NUMERO: 605 DATA: 0409/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Francia

MATERIA: Analisi Matematica II
Prof. Camporesi

SUMMATORIE

$$\sum_{K=1}^{n} a_K = a_1 + a_2 + a_n$$

PROPRIETÀ:

- $\sum_{K=1}^{n} (a_K + b_K) = \sum_{K=1}^{n} a_K + \sum_{K=1}^{n} b_K$

- $\sum_{K=1}^{n} c\, a_K = c \cdot \sum_{K=1}^{n} a_K$

ESEMPIO: LA PROGRESSIONE GEOMETRICA

$x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{K=0}^{n} x^K = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \boxed{\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \forall x \neq 1}$$

DIMOSTRAZIONE

$(1-x) \cdot (1 + x + x^2 + \ldots + x^n)$

$1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \ldots + \cancel{x^n} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \ldots = \cancel{x^n} - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}$

SE $x = 1$ SI HA:

$$\sum_{K=0}^{n} 1^K = n+1$$

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON $\binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!}$

$x, y \in \mathbb{R}$

$$(x+y)^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} \cdot x^{n-K} \cdot y^K$$

$$\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n-2} x^2 y^{n-2} + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

SERIE NUMERICHE

VOGLIAMO DARE SIGNIFICATO A $\sum_{K=0}^{\infty} a_K = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

L'IDEA È DI FARE IL $\lim_{n \to \infty} (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$

$a_n \ (n \geq 0)$ SUCCESSIONE REALE.

DEFINIAMO UN'ALTRA SUCCESSIONE

$S_0 = a_0 \quad S_1 = a_0 + a_1 \quad S_2 = a_0 + a_1 + a_2$

$S_n = \sum_{K=0}^{n} a_K = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

QUESTA SUCCESSIONE S_n SI CHIAMA SERIE DI TERMINI a_n; PER n FISSATO S_n SI CHIAMA SOMMA PARZIALE (O RIDOTTA) ENNESIMA DELLA SERIE

ESEMPIO: RAPPRESENTAZIONE DECIMALE DI UN NUMERO REALE.

$x>0,\ x\in\mathbb{R}$

$x=a_0,a_1a_2a_3a_4\ldots \quad a_0\in\mathbb{N};\quad 0\le a_j\le 9\ \forall j=1,2,3,4\ldots$

$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\frac{a_3}{1000}+\ldots$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$

C'È UNA RELAZIONE TRA LA SERIE GEOMETRICA E GLI ALLINEAMENTI FINITI MA PERIODICI

ESEMPIO:

$0,\overline{3}=0,333333\ldots 3$

$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}=3\cdot\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=3\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$

NUMERI PERIODICI

$0,\overline{31}=\frac{31}{99}\qquad 0,3\overline{4}=\frac{34-3}{90}=\frac{31}{90}$

$0,\overline{9}=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}=1\qquad 9\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=9\cdot\frac{1}{9}=1$

SERIE DI MENGOLI

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$

$\frac{1}{n\,(n+1)}=\frac{(1+n)-n}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=a_n$

$S_1=1-\frac{1}{2}=a_1\qquad S_2=a_1+a_2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\qquad S_3=a_1+a_2+a_3=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}$

$S_n=1-\frac{1}{n+1}\qquad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

LA SERIE DI MENGOLI È CONVERGENTE E LA SUA SOMMA VALE 1

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1$

SERIE TELESCOPICHE

IN GENERALE $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ SI DICE TELESCOPICA SE a_n SI PUÒ SCRIVERE COME $a_n=b_n-b_{n+1}$ DOVE b_n È UN'ALTRA SUCCESSIONE NOTA

$S_1=b_1-b_2=a_1\qquad S_2=a_1+a_2=b_1-b_2+b_2-b_3$

$S_n=b_1-b_{n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(b_1-b_{n+1})$

ESEMPIO 2

$a_n = 1 \quad \forall n$

$\sum_1^\infty a_n = +\infty$

$b_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)} - 1 \qquad \sum_1^\infty b_n = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n \cdot (n+1)} - 1\right) = \sum_1^\infty \frac{1}{n \cdot (n+1)} - \sum_1^\infty 1 = 1 - \infty = -\infty$

$\sum_1^\infty (a_n + b_n) = +\infty - \infty \qquad \sum_1^\infty \left(1 + \frac{1}{n \cdot (n+1)} - 1\right) = 1$

TEOREMA CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA SERIE

SE LA SERIE $\sum_0^\infty a_n$ CONVERGE ALLORA $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

DIMOSTRAZIONE

$S_n - S_{n-1} = (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$

$S_n - S_{n-1} = a_n$

- PASSANDO AL LIMITE PER $n \to \infty$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}$

SI OTTIENE

$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n$

IL TEOREMA SI USA SPESSO NELLA FORMA CONTRONOMINALE:

SE $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ ALLORA LA SOMMA DEGLI a_n $\sum_0^\infty a_n$ NON CONVERGE

ESEMPI

1) $\sum_1^\infty \frac{3n^2+n}{5n^2+7n+1} \to \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{5} \neq 0$, LA SERIE NON CONVERGE

2) $\sum_1^\infty \frac{3^n}{n^{10}} \to \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^{10}} = +\infty \neq 0$ LA SERIE NON CONVERGE

3) $\sum_1^\infty \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$, LA SERIE NON CONVERGE

4) $\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n^3}{n^2+1} \to \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^2+1}$ = NON ESISTE IL LIMITE, QUINDI LA SERIE NON CONVERGE

5) $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \lim_{n\to\infty} n^{-1/n} = e^{-\frac{1}{n}\log n} = e^{-\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1 \neq 0$ LA SERIE NON CONVERGE

6) $\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \to \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1}$ = NON ESISTE IL LIMITE, QUINDI LA SERIE NON CONVERG

OPPURE NOTO CHE $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$

NEL NOSTRO CASO $\left|(-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1}\right| \to 1 \quad a_n \to 1$ LA SERIE NON CONVERGE

IL TEOREMA NON SI PUÒ INVERTIRE, CIOÈ SE $a_n \to 0$ NON È DETTO CHE $\sum_1^n a_n$ CONVERGA

ESEMPI

1) $\sum_1^\infty \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$ PERÒ $\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log 1 = 0$

2) $\sum_1^\infty \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ SERIE ARMONICA

VEDREMO CHE QUESTA DIVERGE A $+\infty$ ANCHE SE $\lim \frac{1}{n} = 0$

TEOREMI

- $S = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$
- $e - S_n < \frac{1}{n \cdot n!}$
- $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$e \simeq 2,718281\boxed{8}2845904\ldots$

$$S_{10} = \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots + \frac{1}{10!} = 2,718281\boxed{8}01$$

$$e - S^{10} \leq 2,7459 \cdot 10^{-8} < \frac{1}{10 \cdot 10!} = 2,755 \cdot 10^{-8}$$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots$

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)} \quad \forall n \qquad n(n+1) \leq 2n^2 \quad n^2 + n \leq 2n^2 \quad n^2 - n \geq 0 \quad n(n-1) \geq 0$ VERA $\forall n \geq 1$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2$ CONVERGE

EULERO HA DIMOSTRATO CHE $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \simeq 1,64493406084 82$

8) SERIE ARMONICA GENERALIZZATA ($\alpha > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{CONVERGE SE } \alpha > 1 \\ \text{DIVERGE SE } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE

$\alpha > 2 \Rightarrow n^\alpha \geq n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n^2}$ QUINDI CONVERGE

$0 < \alpha < 1 \ldots n^\alpha \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ QUINDI DIVERGE

CASO CRITICO $1 < \alpha < 2$ (CRITERIO DI MCLAURIN)

ESEMPIO (CONFRONTO)

$x \in \mathbb{R},\ x > 0 \qquad x = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$

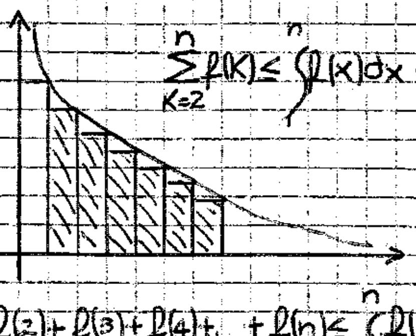
$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \ldots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \qquad 0 \leq a_n \leq 9 \qquad \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$

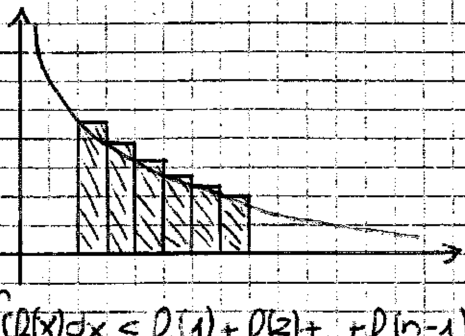
LA SERIE $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ È MAGGIORATA DA $9 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 9 \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$ = SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE

TEOREMA (CRITERIO DI MCLAURIN)

SE $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ È UNA FUNZIONE POSITIVA E DECRESCENTE ALLORA $\int^{\infty} f(x)\,dx$ E $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO O ENTRAMBE CONVERGONO O ENTRAMBE DIVERGONO.

$$\sum_{K=2}^{n} f(K) \leq \int_{1}^{n} f(x)\,dx \leq \sum_{K=1}^{n-1} f(K)$$





$f(2) + f(3) + f(4) + \ldots + f(n) \leq \int^{n} f(x)\,dx \qquad \int^{n} f(x)\,dx \leq f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$

5) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n+3}$ $\quad \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+3} \sim \frac{c}{n}$ $\alpha = 1 \Rightarrow$ DIVERGE

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$ $\quad \frac{n!}{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n!} \sim \frac{1}{(n+2)\cdot(n+1)} \sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ CONVERGE

7) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(n^3+5)\sqrt[n]{n}}$ $\quad \sqrt[n]{n} \to 1 \quad \frac{1}{n^n} = e^{\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1$

$\frac{1}{(n^3+5)\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n^3}$ $\quad \alpha = 3 > 1$ CONVERGE

8) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt{n+5}}$ $\quad \sqrt[n]{2} = 2^{1/n} = 2^0 = 1$

$\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt{n+5}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$ $\quad \alpha = \frac{1}{2} < 1$ DIVERGE

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ DIVERGE

$\operatorname{sen} x \sim x \ (x \to 0) \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$

- $\sum_{1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n^2}$ CONVERGE $\quad \operatorname{sen}\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$
- $\sum_{1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ $\quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \ (x \to 0)$

$1-\cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} \Rightarrow$ CONVERGE

- $\sum_{1}^{\infty} \left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right) =$

$e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ $\quad 1-e^{-\frac{1}{n}} = 1-\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{n}$ DIVERGE

- $\sum_{1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right)$ $\quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ $\quad \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \frac{1}{3}\frac{1}{n^2}$ CONVERGE

10)

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ $\quad \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$ DIVERGE

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots$

$\frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2n} \Rightarrow$ DIVERGE

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ $\quad \frac{\log n}{n^2} \not\sim \frac{K}{n^\alpha}$ $\quad \frac{\log n}{n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ MA NON HA UN ORDINE α RISPETTO A $\frac{1}{n}$

PERÒ SE $\frac{\log n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ PER UN CERTO $\alpha > 1$ ALLORA LA SERIE CONVERGERÀ PER IL PUNTO 2 DEL TEOREMA DEL CONFRONTO ASINTOTICO.

1 $\quad$ 3/2 $\quad$ 2

$\frac{\frac{\log n}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{\log n}{n^{1/2}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $\quad \frac{\log n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ CONVERGE

TEOREMA (CRITERIO DEL RAPPORTO)

SIA $\sum_{1}^{\infty} a_n$ UNA SERIE A TERMINI POSITIVI ($a_n > 0\ \forall n$) ED ESISTA $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ALL...

1) $\ell > 1$ (INCLUSO $\ell = +\infty$) LA SERIE DIVERGE

2) $\ell < 1$ (INCLUSO $\ell = 0$) LA SERIE CONVERGE

3) $\ell = 1$ IL CASO È DUBBIO E IL CRITERIO È INEFFICACE

ESEMPI

3) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n} = \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE

4) $\sum_{1}^{\infty} 2^n \cdot 3^{-\sqrt{n}}$

$\sqrt[n]{2^n \cdot 3^{-\sqrt{n}}} = 2 \cdot 3^{-\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}} = 2 \cdot 3^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 2 > 1$ DIVERGE

5) $\sum_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

$\sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n} = 1 - \frac{1}{n^2} \to 1$ (CASO DUBBIO)

$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2 \cdot \frac{1}{n}}\right] = e^0 = 1 \neq 0$ LA SERIE DIVERGE PE... LA CONDIZIONE NECESSA... ($a_n \to 0$)

6) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(1+\log 2)^n}{n^3 (\log 5)^n}$

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1+\log 2}{\underbrace{(\sqrt[n]{n})^3}_{\to 1} \cdot \log 5} \to \frac{1+\log 2}{\log 5}$

$\frac{1+\log 2}{\log 5} > 1 \quad 1 + \log 2 > \log 5 \quad 1 > \log \frac{5}{2} \quad e > \frac{5}{2}$ VERO

$\Downarrow$

LA SERIE DIVERGE

ESEMPI (RAPPORTO)

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)\,n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$ CONVERGE

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{n!} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^7}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^7} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^7 \cdot \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$ CONVERGE.

NOTIAMO CHE QUESTO IMPLICA $\lim_{n\to\infty} \frac{n^7}{n!} = 0$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $x > 0$ SERIE ESPONENZIALE

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0 < 1$ CONVERGE $\forall x > 0$

SE $\sum_1 |a_n|$ CONVERGE ALLORA PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ANCHE $\sum_0 a_n^+$ E $\sum_0 a_n^-$ CONVERGONO. MA ALLORA CONVERGE ANCHE $\sum_0^\infty a_n = \sum_0^\infty (a_n^+ - a_n^-) = \sum_0^\infty a_n^+ - \sum_0^\infty a_n^-$

DIMOSTRAZIONE $|\sum_0^\infty a_n| \leq \sum_0^\infty |a_n|$

$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad S'_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$

$|a_0 + a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|$

$|S_n| \leq S'_n$

PASSANDO AL LIMITE

$\lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} S'_n$ CIOÈ

$|\lim S_n| = \lim S'_n$ CIOÈ $|\sum_0^\infty a_n| \leq \sum_0^\infty |a_n|$

DEFINIZIONE → LA SERIE $\sum_0^\infty a_n$ SI DICE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE SE LA SERIE $\sum_0^\infty |a_n|$ CONVERGE.

LA SERIE $\sum_0^\infty a_n$ SI DICE CONVERGENTE SOLO SEMPLICEMENTE (O NON ASSOLUTAMENTE) SE $\sum_0^\infty a_n$ CONVERGE MA $\sum_0^\infty |a_n|$ DIVERGE.

IL TEOREMA DICE CHE UNA SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE È CONVERGENTE, IL VICEVERSA NON VALE, CIOÈ ESISTONO SERIE CONVERGENTI SOLO SEMPLICEMENTE, TIPICO ESEMPIO È QUELLO DELLA SERIE ARMONICA A SEGNI ALTERNI

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

$\sum_1^\infty |a_n| = \sum_1^\infty \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_1^\infty \frac{1}{n}$ DIVERGE, INOLTRE VEDREMO CHE LA SERIE INIZIALE CONVERGE

ESEMPI

1) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos n}{n^2}$ CONSIDERO LA SERIE DEI VALORI ASSOLUTI $\sum_1^\infty \left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$

$\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ QUINDI LA SERIE PROPOSTA INIZIALMENTE CONVERGE ASSOLUTAMENTE

2) $\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n+1}{n^3+n+7}$

$\left|(-1)^n \frac{n+1}{n^3+n+7}\right| \sim \frac{n}{n^3} \sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE ASSOLUTAMENTE

3) $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}\,(n+2)}$ $\quad |a_n| = \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}\,(n+2)} \sim \frac{\pi/2}{\sqrt{n}\,(n+2)} \sim \frac{\pi/2}{n^{3/2}}$

$\alpha = \frac{3}{2} > 1$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

4) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ $\quad \alpha > 0 \quad |a_n| = \frac{1}{n^\alpha}$

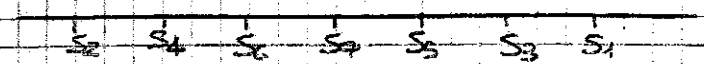
SE $\alpha > 1$ LA SERIE CONVERGE ASSOLUTAMENTE

VEDREMO CHE SE $0 < \alpha \leq 1$ LA SERIE CONVERGE MA SOLO SEMPLICEMENTE.

INOLTRE S_{2n} È LIMITATA SUPERIORMENTE PERCHÉ $S_{2n} \le S_{2n+1} \le S_{2n-1} \le S_3 \le S_1$ E

ANALOGAMENTE S_{2n+1} È LIMITATA INFERIORMENTE DA S_2:

$S_{2n+1} \ge S_{2n} \ge S_{2n-2} \ge S_4 \ge S_2$



PER IL TEOREMA SUI LIMITI DI SUCCESSIONI MONOTONE $\exists \lim_{n\to+\infty} S_{2n} \ge S_2$

$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$ FINITI

ESSENDO $\underset{S_2}{S_{2n+1}} = \underset{S_1}{S_{2n}} + \underset{0}{a_{2n+1}}$

$S_2 = S_1$

$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ LE PARI SI APPROSSIMANO PER ECCESSO

LE DISPARI SI APPROSSIMANO PER DIFETTO.

ESEMPIO

1) $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $a_n = \frac{1}{n}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$a_{n+1} \overset{?}{\le} a_n \Rightarrow \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$ VERA $\forall n \Rightarrow n+1 \ge n$ VERA PER LA LEGGE DI LEIBNIZ.

