NUMERO: 604

DATA: 0409/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Francia

MATERIA: Analisi Matematica I
Prof. Nicola

LA LOGICA SI OCCUPA DI PROPOSIZIONI CIOÈ DI AFFERMAZIONI O VERE O FALSE IN MODO CERTO.
PIÙ PROPOSIZIONI POSSONO ESSERE MESSE INSIEME TRAMITE CONNETTIVI LOGICI

CONNETTIVI LOGICI

$\wedge$(et) CONGIUNZIONE $\vee$(VEL) DISGIUNZIONE $\neg$(NON) NEGAZIONE
$\Rightarrow$ IMPLICAZIONE $\Leftrightarrow$ BIIMPLICAZIONE

ESEMPI:
P: "PIOVE" Q: "FA FREDDO" P $\rightarrow$ IPOTESI Q $\rightarrow$ TESI
$P \wedge Q$: PIOVE E FA FREDDO $P \vee Q$: PIOVE O FA FREDDO

P: "T È UN TRIANGOLO EQUILATERO" Q: "T HA 3 ANGOLI UGUALI"
$P \Rightarrow Q$: SE T È UN TRIANGOLO EQUILATERO ALLORA T HA 3 ANGOLI UGUALI
$P \Rightarrow Q$ EQUIVALE A: $Q \vee \neg P$
P: CONDIZIONE SUFFICIENTE Q: CONDIZIONE NECESSARIA

$P \Leftrightarrow Q$ EQUIVALE A $P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$

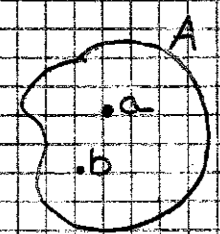
QUANTIFICATORI

$\forall$ PER OGNI $\exists$ ESISTE
ESEMPIO:
$P(x,y)$: L'UOMO X SA SVOLGERE IL LAVORO Y
$\exists x \ \forall y \ P(x,y)$ ESISTE UN UOMO X CHE SVOLGE OGNI LAVORO Y
SE INVERTO L'ORDINE CAMBIA COMPLETAMENTE IL SENSO DELLA FRASE
$\forall y \ \exists x \ P(x,y)$ PER OGNI LAVORO Y ESISTE UN UOMO X IN GRADO DI SVOLGERLO

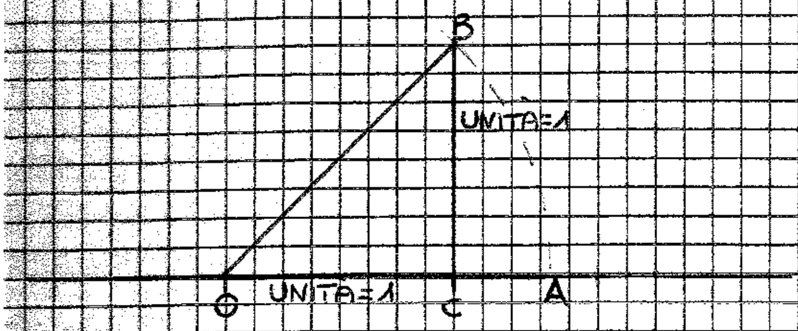
INSIEMI

L'INSIEME È UN CONCETTO PRIMITIVO CIOÈ CHE NON HA DEFINIZIONE
$\mathbb{N}$ = INSIEME NUMERI NATURALI
$\mathbb{Z}$ = INSIEME DEI NUMERI INTERI RELATIVI
$\mathbb{Q}$ = INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI
$\mathbb{R}$ = INSIEME DEI NUMERI REALI
$\mathbb{C}$ = INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI

$a \in A \rightarrow$ L'ELEMENTO a APPARTIENE ALL'INSIEME A



ESEMPIO:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ NUMERI NATURALI
$A = \{0, 2, 4, 6 \ldots\}$ o $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ NUMERI PARI
$A = \{a, b\}$
STRUTTURA PER ELENCAZIONE CHE SI USA SOLO QUANDO GLI ELEMENTI SONO FINITI



TEOREMA: IL SEGMENTO $\overline{OA}$ NON È COMMENSURABILE CON L'UNITÀ DI MISURA

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO: SI NEGA IL TEOREMA

PER ASSURDO SIA $\overline{OA}$ COMMENSURABILE CON L'UNITÀ DI MISURA ALLORA SIGNIFICA CHE IL SEGMENTO OA SI ESPRIMERÀ $OA=\frac{m}{n}$ (RIDOTTA AI MINIMI TERMINI, m E n PRIMI TRA LORO)

