $\underline{v} \cdot \underline{i} = v_1$ $\quad \underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $\quad \underline{i} = (1,0,0)$

ESEMPIO 1

$\underline{v} = 3\underline{i} + 4\underline{j} + 5\underline{k}$ $\quad \underline{v}(3,4,5)$

$3 \cdot (1,0,0) + 4 \cdot (0,1,0) + 5 \cdot (0,0,1)$

$(3,0,0) + (0,4,0) + (0,0,5) = (3,4,5)$

ESEMPIO 2

$\underline{v} = (-1, 1, \sqrt{2})$ $\quad \underline{w} = (2,2,1)$

$\underline{v} = -\underline{i} + \underline{j} + \sqrt{2}\underline{k}$ $\quad \underline{w} = 2\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}$

SCRIVERE IN COMPONENTI IL VETTORE $\underline{v} + \underline{w}$

$\underline{v} + \underline{w} = (1, 3, 1+\sqrt{2})$

VERIFICARE LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE $|\underline{v} + \underline{w}| \leq |\underline{v}| + |\underline{w}|$

$|\underline{v} + \underline{w}| = \sqrt{\underline{z} \cdot \underline{z}} = |\underline{z}| = \sqrt{1 + 3^2 + (1+\sqrt{2})^2} = \sqrt{13 + 2\sqrt{2}}$

$|\underline{v}| = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}} = \sqrt{1+1+2} = 2$

$|\underline{w}| = \sqrt{\underline{w} \cdot \underline{w}} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$\sqrt{13 + 2\sqrt{2}} \leq 5$

$$\underline{w} \wedge \underline{z} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k} = (-2,-2,1)$$

$$\underline{v} \wedge (\underline{w} \wedge \underline{z}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 7\underline{i} - 8\underline{j} - 2\underline{k} = (7,-8,-2)$$

$(7,-8,-2) \neq (6,-9,-3)$

ESEMPIO 2

DATI I DUE VETTORI $\underline{v}=(3,-1,0)$, $\underline{w}=(0,2,1)$

CALCOLARE $\underline{w} \wedge \underline{v}$

$$\underline{w} \wedge \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i} + 3\underline{j} - 6\underline{k} = (1,3,-6) = \underline{z}$$

$\underline{z} \cdot \underline{v} = (1,3,-6) \cdot (3,-1,0) = 3-3=0$ QUINDI $\underline{z} \perp \underline{v}$

CALCOLARE $\underline{z} \cdot \underline{w}$

$\underline{z} \cdot \underline{w} = (1,3,-6) \cdot (0,2,1) = 0+6-6=0$ QUINDI $\underline{z} \perp \underline{w}$

ESEMPIO 3

DATI I VETTORI $\underline{v}=(1,-h,0)$ $\underline{w}=(0,2h,-1)$ $h \in \mathbb{R}$

-TROVARE IL VALORE DI h PER CUI $\underline{v}$ E $\underline{w}$ SONO ORTOGONALI

$\underline{v} \cdot \underline{w} = -2h$ $\underline{v} \perp \underline{w}$ QUANDO $h=0$

-TROVARE IL VALORE DI h PER CUI $\underline{v}$ E $\underline{w}$ SONO PARALLELI

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -h & 0 \\ 0 & 2h & -1 \end{vmatrix} = h\underline{i} + \underline{j} + 2h\underline{k} = (h,1,2h)$$

NON ESISTE VALORE h PER CUI I DUE VETTORI SIANO PARALLELI

ESEMPIO 4

DATI I VETTORI $\underline{v} = \underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$ $\underline{w} = (b+1)\underline{i} - b\underline{j} - \underline{k}$

-TROVARE I VALORI DI b PER CUI $\underline{v}$ E $\underline{w}$ SONO PERPENDICOLARI

$\underline{v} \cdot \underline{w} = b+1+2b-1$ $\underline{v} \perp \underline{w}$ QUANDO $b=0$

-TROVARE I VALORI DI b PER CUI $\underline{v}$ E $\underline{w}$ SONO PARALLELI

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ b+1 & -b & -1 \end{vmatrix} = (2+b)\underline{i} - (-1-b-1)\underline{j} + (-b+2b+2) = (2+b, 2+b, 2+b)$$

$\underline{v} \parallel \underline{w}$ QUANDO $b=-2$

-TROVARE I VALORI DI b PER CUI $\widehat{\underline{v}\ \underline{w}} = \frac{\pi}{4}$

VETTORI LIBERI

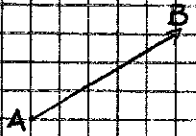
DEFINIZIONE → DUE VETTORI SI DICONO EQUIPOLLENTI SE HANNO STESSA LUNGHEZZA, DIREZIONE E VERSO.

LA RELAZIONE DI EQUIPOLLIZIONE È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA E VALGON LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- RIFLESSIVA: $\underline{v}$ EQUIPOLLENTE A $\underline{v}$
- SIMMETRICA: SE $\underline{v}$ EQUIPOLLENTE A $\underline{w}$ ALLORA $\underline{w}$ EQUIPOLLENTE A $\underline{v}$
- TRANSITIVA: SE $\underline{v}$ EQUIPOLLENTE A $\underline{w}$ E $\underline{w}$ EQUIPOLLENTE A $\underline{z}$, ALLORA $\underline{v}$ EQUIPOLLEN

DEFINIZIONE → DUE VETTORI APPARTENGONO A UNA STESSA CLASSE DI EQUIPOLLEN SE E SOLO SE SONO EQUIPOLLENTI

DEFINIZIONE → UN VETTORE LIBERO È UN INSIEME DI VETTORI EQUIPOLLENTI.



$$\underline{v} = [\underline{v}] = B - A = \{\text{VETTORE EQUIPOLLENTE } \overrightarrow{AB}\}$$

OSSERVAZIONE → LE OPERAZIONI TRA VETTORI LIBERI SI POSSONO ESPRIMERE MEDIANTE COMPONENTI USANDO LE STESSE FORMULE VALIDE PER I VETTORI APPLICATI IN UN PUNTO.

OSSERVAZIONE → DATI I PUNTI $A = (a_1, a_2, a_3)$ E $B = (b_1, b_2, b_3)$ IL VETTORE $\overrightarrow{AB}$ COMPONENTI $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

ESEMPIO: DATI I 3 VETTORI $\underline{v} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$ $\underline{w} = \underline{i} + 2\underline{k}$ $\underline{z} = -\underline{i} + 2\underline{j}$

CALCOLARE IL LORO PRODOTTO MISTO

$$\underline{v} \cdot (\underline{w} \wedge \underline{z}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 1 \cdot (2) + 1 \cdot (2) = -4$$

I TRE VETTORI NON SONO COMPLANARI

DEFINIZIONE → TRE VETTORI SI DICONO COMPLANARI SE IL LORO PRODOTTO MIST È UGUALE A 0.

DEFINIZIONE → DUE VETTORI HANNO LA STESSA DIREZIONE SE E SOLO SE LE LOR COMPONENTI SONO PROPORZIONALI.