ESEMPI (LEIBNIZ)

1) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ $\alpha > 0$

$\alpha > 1$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

$0 < \alpha < 1$ CONVERGE SOLO SEMPLICEMENTE PERCHÉ $\frac{1}{n^\alpha}$ È DECRESCENTE E TENDE A 0

2) STUDIARE LA CONVERGENZA $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n^2+n}$

$a_n = \frac{n-1}{n^2+n}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+n} = 0$

$a_{n+1} \overset{?}{\le} a_n$ $\frac{n}{(n+1)^2+(n+1)} \overset{?}{\le} \frac{n-1}{n^2+n}$ $\frac{n}{(n+1)\cdot(n+2)} \le \frac{n-1}{n\cdot(n+1)}$ $n^2 \le (n+2)\cdot(n-1)$

$\cancel{n^2} \le \cancel{n^2} + n - 2$ $n \ge 2$ VER[A]

CONVERGE

6) $\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1} a_n \qquad a_n = \begin{cases} 1/n^2 & n \text{ DISPARI} \\ 1/n^4 & n \text{ PARI} \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ PERÒ a_n NON È DECRESCENTE

$a_n = 1, \frac{1}{16}, \frac{1}{9}, \frac{1}{256}, \frac{1}{25}$

$|(-1)^{n-1} a_n| = a_n = \begin{cases} 1/n^2 & n \text{ DISPARI} \\ 1/n^4 & n \text{ PARI} \end{cases}$

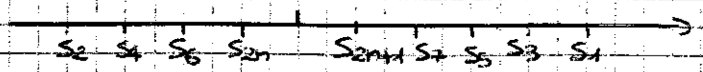
$\Rightarrow a_n \le \frac{1}{n^2} \ \forall n$

$\sum a_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum (-1)^{n-1} a_n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE.

APPROSSIMAZIONE DELLA SOMMA DI UNA SERIE A SEGNI ALTERNI

$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ (VALGONO LE IPOTESI DI LEIBNIZ $\quad S \in \mathbb{R}$

$$S_{2n} \le S \le S_{2n+1}$$



$S - S_{2n} \le S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \qquad S - S_{2n} \le a_{2n+1}$

$S_{2n-1} - S \le S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n} \qquad S_{2n-1} - S \le a_{2n}$

$|S - S_n| \le a_{n+1} \ \forall n$

L'ERRORE $R_n = |S - S_n|$ CHE SI COMMETTE APPROSSIMANDO S CON S_n È $\le a_{n+1}$, CIOÈ È $\le$ DEL VALORE ASSOLUTO $|(-1)^n (a_{n+1})|$ DEL PRIMO TERMINE TRASCURATO IN:

$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots (-1)^{n-1} a_n$.

SE SI CHIEDE DI CALCOLARE $\varepsilon > 0$ VERIFICATO È SUFFICIENTE RICHIEDERE CHE $a_{n+1} < \varepsilon$ PERCHÉ ALLORA SARÀ $|S - S_n| \le a_{n+1} < \varepsilon$, RISOLVENDO $a_{n+1} < \varepsilon$ OTTERRÒ $n > \bar{n} \Rightarrow n \ge \bar{n} + 1$ POI CALCOLO $S_{\bar{n}+1}$

ESEMPI

1) CALCOLARE $S = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ CON ERRORE $< \frac{1}{10}$

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1} < \frac{1}{10} \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10} \qquad n+1 \ge 10 \quad n > 9 \quad n \ge 10 \Rightarrow S \simeq S_{10}$

$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - 1/10 = 0{,}6456\,3492$

DIMOSTREREMO CHE $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2 \qquad |S - S_{10}| = 0{,}04751 < \frac{1}{10}$

2) CALCOLARE $S = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ CON ERRORE $< \frac{1}{100}$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \quad n+1 > 100 \quad n > 99 \quad n \ge 100 \quad S \simeq S_{100} \quad |S - S_{100}| < 1/100$

3) CALCOLARE $\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ CON ERRORE $< \frac{1}{1000} \qquad 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \ldots$

$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \qquad \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad a_n = \frac{1}{(n-1)!} \quad a_{n+1} < \frac{1}{1000}$

$\frac{1}{n!} < \frac{1}{1000} \Rightarrow n! > 1000 \qquad n \ge 7 \quad S \simeq S_7 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \simeq 0{,}368055$

VEDREMO CHE $S = \frac{1}{[illegible]} \simeq 0{,}36787944 \qquad |S - S_7| = 0{,}000176112 < \frac{1}{[illegible]}$

$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}$ $\quad a_n = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}$ $\quad \lim a_n = 0 \quad a_{n+1} \leq a_n$

$\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{n+1} \leq \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}$ $\quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \leq \frac{n+1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leq 1+\frac{1}{n}$ VERA $\forall n$

ESEMPIO

$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\cdot(1+\frac{1}{n})^n}$ $\quad a_n = \frac{1}{n(1+\frac{1}{n})^n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow \frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \leq \frac{1}{n(1+\frac{1}{n})^n}$ $\quad a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\right)$ $\frac{1}{n}$ DECRESCENTE

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ CRESCENTE (TENDE AD e)

$\Downarrow$

$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$ DECRESCENTE $\Rightarrow a_n$ DECRESCENTE PERCHÉ RAPPORTO DI 2 SUCCESSIONI

CONVERGE PER LEIBNIZ

SERIE DI POTENZE

UNA SERIE DI POTENZE È UNA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ ①

DOVE GLI a_n SONO NUMERI REALI ASSEGNATI (I COEFFICIENTI DELLA SERIE DI POTEN

E X È UNA VARIABILE REALE.

PIÙ IN GENERALE UNA SERIE DI POTENZE IN $(x-x_0)$, CIOÈ CENTRATA IN x_0 È:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$ ②

POSSIAMO PASSARE DA ② A ① CON LA TRASLAZIONE $x-x_0=t$. LE SERIE DI POTENZE GENERALIZZANO I POLINOMI.

POLINOMI DI GRADO INFINITO. ABBIAMO GIÀ VISTO ALCUNI ESEMPI

$\sum_0^{\infty} x^n$; $\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $\sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

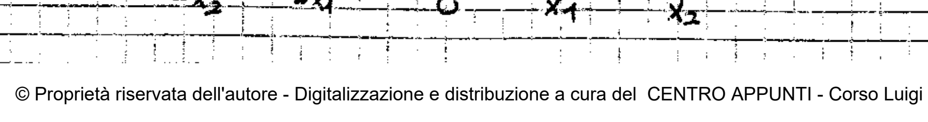
DATA LA SERIE ① VOGLIAMO TROVARE I VALORI DI $x \in \mathbb{R}$ TALI CHE LA ① CONVER CIOÈ DETERMINARE L'INSIEME DI CONVERGENZA: $A = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ CONVERGE}\}$

VEDREMO CHE $\exists R \geq 0$ CHE SI CHIAMERÀ RAGGIO DI CONVERGENZA TALE CHE LA SERIE CONVERGE SE $|x| < R$ E NON CONVERGE SE $|x| > R$.

OSSERVIAMO CHE LA ① CONVERGE SEMPRE SE $x=0$ DOVE SI RIDUCE A a_0

PROPOSIZIONE $\rightarrow$ SE LA ① CONVERGE IN UN PUNTO $x_1 \neq 0$ ALLORA ESSA CONVERGE ASSOLUTAMENTE $\forall x : |x| < |x_1|$

SE LA ① NON CONVERGE IN UN PUNTO $x_2 \neq 0$ ALLORA ESSA NON CONVERGE SE $\forall x: |x|$



PER TROVARE R:

TEOREMA (CRITERIO DELLA RADICE)

DATA LA SERIE DI POTENZE $\sum_0^\infty a_n x^n$ SUPPONIAMO CHE ESISTA

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 0 = \ell$ ALLORA:

1) SE $\ell = +\infty \Rightarrow R = 0$
2) SE $\ell = 0 \Rightarrow R = +\infty$
3) SE $\ell > 0$ $\ell \in \mathbb{R} \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$

QUINDI IN OGNI CASO $R = \frac{1}{\ell}$

TEOREMA (CRITERIO DEL RAPPORTO)

DATA $\sum_0^\infty a_n x^n$ CON $a_n \neq 0$ $\forall n$ ESISTA:

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \geq 0$ ALLORA:

1) SE $\ell = +\infty \Rightarrow R = 0$
2) SE $\ell = 0 \Rightarrow R = +\infty$
3) SE $\ell > 0$, $\ell \in \mathbb{R} \Rightarrow R = 1/\ell$

DIMOSTRAZIONE (RADICE):

SIA $x \neq 0$ E CONSIDERO $\sum_{n=0}^\infty |a_n x^n|$ A CUI APPLICO IL CRITERIO DELLA RADICE

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \ell$

1) SE $\ell = +\infty \Rightarrow$ NON CONVERGE MAI SE $x \neq 0$ $R = 0$

$|x|\ell = |x| \cdot (+\infty) = +\infty > 1$ NON CONVERGE MA

2) SE $\ell = 0 \Rightarrow |x| \cdot \ell = |x| \cdot 0 < 1$ LA SERIE CONVERGE $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow R = +\infty$

3) SE $\ell > 0$, $\ell \in \mathbb{R}$ LA SERIE CONVERGE SE $|x|\ell < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\ell}$ E NON CONVERGE SE $|x|\ell > 1$ CIOE $|x| > \frac{1}{\ell} \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$

ESEMPI

1) $\sum_{n=0}^\infty x^n$ SERIE GENERATRICE: $a_n = 1$ $\forall n$ $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ $\forall n \to 1 \Rightarrow R = 1$

OPPURE $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ $\forall n \to 1 \Rightarrow R = 1$

PER $x = \pm 1$ NON CONVERGE $\Rightarrow A = (-1, 1)$

2) $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$ $a_n = \frac{1}{n!}$

RAPPORTO: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $R = +\infty$

$\Rightarrow R = \frac{1}{0} = +\infty \Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE $\forall x$ REALE $A = (-\infty, +\infty)$

2° METODO: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n+n3^n}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n$ È UNA SERIE DI POTENZE CENTRATA IN $x_0=-\frac{1}{2}$

$S = x - x_0 = x+\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n+n3^n} \cdot S^n$

$\sqrt[n]{\frac{2^n}{5^n n3^n}} = \frac{2}{5}$ $\qquad R'' = \frac{5}{2} \cdot |S| < \frac{5}{2}$

QUINDI CONVERGE $|x-x_0|<\frac{5}{2}$ CIOÈ $|x+\frac{1}{2}|<\frac{5}{2} \Rightarrow R=\frac{5}{2}$

CONVERGE SE $-\frac{5}{2} < |x-x_0| < \frac{5}{2}$ $\quad -3<x<2$ COME PER IL PRIMO METODO.

OSSERVAZIONE $\rightarrow$ SE $a_n>0$, $b_n>0$ E $a_n \sim b_n$ $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=1\right)$

ALLORA $\sum_0 a_n x^n$ E $\sum_0 b_n x^n$ HANNO LO STESSO RAGGIO DI CONVERGENZA $R_1=R_2$

NOTA BENE: AGLI ESTREMI, PIÙ PRECISAMENTE PER $x=-R$, POSSONO PERÒ AVERE COMPORTAMENTI DIVERSI

$\sum_1^{\infty} \log\left(\frac{n+2}{n}\right) x^n$ HA LO STESSO R DELLA SERIE $2\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ $\quad R=1$

$a_n = \log\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$ $(n\to\infty)$ $\quad \log(1+x) \sim x$ $(x\to 0)$

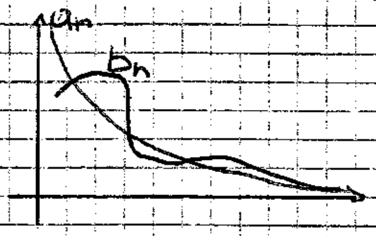
ESTREMI: $x=1 \longrightarrow \sum_1^{\infty} \log\left(1+\frac{2}{n}\right)$ DIVERGE PER CONFRONTO ASINTOTICO

$\log\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$ $\qquad x=-1 \rightarrow \sum_1^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{2}{n}\right)$

LEIBNIZ $\log\left(1+\frac{2}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\qquad \log\left(1+\frac{2}{n+1}\right) \overset{?}{\leq} \log\left(1+\frac{2}{n}\right)$ $\quad \cancel{1}+\frac{2}{n+1} \leq \cancel{1}+\frac{2}{n}$ VERA $\forall$

NON POSSO CONCLUDERE LA MONOTONIA DI $\log\left(1+\frac{2}{n}\right)$ DICENDO CHE È $\sim \frac{2}{n}$.

IN GENERALE SE a_n È DECRESCENTE E $a_n \sim b_n$ NON È DETTO CHE b_n SIA DECRESCE[NTE]



BISOGNA VERIFICARE CHE $b_{n+1} \leq b_n$ DIRETTAMENTE

OPERAZIONI SULLE SERIE DI POTENZE

TEOREMA

SE $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ HA RAGGIO R_1 E $\sum_0^{\infty} b_n x^n$ HA RAGGIO R_2 ALLORA LA **SERIE SOMMA** È

$\sum_0^{\infty} (a_n+b_n)x^n$ E HA RAGGIO DI CONVERGENZA $R \geq \min(R_1,R_2)$ E PRECISAMENTE:

- $R_1 \neq R_2 \Rightarrow R=\min(R_1,R_2)$
- $R_1 = R_2 \Rightarrow R \geq R_1$

INOLTRE $\forall x \in (-R,R)$ VALE $\sum_0^{\infty} (a_n+b_n)x^n = \sum_0^{\infty} a_n x^n + \sum_0^{\infty} b_n x^n$

LE FUNZIONI $f(x)$ CHE SONO LA SOMMA DI SERIE DI POTENZE CIOE $f(x)=\sum_{n=0} a_n x^n$ $\forall x \in (-R,R)$ SI CHIAMANO FUNZIONI ANALITICHE.

TEOREMA

SIA $f(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$ UNA FUNZIONE ANALITICA DEFINITA PER $-R<x<R$, $R=$ RAGGIO DI CONVERGENZA, ALLORA $f(x)$ È CONTINUA SU $(-R,R)$ CIOÈ $\forall x_0 \in (-R,R)$ VALE $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ CIOÈ $\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^\infty a_n x^n=\sum_{n=0}^\infty a_n x_0^n$ CIOÈ L'OPERAZIONE DI LIMITE SI PUÒ PORTARE DENTRO LA SOMMA E FARE IL LIMITE TERMINE A TERMINE $\lim_{x\to x_0}\sum_0^\infty a_n x^n=\sum_0^\infty \lim_{x\to x_0}(a_n x^n)$

SE INVECE $x_0=\pm R$:

- $x_0=R$: SE LA SERIE $\sum_0^\infty a_n R^n$ CONVERGE ALLORA $\lim_{x\to R^-} f(x)=\sum_0^\infty a_n R^n$
- $x_0=-R$: SE LA SERIE $\sum_0^\infty a_n(-R)^n$ CONVERGE $\lim_{x\to -R^+} f(x)=\sum_0^\infty a_n(-R)^n$

QUINDI POSSIAMO ESTENDERE $f(x)$ IN $x=\pm R$ IN TALI CASI

TEOREMA (DI DERIVAZIONE PER SERIE)

SIA $f(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$ ① UNA FUNZIONE ANALITICA DEFINITA PER $x\in(-R,R)$.

ALLORA f È DERIVABILE $\forall x\in(-R,R)$ E VALE:

$\underline{f'(x)=\sum_{n=1}^\infty n a_n x^{n-1}}$ ② QUINDI L'OPERATORE DI DERIVAZIONE $\frac{d}{dx}$

$f'(x)=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f$ SI PUÒ PORTARE DENTRO LA SOMMA DERIVANDO TERMINE A TERMINE

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^\infty a_n x^n=\sum_{n=0}^\infty \frac{d(a_n x^n)}{dx}=\sum_{n=0}^\infty a_n n x^{n-1}$$

INOLTRE LA SERIE ② HA LO STESSO RAGGIO DI CONVERGENZA R DELLA SERIE ①

IN BREVE

$$\frac{d}{dx}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots)=0+a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots=\sum_{n=1}^\infty n a_n x^{n-1}$$

ESEMPIO

1) $f(x)=\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$ $\quad f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$ $\quad R=+\infty$

$$f'(x)=0+1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\frac{4x^3}{4!}=0+1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$$

$f'(x)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ INOLTRE $f(0)=1$

TEOREMA

$e^x=\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE:

SIA $f(x)=\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ $\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)=\frac{d}{dx}(f(x)\cdot e^{-x})=f'(x)\cdot e^{-x}-f(x)\cdot e^{-x}=f(x)\cdot e^{-x}-f(x)e^{-x}=0$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{e^x}=K=$ COSTANTE $\forall x\in\mathbb{R}$ PONENDO $x=0$ $\frac{f(x)}{e^x}=1$ $\quad f(x)=e^x$ $\forall x$

6) $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$

$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$

È FACILE VEDERE COL RAPPORTO CHE $R=+\infty$

$S'(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots=C(x)$

$C'(x)=-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}\pm\dots=-S(x)$ $\quad S(0)=0 \quad C(0)=1$

TEOREMA

$\forall x\in\mathbb{R}\quad \operatorname{sen}x=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos x=\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

DIMOSTRAZIONE

$f(x)=\cos(x)-C(x) \qquad f'(x)=-\operatorname{sen}x+S(x)=-g(x)$

$g(x)=\operatorname{sen}(x)-S(x) \qquad g'(x)=\cos x-C(x)=f(x)$

$\frac{d}{dx}(f^2(x)+g^2(x))=2f(x)\cdot f'(x)+2g(x)g'(x)=-2f(x)g(x)+2g(x)f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f^2(x)+g^2(x)=K=\text{COSTANTE}=0^2+0^2=0 \quad f^2(x)+g^2(x)=0\ \forall x \quad f(x)=0 \quad g(x)=0\ \forall x$

SERIE IN CAMPO COMPLESSO

SIA $z\in\mathbb{C}$ DEFINIAMO L'ESPONENZIALE COMPLESSO $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\dots$

$d(z,z')=(z-z')$ SI DIMOSTRA CHE CONVERGE $\forall z\in\mathbb{C}$

$z=iy$

$e^{iy}=1+iy+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\frac{(iy)^4}{4!}+\frac{(iy)^5}{5!}=1+iy-\frac{y^2}{2!}-\frac{iy^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\frac{iy^5}{3!}$

$\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}\right)+i\cdot\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}\right)=\cos y+i\operatorname{sen}y$

TEOREMA (FORMULE DI EULERO)

$\begin{cases} e^{iy}=\cos y+i\operatorname{sen}y & \forall y\in\mathbb{R}\\ e^{-iy}=\cos y-i\operatorname{sen}y & \forall y\in\mathbb{R}\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\\ \operatorname{sen}y=\frac{e^{iy}-e^{-y}}{2i}\end{cases}$

TEOREMA

SIA $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ UNA FUNZIONE ANALITICA DEFINITA PER $x\in(-R,R)$, R = RAGGIO DI CONVERGENZA ALLORA $f\in C^{\infty}((-R,R))$ E VALE:

$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ QUINDI UNA FUNZIONE ANALITICA È COMPLETAMEN INDIVIDUATA DAL VALORE DI f E DI TUTTE LE SUE DERIVATE NEL CENTRO $x=0$ DE SERIE DI POTENZE. SE $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \quad x\in(x_0-R,x_0+R)$ ALLORA:

$a_n=f^{(n)}(x_0)\Longrightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$

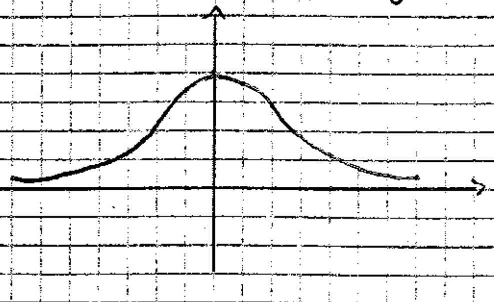
NON SEMPRE $f(x)$ AMMETTE UNA PRIMITIVA ELEMENTARE, ESEMPIO:

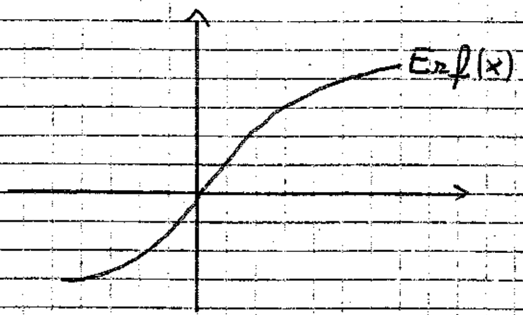
$f(x) = e^{-x^2}, \cos x^2, \operatorname{sen} x^2, \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

PERÒ USANDO LE SERIE DI POTENZE OTTENGO UNA PRIMITIVA COME SERIE DI POTENZE

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \left(Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \right.$ FUNZIONI ERRORI

$$\int_0^x \sum_0^\infty \frac{(-t^2)^n}{n!} dt = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$ CONVERGE $\forall x \in \mathbb{R} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \dots$





SERIE DI TAYLOR

FINORA SIAMO PARTITI DA UNA SERIE DI POTENZE LA CUI SOMMA DEFINIVA UNA FUNZIONE ANALITICA f E ABBIAMO VISTO CHE $f \in C^\infty((-R,R))$ o $f \in C^\infty((x_0-R, x_0+R))$ $R>0$.