$OB^2=OA^2=1^2+1^2=2$ $\quad \frac{m^2}{n^2}=2 \quad m^2=2n^2 \longrightarrow$ m È PARI

SE m FOSSE DISPARI m^2 SAREBBE DISPARI
$m=2K+1$
$m^2=4K^2+4K+1$
$m^2=2\cdot(2K^2+2K)+1$

$m=2K;\ K\in N$

$4K^2=2n^2$

$2K^2=n^2$ n È PARI

QUESTO VA IN CONTRADDIZIONE CON IL FATTO CHE m E n SONO PRIMI TRA LORO

$\overline{OA}$ NON È QUINDI COMMENSURABILE CON L'UNITÀ DI MISURA

$\frac{m}{n}=P_1P_2P_3,d_1d_2d_3$ RAPPRESENTAZIONE DECIMALE PERIODICA

$\frac{2}{3}=0,6666=0,\overline{6}$
PERIODO

ESEMPIO

$2,3\overline{7}=\frac{237-23}{90}$
PERIODO
ANTIPERIODO

I NUMERI RAZIONALI NON RISOLVONO I PROBLEMI SULLE GRANDEZZE, INTRODUCIAMO QUINDI I NUMERI IRRAZIONALI

UNA RAPPRESENTAZIONE DECIMALE ILLIMITATA NON PERIODICA DEFINISCE UN NUMERO IRRAZIONALE.

IN $\mathbb{R}$={NUMERI RAZIONALI E IRRAZIONALI}, INSIEME DEI NUMERI REALI ABBIAMO:

1) LE 4 OPERAZIONI FONDAMENTALI $(+,-,\cdot,:)$

2) STRUTTURA D'ORDINE (POSSIAMO DIRE QUANDO q È > o < DI q')

$q\le q' \Longleftrightarrow q<q' \vee q=q'$

$A=[-1,3]$ $x=-1$ È UN MINIMO DI A

L'INSIEME DEI NUMERI NATURALI NON HA MAGGIORANTI

3) SI DICE CHE x È L'ESTREMO SUPERIORE DI A SE x È IL MINIMO DEI MAGGIORANTI DI A $x=\sup A$

ESEMPIO

$A=[-1,3)$ INSIEME MAGGIORANTI $=[3,+\infty)$ $x=3=\sup A$

VERIFICARE L'ESTREMO SUPERIORE

$$x=\sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} y\le x \quad \forall y\in A \\ \forall \varepsilon>0\ \exists y\in A: y>x-\varepsilon \end{cases}$$

ESEMPIO: VERIFICARE CHE SE $A\{\underbrace{1-\frac{1}{n}}_{y};\ n\in\mathbb{N},\ n\neq 0\}$, L'ESTREMO SUPERIORE SIA 1

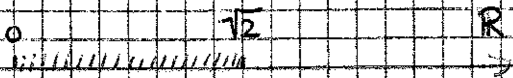
$$1-\frac{1}{n}\le 1 \quad \forall n\ge 1$$

$$1-\frac{1}{n}>1-\varepsilon \qquad \frac{1}{n}<\varepsilon \qquad n>\frac{1}{\varepsilon}$$

ASSIOMA DI COMPLETEZZA → VALE PER L'INSIEME DEI NUMERI REALI MA NON PER QUELLO DEI NUMERI RAZIONALI.

OGNI SOTTOINSIEME NON VUOTO $A\subset\mathbb{R}$, LIMITATO SUPERIORMENTE AMMETTE ESTREMO SUPERIORE

SE RAPPRESENTO GEOMETRICAMENTE I NUMERI REALI SU UNA RETTA ORIENTATA ESSI RAPPRESENTANO UN INTERVALLO CONTINUO.



$\{x\in\mathbb{Q},\ x>0:\ x^2<2\}$

L'INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI È DENSO IN $\mathbb{R}$

TRA DUE NUMERI REALI C'È SEMPRE UN NUMERO RAZIONALE

$(\forall r, r'\in\mathbb{R},\ r<r',\ \exists q\in\mathbb{Q}:\ r<q<r')$

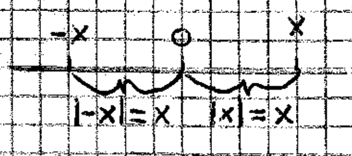
VALORE ASSOLUTO

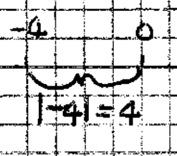
DATO $x\in\mathbb{R}$, IL SUO VALORE ASSOLUTO SI RAPPRESENTA CON $|x|$ $\begin{cases} x & \text{se } x\ge 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$