ESEMPIO:

$\underline{v} = \underline{i} - \underline{j} + 3\underline{k}$

$\underline{w} = \underline{j} - 2\underline{k}$

$\underline{z} = 3\underline{i} - 3\underline{j} + 9\underline{k}$

I VETTORI $\underline{v}$ E $\underline{z}$ SONO PROPORZIONALI, QUINDI HANNO LA STESSA DIREZIONE.

ESEMPIO: PIANO PASSANTE PER 3 PUNTI NON ALLINEATI

$A=(1,2,3)$ $\quad B=(4,2,1)$ $\quad C=(0,-1,1)$ $\quad P=(x,y,z)$

$B-C=(4,3,0)$ $\quad A-C=(1,3,2)$ $\quad P-C=(x-0,y+1,z-1)$

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = x\cdot(6)-(y+1)\cdot 8+(z-1)\cdot 9=0$$

$6x-8y+9z-17=0$ EQUAZIONE PIANO

ESEMPIO PIANO PER $P_0 \perp \underline{v}$

$P_0(1,5,-1)$ $\quad \underline{v}=\underline{i}-5\underline{j}+\underline{k}$

$1(x-1)-5(y-5)+1\cdot(z+1)=0$ $\quad x-5y+z+25=0$ EQUAZIONE PIANO

RETTE NELLO SPAZIO

UNA RETTA NELLO SPAZIO PUÒ ESSERE INDIVIDUATA SOLO DA DUE EQUAZIONI

$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ SONO LE EQUAZIONI DELL'ASSE Y

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ SONO LE EQUAZIONI DELL'ASSE Z

$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ SONO LE EQUAZIONI DELL'ASSE X

- EQUAZIONE CARTESIANA

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

- EQUAZIONE PARAMETRICA

$$\begin{cases} x=at+b \\ y=ct+d \\ z=et+f \end{cases}$$

$P_0 \in r$ $\quad P_0=(b,d,f)$ $\quad \underline{v}/\!/r$ $\quad \underline{v}=(a,c,e)$

- EQUAZIONE NORMALE O FRAZIONARIA

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

ESERCIZIO: DATE LE EQUAZIONI PARAMETRICHE DI r TROVARE QUELLE NORMALI

$$r\begin{cases} x=2-5t \\ y=1+3t \\ z=-7-t \end{cases}$$ RICAVO t IN TUTTE LE EQUAZIONI $$r\begin{cases} t=\frac{2-x}{5} \\ t=\frac{y-1}{3} \\ t=-z-7 \end{cases}$$ UGUAGLIO LE 3 EQUAZIONI

$$\frac{2-x}{5}=\frac{y-1}{3}=-z-7$$ EQUAZIONI NORMALI DI r

$\underline{v}\parallel r=-5\underline{i}+3\underline{j}-\underline{k}$ $\quad r$ PASSA PER $P_0=(2,1,-7)$

ESERCIZIO: SCRIVERE LE EQUAZIONI NORMALI DELLA RETTA PER $P_0(1,2,-5)\parallel\vec{v}=\underline{i}-3\underline{k}$

SE IL VETTORE $\parallel$ HA UNA VARIABILE NULLA LE EQUAZIONI NORMALI NON SI SCRIVONO.

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+5}{-3}$$ HA SENSO SOLO CON $y=2$

$$\begin{cases} y=2 \\ \frac{x-1}{1}=\frac{z+5}{-3} \end{cases}=\begin{cases} y=2 \\ 3x+z=2 \end{cases}$$ EQ CARTESIANA $$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+0t \\ z=-5-3t \end{cases}$$ EQ PARAMETRICA

ESERCIZIO

$$r:\begin{cases} 3x+5y-7z+3=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$ $$\underline{v}\parallel r=\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=5\underline{i}-10\underline{j}-5\underline{k}$$

$\underline{v}=\underline{i}-2\underline{j}-\underline{k}$ $\quad P_0=\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{3}{5} \\ z=0 \end{cases}$ $\quad P_0=(0,-\frac{3}{5},0)$

FASCIO DI PIANI CON ASSE LA RETTA r

$$r=\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$ $$\Phi_r=\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ TUTTI I PIANI DEL FASCIO DI PIANI CHE APPOGGIA SULLA RETTA r (Φ_r)

$$(\lambda a+\mu a')x+(\lambda b+\mu b')y+(\lambda c+\mu c')z+(\lambda d+\mu d')=0$$

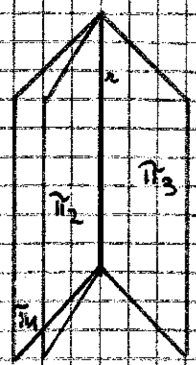
ESEMPIO

$$r=\begin{cases} 3x+5y-7z+3=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$ $r=\pi_1\cap\pi_2$ DOVE $\pi_1=3x+5y-7z+3=0$

$\pi_2=x+z=0$

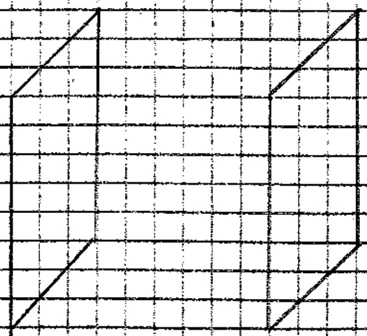
$\pi_3=2\cdot(3x+5y-7z+3)-8\cdot(x+z)=0$

$\pi_3=-2x+10y-22z+6=0$



FASCI DI PIANI PARALLELI

DUE PIANI SONO PARALLELI SE LE COMPONENTI SONO PROPORZIONALI, ESCLUSO IL TERMINE NOTO



ESEMPIO

$\pi: x-3y+5z+1=0 \qquad \pi_2: 2x-6y+10z+23=0$

$\lambda(x-3y+5z+1)+2\mu\left(x-3y+5z+\frac{23}{2}\right)=0$

$(\lambda+2\mu)\cdot(x-3y+5z)+\lambda+23\mu=0$

$\Phi_\pi: x-3y+5z+k=0 \qquad k\in\mathbb{R} \qquad k=\frac{\lambda+23\mu}{\lambda+2\mu}$

ESERCIZIO: DATI $\pi: x-3y+5z+1=0$ $\pi': 2x-6y+10z+23=0$

TROVARE L'EQUAZIONE DEL PIANO MEDIANO DELLA STRISCIA INDIVIDUATA DA π, π'