SIA ORA I = INTERVALLO DI $\mathbb{R}$ E $f: I \to \mathbb{R}$ DI CLASSE C^∞ SU I $f \in C^\infty(I)$ ED $\exists f^{(n)}(x)$ $\forall x \in I$ FISSATO $x_0 \in I$ CONSIDERIAMO LA SERIE DI TAYLOR DI f CENTRATA IN x_0

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \quad (1)$$

SE $x_0 = 0$ SI CHIAMA SERIE DI McLAURIN DI f. LA SOMMA PARZIALE n-ESIMA NON È ALTRO CHE IL POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE n. $P_{f,x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!}$

SIA $R \geq 0$ IL RAGGIO DI CONVERGENZA DELLA (1)

SIA $R>0$ ALLORA LA (1) CONVERGE PER $x_0 - R < x < x_0 + R$

DOMANDA:

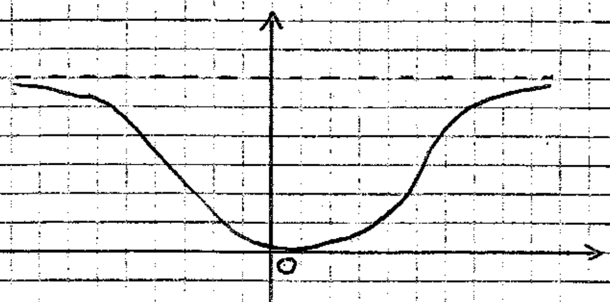
PER $x \in (x_0-R, x_0+R)$ È VERO CHE LA (1) È UGUALE A $f(x)$?

RISPOSTA:

NO IN GENERALE! CIOÈ, NON TUTTE LE FUNZIONI C^∞ SONO ANALITICHE!

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



TEOREMA

UNA $f \in C^\infty(I)$, L'INTERVALLO È SVILUPPABILE IN SERIE DI TAYLOR CENTRATA IN X_0 INTERNO A I) $\Leftrightarrow$ IL RESTO n-ESIMO ⊛ $R_{f,x,n}(x) = f(x) - \sum_{K=0}^{n} \frac{f^{(K)}(x_0)}{K!}(x-x_0)^K$ TENDE A 0 PER $n \to \infty$:

$\lim_{n\to\infty} R_{f,x_0,n}(x) = 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \ (\delta>0)$

PASSANDO AL LIMITE IN ⊛

$$\lim_{n\to\infty} R_{f,x_0,n}(x) = \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - \sum_{K=0}^{n} \frac{f^{(K)}(x_0)}{K!}(x-x_0)^K\right)$$

$$f(x) - \lim_{n\to\infty} \sum_{K=0}^{n} \frac{f^{(K)}(x_0)}{K!}(x-x_0)^K = f(x) - \sum_{K=0}^{\infty} \frac{f^{(K)}(x_0)}{K!}\cdot(x-x_0)^K$$

TEOREMA

SIA $f \in C^\infty(I)$ E SUPPONIAMO CHE $\exists M>0 : |f^{(n)}(x)| \le M \ \forall x \in I \ \forall n \in \mathbb{N}$

ALLORA DATO COMUNQUE X_0 INTERNO A I SI HA CHE f È SVILUPPABILE IN SERIE TAYLOR CENTRATA IN X_0 E QUESTA CONVERGE A $f(x)$ $\forall x \in I$. LA STESSA CONCLUSIONE VALE SE $\exists M, K>0 : |f^{(n)}(x)| \le M\cdot K^n \ \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$

DIMOSTRAZIONE:

DATI $X_0, x \in I$ APPLICO LA FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

$f(x) - \sum_{K=0}^{n} \frac{f^{(K)}(x_0)}{K!}(x-x_0)^K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ DOVE C'È UN PUNTO COMPRESO TRA X_0 E

$\Rightarrow |R_{f,x,n}(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \le \frac{M K^{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ PERCHÉ È DELLA FORMA

$\frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ CON $A = K\cdot|x-x_0|$

ESEMPIO: $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f^{(n)}(x) = \cos x, -\operatorname{sen} x, -\cos x, \operatorname{sen} x.$

$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \pm \operatorname{sen} x, \pm\cos x$

$\Rightarrow |f^{(n)}(x)| \le 1 \quad \forall n \ \forall x$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x$ È SVILUPPABILE IN SERIE DI TAYLOR CENTRATA IN QUALSIASI $X_0 \in \mathbb{R}$

PRENDENDO $X_0 = 0$ E CALCOLANDO $f^{(n)}(0)$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{SE } n \text{ PARI} \\ (-1)^K & \text{SE } n = 2K+1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{(2K+1)!} x^{2K+1}$ CHE È LO SVILUPPO DI McLAURIN DI $\operatorname{sen} x$ GIÀ VISTO.

STESSA COSA PER $\cos x$

IN QUESTO MODO RIOTTENIAMO GLI SVILUPPI IN SERIE DI McLAURIN DELLE FUNZIONI ELEMENTARI e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$

OSSERVAZIONE → SE $\alpha = N \in \mathbb{N}$ $(1+x)^N = \sum_0^\infty \binom{\alpha}{n} x^n$, I COEFFICIENTI BINOMIALI $\binom{\alpha}{n} = 0$ $\forall n \geq N+1$ E SI OTTIENE LO SVILUPPO DELLA POTENZA

$$(1+x)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k$$

ESEMPIO:

$\alpha = 4$

$$\binom{\alpha}{0} = \binom{4}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{1} = \binom{4}{1} = 1, \quad \binom{\alpha}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4\cdot(4-1)}{2},$$

$$\binom{\alpha}{3} = \binom{4}{3} = \frac{4\cdot(4-1)\cdot(4-2)}{3!}, \quad \binom{\alpha}{4} = \binom{4}{4} = \frac{4\cdot(4-1)\cdot(4-2)\cdot(4-3)}{4!}$$

$\binom{\alpha}{n} = 0$ PER $n \geq 5$

ESEMPIO:

$\alpha = 1/2$ $\quad \sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5$

DEFINENDO:

$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2n$ E $(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n \quad |x| < 1$$

SE $\alpha = -\frac{1}{2}$ SI OTTIENE

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$$

OSSERVAZIONE → SE $\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha < 0$ $\quad \alpha = -1, -2, -3, \ldots$

LA SERIE BINOMIALE $\sum_0^\infty \binom{\alpha}{n} x^n$ SI CALCOLA PIÙ VELOCEMENTE PRENDENDO LA SERIE GEOMETRICA $\frac{1}{1+x} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

$\Rightarrow \binom{-1}{n} = (-1)^n$ E CALCOLANDONE LE DERIVATE. ESEMPIO:

$$\alpha = -2 \quad \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-d}{dx} \cdot \frac{1}{1+x} = -\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot n x^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n x^{n-1} = 1 - x = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) x^n$$

$\Rightarrow \binom{-2}{n} = (-1)^n \cdot (n+1)$

SE $\alpha = -3$

$$\frac{1}{(1+x)^3} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \sum_0^\infty (-1)^n \cdot (n+1) x^n = -\frac{1}{2} \sum_0^\infty (-1)^n (n+1) \cdot n x^{n-1}$$

$F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$

DOVE $f_j: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad 1 \le j \le m$

DOVE F EQUIVALE A DARE m FUNZIONI f DI n VARIABILI.

SE $n = 1$ UNA FUNZIONE:

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, I = INTERVALLO

SI CHIAMA UNA CURVA ED È DATA ESPLICITAMENTE DA m FUNZIONI DI 1 VARIABILE $g_1(t), g_2(t), \dots, g_m(t)$

$g(t) = g_1(t), g_2(t), g_3(t), \dots, g_m(t) \quad t \in I \quad$ t = PARAMETRO CURVA PARAMETRICA

IL SOSTEGNO DELLA CURVA g È L'IMMAGINE DI g IN $\mathbb{R}^n$

$\mathrm{Im}\, g = \{(g_1(t), g_2(t), \dots, g_m(t)) : t \in I\}$

IN $\mathbb{R}^2$ UNA CURVA PARAMETRICA SARÀ DEFINITA DA 2 FUNZIONI

$g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ CIOÈ $\begin{cases} x = g_1(t) \\ y = g_2(t) \end{cases}$

SI INTENDERÀ SEMPRE PER CURVA UNA CURVA CONTINUA, CIOÈ LE FUNZIONI g_i SONO CONTINUE.

IN PARTICOLARE SONO CURVE I GRAFICI DELLE FUNZIONI CONTINUE DETTE CURVE CARTESIANE: PRESO $t = x$ COME PARAMETRO

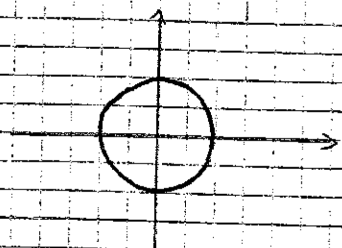
$g: x \to (x, f(x)) \quad I \to \mathbb{R}^2$ CON SOSTEGNO g = GRAFICO DI $f = \Gamma = \{(x,y) : x \in I, y = f(x)\}$

UN'ALTRO MODO DI DEFINIRE UNA CURVA IN $\mathbb{R}^2$ È IMPLICITAMENTE COME $g(x,y) = 0$

ESEMPI:

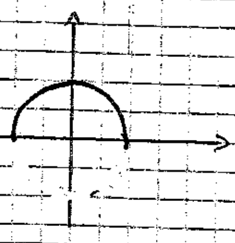
1) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ CIOÈ $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$

IL SOSTEGNO È LA CIRCONFERENZA UNITARIA $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} =$
$= \{(x,y) : g(x,y) = 0\} \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

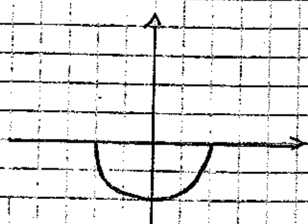


PER AVERE UN GRAFICO DEVO PRENDERE UNA SEMICIRCONFERENZA

$y = \sqrt{1 - x^2}$



$y = -\sqrt{1 - x^2}$



SE $n = m$ UNA FUNZIONE $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

SI PUÒ PENSARE IN DUE MODI DIVERSI

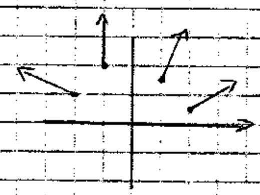
1) COME CAMPO VETTORIALE

① $\mathbb{R}^n$ = INSIEME DI PUNTI

② $\mathbb{R}^n$ = INSIEME DI VETTORI

ESEMPIO

$n=2 \quad F = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \to (f_1(x,y), f_2(x,y)) = v(x,y)$



$n=3 \quad F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x,y,z) \to (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)) = v(x,y,z)$

$$f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k} = f_1\vec{e}_1 + f_2\vec{e}_2 + f_3\vec{e}_3$$

2) COME TRASFORMAZIONI DI COORDINATE

CIOÈ

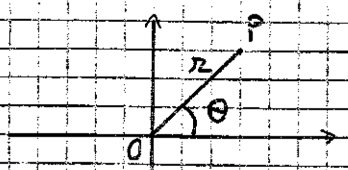
ESEMPIO

$n=2 \quad (x,y) \to (x',y') \quad \begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \end{cases}$

ESEMPI:

1) IN $\mathbb{R}^2$ COORDINATE POLARI

(r,θ)



$F: [0,+\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$

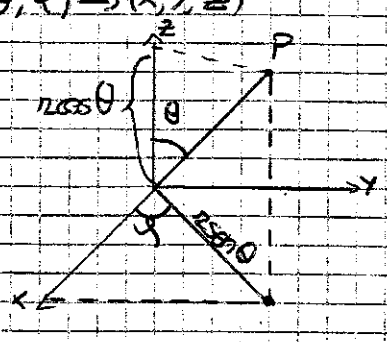
$F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta) = (x,y)$ CIOÈ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\theta \end{cases}$ CON INVERSE

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \text{sen}\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

L'INVERSA È DEFINITA E CONTINUA $\forall (x,y) \neq (0,0)$

2) COORDINATE POLARI (SFERICHE) IN $\mathbb{R}^3$ $(r,\theta,\varphi) \to (x,y,z)$

$$\begin{cases} x = r\,\text{sen}\theta\cos\varphi \\ y = r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



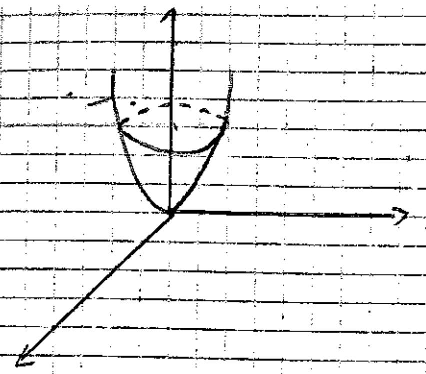
$F: [0,+\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

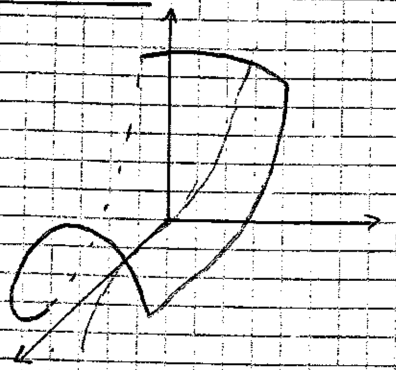
PER r FISSATO AL VARIARE DI θ E φ SI OTTIENE IL PUNTO GENERICO SULLA SFERA DI RAGGIO r IN $\mathbb{R}^3$

2) $f(x,y) = x^2+y^2$

$z = x^2+y^2$



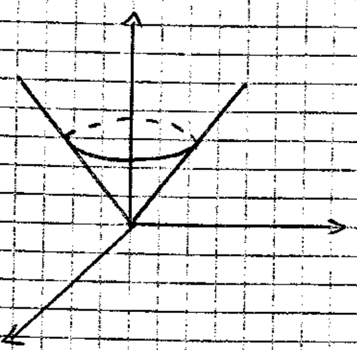
3) $z = f(x,y) = x^2 - y^2$ PARABOLOIDE IPERBOLICO O PARABOLOIDE A SELLA



4) $z = \sqrt{x^2+y^2}$

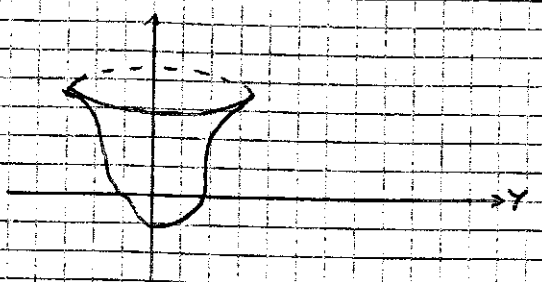
CONO CIRCOLARE CON $z \geq 0$

OTTENUTO RUOTANDO IL GRAFICO $z = |y|$



GLI ESEMPI 1), 2), 4) SONO PARTICOLARI SUPERFICI DI ROTAZIONE

5) SE $z = f(x)$ = FUNZIONE DI 1 VARIABILE CON GRAFICO NEL 1° QUADRANTE RUOTANDO DI 2π ATTORNO ALL'ASSE z OTTENGO LA SUPERFICIE DI ROTAZIO[NE] $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$



$z = f(\sqrt{x^2+y^2})$ È IL GRAFICO DELLA FUNZIONE IN 2 VARIABILI $g(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$ COSIDDETTA RADIALE PERCHÉ DIPENDE SOLO DALLA DISTANZA r DI (x,y) DALL'ORIGINE $(0,0)$ NEL PIANO

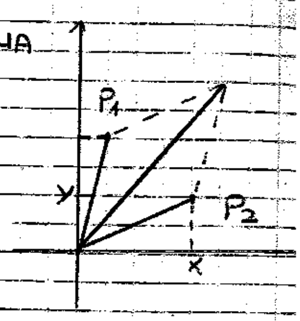
PER $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$P_1 + P_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ CORRISPONDE ALLA SOMMA $\vec{OP_1} + \vec{OP_2}$ SOMMA FATTA CON LA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA

$\|P\| = \sqrt{x^2 + y^2} = d(P, O)$

$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \|P_1 - P_2\|$



$x \in \mathbb{R}^n$

$\shortparallel$

$(x_1, \ldots, x_n)$

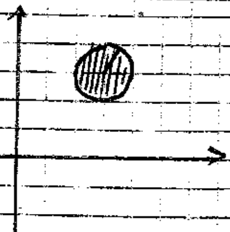
$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ $\quad \|P_1 + P_2\| \leq \|P_1\| + \|P_2\|$

$x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

FISSATO $P_0 = (x_0, y_0)$, $r > 0$ SI CHIAMA INTORNO SFERICO DI CENTRO P_0 E RAGGIO r

$B_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, P_0) < r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$

$x_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow B_r(x_0) =$ ANALOGO



$A \subset \mathbb{R}^2$ SI DICE LIMITATO SE $\exists r > 0 : A \subseteq B_r((0,0))$. UN PUNTO $P_0 = (x_0, y_0)$ SI DICE INTERNO AD $A \subset \mathbb{R}^2$ SE $\exists$ UN INTORNO $B_r(P_0)$ TUTTO CONTENUTO IN A

P_0 SI DICE ESTERNO AD $A \subset \mathbb{R}^2$ SE $\exists B_r(P_0)$ TALE CHE $B_r(P_0) \cap A = \emptyset$

P_0 SI DICE PUNTO DI FRONTIERA DI A SE NON È NÉ INTERNO NÉ ESTERNO, CIOÈ SE $\forall B_r(P_0)$ $(\forall r > 0)$ CONTIENE SIA PUNTI DI A CHE DEL COMPLEMENTARE DI A, $C(A)$

$\{$PUNTI DI FRONTIERA DI $A\} \equiv \partial A$

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ SI DICE APERTO SE OGNI PUNTO DI A È INTERNO AD A

A SI DICE CHIUSO SE A CONTIENE TUTTI I PUNTI DELLA SUA FRONTIERA

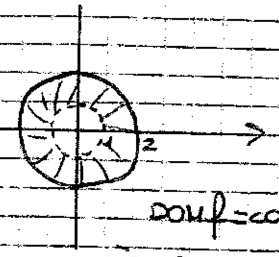
A È APERTO SE E SOLO SE IL COMPLEMENTARE DI A È CHIUSO

A È APERTO SE E SOLO SE NON CONTIENE ALCUN PUNTO DI ∂A.

2) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2} + \log(x^2+y^2-1)$

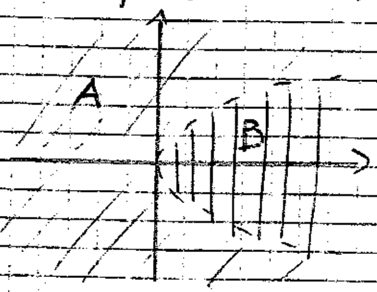
$\text{DOM } f = \{(x,y) : 4 - x^2 - y^2 \geq 0,\ x^2+y^2-1>0\}$

$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ x^2+y^2 > 1 \end{cases}$



DOM f = CORONA CIRC[OLARE]
NÉ APERTO NÉ CHIUS[O]

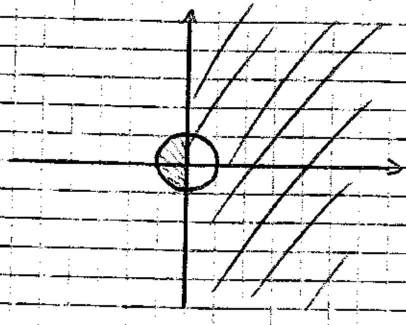
3) $f(x,y) = \frac{1}{x-y^2}$ $\quad \text{DOM } f = \{(x,y) : x \neq y^2\} = A \cup B$



APERTO

4) $f(x,y) = \sqrt{x \cdot (x^2+y^2-1)}$

$\text{DOM } f = \{(x,y) : x(x^2+y^2-1) \geq 0\} = \{(x,y) : x \geq 0,\ x^2+y^2-1 \geq 0\} \cup \{(x,y) : x<0,\ x^2+y^2 \leq 0\}$



$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ SUPPONIAMO CHE f SIA DEFINITA IN UN INTORNO DI
ESCLUSO AL PIÙ DI P_0 STESSO $\quad P_0$

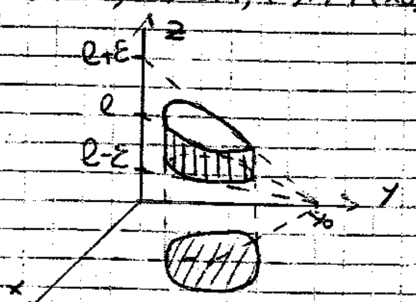
DICIAMO $l \in \mathbb{R}$ È IL LIMITE DI $f(x,y)$ PER (x,y) CHE TENDE A (x_0, y_0)

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \quad \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : 0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$ CIOÈ

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$: SE $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta$ E $(x,y) \neq (x_0,y_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ CIOÈ

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$: SE $P \neq P_0$, $d(P,P_0) < \delta \Rightarrow d(f(P), l) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall$ INTORNO U DI l (DELLA FORMA $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

$\exists$ UN INTORNO V DI (x_0,y_0) (DELLA FORMA $B_\delta((x_0,y_0))$)
TALE CHE SE $(x_0,y_0) \in A$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ E $(x,y) \in V \Rightarrow f(x,y) \in U$.



FISSATO $\varepsilon>0$ TROVO UN CERCHIETTO DI RAGGIO δ CENTRATO IN P_0 NEL PIANO XY TALE C[HE]
$\forall (x,y) \in B_\delta(P_0)$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ IL GRAFICO DI f CADE NEL CILINDRETTO $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : l-\varepsilon < z <$
$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$

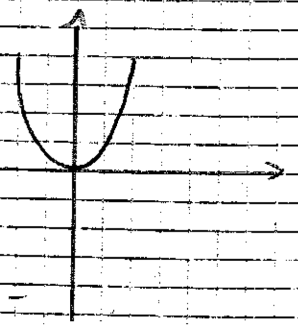
2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

LUNGO L'ASSE X O LUNGO L'ASSE Y, f TENDE A 0

LUNGO $y=kx$ $\quad f(x,kx)=\frac{kx^3}{k^2x^2+x^4} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

SEMBRA CHE ℓ ESISTA E SIA $=0$

PERÒ SE PRENDO $y=x^2$



$f(x,x^2)=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\ \forall x \Rightarrow \frac{1}{2}$ $\nexists$ IL LIMITE

3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad x^2 \le x^2+y^2$ $\quad$ 1° METODO:

$0 \le \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$ $\quad |f(x,y)-0|<\varepsilon$ QUESTA VALE SICURAMENT

SE $\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

2° METODO

RISCRIVO f IN COORDINATE POLARI (r,θ):

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^2\cos^2\theta}{r}$

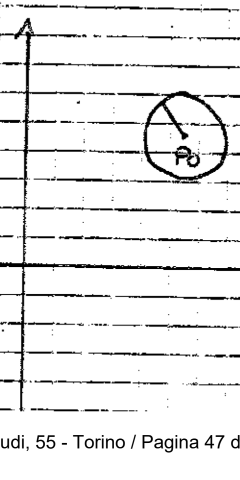
$0 \le |f(x,y)| = \left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = r\cdot\left|\cos^2\theta\right| \le r$

$\to 0$

REGOLA: IN GENERALE SE SI RIESCE A MAGGIORARE $f(x,y)$ IN COORDINATE P
NELLA FORMA SEGUENTE: $|f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)-\ell| \le g(r)$ DOVE $g(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ ALLOR
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$

SE $(x,y)\to(x_0,y_0)$

SI APPLICA LO STESSO DISCORSO CON $\begin{cases} x-x_0 = r\cos\theta \\ y-y_0 = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$



$f(x,y)=g(r)$ IL LIMITE SI RIDUCE AD UN LIMITE NELLA VARIABILE r

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{1-\cos r^2}{r^4} = \frac{1}{2}$ LIMITE FONDAMENTALE

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} e^{-1/r^2} = e^{-\infty} = 0$

SI ESTENDONO ALLE FUNZIONI DI 2 O PIÙ VARIABILI I PRINCIPALI TEOREMI SUI L... VISTI IN UNA VARIABILE.

- TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE
- RELAZIONE TRA LIMITI E OPERAZIONI ALGEBRICHE
- TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l > 0$

$\Rightarrow \exists$ UN INTORNO $B_\delta(x_0,y_0)$:

$\forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\} \Rightarrow f(x,y) > 0$

- TEOREMA DI LIMITATEZZA LOCALE

SE $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, B_\delta(x_0,y_0)$ SUL QUALE $f(x,y)$ È LIMITATO

SI DICE CHE $f(x,y)$ È CONTINUA IN $(x_0,y_0)=P_0$ SE f È DEFINITA IN P_0 E VALE IL

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

SE $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ È CONTINUA $\forall (x_0,y_0) \in A$, f SI DICE CONTINUA SU A.

LA SOMMA E IL PRODOTTO DI FUNZIONI CONTINUE È CONTINUO, COSÌ PURE IL RAPPO... $\frac{f}{g}$ NEI PUNTI IN CUI $g \neq 0$

ANCHE LA FUNZIONE COMPOSTA $g \circ f$ È CONTINUA SE f E g SONO CONTINUE

TEOREMA DI WEIERSTRASS

SE $f(x,y)$ È CONTINUA SU UN INSIEME $A \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO E CHIUSO, ALLORA f ASSU... MASSIMO E MINIMO IN A, CIOÈ $\exists P_1=(x_1,y_1)$ $P_2=(x_2,y_2)$ $P_1,P_2 \in A$ TALI CHE

$f(x_1,y_1) \leq f(x,y) \leq f(x_2,y_2)$ $\forall (x,y) \in A$ CIOÈ $m = \min_A f = f(P_1)$ $M = \max_A f = f(P...$

UN INSIEME SI DICE **COMPATTO** SE È LIMITATO E CHIUSO.

OSSERVAZIONE: SE $f(x)$ È CONTINUA IN $\mathbb{R}$ ALLORA $f(x)$ RISULTA CONTINUA ANC... SE LA CONSIDERO COME FUNZIONE DI 2 VARIABILI, CIOÈ LA FUNZIONE $g(x,y)=f(x)$

QUESTO È UTILE PER VERIFICARE LA CONTINUITÀ DI FUNZIONI IN 2 VARIABILI

ESEMPIO

$A=\{(x,y): x^4+y^4=1\}$

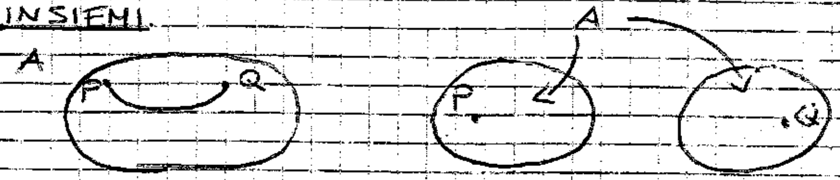
È LIMITATO INFATTI $|x|\leq 1 \quad |y|\leq 1$

ED È CHIUSO PERCHÉ $A=\{(x,y): g(x,y)=0\}$

DOVE $g(x,y)=x^4+y^4-1$ g È CONTINUA DA $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

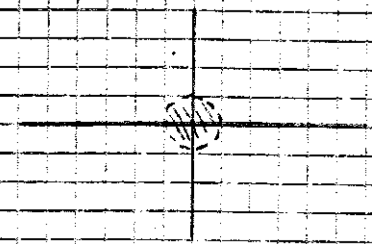
$A\subset\mathbb{R}^2$ SI DICE CONNESSO (PER ARCHI)

SE $\forall$ COPPIA P,Q DI PUNTI DI A ESISTE UNA CURVA CONTINUA CHE CONGIUNGE P E Q TUTTA CONTENUTA IN A. CIÒ IMPLICA CHE A NON È L'UNIONE DISGIUNTA DI 2 INSIEMI.

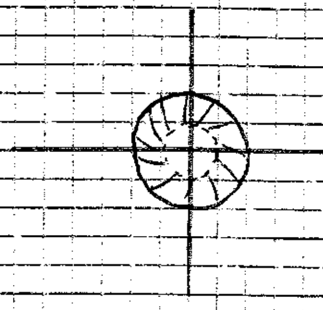


ESEMPI

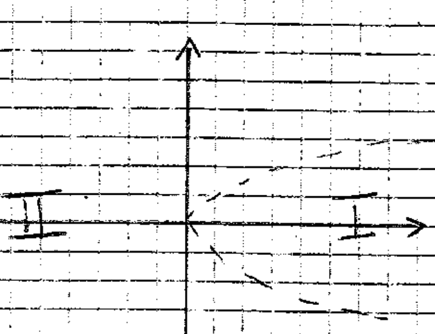
- $A=\{(x,y): \|(x,y)\|<1\}$ CONNESSO



- $A=\{(x,y): 1<\|(x,y)\|\leq 2\}$ CONNESSO

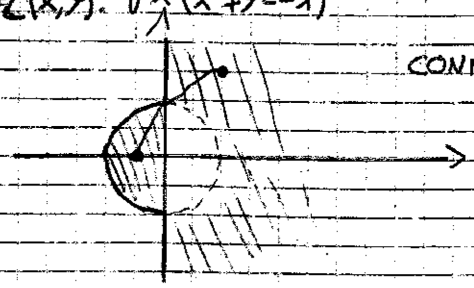


- $A=\{(x,y): x\neq y^2\}$ NON CONNESSO

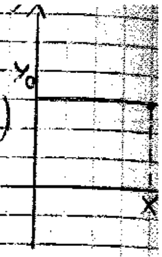


- $A=\{(x,y): \exists\sqrt{x(x^2+y^2-1)}\}$

CONNESSO



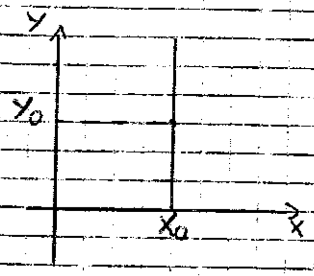
SIA $f(x,y)$ DEFINITA IN UN INTORNO DI $P_0=(x_0,y_0)$, RESTRINGO f ALLA RETTA $y=y_0$ OTTENENDO LA FUNZIONE DI 1 VARIABILE $x \to f(x,y_0)$
SE QUESTA È DERIVABILE IN x_0 LA SUA DERIVATA SI CHIAMA DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A X NEL PUNTO (x_0,y_0)



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

ANALOGAMENTE

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\partial_x f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=D_x f(x_0,y_0)$$

SE $f: A\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ È DERIVABILE PARZIALMENTE IN OGNI PUNTO, CIOÈ SE $\exists\, \partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y)\ \forall (x,y)\in A$ SI DICE CHE È DERIVABILE PARZIALMENTE SU A E SONO DEFINITE LE FUNZIONI DERIVATE PARZIALI $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

QUANDO SI CALCOLA $\partial_x f$ LA Y SI CONSIDERA COSTANTE.

ESEMPI:

$f(x,y)=xe^{xy}$

$\partial_x f(x,y)=e^{xy}+xye^{xy} \qquad \partial_y f(x,y)=x^2e^{xy}$

$\partial_x f(0,0)=1, \quad \partial_y f(0,0)=0$

A VOLTE BISOGNA APPLICARE LA DEFINIZIONE

$f(x,y)=y\sqrt{x} \quad x\geq 0$

$\partial_y f(x,y)=\sqrt{x} \quad \forall (x,y)$ CON $x\geq 0$

$\partial_x f(x,y)=\frac{y}{2\sqrt{x}} \quad \forall (x,y)$ CON $x>0$

$\partial_y f(0,0)=0 \qquad \partial_x f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0 \Rightarrow \partial_x f(0,0)=0$

NOTIAMO CHE $\partial_x f(0,0)\neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y)$

PUÒ CAPITARE CHE f NON SIA DERIVABILE

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$ VALE

$\partial_x f(x,y)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \partial_y f(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\partial_x f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t} \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \nexists$

ANALOGAMENTE $\nexists\, \partial_y f(0,0)$

SE INVECE AD ESEMPIO $b=0$ SI HA $\left\{ y = y_0 \right.$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{z-z_0}{c} = \dfrac{x-x_0}{a} & \vec{v} = (a,0,c) \end{cases}$$

CONFRONTANDO CON L'EQUAZIONE DELLA RETTA r_1 CHE È $\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 + \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) \end{cases}$

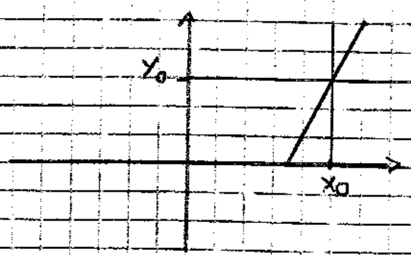
SI OTTIENE $\frac{c}{a} = \partial_x f(x_0,y_0)$ E FISSANDO $a=1$, $c = 1\,\partial_x f(x_0,y_0) \Rightarrow \vec{v}$

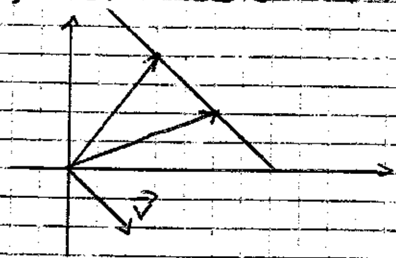
$\vec{v} = (1, 0, \partial_x f(x_0,y_0))$

ANALOGAMENTE LA CURVA $\gamma_2 \cap$ COL PIANO $x=x_0$ HA RETTA TANGENTE r_2 DATA DA

$$\begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 + \partial_y f(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \end{cases}$$

RETTA NEL PIANO XY CHE PASSA PER (x_0,y_0) DI DIREZIONE $\vec{v}(v_1,v_2)$





L'EQUAZIONE PARAMETRICA $P - P_0 = t\vec{v}$, $\vec{P} = \vec{P_0} + t\vec{v}$ CIOÈ: $\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$

RESTRINGENDO $f(x,y)$ A TALE RETTA SI OTTIENE LA FUNZIONE DI UNA VARIABILE

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad \gamma(t) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, f(x_0+tv_1, y_0+tv_2))$

SI DEFINISCE LA DERIVATA DIREZIONALE DI f NEL PUNTO (x_0,y_0) NELLA DIREZIONE DI $\vec{v} = (v_1,v_2)$ COME LA DERIVATA DELLA FUNZIONE $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $t \to f(x_0+tv_1, y_0+tv_2)$ IN $t=0$:

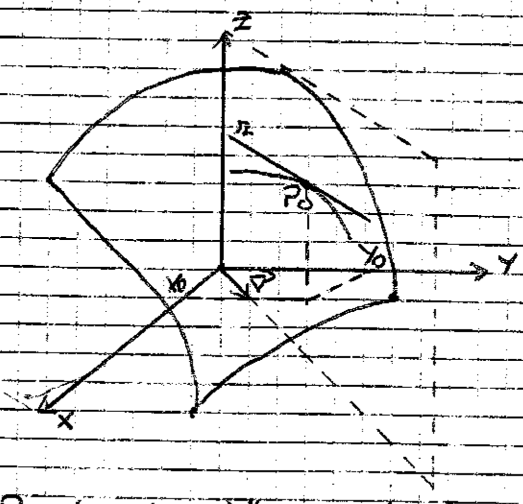
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{P_0}+t\vec{v}) - f(\vec{P_0})}{t} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \partial_{\vec{v}} f(x_0,y_0)$$

IN PARTICOLARE SE:

$\vec{v} = (1,0) \Rightarrow \partial_{\vec{v}} f = \partial_x f$

$\vec{v} = (0,1) \Rightarrow \partial_{\vec{v}} f = \partial_y f$



INTERSECO $z = f(x,y)$ COL PIANO PER $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ // ASSE z (CIOÈ PIANO VERTICALE) CON DIREZIONE $\vec{v}$: EQUAZIONE PIANO: $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2}$ SI OTTIENE LA CURVA $\gamma(t)$ VISTA PRIMA E $\partial_{\vec{v}} f(x_0,y_0)$ È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA tg A γ IN $P_0 = (x_0,y_0,$

$\gamma'(0) = (v_1, v_2, \partial_{\vec{v}} f(x_0,y_0))$

EQUAZIONE PARAMETRICA DI r È $\vec{P} - \vec{P_0} = t\,(v_1, v_2, \partial_{\vec{v}} f(x_0,y_0))$ CIOÈ:

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{\partial_{\vec{v}} f(x_0,y_0)}$$ RETTA PER P_0 DI DIREZIONE $\vec{v}' = (v_1, v_2, \partial_{\vec{v}} f(x_0,y_0))$

DEFINIZIONE $\rightarrow f(x,y)$ SI DICE DIFFERENZIABILE IN $P_0=(x_0,y_0)$ SE

$\exists\, \partial_x f(x_0,y_0),\ \partial_y f(x_0,y_0)$ E VALE $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)\, h + \partial_y f(x_0,y_0)\, k + \sigma(\sqrt{h^2+k^2})_{(h,k)\to(0,0)}$ ①

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \partial_x f(x_0,y_0)\, h - \partial_y f(x_0,y_0)\, k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

LA FUNZIONE LINEARE $df(x_0,y_0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$df(x_0,y_0)(h,k) = \partial_x f(x_0,y_0)\, h + \partial_y f(x_0,y_0)\, k$ SI CHIAMA IL DIFFERENZIALE DI f IN (x_0,y_0) E DUNQUE LA ① È $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = df(x_0,y_0)(h,k) + \sigma(\|(h,k)\|)_{(h,k)\to(0,0)}$

FUNZIONI COORDINATE

$g_1(x,y) = x \qquad g_2(x,y) = y$

$\partial_x g_1(x_0,y_0) = 1 \qquad \partial_x g_2(x_0,y_0) = 0$

$\partial_y g_2(x_0,y_0) = 0 \qquad \partial_y g_2(x_0,y_0) = 1$

$dg_1(x_0,y_0)(h,k) = h \qquad dg_2(x_0,y_0)(h,k) = k$

$\Rightarrow df(x_0,y_0)(h,k) = \partial_x f(x_0,y_0)\, dg_1(x_0,y_0)(h,k) + \partial_y f(x_0,y_0)\, dg_2(x_0,y_0)(h,k)$

TOGLIENDO (h,k) E INDICANDO $dg_1 = dx$ E $dg_2 = dy$ SI OTTIENE CHE

$df(x_0,y_0) = \partial_x f(x_0,y_0)\, dx + \partial_y f(x_0,y_0)\, dy$ O ANCORA:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

IL GRADIENTE DI f NEL PUNTO (x_0,y_0) È IL VETTORE DI $\mathbb{R}^2$

$\nabla f(x_0,y_0) = (\partial_x f(x_0,y_0), \partial_y f(x_0,y_0)) = \text{GRAD} f(x_0,y_0)$

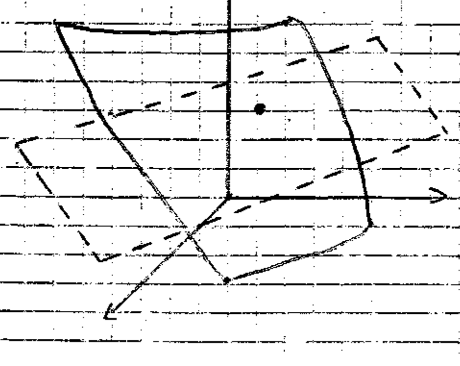
$\Rightarrow df(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0) \cdot (h,k)$ DOVE $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$ = PRODOTTO SCALARE DEI DUE VETTORI $\vec{v}(v_1,v_2)$, $\vec{w}(w_1,w_2)$

PIANO TANGENTE

SE $f(x,y)$ È DIFFERENZIABILE IN (x_0,y_0), POSSIAMO RISCRIVERE LA ① CON $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$

$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0) + \sigma(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})_{(x,y)\to(x_0,y_0)}$ ②

DEFINIAMO IL PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO (x_0, y_0, z_0) DOVE z_0 È $f(x_0,y_0)$ COME IL PIANO IN $\mathbb{R}^3$ DI EQUAZIONE $z = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y (x_0,y_0)($ ③



TEOREMA

f DIFFERENZIABILE IN $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ CONTINUA IN (x_0, y_0)

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} [\partial_x f(x_0,y_0)h + \partial_y f(x_0,y_0)\cdot k + \sigma\sqrt{h^2+k^2}] = 0$$

TEOREMA

SE $f(x,y)$ È DIFFERENZIABILE IN (x_0,y_0) ALLORA f HA LA DERIVATA DIREZIONALE (x_0,y_0) LUNGO QUALSIASI VETTORE $\vec{v}=(v_1,v_2)$ E VALE LA FORMULA DEL GRADIENTE

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\vec{v} = \partial_x f(x_0,y_0)v_1 + \partial_y f(x_0,y_0)v_2 = df(x_0,y_0)(v_1,v_2)$$

DIMOSTRAZIONE

$$\partial_{\vec{v}} f(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \partial_x f(x_0,y_0)tv_1 + \partial_y f(x_0,y_0)tv_2 + \sigma(\sqrt{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\Big[\partial_x f(x_0,y_0)v_1 + \partial_y f(x_0,y_0)v_2 + \underbrace{\frac{\sigma(t)}{t}}_{0}\Big] = \partial_x f(x_0,y_0)v_1 + \partial_y f(x_0,y_0)v_2$$

VERIFICARE CHE f È DIFFERENZIABILE IN (x_0,y_0) BISOGNA DIMOSTRARE CHE

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \partial_x f(x_0,y_0)\cdot h - \partial_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

QUESTO NON È SEMPRE FACILE DA VERIFICARE. IL SEGUENTE RISULTATO FORNISCE UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA DIFFERENZIABILITÀ DI PIÙ FACILE VERIFICA

TEOREMA (CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA DIFFERENZIABILE)

SIA $f(x,y)$ DEFINITA IN UN INTORNO DI (x_0,y_0) ED ESISTANO LE DERIVATE PARZIALI $\partial_x f(x,y)$, $\partial_y f(x,y)$ $\forall (x,y)$ DI TALE INTORNO.

SE $\partial_x f$ E $\partial_y f$ SONO CONTINUE IN (x_0,y_0) ALLORA f È DIFFERENZIABILE IN (x_0,y_0)

SE $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CON A APERTO È TALE CHE $\partial_x f$ E $\partial_y f$ SONO CONTINUE SU TUTTO A ALLORA f SI DICE DI CLASSE C^1 SU A $f \in C^1(A)$

PER IL TEOREMA $f \in C^1(A) \Rightarrow f$ È DIFFERENZIABILE SU TUTTO A

ESEMPIO

1) $f(x,y) = x\log(1+x^2+y^2)$

DIMOSTRARE CHE f È DIFFERENZIABILE NEL SUO DOMINIO $\mathbb{R}^2$

CALCOLARE $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ NEL PUNTO $(x_0,y_0)=(1,0)$ RISPETTO A $\vec{v}(3,4)$

$$\partial_x f(x,y) = \log(1+x^2+y^2) + 2x^2\frac{1}{1+x^2+y^2} \qquad \partial_y f(x,y) = \frac{x\cdot 2y}{1+x^2+y^2}$$

$\partial_x f$ E $\partial_y f$ SONO CONTINUE SU TUTTO $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ È DIFFERENZIABILE SU TUTTO $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(1,0) = (\partial_x f(1,0), \partial_y f(1,0)) = (\log 2 + \tfrac{2}{2}, 0) = (\log 2 + 1, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0) = \nabla f(1,0)\cdot(3,4) = 3\log 2 + 3$$

• f NON È DI CLASSE C^1 IN UN INTORNO DI $(0,0)$

$$\partial_x f(x,y) = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{(\sqrt{x^2+y^2})} =$$

$$= 2x \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x(x^2+y^2)}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{0} - \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\cos\rho^2}{\rho^3}\cos\frac{1}{\rho} \quad \nexists$$

LA DERIVATA PARZIALE NON È CONTINUA

$f \in C^1(A) \Rightarrow f \in C^1(A) \Rightarrow f$ DIFFERENZIABILE SU $A \Rightarrow \begin{cases} f \text{ CONTINUA} \\ \exists\ \partial_x f, \partial_y f \\ \exists\ \partial_{\vec{v}} f,\ \forall v \\ \exists \text{ PIANO tg } \forall (x,y)\in A \end{cases}$

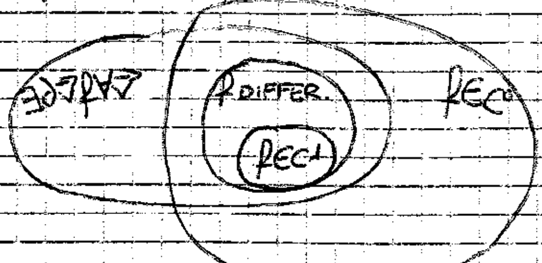
MENTRE

f CONTINUA $\not\Rightarrow$ f DIFFERENZIABILE

f CONTINUA ED $\exists\ \partial_{\vec{v}} f\ \forall \vec{v} \not\Rightarrow f$ DIFFERENZIABILE

f DIFFERENZIABILE $\not\Rightarrow f \in C^1$

$\exists\ \partial_{\vec{v}} f\ \forall v \not\Rightarrow f$ CONTINUA



REGOLA DI DERIVAZIONE

$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\nabla(f \cdot g) = (\nabla f)\cdot g + f(\nabla g)$

$\nabla \frac{1}{g} = -\frac{1}{g^2}\nabla g$

$\nabla \frac{f}{g} = \frac{(\nabla f)\cdot g - f(\nabla g)}{g^2}$

ANALOGO PER IL DIFFERENZIALE

$d(\alpha f + \beta g) = \alpha\, df + \beta\, dg$

$d(f\cdot g) = (df)\cdot g + f(dg)$

$d\frac{1}{g} = -\frac{1}{g^2}dg$

$d\frac{f}{g} = \frac{(df)g - f(dg)}{g^2}$ ESSENDO $df(x,y)(\vec{v}) = \nabla f(x,y)\, v$

GENERALIZZAZIONI

DEFINIZIONE 2 → SI DICE CHE $f(x,y)$ È DIFFERENZIABILE IN (x_0, y_0) SE ESISTONO 2 COSTANTI A, B TALI CHE $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = Ah + Bk + o(\sqrt{h^2+k^2})$

$df(x_0,y_0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad df(x_0,y_0)(h,k) = Ah + Bk$

$f_j(x_0+h)-f_j(x_0)=\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x_0)h_1+\frac{\partial f_j}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial f_j}{\partial x_n}h_n+o(\|h\|)$

$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j(x_0)}{\partial x_i}h_i+o(\|h\|)\quad\forall j=1,2,\ldots,n$

IN GENERALE PER $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ SE $f\in C^1(A)$, A APERTO, CIOÈ ESISTONO CONTINUE TUTTE LE DERIVATE PARZIALI $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $\forall j,\forall i$ CIOÈ TUTTI GLI ELEMENTI DELLA MATRICE JACOBIANA ESISTONO CONTINUI SU A. ALLORA f È DIFFERENZIABILE SU $A\subseteq\mathbb{R}^n$. SE $m=1$, $f:\mathbb{R}^n\to$ LA MATRICE JACOBIANA È LA MATRICE $1\times n$ DATA DAL GRADIENTE $Jf(x_0)=\nabla f(x_0)=(\partial_1 f(x_0)$

SIGNIFICATI GEOMETRICI DI ∇f PER $n=2$

SIA $f(x,y)$ DIFFERENZIABILE IN (x_0,y_0) E SIA $v=(v_1,v_2)$ UN VERSORE $\|v\|=1$ $v_1^2+v_2^2=1$

RICORDIAMO $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$

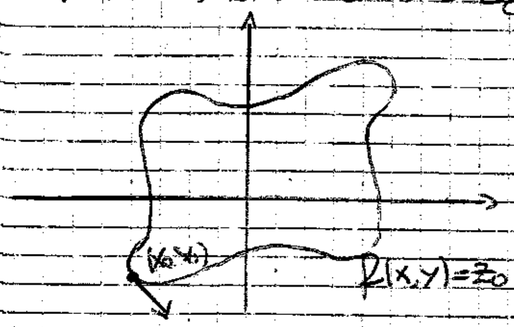
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(x_0,y_0)=\vec{\nabla}f(x_0,y_0)\cdot\vec{v}=\|\nabla f(x_0,y_0)\|\cos\theta$ $\quad\theta=$ ANGOLO TRA $\nabla f(x_0,y_0)$ E $\vec{v}$

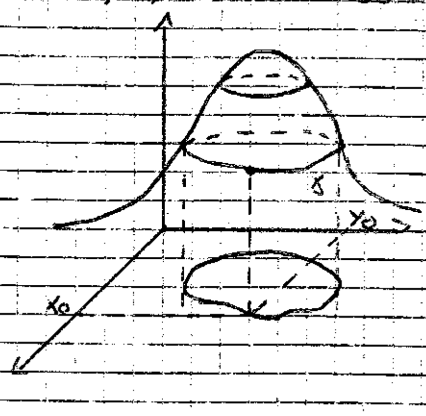
SIA $\nabla f(x_0,y_0)\neq(0,0)$ VEDIAMO CHE LA DERIVATA DIREZIONALE $\partial_{\vec{v}}f(x_0,y_0)$ È MASSIMA PER $\theta=0$ CIOÈ QUANDO $\vec{v}$ È NELLA DIREZIONE DI $\nabla f(x_0,y_0)$ CON LO STESSO VERSO, ED È MINIMA PER $\theta=\pi$ CIOÈ $\vec{v}$ È $/\!/\ \nabla f(x_0,y_0)$ MA NEL VERSO OPPOSTO. LE DIREZIONI NEL PIANO $\mathbb{R}^2$ DEFINITE DAI VERSORI $v_{MAX}=\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|}$ $\quad v_{MIN}=\frac{-\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|}$

SONO QUELLE DI MASSIMO E MINIMO ACCRESCIMENTO DI f PARTENDO DAL PUNTO (x_0,y_0)

UN'ALTRA INTERPRETAZIONE DI ∇f È LA SEGUENTE $z=f(x,y)$ FISSO (x_0,y_0) E SIA $z_0=f(x_0,y_0)$ E SIA γ LA CURVA DI LIVELLO DI f PASSANTE PER (x_0,y_0) DEFINITA IMPLICITAMENTE DALL'EQUAZIONE $f(x,y)=z_0$.

SIA $\vec{v}=(v_1,v_2)$ UN VETTORE tg A γ NEL PUNTO (x_0,y_0) $\Rightarrow$ CALCOLANDO LA $\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(x_0,y_0)$





$\gamma:\begin{cases}z=f(x,y)\\ z=z_0\end{cases}$

$\Rightarrow$ DIMOSTRAZIONE CON FUNZIONI COMPOSTE

$\vec{\nabla}f(x_0,y_0)\cdot\vec{v}=0$

$\Rightarrow$ IL GRADIENTE ∇f IN $\mathbb{R}^2$ È ORTOGONALE IN OGNI PUNTO ALLA CURVA DI LIVELLO DI f PASSANTE PER QUEL PUNTO.