ESEMPIO

$|3|=3$ $|-2|=2$ $|0|=0$

IL VALORE ASSOLUTO RAPPRESENTA LA DISTANZA DI x DALL'ORIGINE





COMBINAZIONI SEMPLICI $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

(NON CONTA L'ORDINE)

DATO UN INSIEME DI n OGGETTI QUANTI SONO I SUOI SOTTOINSIEMI CONTENENTI K ELEMENTI

ESEMPIO:

$n=3 \quad k=2 \quad A\{a,b,c\} \quad \{a,b\} \quad \{a,c\} \quad \{b,c\}$

$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$ n SU K

COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \binom{2}{k} \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \binom{3}{k} \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \binom{4}{k} \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \binom{5}{k} \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \quad \binom{6}{k}
\end{array}$$

$\binom{6}{5} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{2}$

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots n a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

TEOREMA: DATO UN NUMERO $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ E $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ESISTE UN UNICO NUMERO POSITIVO (≥ 0) X TALE CHE $x^n = a$

X SI DICE RADICE n-ESIMA ARITMETICA DI a $\quad x = \sqrt[n]{a}$

$a=9, n=2 \quad \sqrt{9} = 3 \quad -\sqrt{9} = -3$

$\{x \in \mathbb{R} \; x^2 = 9\} = \{3, -3\} = \{\pm 3\}$

POTENZE D'ESPONENTE RAZIONALE

$m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0, m \neq 0 \quad a > 0$

$a \in \mathbb{R} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \frac{m}{n} = \frac{3}{2}$

SE $m < 0 \quad a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}}$

ESEMPIO 3

$A = B = \mathbb{R}$

$f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |y| = 1\}$ f NON È UNA FUNZIONE

OGNI X È IN RELAZIONE CON $Y = 1$ E CON $Y = -1$

SE f È UNA FUNZIONE E X È IN RELAZIONE CON Y SI SCRIVE $Y = f(x)$ (INVECE DI $(X,Y) \in f$)

SI DICE CHE Y È IMMAGINE DI X MEDIANTE f.

(UNA FUNZIONE DA A IN B È UNA LEGGE CHE ASSOCIA AD OGNI ELEMENTO X IN A ESATTAMENTE UNO E UN SOLO ELEMENTO $Y \in B$)

L'INSIEME A SI DICE DOMINIO DI f, L'INSIEME B SI DICE CODOMINIO DI f

GRAFICO DI $f = \{(x,y) \in A \times B : y = f(x)\}$

DATO $I \subset A$ SI DEFINISCE $f(I) = \{Y \in B : \exists x \in A \text{ con } y = f(x)\}$ IMMAGINE DI $I \subseteq B$

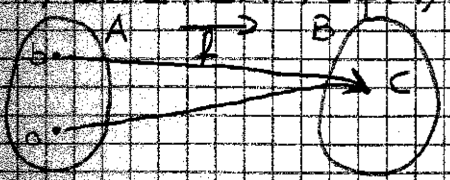
SE $J \subset B$

$f^{-1}(J) = \{x \in A : f(x) \in J\}$ CONTROIMMAGINE DI $J \subseteq A$

DEFINIZIONE $f : A \longrightarrow B$ SI DICE

SURIETTIVA

SE $\forall y \in B \; \exists x \in A : y \in f(x)$, CIOÈ $f(A) = B$



$c = f(b)$

$c = f(a)$

INIETTIVA

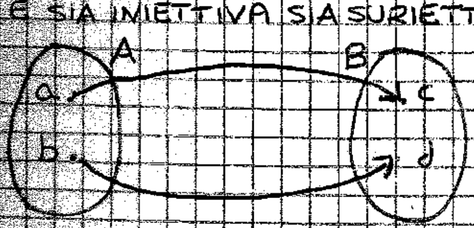
SE $\forall x, y \in A \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$c = f(a)$