$\alpha: x-3y+5z+k=0$

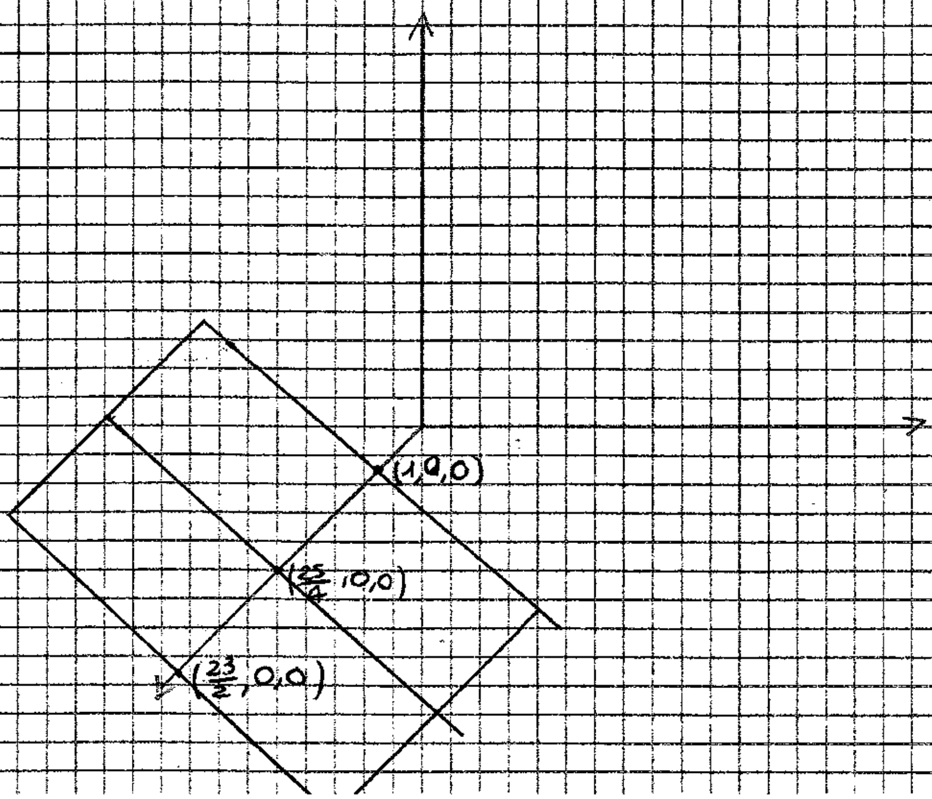
$A\in\pi: (-1,0,0)$

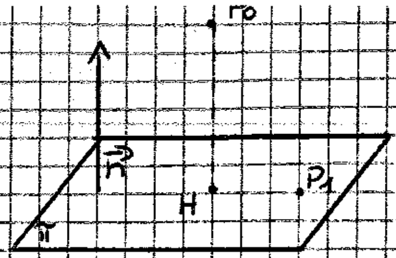
$B\in\pi': \left(11,0,-\frac{9}{2}\right) \qquad M=\frac{A+B}{2}=\left(5,0,-\frac{9}{4}\right) \qquad M\in\alpha$

SOSTITUISCO M AD α PER TROVARE K

$5-\frac{45}{4}+k=0 \Rightarrow k=\frac{25}{4}$

$\alpha: 4x-12y+20z+25=0$





$\forall P_1 \in \pi \quad P_1(x_1, y_1, z_1)$

$ax_1+by_1+cz_1+d=0$

DIST. $(P_0,H) = \overline{P_0H} = |\text{COMP.}_{\vec n}(P_0-P_1)| = |(P_0-P_1)\cdot \text{VERSORE } \vec n|$

$P_0-P_1=(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1) \qquad \vec n=(a,b,c)$

VERSORE $\vec n = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$

DISTANZA $(P_0,H)= \left|(x_0-x_1)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + (y_0-y_1)\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + (z_0-z_1)\cdot\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$

$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad -ax_1-by_1-cz_1=d$

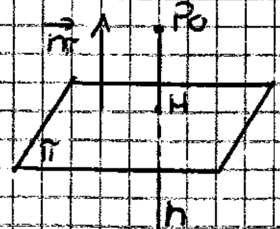
ESEMPIO

$P_0=(2,-1,3) \quad (P_0\notin\pi)$

$\pi: x-2y+2z+8=0$

(USANDO LA FORMULA)

DISTANZA$(P_0,\pi)=\frac{|2-2(-1)+2\cdot 3+8|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{18}{3}=6$



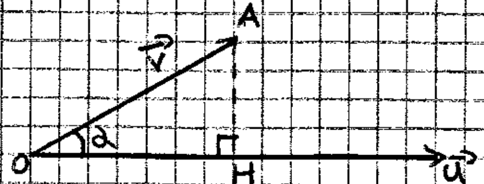
$h = \begin{cases} x=2+t \\ y=-1-2t \\ z=3+2t \end{cases}$ $\quad H=h\cap\pi \quad 2+t-2\cdot(-1-2t)+2\cdot(3+2t)+8=0$

$2+t+2+4t+6+4t+8=0 \quad t=-2$

SOSTITUISCO PER TROVARE H

$H=(0,3,-1)$ DISTANZA $P_0H = \|P_0-H\| = \sqrt{4+16+16}=6$ (SENZA USARE LA FORM

LUNGHEZZA DELLA PROIEZIONE DI UN VETTORE SU UN ALTRO VETTOR



$OH = \text{COMP}_{\vec u}(\vec v) \qquad OH = OA\cdot\cos\alpha \qquad OA=\|\vec v\|$

$\cos\alpha = \frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|\cdot\|\vec v\|} \qquad OH = \cancel{\|\vec v\|}\cdot\frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|\cdot\cancel{\|\vec v\|}}$

$OH=\frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|} = \vec v\cdot(\text{VERSORE }\vec u)$

VERSORE $\vec u = \frac{\vec u}{\|\vec u\|} \qquad$ COMPONENTE$_{\vec u}(\vec v) = \vec v\cdot(\text{VERSORE }\vec u)$

$\overrightarrow{OH}$ = VETTORE PROIEZIONE DI $\vec v$ SU $\vec u$ $\quad \overrightarrow{PR_{\vec u}\vec v}$

$\overrightarrow{PR_{\vec u}\vec v}$ = COMPONENTE$_{\vec u}\vec v$ · VERSORE $\vec u$

ESEMPIO DISTANZA TRA DUE PIANI //

$\pi = x-3y+7z-8=0 \qquad \pi' = 3x-9y+21z+18=0$

$P_0 \in \pi' \qquad P_0=(-6,0,0)$

$$\text{DISTANZA}(\pi',\pi) = \text{DISTANZA}(P_0,\pi) = \frac{|-6-8|}{\sqrt{1+9+49}} = \frac{14}{\sqrt{59}}$$

ESEMPIO DISTANZA PUNTO RETTA

$P_0=(1,-2,5) \quad , \quad r = \begin{cases} x=2t \\ y=3+t \\ z=2-2t \end{cases} \qquad P_1 \in r \quad P_1=(0,3,2)$

$\vec{r}=(2,1,-2) \qquad \text{VERSORE } \vec{r} = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

$\overrightarrow{P_1P_0} = (P_0-P_1) = (1,-5,3)$

$$\overrightarrow{P_1P_0} \wedge \text{VERSORE } \vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -5 & 3 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{7}{3} i + \frac{8}{3} j + \frac{11}{3} k = \frac{1}{3}\left(7i+8j+11k\right)$$

$$\text{DISTANZA}(P_0,r) = \|\overrightarrow{P_1P_0} \wedge \text{VERSORE } \vec{r}\| = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{49+64+121} = \frac{\sqrt{234}}{3}$$