POSSIAMO DETERMINARE UN VETTORE $\vec{v}$ DIRETTO LUNGO LA CURVA DI LIVELLO IN (x_0,y_0): $v=(v_1,v_2)$ $\quad 0=\nabla f(x_0,y_0)\cdot v=\partial_x f(x_0,y_0)\cdot v_1+\partial_y f(x_0,y_0)v_2$

PER ESEMPIO $v=(\partial_y f(x_0,y_0),-\partial_x f(x_0,y_0))$ $\quad v\perp\nabla f(x_0,y_0)$

$n=1$ (1 VARIABILE)

SE $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$g\circ f(x)=g(f(x))$

$\Rightarrow (g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$

CIOÈ POSTO $y=f(x)$ VALE LA REGOLA DELLA CATENA

$$\frac{dg(f(x))}{dx}\Big|_x=\frac{dg}{dy}\Big|_{y=f(x)}\frac{dy}{dx}\Big|_x$$

PER IL DIFFERENZIALE

$dF(x)h=F'(x)h=F'(x)dx(h)$

OTTENIAMO

$$d(g\circ f)(x)\,h=g'(f(x))f'(x)\,h=g'(f(x))df(x)\,h=\underbrace{dg(f(x))\cdot df(x)}_{\text{COMPOSIZIONE DI FUNZIONI LINE}}(h)$$

$n=2$

1° CASO $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f=f(x,y)$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}$, $f\circ g$

$g\circ f(x,y)=g(f(x,y))$

SE f È DIFFERENZIABILE IN (x,y) E g È DERIVABILE IN $z=f(x,y)$ ALLORA $g\circ f$ È DIFFERENZIABILE IN (x,y) E VALE $\frac{\partial}{\partial x}(g\circ f)(x,y)=g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial y}(g\circ f)(x,y)=g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$\nabla(g\circ f)(x,y)=g'(f(x,y))\nabla f(x,y)$ O BREVEMENTE POSTO $z=f(x,y)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{dg}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\qquad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{dg}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$d(g\circ f)(x,y)(h,k)=$ $\quad dx(h,k)=h$

$\qquad dy(h,k)=k$

$\nabla(g\circ f)(x,y)(h,k)=$

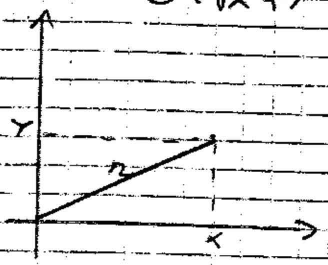
$=g'(f(x,y))(\partial_x f(x,y)h+\partial_y f(x,y)k$

$=g'(f(x,y))(\partial_x f(x,y)dx+\partial_y f(x,y)dy)(h,k)$

$=dg(f(x,y))\cdot df(x,y)\ (h,k)$

ESEMPIO: GRADIENTE DI UNA FUNZIONE RADIALE

$h(x,y)=g(r)=g(\sqrt{x^2+y^2})=g(f(x,y))$ DOVE $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$



⇒ IL GRADIENTE DI f LUNGO g È PERPENDICOLARE IN OGNI PUNTO DI g AL V

tg g $\quad g'(t)=\vec{v}(t)=(g_1'(t), g_2'(t)) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(g(t))=0$

3° CASO

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x_1,x_2)=(f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2))$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad g=g(y_1,y_2)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$g\circ f(x_1,x_2)=g(f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2))$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g\circ f(x_1,x_2)=\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x_1,x_2))\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2)+\frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x_1,x_2))\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)$$

$$\frac{\partial g\circ f}{\partial x_2}=\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial g}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

IN GENERALE SE $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f(x)=(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \quad g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \quad g=g(y_1,y_2,\dots,y_n)$

$g\circ f(x)=g(f_1(x), f_2(x),\dots,f_n(x))$

$$\Rightarrow \frac{\partial g\circ f}{\partial x_i}(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x))\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall i=1,2,\dots,n \qquad g\circ f: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

PER IL DIFFERENZIALE SI OTTIENE

$d(g\circ f)(x)=dg(f(x))\cdot df(x)$ CIOÈ $(\partial_{x_1} g\circ f, \dots, \partial_{x_n} g\circ f)=$

$$=(\partial_{y_1} g,\dots,\partial_{y_n} g)\cdot\begin{pmatrix}\partial_{x_1} f_1 & \dots & \partial_{x_n} f_1\\ \partial_{x_1} f_2 & \dots & \partial_{x_n} f_2\\ \partial_{x_1} f_n & \dots & \partial_{x_n} f_n\end{pmatrix}$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \qquad g\circ f: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$

$$\underset{k\times n}{d(g\circ f)(x)}=\underset{k\times m}{dg(f(x))}\cdot\underset{m\times n}{df(x)}$$

CIOÈ LA MATRICE JACOBIANA DI $g\circ f$ È IL PRODOTTO DELLE MATRICI JACOBIANE

g E f $\quad J_{g\circ f}(x)=J_g(f(x))J_f(x)$ CIOÈ $\frac{\partial (g\circ f)_l(x)}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_l}{\partial y_j}\Big|_{f(x)}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big|_x \quad l=1,2,\dots, \; i=1,2,\dots$

ESEMPIO

$f(x,y)=x^2 \operatorname{sen} y$

$\partial_x f = 2x \operatorname{sen} y \qquad \partial_y f = x^2 \cos y$

$\partial^2_x f = 2 \operatorname{sen} y \qquad \partial^2_y f = -x^2 \operatorname{sen} y$

$\partial_y \partial_x f = 2x \cos y$

$\partial_x \partial_y f = 2x \cos y$ NOTIAMO CHE $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$

TEOREMA DI SCHWARZ

SE $\partial_x \partial_y f$, $\partial_y \partial_x f$ ESISTONO IN UN INTORNO DI (x_0,y_0) E SONO CONTINUE IN (x_0,y_0) ALLORA IN TALE PUNTO COINCIDONO CIOÈ $\partial_x \partial_y f\big|_{(x_0,y_0)} = \partial_y \partial_x f\big|_{(x_0,y_0)}$

f SI DICE DI CLASSE C^2 SU A SE $f \in C^2(A)$

SE $\exists\ \partial^2_x f, \partial^2_y f, \partial_x \partial_y f, \partial_y \partial_x f$ E SONO CONTINUE SU A.

ALLORA PER IL TEOREMA SE $f \in C^2(A) \Rightarrow \partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$

ALLORA HO SOLO 3 DERIVATE SECONDE $\partial^2_x f, \partial^2_y f, \partial_x \partial_y f$

IN MODO ANALOGO POSSIAMO DEFINIRE LE DERIVATE PARZIALI DI ORDINE 3

$\partial^3_x f;\ \partial_y \partial^2_x f;\ \partial_x \partial_y \partial_x f;\ \partial^2_x \partial_y f;\ \partial^3_y f;\ \partial_x \partial^2_y f;\ \partial_y \partial_x \partial_y f;\ \partial^2_y \partial_x f$

CI SONO 8 DERIVATE DI ORDINE 3. SE $f \in C^3(A)$ CIOÈ

SE TUTTE LE DERIVATE DI ORDINE 3 ESISTONO CONTINUE IN TUTTI I PUNTI DI A

ALLORA TUTTE LE DERIVATE MISTE RELATIVE ALLE STESSE VARIABILI COINCIDONO

$\Rightarrow \partial_y \partial^2_x f = \partial^2_x \partial_y f = \partial_x \partial_y \partial_x f;\quad \partial_x \partial^2_y f = \partial^2_y \partial_x f = \partial_y \partial_x \partial_y f;$

$\Rightarrow$ RIMANGONO 4 DERIVATE TERZE DISTINTE CIOÈ

$\partial^3_x f;\ \partial^2_x \partial_y f;\ \partial_x \partial^2_y f;\ \partial^3_y f$

IN GENERALE $f \in C^K(A)$

SE ESISTONO CONTINUE LE DERIVATE PARZIALI ALMENO FINO ALL'ORDINE K.

IN QUESTO CASO LE DERIVATE DISTINTE DI ORDINE K SONO $K+1$.

$\partial^K_x f;\ \partial^{K-1}_x \partial_y f;\ \partial^{K-2}_x \partial^2_y f;\ \partial_x \partial^{K-1}_y f;\ \partial^K_y f$

INOLTRE

$C^0(A) \supset C^1(A) \supset C^2(A) \supset \dots \supset C^K(A) \supset \dots \supset C^\infty(A)$ DOVE

$f \in C^\infty(A)$ SE $\exists$ TUTTE LE DERIVATE PARZIALI DI ORDINE n $\forall n \in \mathbb{N}$

UN DISCORSO ANALOGO VALE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

OSSERVAZIONE: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

SI DIMOSTRA

- f CONTINUA PER $(0,0)$
- f È DI CLASSE C^1 SU $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ È DIFFERENZIABILE ANCHE IN $(0,0)$
- $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\})$

LAPLACIANO IN $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ DI UNA FUNZIONE RADIALE

$$\left.\begin{aligned}\Delta_2 &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\\ \Delta_3 &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\\ &\vdots\\ \Delta_n &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}\end{aligned}\right\}\text{ PARTE RADIALE}$$

ESEMPIO: in $\mathbb{R}^2$: $f = f(r) = f(\sqrt{x^2+y^2})$

$$\partial_x f = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{f'(r)}{r}x$$

$$\partial_x^2 f = \frac{f'(r)}{r} + x\,\partial_x\left(\frac{f'(r)}{r}\right) = \frac{f'(r)}{r} + x\cdot\frac{f''(r)\cdot r - f'(r)}{r^2}\cdot\frac{x}{r}$$

$$\partial_y^2 f = \frac{f'(r)}{r} + \frac{y^2}{r^3}\left(f''(r)\cdot r - f'(r)\right)$$

$$\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f = \frac{2f'(r)}{r} + \frac{x^2+y^2}{r^3}\left(f''(r)\cdot r - f'(r)\right) = f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) = \left(\frac{d}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}$$

ESERCIZIO:

DIMOSTRARE CHE LE SOLUZIONI RADIALI DELL'EQUAZIONE DI LAPLACE $\Delta f = 0$ SONO

1) in $\mathbb{R}^2$ $f(r) = a\log r + b$

2) in $\mathbb{R}^3$ $f(r) = \frac{a}{r} + b$

3) in $\mathbb{R}^n$ $f(r) = \frac{a}{r^{n-2}} + b$

1) in $\mathbb{R}^2$ $\Delta_2 = \left(\frac{d}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}$

$$\Delta_2 f = \left(\frac{d}{dr}\right)^2 f + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}f = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}f\right) = 0 \qquad r\frac{df}{dr} = a = \text{COSTANTE}$$

$$\frac{df}{dr} = \frac{a}{r} \Rightarrow f(r) = a\log r + b$$

2) in $\mathbb{R}^3$

$$\Delta_3 f = \left(\frac{d}{dr}\right)^2 f + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}f = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right) = 0 \qquad r^2\frac{df}{dr} = a \Rightarrow \text{COSTANTE}$$

$$\frac{df}{dr} = \frac{a}{r^2} \Rightarrow f(r) = -\frac{a}{r} + b$$

IN FORMA OPERATORIALE

$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + [(h\partial_x + k\partial_y)f](x_0,y_0) + \frac{1}{2!}[(h\partial_x+k\partial_y)^2 f](x_0,y_0) + o(h^2+k^2)$

INFATTI

$(h\partial_x + k\partial_y)(h\partial_x + k\partial_y)f|_{P_0} = (h\partial_x + k\partial_y)(h\partial_x f + k\partial_y f)|_{P_0}$

$= (h^2\partial^2_x f + hk\,\partial_x\partial_y f + kh\,\partial_y\partial_x f + k^2\partial^2_y f)|_{P_0}$

$= h^2\partial^2_x f|_{P_0} + k^2\partial^2_y f|_{P_0} + 2hk\,\partial_x\partial_y f|_{P_0}$

IN GENERALE SE $f \in C^n(A)$ VALE

$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + (h\partial_x+k\partial_y)f|_{P_0} + \frac{1}{2!}(h\partial_x+k\partial_y)^2 f|_{P_0} + \frac{1}{3!}(h\partial_x+k\partial_y)^3 f|_{P_0}$
$+ \frac{1}{n!}(h\partial_x+k\partial_y)^n f|_{P_0} + \underset{(h,k)\to 0,0}{o}\left((h^2+k^2)^{\frac{n}{2}}\right)$

GENERALIZZAZIONE $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f \in C^2(A)$, A APERTO DI $\mathbb{R}^n$ $x_0 \in A \Rightarrow$ VALE $f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} h_j \partial_{x_j} f(x_0) +$
$+ \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j (\partial_{x_i}\partial_{x_j} f)(x_0) + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|^2)$

LA MATRICE HESSIANA DI f IN x_0

$$Hf(x_0) = Hf(x_0)_{ij} = \partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x_0) = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1} f(x_0) & \partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x_0) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{x_n} f(x_0) \\ \partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_0) & \partial^2_{x_2} f(x_0) & \cdots & \partial_{x_2}\partial_{x_n} f(x_0) \\ \vdots & & & \\ \partial_{x_n}\partial_{x_1} f(x_0) & \partial_{x_n}\partial_{x_2} f(x_0) & & \partial^2_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

SE $f \in C^2(A) \Rightarrow Hf(x_0)$ È SIMMETRICA REALE $n \times n$

PER $n=2$
$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} \partial^2_x f(P_0) & \partial_x\partial_y f(P_0) \\ \partial_y\partial_x f(P_0) & \partial^2_y f(P_0) \end{pmatrix}$$

1) SCRIVERE LA FORMULA DI TAYLOR AL 2° ORDINE IN $(0,0)=P_0$ PER
$f(x,y) = \frac{e^{x-2y}}{1+2x-y}$

2)
$f(x,y) = x^y$ IN $P_0(1,2)$

$f(x,y) = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)(y-2) + o((x-1)^2+(y-2)^2)$

$\Leftrightarrow \forall$ INTORNO $B_\delta(x_0,y_0)$ $\exists (x,y) \in B_\delta$: DIFFERENZA $f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$ ED $\exists (x,y) \in$ [illegible]
$f(x,y)-f(x_0,y_0)<0$

GRAFICAMENTE SE (x_0,y_0) È PUNTO CRITICO E f DIFFERENZIABILE IN (x_0,y_0) IL PIAN[O]
TANGENTE A $z=f(x,y)$ IN (x_0,y_0) È ORIZZONTALE: $z=f(x_0,y_0)+\underbrace{\nabla f(x_0,y_0)}_{0}\cdot(x-x_0, \underbrace{y-y_0}_{0})$

PER FUNZIONI DI 1 VARIABILE $f(x)$ SE $f'(x_0)=0$ E $f''(x_0)\neq 0$
$\Rightarrow f''(x_0)>0$ x_0 PUNTO DI MINIMO RELATIVO
$f''(x_0)<0$ x_0 PUNTO DI MASSIMO RELATIVO

DIMOSTRAZIONE:
$f(x)-f(x_0)=\underbrace{f'(x_0)}_{0}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\sim\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$ SE $f''(x_0)\neq 0$

TEOREMA (CONDIZIONE SUFFICIENTE DEL 2° ORDINE)
$f: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f\in C^2(A)$, A APERTO
$P_0=(x_0,y_0)\in A$ SIA PUNTO CRITICO PER f, $\nabla f|_{P_0}=0$
SI CONSIDERI LA MATRICE HESSIANA DI f IN P_0

$$H_f(P_0)=\begin{pmatrix}\partial^2_x f(P_0) & \partial_x\partial_y f(P_0)\\ \partial_y\partial_x f(P_0) & \partial^2_y f(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}$$

E SIA $H=$ DET $H_f(P_0)=$ DETERMINANTE HESSIANO $=a\cdot b-c^2$
1) $H>0$, $\partial^2_x f(P_0)>0 \Rightarrow$ PUNTO DI MINIMO RELATIVO FORTE
2) $H>0$, $\partial^2_x f(P_0)<0 \Rightarrow$ PUNTO DI MASSIMO RELATIVO FORTE
3) $H<0 \Rightarrow P_0$ È UN PUNTO DI SELLA
4) $H=0$ CASO DUBBIO:
OCCORRE UNO STUDIO ULTERIORE DEL SEGNO DI $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ SU UN INTORNO D[I P_0]
POSSIAMO PERÒ DIRE CHE
• $a>0$ OPPURE $b>0 \Rightarrow P_0$ NON PUÒ ESSERE UN PUNTO DI MASSIMO, QUINDI O P_0 È PUN[TO]
DI MINIMO O DI SELLA
• $a<0$ OPPURE $b<0 \Rightarrow P_0$ NON È UN PUNTO DI MINIMO QUINDI O È UN PUNTO DI MASSIMO O
SELLA.
• $a=b=c=0$

$\Rightarrow H_f(P_0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad H_f(P_0)=\begin{pmatrix}a&c\\c&b\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ NULLA SI PUÒ CONCLUDERE CON LO SVILUPPO AL 2° ORDINE

DIMOSTRAZIONE
USIAMO LA FORMULA DI TAYLOR AL 2° ORDINE IN $P_0=(x_0,y_0)$:
$x-x_0=h$, $y-y_0=k$
$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=f(P_0+v)-f(P_0)$ $\quad (v=(h,k))$
$=\nabla f(P_0)(h,k)+\frac{1}{2}(\partial^2_x f(P_0)h^2+\partial^2_y f(P_0)k^2+2\partial_x\partial_y f(P_0)h\cdot k)+\underset{(h,k)\to(0,0)}{o}(h^2+k^2)=$

$\Rightarrow$ LUNGO LA RETTA $f(P)-f(P_0)$ PUÒ ESSERE <0 O ANCHE >0 E <0 IN OGNI INTORNO DI P_0. POSSIAMO PERÒ DIRE CHE:

SE $a>0 \Rightarrow P_0$ SICURAMENTE NON È UN MASSIMO PERCHÉ SE LO FOSSE $f(P)-f(P_0)\leq 0$ IN UN INTORNO DI P_0, MENTRE SE $h \neq -\frac{c}{a}k$, $f(P)-f(P_0)>0$ PERCHÉ HA LO STESSO SEGNO DI $q(h,k)>0$

INFINE SE $H=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow f(P_0+v)-f(P_0)=o(\|v\|^2)$

$\Rightarrow$ SEGNO?

SERVONO INFORMAZIONI SUI TERMINI DI ORDINE SUPERIORE. IN TUTTI I CASI CON $H=0$ SI CERCA DI STUDIARE DIRETTAMENTE IL SEGNO DI $f(P)-f(P_0)$

ESEMPIO DEL CASO DUBBIO

• $f(x,y)=x^2+y^4$ •• $f(x,y)=x^2+y^3$

PER ENTRAMBE L'UNICO PUNTO CRITICO: $\nabla f|_{P_0}=0$ È $P_0=(0,0)$

PER ENTRAMBE $H_f(P_0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow H=0$

$a=2>0 \Rightarrow P_0$ O È MINIMO O È SELLA

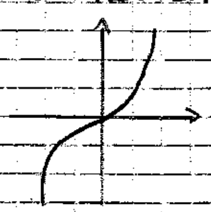
$f(P)-f(P_0)=f(x,y)-0=f(x,y)$.

• $=x^2+y^4\geq 0 \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$

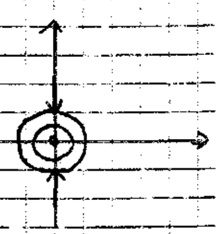
$\Rightarrow P_0$ PUNTO DI MINIMO RELATIVO FORTE

•• $=x^2+y^3$ IN QUESTO CASO LA RETTA $x-x_0=-\frac{c}{a}(y-y_0)$ È LA RETTA $x=0$. CIOÈ ASSE

$f(0,y)=y^3$



È >0 PER $y>0$ E <0 PER $y<0$



$\Rightarrow P_0$ È UN PUNTO DI SELLA.

SE VADO A P_0 LUNGO QUALSIASI RETTA $y=kx$ HO $f(x,kx)=x^2+k^3x^3 \underset{(x\to 0)}{\sim} x^2$

$\Rightarrow$ LUNGO QUALSIASI $y=kx$

$f(x,kx)>0$ IN UN INTORNO DI P_0, $P\neq P_0$

$f(x,y)=x^2+y^2$, $P_0=(0,0)$ $\quad H_f(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow H>0$, $a=2>0 \Rightarrow P_0=$ PUNTO DI MINIMO

$f(x,y)=-x^2-y^2$, $P_0=(0,0)$ $\quad H=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ $\quad H>0$, $a=-2<0 \Rightarrow P_0$ PUNTO DI MASSIMO

$f(x,y)=x^2-y^2$, $P_0=(0,0)$

$H_f(P_0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ $\quad H=-4<0 \Rightarrow P_0$ PUNTO DI SELLA.