$d = f(b)$

BIETTIVA

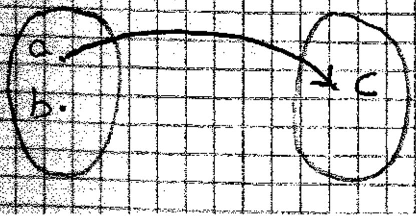
SE È SIA INIETTIVA SIA SURIETTIVA



$c = f(a)$

$d = f(b)$

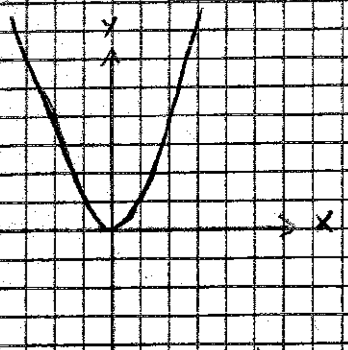
NO FUNZIONE



$c = f(a)$

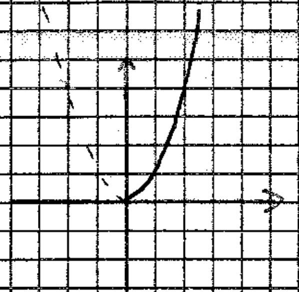
ESEMPIO $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x)=x^2$



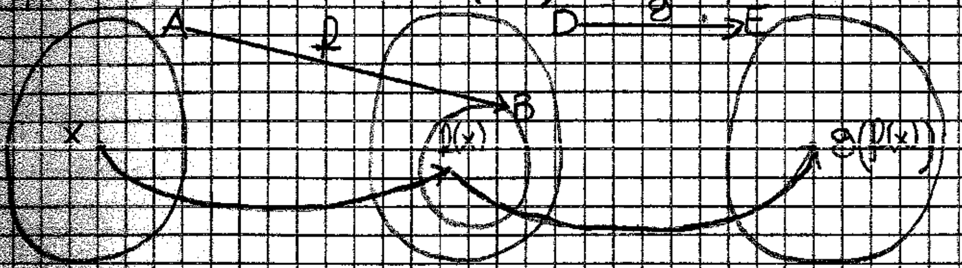
$I=[0,+\infty)$ $x \in [0,+\infty)$

$f_{|I}(x)=x^2$



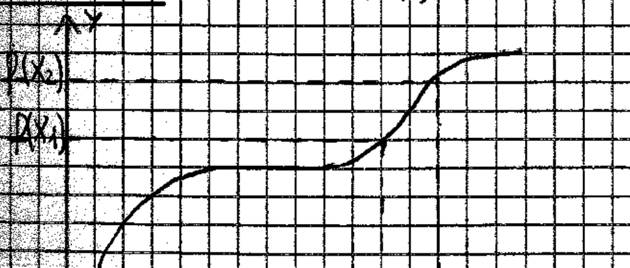
SE $f: A \to B$, $g: D \to E$ E INOLTRE $B \subset D$ SI DEFINISCE LA FUNZIONE COMPOSTA

$g \circ f: A \to E$ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $x \in A$

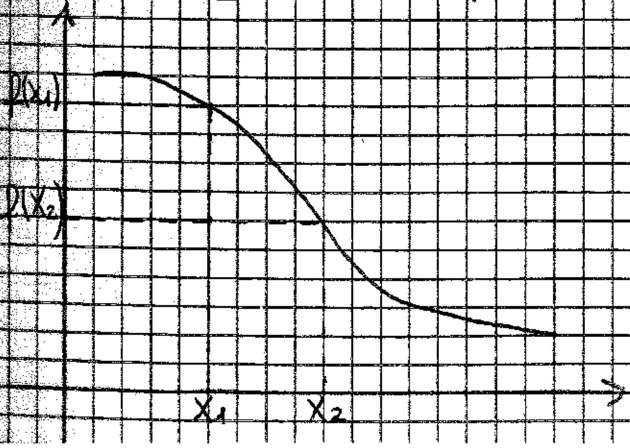


DEFINIZIONE → UNA FUNZIONE $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SI DICE:

CRESCENTE IN A SE $\forall x_1, x_2 \in A$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ *



DECRESCENTE IN A SE $\forall x_1, x_2 \in A$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ *



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 107

FUNZIONI ELEMENTARI

• FUNZIONE POTENZA D'ESPONENTE INTERO

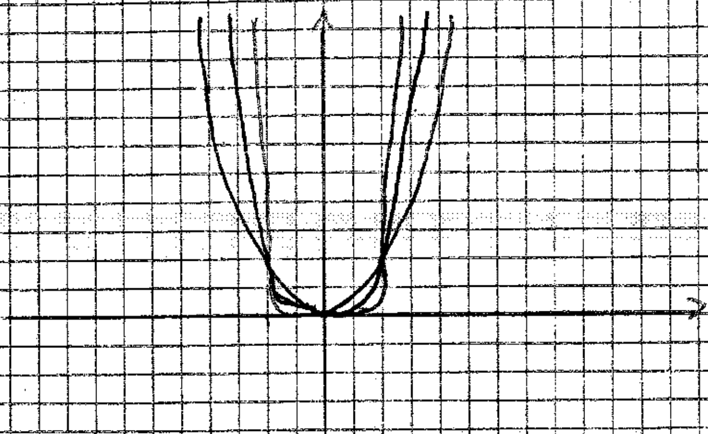
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N},\ n > 0$