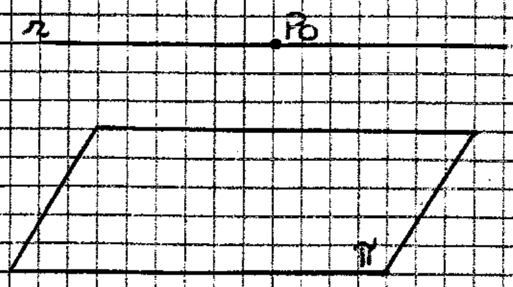
DISTANZA TRA DUE RETTE //

$\forall P_0 \in r'$

$\text{DISTANZA}(r,r') = \text{DISTANZA}(P_0,r)$

MI RICONDUCO AL CASO DELLA DISTANZA PUNTO RETTA

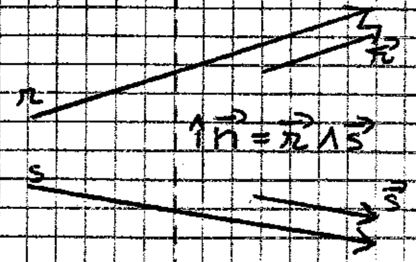
DISTANZA PIANO RETTA

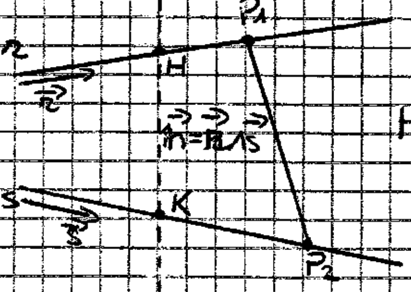


$\forall P_0 \in r$

$\text{DISTANZA}(\pi,r) = \text{DISTANZA}(P_0,\pi)$

DISTANZA MINIMA TRA DUE RETTE SGHEMBE





$\forall P_1 \in r,\ \forall P_2 \in s$

$HK = \text{PROIEZ.}_{\vec{n}}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)$

$$HK = \text{DISTANZA}(r,s) = \left|\text{COMPONENTE}_{\vec{n}}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)\right| = \left|\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)\cdot \text{VERSORE } \vec{n}\right|$$

$\uparrow\vec{n}$ ORTOGONALE A TUTTE E DUE LE RETTE r,s.

DIMOSTRAZIONE P_1

$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad \lambda \cdot [\mu (a,b)] = (\lambda\mu) \cdot (a,b)$

$\lambda \cdot [\mu \cdot (a,b)] = \lambda [(\mu a, b\mu)] = [\lambda \cdot (\mu a), \lambda \cdot (\mu b)] = [(\lambda\mu) \cdot a, (\lambda\mu) \cdot b] = (\lambda\mu) \cdot (a$

DIMOSTRAZIONE P_2

$1 \cdot (a,b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a,b)$

DIMOSTRAZIONE D_2

$x = (x_1, \dots x_n)$, $y = (y_1, \dots y_n)$ CALCOLIAMO $\lambda \cdot (x+y)$

$\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot ((x_1, \dots x_n) + (y_1, \dots, y_n)) = \lambda \cdot (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$

$(\lambda \cdot (x_1+y_1), \dots \lambda \cdot (x_n+y_n)) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots \lambda x_n + \lambda y_n) =$

$= (\lambda x_1, \dots \lambda x_n) + (\lambda y_1, \dots \lambda y_n) =$

$= \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) + \lambda \cdot (y_1, \dots, y_n) = \lambda x + \lambda y$

LE OPERAZIONI CHE ABBIAMO DEFINITO IN K^n VERIFICANO LE OTTO PROPRIETÀ DELLA DEFINIZIONE DI K-SPAZIO VETTORIALE.

PERTANTO K^n È UN K-SPAZIO VETTORIALE. IN PARTICOLARE:

- $\mathbb{R}^3$ (L'INSIEME DELLE TERNE DI NUMERI REALI) È UN $\mathbb{R}$-SPAZIO VETTORIALE RISPE ALLE OPERAZIONI DEFINITE PER LE TERNE.

ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI

- $\mathbb{C}$ COME SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

$K = \mathbb{R}$ E SIA $V = \mathbb{C}$ CONSIDERIAMO LE DUE OPERAZIONI:

SOMMA: $(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d) \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$

PRODOTTO: $\lambda \cdot (a+ib) = \lambda a + i(\lambda b) \qquad a+ib \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}$

DALLE PROPRIETÀ DEI NUMERI COMPLESSI SEGUE CHE LE 8 PROPRIETÀ SONO VERIFICATE E QUINDI $\mathbb{C}$ È UN $\mathbb{R}$-SPAZIO VETTORIALE RISPETTO ALLE OPERAZ DATE. $\underline{0} = 0 + i0 \qquad -(a+ib) = -a - ib$

- $\mathbb{C}$ COME SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{C}$

$K = \mathbb{C}$ E SIA $V = \mathbb{C}$

SOMMA: $(a+ib) + (c+id) := (a+c) + i(b+d)$

PRODOTTO: $(a+ib) \cdot (c+id) := (ac-bd) + i(bc+ad)$

- ESEMPIO DI OPERAZIONI CHE NON DEFINISCONO UNO SPAZIO VETTORIALE

$K = \mathbb{R}$ E SIA $V = \mathbb{C}$

SOMMA: $(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d) \qquad (a,b,c,d \in \mathbb{R})$

$\lambda \cdot (a+ib) = \lambda a + ib \quad (a+ib \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R})$

CON QUESTE OPERAZIONI $\mathbb{C}$ NON È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$ IN QUANT LA PROPRIETÀ D_1 NON È VERIFICATA.

$V = \mathbb{R}^2$

$W = \{(a,a), a \in \mathbb{R}\}$

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \underline{u} \in W \Rightarrow \lambda \underline{u} \in W$

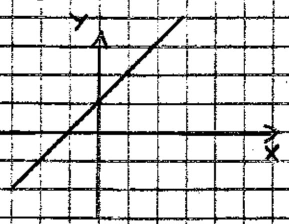
2) $\underline{w} \in W, \underline{v} \in W \Rightarrow \underline{w} + \underline{v} \in W$

1) $\lambda (a,a) = (\lambda a, \lambda a) \in W \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall a \in \mathbb{R}$

2) $(a,a) + (b,b) = (a+b, a+b) \in W \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

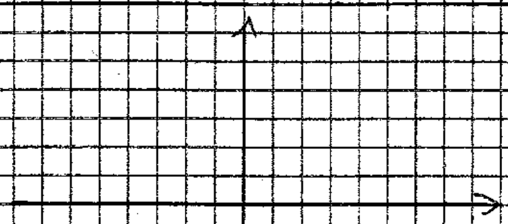
W È UN SOTTOSPAZIO DI V

$W = \{(a, a+1), a \in \mathbb{R}\} \rightarrow y = x+1 \qquad W \subseteq \mathbb{R}^2$



$0_V = (0,0) \in W$

$W = \{(a, a^2), a \in \mathbb{R}\} \rightarrow y = x^2 \qquad W \subseteq \mathbb{R}^2$



1) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot (a, a^2) \in W = ?$

$(\lambda a, \lambda a^2) \notin W \qquad \lambda a^2 \neq (\lambda a)^2$

ANCHE SE CONTIENE LO 0, W NON È UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^2$