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=x^4+y^4 \;\; 1\\ f(x,y)=-x^4-y^4 \;\; 2\\ f(x,y)=x^4-y^4 \;\; 3\end{array}\right\} \begin{array}{l} P_0=(0,0)\\ H_f(P_0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{l}\Rightarrow P_0 \text{ MIN } 1)\\ \Rightarrow P_0 \text{ MAX } 2)\\ \Rightarrow P_0 \text{ SELLA } 3)\end{array}$$

RICORDIAMO CHE SE H È UNA MATRICE SIMMETRICA REALE $n \times n \Rightarrow$

- TUTTI GLI AUTOVALORI $\lambda_i \in \mathbb{R}$
- ESISTE UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^n$ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ DI AUTOVETTORI DI H, CIOÈ

$H v_j = \lambda_j v_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$

PER ESEMPIO SE $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\langle v_1, H v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$

$\parallel$

$\langle H v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \cdot \langle v_1, v_2 \rangle$

$\Rightarrow$ SE $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$ CIOÈ $v_1 \perp v_2$

USANDO LA BASE $v_1, v_2, \dots, v_n$ LA q SI RIDUCE ALLA FORMA CANONICA: $w = w_1 \vec{v}_1 + w_2 \vec{v}_2 + \dots$

$$q(w) = \langle w, Hw \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} w_i v_i, H \sum_{j=1}^{n} w_j \vec{v}_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} w_i v_i, \sum w_j \lambda_j \vec{v}_j \rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1} w_i w_j \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle \qquad \langle v_i, v_j \rangle = v_i \cdot v_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \sum_{i,j} w_i w_j \lambda_i \delta_{ij} \text{ CIOÈ}$$

$$q(w) = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \dots + \lambda_n w_n^2$$

DA QUESTA SEGUE CHE

- H È DEFINITA POSITIVA $\Leftrightarrow \lambda_j > 0 \ \forall j$
- H È DEFINITA NEGATIVA $\Leftrightarrow \lambda_j < 0 \ \forall j$
- H È SEMIDEFINITA POSITIVA $\Leftrightarrow \lambda_j \geq 0 \ \forall j$ (ED È NON DEFINITA POSITIVA $\Leftrightarrow \exists \lambda_j = 0$)
- H È SEMIDEFINITA NEGATIVA $\Leftrightarrow \lambda_j \leq 0 \ \forall j$ (ED È NON DEFINITA NEGATIVA $\Leftrightarrow \exists \lambda_j = 0$)
- H È INDEFINITA $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 : \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

RICORDIAMO CHE GLI AUTOVALORI λ_j SONO LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $p(\lambda) = 0$ DOVE $p(\lambda) = \det(H - \lambda I)$ = POLINOMIO CARATTERISTICO DI H.

NON È NECESSARIO CALCOLARE I λ_j ESPLICITAMENTE PER CONOSCERNE IL SEGNO.

A TAL FINE BASTA USARE LA REGOLA DEI SEGNI DI CARTESIO:

SE UN POLINOMIO $p(\lambda)$ HA RADICI TUTTE REALI ALLORA

- IL NUMERO DI RADICI POSITIVE DI $p(\lambda)$ (CONTATE OGNUNA CON LA SUA MOLTEPLICITÀ) È UGUALE AL NUMERO DELLE **VARIAZIONI** DI $p(\lambda)$ CIOÈ DEI CAMBIAMENTI DI SEGNO NELLA SUCCESSIONE ORDINATA DEI COEFFICIENTI DI $p(\lambda)$ DOVE SI OMETTONO I COEFFICIENTI NULLI.
- IL NUMERO DI RADICI NEGATIVE È UGUALE AL NUMERO DI VARIAZIONI DEL POLINOMIO $p(-\lambda)$
- SE $p(\lambda)$ NON HA $\lambda = 0$ COME RADICE

$\Rightarrow$ N° RADICI NEGATIVE = n − NUMERO RADICI POSITIVE.

ESEMPIO

$p(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 2$ $\quad$ $p(\lambda)$ HA 3 VARIAZIONI $\Rightarrow$ 3 RADICI POSITIVE (NON NECESSARIAMENTE TUTTE DISTINTE). $p(\lambda)$ HA UNA RADICE NEGATIVA

$(p(-\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda - 2 \Rightarrow 1$ VARIAZIONE = 1 RADICE NEGATIVA

$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 2)$

ESERCIZI

TROVARE I MASSIMI E I MINIMI DI

1) $f(x,y)=3x^2+y^2-x^3y$

PUNTI CRITICI $\begin{cases}\partial_x f=6x-3x^2y=0\\ \partial_y f=2y-x^3=0\end{cases}$ $\begin{cases}3x(2-xy)=0\\ 2y-x^3=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=0 \vee xy=2\\ 2y-x^3=0\end{cases}$

$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ $\begin{cases}y=\frac{2}{x}\\ \frac{4}{x}-x^3=0\end{cases} = \begin{cases}y=\frac{2}{x}\\ x=\pm\sqrt[4]{4}=\pm\sqrt{2}\end{cases} = \begin{cases}y=\sqrt{2}\\ x=\sqrt{2}\end{cases}$ $\begin{cases}y=-\sqrt{2}\\ x=-\sqrt{2}\end{cases}$

$P_1=(0,0)$ $P_2=(\sqrt{2},\sqrt{2})$ $P_3=(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

$\partial^2_x f=6-6xy$

$\partial^2_y f=2$; $\partial_x\partial_y f=-3x^2=\partial_y\partial_x f$

$H^{(x,y)}=H_f(x,y)=\begin{pmatrix}6-6xy & -3x^2\\ -3x^2 & 2\end{pmatrix}$ $H(0,0)=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$H=\det(H)(0,0)=12>0$

$\partial^2_x f(0,0)=6>0 \Rightarrow P_1$ PUNTO DI MINIMO RELATIVO FORTE

$H(\sqrt{2},\sqrt{2})=\begin{pmatrix}-6 & -6\\ -6 & 2\end{pmatrix}$

$\det H(\sqrt{2},\sqrt{2})=-12-36<0 \Rightarrow$ PUNTO DI SELLA

$H(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) \Rightarrow$ LO STESSO, P_3 PUNTO DI SELLA

2) $f(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4$

PUNTI CRITICI $\begin{cases}\partial_x f=4x^3-12xy^2=0\\ \partial_y f=-12x^2y+4y^3=0\end{cases}$ $\begin{cases}4x(x^2-3y^2)=0 & 1^a\\ -4y(3x^2-y^2)=0 & 2^a\end{cases}$

DALLA 1^a $x=0 \vee x^2=3y^2$

- $x=0$ $y=0 \Rightarrow P_1=(0,0)$
- $x^2=3y^2 \Rightarrow -4y(9y^2-y^2)=0 \Rightarrow y^3=0$ $x=0$ $y=0$ UNICO PUNTO CRITICO $P_1=(0,0)$

$\partial^2_x f=12x^2-12y^2$

$\partial^2_y f=-12x^2+12y \Rightarrow H(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ CASO DUBBIO

$\partial_x\partial_y f=-24xy$

DEVO STUDIARE IL SEGNO DI $f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4$ IN UN INTORNO DI (0

$f(x,0)=x^4$; $f(0,y)=y^4$ PERÒ PRENDENDO $y=x$ $f(x,x)=-4x^4<0$

$\Rightarrow P_1$ È UN PUNTO DI SELLA PERCHÉ f LUNGO L'ASSE X O LUNGO L'ASSE Y HA UN MINIMO $(0,0)$ MENTRE $f|_{y=x}$ HA UN MASSIMO IN $(0,0)$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -y\cos x & -\operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & -2 \end{pmatrix}$$

$$H(P_K) = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+K\pi \\ -\operatorname{sen}(K\pi+\frac{\pi}{2}) & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{K+1} \\ (-1)^{K+1} & -2 \end{pmatrix} \quad \text{DET}\, H(P_K) = -(-1)^{2K+2} = -1<0$$

I P_K SONO PUNTI DI SELLA

$$H(Q_K) = \begin{pmatrix} -\frac{(-1)^K}{2}\cos(K\pi) & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(-1)^K(-1)^K & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

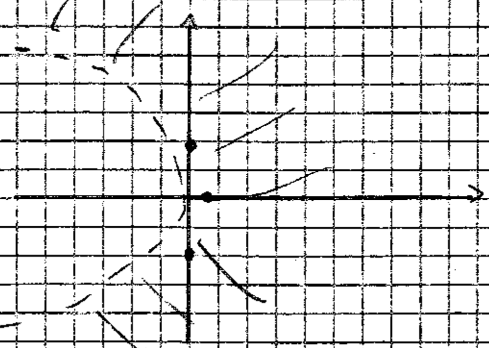
$\text{DET}\, H(Q_K) = 1>0, \quad -\frac{1}{2}<0$

TUTTI I Q_K SONO PUNTI DI MASSIMO RELATIVO FORTE

6) $f(x,y) = x \log(x+4y^2)$

$\text{DOM} f = \{(x,y) : x+4y^2>0\}$

$\text{DOM} f$ È APERTO



$$\begin{cases} \partial_x f = \log(x+4y^2) + \dfrac{x}{x+4y^2} = 0 \\ \partial_y f = \dfrac{x8y}{x+4y^2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ xy=0 \Rightarrow x=0 \lor y=0 \end{cases}$$

- $x=0 \Rightarrow \log(4y^2)=0 \Rightarrow 4y^2=1 \Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}$

$P_1=(0,\frac{1}{2}) \qquad P_2=(0,-\frac{1}{2})$

- $y=0 \Rightarrow \log x+1=0$

$x=\frac{1}{e} \Rightarrow P_3=(\frac{1}{e},0)$

$$\partial^2_x f = \frac{1}{x+4y^2} + \frac{\cancel{x}+4y^2-\cancel{x}}{(x+4y^2)^2}; \quad \partial^2_y f = \frac{8x(x+4y^2-y\cdot 8y)}{(x+4y^2)^2}, \quad \partial_x\partial_y f = 8y\,\frac{x+4y^2-x}{(x+4y^2)^2}$$

$$H(0,\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad H(0,-\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2 \text{ PUNTO DI SELLA}$$

$\text{DET}\, H(0,\frac{1}{2}) = -16<0$

P_1 PUNTO DI SELLA

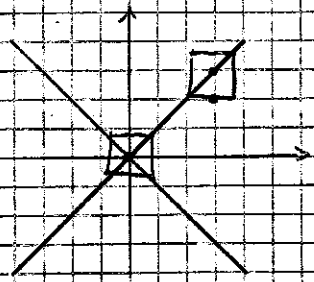
$$H(\tfrac{1}{e},0) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{DET}\, H = 8e>0 \quad P_3 \text{ PUNTO DI MINIMO RELATIVO FORTE}$$

$\nabla F(x,y) = (\partial_x F, \partial_y F) = (y,x) \neq (0,0) \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

$\nabla F = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

$F(x,y) = x^2 - y^2$

$F = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x$



$\nabla F(x,y) = (2x, -2y)$

$\nabla F = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

TEOREMA (DINI) O DELLA FUNZIONE IMPLICITA

$F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(A)$ A APERTO. SIA $P_0 = (x_0, y_0) \in A$:

$F(x_0,y_0) = 0$, $\partial_y F(x_0,y_0) \neq 0$ ALLORA ESISTE UN INTORNO $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$.

SE x_0 IN $\mathbb{R}$ E UN'UNICA FUNZIONE $f: I \to \mathbb{R}$ TALE CHE $f(x_0) = y_0$ E $F(x, f(x)) = 0 \ \forall x \in I$

INOLTRE $f \in C^1(I)$ E VALE ② $f'(x) = -\dfrac{\partial_x F(x,f(x))}{\partial_y F(x,f(x))} \quad \forall x \in I$

OSSERVAZIONE 1: SAPENDO CHE $f(x)$ ESISTE SI OTTIENE LA ② DERIVANDO

$$F(x,f(x)) = 0 \ \forall x \Rightarrow 0 = \frac{d}{dx} F(x,f(x)) = \partial_x F(x,f(x)) + \partial_y F(x,f(x)) f'(x)$$

SE $F \in C^1 \Rightarrow \partial_y F$ È CONTINUA $\Rightarrow \partial_y F(x_0,y_0) \neq 0$

PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO SARÀ $\partial_y F(x,y) \neq$ IN UN INTORNO DI I

$\Rightarrow$ DIVIDENDO TUTTO PER $\partial_y F$ OTTENGO: $f'(x) = -\dfrac{\partial_x F(x,f(x))}{\partial_y F(x,f(x))} \to$ ②

OSSERVAZIONE 2: SE SI HA CHE $\partial_x F(x_0,y_0) \neq 0$ ESISTE UN INTORNO $J = (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$

E UN'UNICA f, FUNZIONE $x = g(y)$ CON $g: J \to \mathbb{R}$ TALE CHE $x_0 = g(y_0)$

$F(g(y), y) = 0 \quad \forall y \in J$ E INFINE

$$g'(y) = -\frac{\partial_y F(g(y),y)}{\partial_x F(g(y),y)} \quad \forall y \in J$$

$F(x,y) = 0$

- SE $\partial_y F(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow$ L'EQUAZIONE EQUIVALE A $y = f(x)$ DOVE

$f\ [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \qquad f'(x) = -\dfrac{\partial_x F}{\partial_y F}\Big|_{(x,f(x))}$

- $\partial_x F(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow$ L'EQUAZIONE $F = 0 \Leftrightarrow x = g(y)$ DOVE $g\ [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \to [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$

$g'(y) = -\dfrac{\partial_y F}{\partial_x F}\Big|_{(g(y),y)}$

SE $\partial_x F(P_0) \neq 0$ E $\partial_y F(P_0) \neq 0$ ALLORA VALGONO ENTRAMBE

$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ IN UN INTORNO RETTANGOLARE

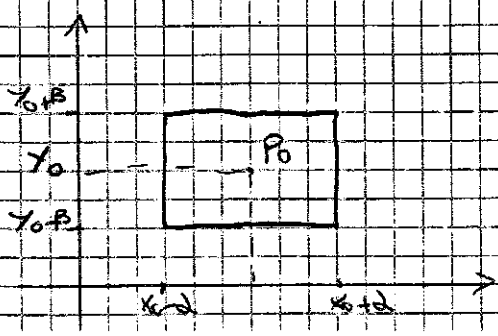
$[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ di $P_0 = (x_0, y_0)$

IN QUESTO CASO

$g = f^{-1}$

$x = g(y) = f^{-1}(y)$

$f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$



3) $F(x,y) = x^3 - y^3$

$\nabla F(x,y) = (3x^2, -3y^2)$

$\nabla F = 0 \iff x = y = 0$

PERÒ IN QUESTO CASO ANCHE PER $(x_0,y_0) = (0,0)$ VALE LA TESI DEL TEOREMA DI DINI PERCHÉ

$F(x,y) = 0 \iff y^3 = x^3 \iff x = y$

IL TEOREMA DI DINI CI DICE CHE L'EQUAZIONE $F(x,y) = 0$ CON $F(x_0,y_0) = 0$

• $\partial_y F(x_0,y_0) \neq 0$ HA UN INTORNO DI (x_0,y_0) UN'UNICA SOLUZIONE $y = f(x)$ IL CUI GRAFICO

$\{(x, f(x)), x \in I\}$ È UNA CURVA CARTESIANA IN CUI PRENDERE $t = x$ COME PARAMETRO

(UNA CURVA PARAMETRICA $t \to (x(t), y(t))$)

NEL CASO CARTESIANO

$\gamma: x \to (x, f(x))$ E IL VETTORE TG È $\gamma'(x) = (1, f'(x)) \neq (0,0)$

LA FORMULA

$$f'(x) = -\frac{\partial_x F(x,f(x))}{\partial_y F(x,f(x))}$$ ERA $\partial_x F(x,f(x)) + \partial_y F(x,f(x)) f'(x) = 0$

$\nabla F(x, f(x)) \cdot \gamma'(x) = 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$\Rightarrow$ RITROVIAMO IL FATTO CHE ∇F È $\perp$ AL VETTORE TANGENTE ALLA CURVA DEFINITA DA

$F(x,y) = 0$ CIOÈ LA CURVA DI LIVELLO $F(x,y) = K = 0$

2° PROBLEMA $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ f DI CLASSE C^1 SU A

SIA $g(x,y)$ UN'ALTRA FUNZIONE TALE CHE $E_0 = \{(x,y) \in A : g(x,y) = 0\} \neq \phi$

VOGLIAMO DETERMINARE GLI ESTREMI (MASSIMI, MINIMI) DI $f(x,y)$ RISTRETTA A E_0

SI DICE CHE $P_0 = (x_0,y_0) \in E_0$ È PUNTO DI MASSIMO (MINIMO) RELATIVO VINCOLATO PER f ALLA

CONDIZIONE (VINCOLO) $g(x,y) = 0$ SE $\exists$ INTORNO $B\delta(x_0,y_0)$ DI RAGGIO $\delta > 0$:

$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \quad \forall (x,y) \in B\delta(x_0,y_0) \cap E_0$

$(f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \quad \forall (x,y) \in B\delta(x_0,y_0) \cap E_0)$

IN PRATICA SI RESTRINGE $f|_{g=0}$

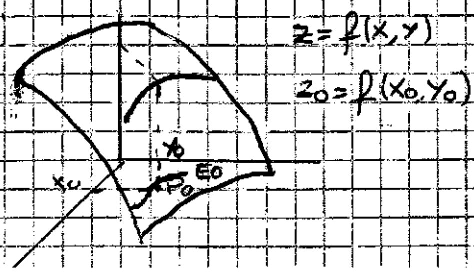
SI DICE ALLORA CHE P_0 È PUNTO DI ESTREMO VINCOLATO.