$W = \{(a, 2a), a \in \mathbb{R}\}$

1) $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot (a, 2a) \in W = ?$

$\lambda \cdot (a, 2a) = (\lambda a, 2\lambda a) \in W$

2) $(a, 2a) + (b, 2b) \in W = ?$

$(a, 2a) + (b + 2b) = (a+b, 2a+2b)$

$(a+b, 2 \cdot (a+b)) \in W$

W È UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^2$

$V = \mathbb{R}^2 \quad W \subseteq \mathbb{R}^2$ È UN SOTTOSPAZIO DI $V \Leftrightarrow W_m = \{(a, ma), a \in \mathbb{R}\} \ \forall m \in \mathbb{R}$

$W = \{(2a - 3b, 5a + 7b), a, b \in \mathbb{R}\} \qquad W \subseteq \mathbb{R}^2 \quad V = \mathbb{R}^2 \quad -0_V \in W$

$\lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda \cdot (2a - 3b, 5a + 7b) = (2\lambda a - 3\lambda b, 5\lambda a + 7\lambda b)$

W È UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x \in \mathbb{R}\}$

$W \subseteq \mathbb{R}^n$

$(x_1, 1, \ldots, x_n)$ NON MI DÀ UN SOTTOSPAZIO

$(x_1, 0, \ldots, x_n)$ MI DÀ UN SOTTOSPAZIO

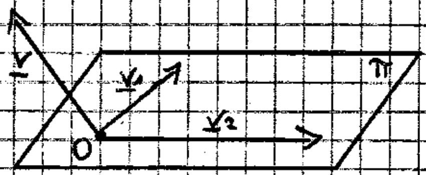
ESEMPIO

$V = V_3 \quad \underline{v}_1 = \underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k} \quad \underline{v}_2 = 3\underline{i} + \underline{k} \quad \underline{v} = \underline{i} + 5\underline{j} + 4\underline{k}$

$\underline{v} \in L(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = ? \quad \underline{v} \notin L(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$

IL VETTORE $\underline{v}$ NON STA NEL PIANO EVIDENZIATO DAI VETTORI $\underline{v}_1$ E $\underline{v}_2$

$L(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \equiv \pi$



$\underline{u} = -5\underline{i} - \underline{j} \qquad \underline{u} \in L(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = ?$

$-5\underline{i} - \underline{j} = (a+3b)\underline{i} + (-a)\cdot\underline{j} + (2a+b)\underline{k}$

$$\begin{cases} a + 3b = -5 \\ -a = -1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2 \\ a = 1 \\ 2a + b = 0 \text{ VERA QUINDI } \underline{u} \in L(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \end{cases}$$

$\underline{u}$ È COMPLANARE CON $\underline{v}_1, \underline{v}_2$

UN'ALTRA POSSIBILITÀ PER VEDERE SE $\underline{u} \in L(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ È CONTROLLARE SE IL PRODOTTO MISTO $= 0$ $\quad \underline{u} \cdot (\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2) = 0$

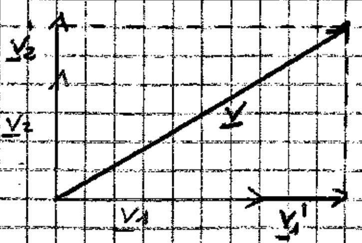
$$\begin{vmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-1) + (1-6) = 0$$

QUESTO METODO PERÒ NON DÀ INFORMAZIONI SU a E b.

IN $\mathbb{R}^3 \quad \underline{v}_1 = (1, -5, 2) \quad \underline{v}_2 = (1, 0, 1) \quad \underline{v}(4, 3, -7)$

$\underline{v} \in L(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = ?$ NO, $\underline{v} \notin L(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-5) - 3 \cdot (1-2) - 7 \cdot (5) = -20 + 3 - 35 = -53 \neq 0$$



$\underline{v} = \underline{v}_1' + \underline{v}_2'$

$\underline{v}_1' \,//\, \underline{v}_1, \ \underline{v}_2' \,//\, \underline{v}_2 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}: \ \underline{v}_1' = a \cdot \underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 = b \cdot \underline{v}_2$

$\underline{v} = a \cdot \underline{v}_1 + b \cdot \underline{v}_2$

DIPENDENZA LINEARE

$\underline{v_1} = i - j + 2k \quad v_2 = 3i + k \quad u = -5i - j$

$\underline{u} = \underline{v_1} - 2\underline{v_2} \quad \underline{v_1} - 2\underline{v_2} - \underline{u} = 0$ $\quad \underline{u}, \underline{v_1}, \underline{v_2}$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

$\nexists a, b \in \mathbb{R} / \underline{v} = a \cdot \underline{v_1} + b \cdot \underline{v_2} \quad a \cdot \underline{v_1} + b \cdot \underline{v_2} - \underline{v} = \underline{0}$

$a\underline{v_1} + b\underline{v_2} + c\underline{v} = 0$ VALE SOLO CON $a = b = c = 0$

$\underline{v}, \underline{v_1}, \underline{v_2}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$\underline{v_1} \; \underline{v_2} \; \underline{v_3}$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE $\exists \, a\underline{v_1} + b\underline{v_2} + c\underline{v_3} = 0$

$(a, b, c) \neq (0, 0, 0) \Leftrightarrow \exists a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$a\underline{v_1} = -b\underline{v_2} - c\underline{v_3} \quad \underline{v_1} = (-b v_2 a^{-1}) - (c\, v_3 \cdot a^{-1})$

SONO DATI UN K-SPAZIO VETTORIALE V E IN ESSO I VETTORI $v_1, v_2, \dots, v_n$

DEFINIZIONE → SI DICE CHE $v_1, v_2, \dots, v_n$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI (L.D.) SE ESISTE UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE A COEFFICIENTI NON TUTTI NULLI CHE DIA COME RISULTATO IL VETTORE NULLO.

$v_1, v_2, \dots v_n$ L.D. $\Leftrightarrow \exists a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ NON TUTTI NULLI $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0_v$

DEFINIZIONE → SI DICE CHE $v_1, v_2, \dots, v_n$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI (L.I.) SE L'UNICA LORO COMBINAZIONE LINEARE CHE DÀ COME RISULTATO IL VETTORE NULLO È QUELLA A COEFFICIENTI TUTTI NULLI.

$v_1, v_2, \dots, v_n$ SONO L.I. SE $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0 \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0_K$

PROPRIETÀ:

$v_1, v_2, \dots v_n$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE UNO (ALMENO) DI ESSI SI PUÒ ESPRIMERE COME COMBINAZIONE LINEARE DEI RIMANENTI;

SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE NESSUNO DI ESSI È COMBINAZIONE LINEARE DEI RIMANENTI.

LO SPAZIO $L(v_1, v_2, \dots, v_n)$

PROPRIETÀ: SIANO $v_1, v_2, \dots, v_n$ VETTORI DI V; SIA $U = L(v_1, v_2, \dots, v_n)$, ALLORA:

- U È UN SOTTOSPAZIO DI V
- U CONTIENE $v_1, v_2, \dots, v_n$
- U È IL PIÙ PICCOLO SOTTOSPAZIO DI V CONTENENTE I VETTORI $v_1, v_2, \dots, v_n$

DEFINIZIONE → SE $U = L(v_1, v_2, \dots, v_n)$, SI DICE CHE U È GENERATO DA $v_1, v_2, \dots, v_n$

L'INSIEME $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ SI DICE INSIEME DI GENERATORI DI U

DEFINIZIONE → UN K-SPAZIO VETTORIALE V SI DICE FINITAMENTE GENERATO SE ESISTE IN V UN NUMERO FINITO DI VETTORI $v_1, v_2, \dots, v_n$ TALI CHE $V = L(v_1, v_2, \dots, v_n)$

BASI

SONO DATI UN K-SPAZIO VETTORIALE V E IN ESSO I VETTORI $v_1, v_2, \dots, v_n$

DEFINIZIONE → L'INSIEME ORDINATO $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ È UNA BASE DI V SE $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ È UN INSIEME LIBERO ED È UN INSIEME DI GENERATORI DI V

PROPRIETÀ:

UN INSIEME $B=(v_1, v_2, \dots, v_n)$ È UNA BASE DI V SE E SOLO SE OGNI ELEMENTO V SI PUÒ ESPRIMERE IN MODO UNICO COME COMBINAZIONE LINEARE DI ELEMENTI D

ESEMPI

IN V_3: $B=(i, j, k)$ È UNA BASE

IN $\mathbb{R}^n$: $E=(e_1, e_2, \dots, e_n)$ È UNA BASE (BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$)

IN $\mathbb{R}_2[x]$: $B=(1, x, x^2)$ È UNA BASE

COMPONENTI RISPETTO A UNA DATA BASE

SONO DATI UN K-SPAZIO VETTORIALE V E IN ESSO LA BASE $B=(v_1, v_2, \dots, v_n)$

DEFINIZIONE → SE $v \in V$ E $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ GLI SCALARI $a_1, a_2, \dots, a_n$ DICONO COMPONENTI DI v RISPETTO ALLA BASE B

POICHÉ B È UNA BASE DI V, PER OGNI VETTORE v DI V ESISTE UNA ED UNA SOLA n-UPLA $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ TALE CHE $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_n v_n$

PROPRIETÀ

DATO COMUNQUE UN VETTORE $v \in V$, SONO UNICHE LE SUE COMPONENTI RISPETTO A UNA PREFISSATA BASE B DI V.

ESEMPI:

- IN V_3: $B=(i, j, k)$ È UNA BASE; LE COMPONENTI DI $\underline{v} = 2i - 3k$ RISPETTO A B SONO $(2, 0, -3)$
- IN $\mathbb{R}^2$: $E=(e_1, e_2)$ È UNA BASE DOVE $e_1=(1,0)$ ED $e_2=(0,1)$
  LE COMPONENTI DI $v=(-2,4)$ RISPETTO AD E SONO $(-2,4)$
  SE $b_1=(1,1)$ E $b_2=(5,-1)$ ANCHE $B=(b_1, b_2)$ È UNA BASE DI $\mathbb{R}^2$.
  LE COMPONENTI DI $v=(-2,4)$ RISPETTO A B SONO $(3,-1)$ *
- IN $\mathbb{R}_2[x]$: $B=(1, x, x^2)$ È UNA BASE. LE COMPONENTI DI $p(x) = 3x - 2x^2$ RISPETTO B SONO $(0, 3, -2)$.

*

- SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI: $\nexists K \in \mathbb{R} / b_1 = K b_2$
- GENERANO $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \underline{v} = \alpha \cdot \underline{v}_1 + \beta \cdot \underline{v}_2$

$\forall a, b \in \mathbb{R} \; \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \; (a,b) = \alpha \cdot (1,1) + \beta \cdot (5,-1) \quad (a,b) = (\alpha + 5\beta, \alpha - \beta)$

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta = a \\ \alpha - \beta = b \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -5\beta - 2 \\ -5\beta - 2 - \beta = 4 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}}$$

$a=-2 \; b=4$ DOV

DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

• LEMMA DI STEINITZ

SIA V UN K-SPAZIO VETTORIALE NON NULLO E FINITAMENTE GENERATO; SIA $G=\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ UN INSIEME DI GENERATORI DI V E $I=\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ UN INSIEME LIBERO CONTENUTO IN V ALLORA $s \leq m$

• TEOREMA

SIA UNO SPAZIO V FINITAMENTE GENERATO; ALLORA OGNI BASE DI V HA LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI.

DEFINIZIONE → SIA V UN K-SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO; SI C[HIAMA] DIMENSIONE DI V IL NUMERO DI VETTORI CONTENUTI IN UNA SUA QUALUNQUE BAS[E]

ESEMPI

- IN V_3: $B=(i, j, k)$ È UNA BASE $\Rightarrow \dim(V_3)=3$
- IN $\mathbb{R}^n$: $E=(e_1, e_2, \dots, e_n)$ È UNA BASE $\Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n)=n$
- IN $\mathbb{R}_2[x]$: $B=(1, x, x^2)$ È UNA BASE $\Rightarrow \dim(\mathbb{R}_2[x])=3$

PROPRIETÀ DEGLI SPAZI DI DIMENSIONE n

TEOREMA

SIA $\dim(V)=n$ E SIA $I=\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ UN INSIEME DI ELEMENTI DI V ALLORA:

1) SE I È LIBERO ALLORA $s \leq n$ (SE $s>n$ ALLORA I NON È LIBERO)
2) SE I GENERA V, ALLORA $s \geq n$ (SE $s<n$ ALLORA I NON PUÒ GENERARE V)

COROLLARIO

SIA $\dim(V)=n$ E SIA $J=(v_1, v_2, \dots, v_n)$ UN INSIEME ORDINATO DI ELEMENTI DI [V] ALLORA J È UNA BASE DI V $\Leftrightarrow$ J È LIBERO $\Leftrightarrow$ J GENERA V

OSSERVAZIONE

NOTO CHE $\dim(V)=n$, PER VERIFICARE CHE UN INSIEME DI n VETTORI DI V SIA UNA BASE DI V È SUFFICIENTE VERIFICARE CHE SONO LINEARMENTE INDIPENDEN[TI] OPPURE CHE GENERANO V.

ESEMPI

1) IN V_3: $v_1 = i - j$, $v_2 = i + k$, $v_3 = 3i + j - k$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENT[I] (È SUFFICIENTE OSSERVARE CHE IL LORO PRODOTTO MISTO È NULLO).
POICHÉ $\dim(V_3)=3$, (v_1, v_2, v_3) È UNA BASE DI V_3

2) IN $\mathbb{R}^2$: $v_1=(1,1)$ E $v_2=(-2,3)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, (È SUFFICIEN[TE] OSSERVARE CHE NON SONO PROPORZIONALI).
POICHÉ $\dim(\mathbb{R}^2)=2$ (v_1, v_2) È UNA BASE DI $\mathbb{R}^2$

SPAZI FUNZIONALI

CONSIDERIAMO $F(I) = \{f: I \to \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}\}$, INSIEME DI FUNZIONI A VALORI REAL DEFINITI SULL'INTERVALLO I

$F(I)$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

LA SOMMA DI DUE FUNZIONI f E g È LA FUNZIONE $h = f+g \,/\, \forall x \in I$

$h(x) = (f+g)(x) \overset{DEF}{=} f(x) + g(x)$

IL PRODOTTO DI UNA FUNZIONE f PER UNO SCALARE $\lambda \in \mathbb{R}$ È LA FUNZIONE h' COSÌ DEFINITA $\forall x \in I$ $h(x) = (\lambda \cdot f)(x) \overset{DEF}{=} \lambda \cdot f(x)$

VERIFICARE CHE $F(I)$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

1) PROPRIETÀ ASSOCIATIVA E COMMUTATIVA DELLA SOMMA

2) $\exists$ DELL'ELEMENTO NEUTRO.