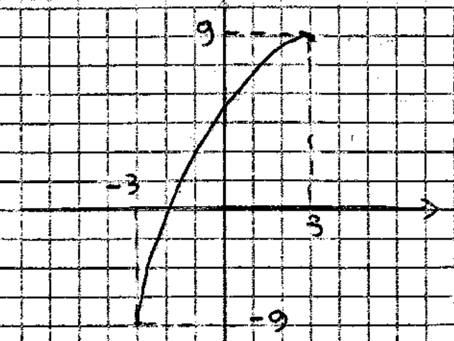
ESEMPIO

PER TROVARE IL MASSIMO E IL MINIMO ASSOLUTI DI f SU UN INSIEME A LIMITATO E CHIUSO

SI DETERMINANO GLI ESTREMI LIBERI ALL'INTERNO DI A E POI GLI ESTREMI VINCOLATI DI $f|_{\partial A}$

DOVE ∂A SARÀ DEFINITA DA UNA O PIÙ CURVE DEFINITE DA EQUAZIONI DEL TIPO $g(x,y) = 0$



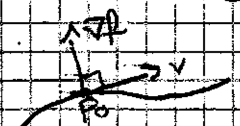


A VOLTE ESPLICITARE O PARAMETRIZZARE IL VINCOLO $g(x,y)=0$ PUÒ ESSERE DIFFICILE O LUNGO. VOGLIAMO ESPRIMERE UNA CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ P_0 SIA UN PUNTO DI ESTREMO VINCOLATO PER $f|_{g=0}$ LAVORANDO DIRETTAMENTE CON $g(x,y)$ SENZA DOVER ESPLICITARE IL VINCOLO.

IN GENERALE SE P_0 È PUNTO DI ESTREMO VINCOLATO SI HA $\nabla f(x_0,y_0)\neq(0,0)$

È PERÒ INTUITIVO CHE SI ANNULLI LA COMPONENTE DEL ∇F LUNGO IL VETTORE TANGENTE ALLA CURVA E_0 DEFINITA DA $g(x,y)=0$ CIOÈ $\nabla F\cdot v=0$ ESSENDO $\nabla F\cdot v=\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\Big|_{P_0}=0$



MA SAPPIAMO CHE ANCHE $\nabla g|_{P_0}$ È $\perp \vec{v}$ PERCHÉ E_0 = CURVA DI LIVELLO $g(x,y)=0$.

$\Rightarrow \nabla f|_{P_0} \parallel \nabla g|_{P_0}$ CIOÈ $\exists\,\lambda\in\mathbb{R}: \nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0)$

TEOREMA (DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE, CASO $n=2$)

f,g SIANO $C^1(\mathbb{R}^2)$. SE (x_0,y_0) È PUNTO DI ESTREMO VINCOLATO (MASSIMO E MINIMO) DI f SOTTO IL VINCOLO $g(x,y)=0$ E VALE $\nabla g(x_0,y_0)\neq(0,0)$ ALLORA $\exists\,\lambda\in\mathbb{R}$ TALE CHE $\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0)$.

VALGONO DUNQUE LE 3 EQUAZIONI

$$\begin{cases}\partial_x f(x_0,y_0)=\lambda\partial_x g(x_0,y_0)\\ \partial_y f(x_0,y_0)=\lambda\partial_y g(x_0,y_0)\\ g(x_0,y_0)=0\end{cases}$$

$f,g\in C^1(\mathbb{R}^2)$

$P_0=(x_0,y_0)$ PUNTO DI ESTREMO (MASSIMO, MINIMO) VINCOLATO PER $f(x,y)$ COL VINCOLO $g(x,y)$

$\nabla g(x_0,y_0)\neq(0,0) \Rightarrow \exists\,\lambda\in\mathbb{R}: \nabla f(P_0)=\lambda\nabla g(P_0)$.

DIMOSTRAZIONE

SIA AD ESEMPIO $\partial_y g(x_0,y_0)\neq0$. PER IL TEOREMA DI DINI $g(x,y)=0 \Leftrightarrow y=h(x)$

$h:(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\to(y_0-\beta,y_0+\beta)\quad h(x_0)=y_0$

$$h'(x)=-\frac{\partial_x g(x,h(x))}{\partial_y g(x,h(x))}\quad \forall x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$$ ①

PER IPOTESI ABBIAMO ALLORA CHE $f|_{g=0}$ HA UN ESTREMO IN P_0

$\Rightarrow$ LA FUNZIONE DI 1 VARIABILE $x\to f(x,h(x))$

HA UN PUNTO DI ESTREMO RELATIVO IN x_0 PER IL TEOREMA DI FERMAT

$\frac{d}{dx}f(x,h(x))|_{x_0}=0$ ②

2) SI DETERMINA LA NATURA DEI PUNTI CRITICI OTTENUTI PRIMA USANDO AD ESEMPIO IL TEOREMA DI WEIERSTRASS (SE AD ESEMPIO $\{(x,y): g(x,y)=0\}$ È CHIUSO E LIMITATO)

3) SE CI SONO PUNTI NON REGOLARI PER IL VINCOLO, CIOÈ PUNTI IN CUI $\nabla g = (0,0)$ OPPURE PUNTI IN CUI g NON È DIFFERENZIABILE, TUTTI QUESTI VANNO ESAMINATI A PARTE.

ANALOGO DISCORSO VALE PER LA f.

ESEMPI

1) DETERMINARE IL MASSIMO E IL MINIMO ASSOLUTI DI $f(x,y)=xy$ SULLA CIRCONFERENZA UNITARIA   VINCOLO: $g(x,y)=0$ DOVE $g(x,y)=x^2+y^2-1$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\lambda 2x \\ x=\lambda 2y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

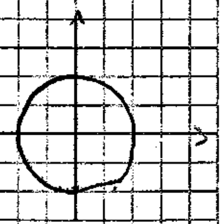
NOTIAMO CHE DEVE ESSERE $x \neq 0$, $y \neq 0$ PERCHÉ $(0,0) \notin$ AL VINCOLO

$\Rightarrow \lambda = \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}$

$\Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x$, SOSTITUENDO NEL VINCOLO

$x^2+x^2=1 \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ OTTENGO I SEGUENTI PUNTI CRITICI VINCOLATI

$P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $P_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $P_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

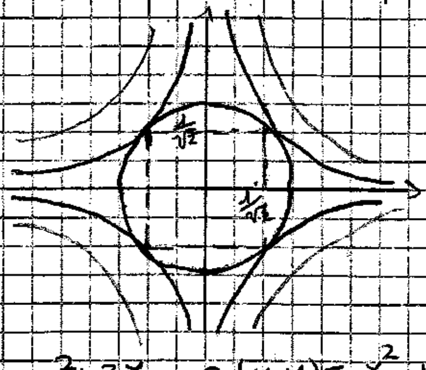


$S^1=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$ È UN SOTTOINSIEME CHIUSO E LIMITATO DI $\mathbb{R}^2$

PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS, f ESSENDO CONTINUA $\Rightarrow f|_{S^1}$ DEVE AVERE ~~ESSERE~~ MASSIMO M E MINIMO m.

$\Rightarrow$ BASTA CALCOLARE $f(P_i)$, IL VALORE PIÙ GRANDE È M E IL PIÙ PICCOLO È m

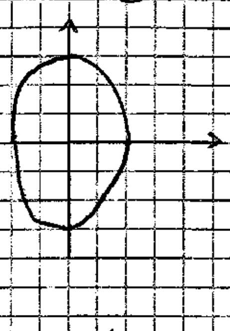
$f(P_1)=\frac{1}{2}=f(P_4) \Rightarrow M=\frac{1}{2}$ $f(P_2)=-\frac{1}{2}=f(P_3)$ $m=-\frac{1}{2}$



LE CURVE DI LIVELLO DI f SONO IPERBOLI

NEI PUNTI CRITICI TALI IPERBOLI SONO tg A S^1

2) $f(x,y)=x^2+3y$ $g(x,y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0$

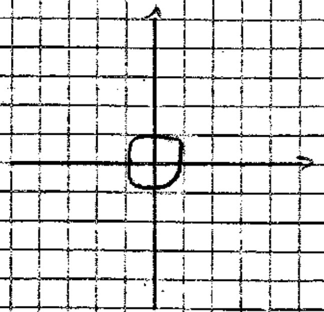


$\nabla(f-\lambda g)=0$

$$\begin{cases} 2x=\lambda\frac{x}{2} \\ 3=\lambda\frac{2}{9}y \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x(4-\lambda)=0 \\ '' \\ '' \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ \lambda=\pm\frac{27}{6}=\pm\frac{9}{2} \\ y=\pm 3 \end{cases} \quad P_1=(0,3) \quad P_2(=0,-3) \quad \begin{cases} \lambda=4 \\ y=\frac{27}{8} \\ x<0 \neq \frac{x^2}{4} \text{ IMPOSSIBILE} \end{cases}$$

5) $f(x,y) = x^2 y$ $\quad g(x,y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$

$x^4 + y^4 = 1$



$$\begin{cases} 2xy = \lambda 4x^3 \\ x^2 = \lambda 4y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

- $x = 0$ $\quad y^4 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ $\quad \lambda = 0$

$P_1 = (0,1)$ $\quad P_2 = (0,-1)$

- $y = 2\lambda x^2 \Rightarrow y = 2\lambda \cdot \lambda 4y^3 \Rightarrow y(1 - 8\lambda^2 y^2) = 0$
- $y = 0$ $\quad x = \pm 1$ IMPOSSIBILE PER LA 2ª EQUAZIONE
- $y^2 = \frac{1}{8\lambda^2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}\lambda}$ $\quad x^2 = \frac{y}{2\lambda} = \pm \frac{2\lambda}{2\sqrt{2}\lambda}$

SOSTITUENDO NEL VINCOLO

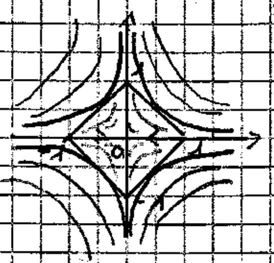
$\frac{1}{32\lambda^4} + \frac{1}{64\lambda^4} = 1$ $\quad \lambda^4 = \frac{3}{64}$, $\quad \lambda = \pm \sqrt[4]{\frac{3}{64}} = \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \left(\pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right)$

$M = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} = f(\ )$ $\qquad m = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} = f((\ ))$

ESEMPI CON IL VINCOLO g O f NON REGOLARI

1) $f(x,y) = x \cdot y$ $\quad g(x,y) = |x| + |y| - 1 = 0$



I PUNTI $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$ SONO PUNTI NON REGOLARI PER IL VINCOLO g PERCHÉ $\nexists \nabla g$ CON TALI PUNTI

PER ESEMPIO

$\partial_y g(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(1,h) - g(1,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h| - 0}{h} = \pm 1$ $\nexists\ \partial_y g(1,0)$

$f((1,0)) = 0 = f((-1,0)) = f((0,1)) = f((0,-1))$ PERÒ QUESTI PUNTI NON SONO NÉ DI MASSIMO NÉ DI MINIMO RELATIVO, AD ESEMPIO SE $(x,y) \to (0,1)$ SI HA $f(x,y) - f((0,1)) = f(x,y) = xy > 0$

IN OGNI INTORNO DI $(0,1)$ $\quad xy = K$

PER I PUNTI SUI LATI DEL QUADRATO APPLICO I MOLTIPLICATORI

I° QUADRANTE $x>0$ $y>0$

$g(x,y) = x + y - 1$ $\quad \nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ x = \lambda \\ x + y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

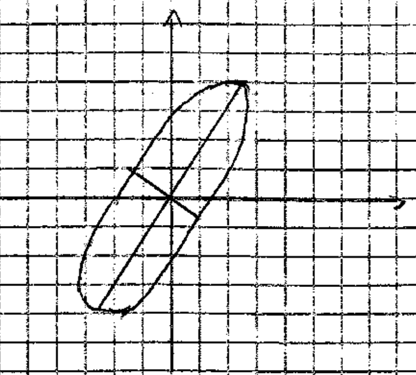
$f\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4} = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

4) TROVARE I PUNTI A MINIMA E MASSIMA DISTANZA DA (0,0) SULLA CURVA $g(x,y)=x^2-xy+y^2=1$

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$



$$\begin{cases} 2x=\lambda(2x-y) & 1^a \\ 2y=\lambda(2y-x) & 2^a \\ x^2+y^2-xy=1 & 3^a \end{cases}$$

DEV'ESSERE $\lambda\neq 0$ (SE NO $x=y=0$ CHE $\notin$ AL VINCOLO)

DEV'ESSERE $2x\neq y$, $2y\neq x$ (SE NO $x=y=0$ CHE $\notin$ AL VINCOLO

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{2}x}{2x-y}=\dfrac{\cancel{2}y}{2y-x}$ $\quad (2y-x)\cdot x=(2x-y)y$

$\cancel{2xy}-x^2=\cancel{2xy}-y^2 \quad x^2=y^2 \quad x=\pm y$

3^a: • $x=y \Rightarrow x^2+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}=1 \quad x=\pm 1 \quad P_1(1,1) \quad P_2=(-1,1)$

• $x=-y \Rightarrow x^2+x^2+x^2=1 \Rightarrow 3x^2=1 \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt3} \quad P_3=\left(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}\right) \quad P_4=\left(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$

$\{g=0\}$ È CHIUSO E LIMITATO IN $\mathbb{R}^2$ $\exists\, M=\max f|_{g=0}$, $m=\min f|_{g=0}$

$f(P_1)=f(P_2)=2 \Rightarrow$ DISTANZA MASSIMA $=\sqrt2$

$f(P_3)=f(P_4)=\frac{2}{3} \Rightarrow$ DISTANZA MINIMA $=\sqrt{2/3}$

2^a METODO:

$g=1$, $x^2+y^2-xy=1$ È UN'ELLISSE CENTRATA IN $(0,0)$

$x^2+y^2-xy=(x\ y)\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ = FORMA QUADRATICA ASSOCIATA A $A=\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}$

$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda & -1/2\\ -1/2 & 1-\lambda\end{pmatrix} \quad p(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1/2\\ -1/2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-\frac14=0 \quad \lambda=\frac32,\ \lambda=\frac12$

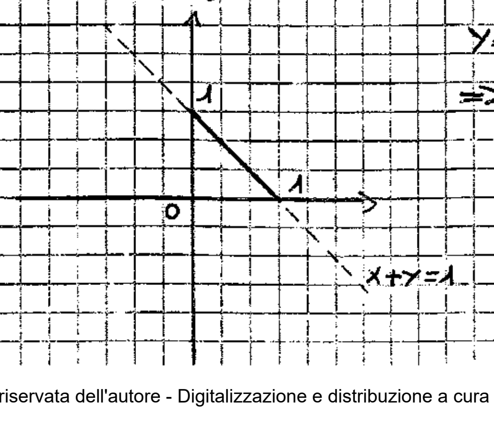
I SEMIASSI SONO LA RADICE QUADRATA DEL RECIPROCO DEGLI AUTOVALORI $\sqrt{\frac{1}{3/2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\sqrt{\frac{1}{1/2}}=\sqrt2$

5) STUDIARE GLI ESTREMI VINCOLATI DI $f(x,y)=-x\log x-y\log y$ CON VINCOLO:

$g(x,y)=x+y-1=0$

DEVE ESSERE $x>0, y>0$



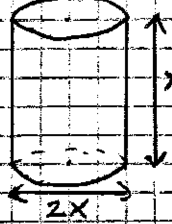
$y=1-x$

$\Rightarrow f|_{g=0}=f(x,1-x)=-x\log x-(1-x)\log(1-x)$

7) DA TUTTI I CILINDRI DI SUPERFICIE TOTALE S FISSATA TROVARE QUELLO DI VOLUME MASSIMO

VOLUME $= f(x,y) = \pi x^2 y$, SUPERFICIE TOTALE $= 2\pi xy + 2\pi x^2 = S =$ COSTANTE

$g(x,y) = 2\pi xy + 2\pi x^2 - S \qquad \nabla(f - \lambda g) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda(2\pi y + 4\pi x) = 2\pi xy \\ \pi x^2 = \lambda 2\pi x \\ 2\pi xy + 2\pi x^2 = S \end{cases}$



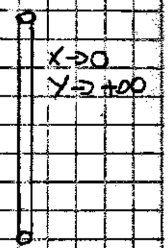
$xy = \lambda \cdot (y + 2x)$

$x^2 = 2\lambda x \rightarrow x \cdot (x - 2\lambda) = 0$

• $x = 0$ CASO DEGENERE

$x = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{x}{2}$, SOSTITUISCO NELLA 1ª E OTTENGO $xy = \frac{x}{2}(y + 2x) = \frac{xy}{2} + x^2$

$\frac{xy}{2} = x^2 \qquad \frac{y}{2} = x \qquad y = 2x$

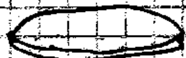


IL VOLUME MASSIMO SI HA QUANDO L'ALTEZZA È UGUALE AL DIAMETRO

IL MINIMO SI HA AD ESEMPIO SE $x \to 0 \Rightarrow y = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} \to +\infty$

$\Rightarrow f(x,y) = \pi x^2 y = \pi x^{\cancel{2}} \cdot \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi \cancel{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ CIOÈ È $V = 0$

OPPURE SE $y \to 0 \qquad 2\pi x^2 = S \qquad V = 0$



IL METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE SI ESTENDE A $n=3$ E $n>3$

$n=3$ $f(x,y,z)$ SI PUÒ OTTIMIZZARE CON UN SOLO VINCOLO $g_1(x,y,z) = 0$

OPPURE ANCHE CON 2 VINCOLI $g_1(x,y,z) = 0$, $g_2(x,y,z) = 0$

ESISTERANNO 2 COSTANTI $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ TALI CHE SE P_0 È PUNTO DI ESTREMO VINCOLATO PER $f|_{\substack{g_1=0 \\ g_2=0}}$, P_0 REGOLARE PER g_1, g_2, $\nabla f|_{P_0} = \lambda_1 \nabla g_1|_{P_0} + \lambda_2 \nabla g_2|_{P_0}$

TEOREMA (n=3)

$f, g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ SIA PUNTO DI ESTREMO VINCOLATO PER $f(x,y,z)$ CO[N]
I VINCOLI $g_1(x,y,z) = 0$, $g_2(x,y,z) = 0$

SE P_0 È REGOLARE PER IL VINCOLO $g = 0$, CIOÈ $g = (g_1, g_2): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ CIOÈ SE LA JACOBIANA 2X3 $J_g = \begin{pmatrix} \partial_x g_1 & \partial_y g_1 & \partial_z g_1 \\ \partial_x g_2 & \partial_y g_2 & \partial_z g_2 \end{pmatrix}$ HA RANGO 2 IN P_0, CIOÈ SE I VETTORI $\nabla g_1|_{P_0}$, $\nabla g_2|_{P_0}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, ALLORA:

$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: \nabla f(P_0) = \lambda_1 \nabla g_1(P_0) + \lambda_2 \nabla g_2(P_0)$

IN $\mathbb{R}^n$ SI HA UN ANALOGO RISULTATO PER $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ SOTTO GLI m VINCOLI $\begin{cases} g_1(x_1, \dots \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots \end{cases}$

CON $m < n$ CIOÈ $m \leq n-1$