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE e TALE CHE $e(x) = 0$ $\forall x \in I$ $e(x)$ = ELEMENTO NEUTR

INFATTI $\forall f \in F(I)$ $(f+e)(x) \overset{DEF}{=} f(x) + e(x) = f(x)$

3) ESISTENZA DEGLI INVERSI $\forall f \in F(I)$ CONSIDERO g: $g(x) = -f(x)$ $\forall x \in I$

ALLORA g È L'INVERSO DI f, INFATTI $\forall x \in I$ $(g+f)(x) \overset{DEF}{=} g(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0$

ALLORA $g + f = e$

4) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVE.

ESEMPIO

CONSIDERIAMO L'INSIEME $\mathbb{R}^+$ E DEFINIAMO LE OPERAZIONI:

1) $\oplus$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ $x \oplus y \overset{DEF}{=} x \cdot y$ 2) $\otimes$ $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall a \in \mathbb{R}$ $a \otimes x \overset{DEF}{=} x^a$

IN BASE A QUESTE DUE OPERAZIONI $\mathbb{R}^+$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

1) COMMUTATIVA: $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ $x \oplus y \overset{DEF}{=} x \cdot y = y \cdot x = y \oplus x$

2) ASSOCIATIVA

3) ESISTENZA ELEMENTO NEUTRO PER $\oplus$ È 1 INFATTI

$\forall x \in \mathbb{R}^+$ $x \oplus 1 \overset{DEF}{=} x \cdot 1 = x$

4) ESISTENZA DEGLI INVERSI

$\forall x \in \mathbb{R}^+$ $x \oplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$

5) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA 1 $\forall a \in \mathbb{R}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ VERIFICARE CHE

$(a \oplus (x \oplus y)) = (a \otimes x) \oplus (a \otimes y)$

$a \otimes (x \cdot y) = (x^a \oplus y^a)$

$(x \cdot y)^a = (x \cdot y)^a$ SÌ

6) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA 2: DOBBIAMO VERIFICARE CHE

$(a+b) \otimes x = a \otimes x \oplus b \otimes x$

$x^{a+b} = x^a \cdot x^b$

$x^{a+b} = x^{a+b}$ SÌ

MATRICI SIMMETRICHE

UNA MATRICE $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ SI DICE SIMMETRICA SE ${}^tA = A$,

QUINDI A DEV'ESSERE UNA MATRICE QUADRATA

$A = (a_{i,j})$ A È SIMMETRICA SE $a_{i,j} = a_{j,i}$ $\forall i,j$

ESEMPIO

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ MATRICE SIMMETRICA: STESSI VALORI NELLA DIAGONALE SECONDARIA

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ MATRICE NON SIMMETRICA

ESEMPIO

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ SIMMETRICA $B = (b_{i,j})$ $b_{2,3} = 6$

MATRICI ANTISIMMETRICHE

UNA MATRICE $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ È ANTISIMMETRICA SE ${}^tA = -A$ QUINDI

A DEV'ESSERE QUADRATA E $A = (a_{i,j})$ ALLORA $a_{i,j} = -a_{j,i}$ $\forall i,j,\ i \neq j$

ESEMPIO

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ = MATRICE ANTIMMETRICA

PROPRIETÀ

L'INSIEME DELLE MATRICI SIMMETRICHE $a \subseteq \mathbb{R}^{m,n}$ È UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^{m,n}$

DIMOSTRAZIONE

1) $\forall A,B \in a \Rightarrow A+B \in a$

$A = (a_{i,j})$ $a_{i,j} = a_{j,i}$ $\forall i,j$

$B = (b_{i,j})$ $b_{i,j} = b_{j,i}$ $\forall i,j$

$A+B = (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{i,j})$

$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} = a_{j,i} + b_{j,i} = c_{j,i}$ $\forall i,j$

2) $\forall A \in a,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda A \in a$

$A = (a_{ij})$ $a_{i,j} = a_{j,i}$ $\forall i,j$

$\lambda \cdot A \cdot (\lambda a_{i,j})$ $\lambda a_{i,j} = \lambda a_{j,i}$ $\forall i,j$

3) L'ELEMENTO NEUTRO DI $\mathbb{R}^{m,n}$ DEVE APPARTENERE A a

- LA SOMMA DI DUE MATRICI ANTISIMMETRICHE È ANTISIMMETRICA. QUINDI L'INSIEME B DELLE MATRICI ANTISIMMETRICHE È UNO SPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^{m,n}$

SPAZIO DELLE RIGHE E DELLE COLONNE, RANGO

Sia $A=(a_{hk})\in K^{m,n}$. Si possono considerare i vettori riga di A $R_1,R_2,\dots,R_m\in K^n$ dove $R_h=(a_{h1},a_{h2},\dots,a_{hn})$ e i vettori colonna di A $C_1,C_2,\dots,C_n\in K^m$ dove $C_k=(a_{1k},a_{2k},\dots,a_{mk})$

DEFINIZIONE → Lo spazio delle righe di A è il sottospazio R_A di K^n, generato dalle righe di A, spazio delle colonne di A è il sottospazio C_A di K^m generato dalle colonne di A.

DEFINIZIONE → Il rango di A è la dimensione del sottospazio R_A (uguale alla dimensione del sottospazio C_A). Il rango di A si indica con $\rho(A)$ o con $rk(A)$

$$\rho(A)=\dim(R_A)=\dim(C_A)$$

ESERCIZIO:

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $\vec{R_1}=(1,2,5,2)\in\mathbb{R}^4$ $\vec{R_2}=(-1,1,0,2)\in\mathbb{R}^4$ $\vec{C_1}=(1,-1)\in\mathbb{R}^2$ $\vec{C_2}=(2,1)\in\mathbb{R}^2$ $\vec{C_3}=(5,0)\in\mathbb{R}^2$ $\vec{C_4}=(2,2)\in\mathbb{R}^2$

$R_A=L(R_1,R_2)\subseteq\mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim R_A=2$ $\qquad C_A=L(C_1,C_2,C_3,C_4)\subseteq\mathbb{R}^2$ $\dim C_A=2$

$$\rho(A)=\dim R_A=\dim C_A=2$$

$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0\\ 2 & 5 & 7 & 1\\ 5 & 13 & 13 & 2\end{pmatrix}$ $\quad R_A=L(R_1,R_2,R_3)\subseteq\mathbb{R}^4$

$R_1=(1,3,-1,0)$ $R_2=(2,5,7,1)$ $R_3=(5,13,13,2)$

-SCARTI

$g=\{R_1,R_2,R_3\}$ genera R_A

$R_1\neq 0$ $R_2\neq 0$ $R_3\neq 0$

$-R_1,R_2$ tengo R_2? sì perché $R_2\neq kR_1$

tengo R_3? no perché $R_3\in L(R_1,R_2)$ $R_3=a\cdot R_1+b\cdot R_2$

$R_3=a\cdot(1,3,-1,0)+b\cdot(2,5,7,1)$

$(5,13,13,2)=(a+2b,3a+5b,-a+7b,b)$

$\begin{cases}a+2b=5\\3a+5b=13\\-a+7b=13\\b=2\end{cases}$ $\begin{cases}a=1\\b=2\\3+10=13 \text{ sì}\\-1+14=13 \text{ sì}\end{cases}$ $\quad R_3=R_1+2R_2$ $\quad$ Base $R_A=(R_1,R_2)$ $\dim R_A=2$

$C_1=(1,2,5)\in\mathbb{R}^3$ $C_2=(3,5,13)\in\mathbb{R}^3$ $C_3=(-1,7,13)\in\mathbb{R}^3$ $C_4=(0,1,2)\in\mathbb{R}^3$

$C_A=L(C_1,C_2,C_3,C_4)\subseteq\mathbb{R}^3$

-SCARTI

C_1 e C_2 li tengo perché $C_2\neq kC_1$

$C_3\in L(C_1,C_2)=?$ $\qquad (-1,7,13)=a\cdot(1,2,5)+b\cdot(3,5,13)$

$\begin{cases}a+3b=-1\\2a+5b=7\\5a+13b=13\end{cases}$ $\begin{cases}a=26\\b=-9\\+130-117=13 \text{ sì}\end{cases}$ $\quad$ quindi scarto C_3 $\quad C_3=26C_1+(-9)C_2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

RIDURRE B PER RIGHE

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & \boxed{2} & 8 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow R_2 \Rightarrow R_2 - R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = B_{r.r.} \quad \rho(B_{r.r.}) = 2 = \rho$$

$R_B = L(R_1, R_2) = L(R_1, R_2 - R_1)$

RIDURRE A PER RIGHE

$$R_4 \Leftrightarrow R_1 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad R_3 \Rightarrow R_3 - 2R_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \Rightarrow R_4 - \frac{1}{2}R_1 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad R_4 \rightarrow R_4 + R_2 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A_{r.r.}$$

$\mathrm{DIM}(R_{A_{r.r.}}) = \mathrm{DIM}\, R_A = 3 = \rho(A)$

$R_A = (B_1, B_2, B_3) \quad B_1 = (2,2,4,2) \quad B_2(0,1,1,0) \quad B_3 = (0,0,0,2)$

APPLICAZIONE AI SOTTOSPAZI DI K^n

SIANO DATI $v_1, v_2, \dots, v_m \in K^n$ E SIA $W = L(v_1, v_2, \dots, v_m)$ IL SOTTOSPAZIO DI K^n DA ESSI GENERATO.

SI VUOL TROVARE $\mathrm{DIM}(W)$ E UNA BASE DI W.

- SI FORMI LA MATRICE $A \in K^{m,n}$ AVENTE PER RIGHE I VETTORI $v_1, v_2, \dots, v_m$ DUNQUE $W =$
- SI RIDUCA A PER RIGHE E SIA $A_{r.r.}$ LA MATRICE OTTENUTA
- $\rho(A) = \rho(A_{r.r.}) = \mathrm{DIM}(W)$
- LE RIGHE NON NULLE DI $A_{r.r.}$ DANNO UNA BASE DI W

$v_1 = (1,1,1,2) \quad v_2 = (-1,2,h,0) \quad v_3 = (2,-1,-1,2) \quad W = L(v_1, v_2, v_3)$

DIM W, BASE DI W AL VARIARE DI $h \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & h & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad R_3 \Rightarrow R_3 - R_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & h & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 \Rightarrow R_3 + R_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & h & 0 \\ 0 & 0 & h-2 & 0 \end{pmatrix}$$

- SE $h = 2$ $\quad A_{r.r.} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{DIM}(A_{r.r.}) = \mathrm{DIM}(A) = 2$

BASE DI $W = (b_1, b_2) \quad b_1(1,1,1,2) \quad b_2(-1,2,2,0$

- SE $h \neq 2$ $\quad \mathrm{DIM}\, R_A = \mathrm{DIM}\, W_3 \quad$ BASE DI $W = (v_1, v_2, v_3)$ (L.I.)

BASE DI $W = (b_1, b_2, b_3) \quad b_1 = v_1 \quad b_2 = v_2 \quad b_3 = (0,0,h-2,0)$

$-h=0$

$$A\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&4&0&0\end{pmatrix} R_2 \longleftrightarrow R_3 \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&4&0&0\end{pmatrix} R_4 \to R_4-4R_3 \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

DIM $W=3$ BASE DI $W=(p_1,p_2,p_3)$

$-h=1$

$$A\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}d_1\\d_2\\d_3\\ \\\end{array}$$

DIM $W=3$ BASE DI $W=(d_1,d_2,d_3)$

$p_1(x)=x+2x^2$ $p_2(x)=-1+x$ $p_3(x)=1+x^3$ $p_4(x)=4x$

$D=(p_1,p_2,p_3,p_4)$ BASE DI $\mathbb{R}_3[x]$

COMPONENTI DI $p(x)=1-x^3$ RISPETTO A D

SCRIVO LA MATRICE CHE HA PER COMPONENTI DI p_1,p_2,p_3,p_4,p RISPETTO ALLA BASE STANDARD $B=(1,x,x^2,x^3)$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\-1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&4&0&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix} R_4 \to R_4-4R_2 \begin{pmatrix}0&1&2^*&0\\-1&1^*&0&0\\1&0&0&1\\4&0&0&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix} R_5 \to R_5+R_3 \begin{pmatrix}0&1&2&0\\-1&1&0&0\\1&0&0&1\\4&0&0&0\\2&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$R_5 \to 2R_5-R_4 \begin{pmatrix}0&1&2&0\\-1&1&0&0\\1&0&0&1\\4&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}p_1\\p_2\\p_3\\p_4-4p_2\\2\cdot(p+p_3)-(p_4-4p_2)\end{array}$$

$p=-2p_2-p_3+\frac{1}{2}p_4$

LE COMPONENTI DI p RISPETTO ALLA BASE $D=(p_1,p_2,p_3,p_4)$ SONO $(0,-2,-1,\frac{1}{2})$

PRODOTTO DI MATRICI RIGHE PER COLONNE

$A\cdot B$ IL NUMERO DI COLONNE DI A DEV'ESSERE UGUALE AL NUMERO DI RIGHE DI B

$$A\in K^{m,n},\ B\in K^{n,p} \Rightarrow C=A\cdot B\in K^{m,p}$$

$C_{hk}=$ (RIGA h-ESIMA DI A)$\cdot$(COLONNA k-ESIMA DI B)

ESEMPIO

$$A\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&0\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}1&2&4&-1\\0&1&4&0\\1&3&4&0\end{pmatrix} \quad C=A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+3\cdot1 & 2\cdot1+2\cdot1+3\cdot3 & 4+8+12 & -1+0+\\-1+0+0 & -2+1 & -4+4+0 & 1+0+\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}4&13&24&-1\\-1&-1&0&1\end{pmatrix} \quad C\in\mathbb{R}^{2,4}$$