- n PARI

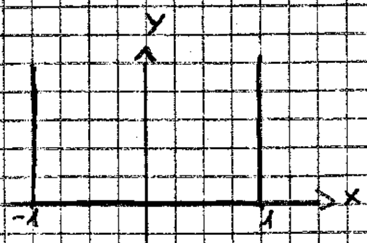
$f(x) = x^2$

$f(x) = x^4$

$f(x) = x^6$



$f(x) = x^{1000}$

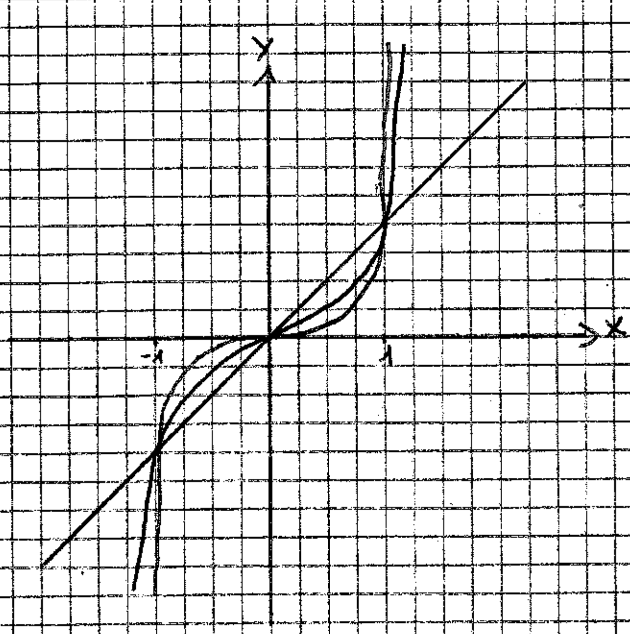


- n DISPARI

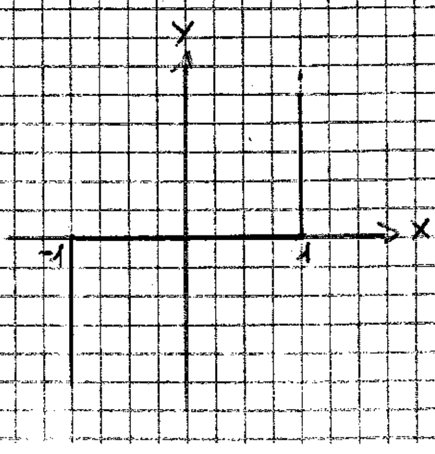
$f(x) = x$

$f(x) = x^3$

$f(x) = x^5$



$f(x) = x^{1999}$

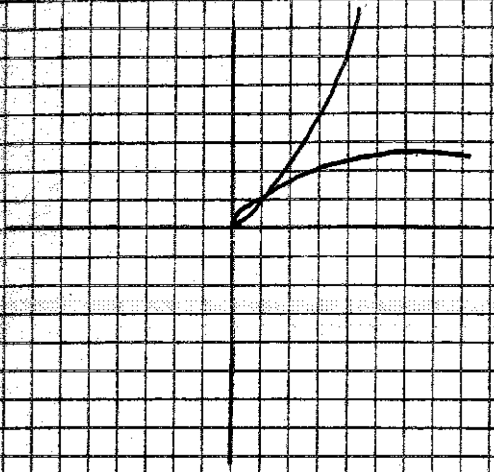


FUNZIONE POTENZA D'ESPONENTE REALE

$f(x)=x^r \quad r\in\mathbb{R}$ DOMINIO $[0,+\infty)$ SE $r>0$ DOMINIO $(0,+\infty)$ $r<0$

$f(x)=x^{\sqrt{2}}$

$f(x)=x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

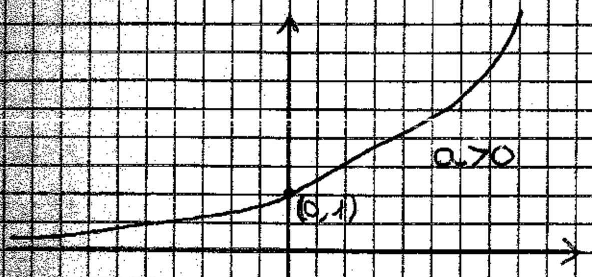


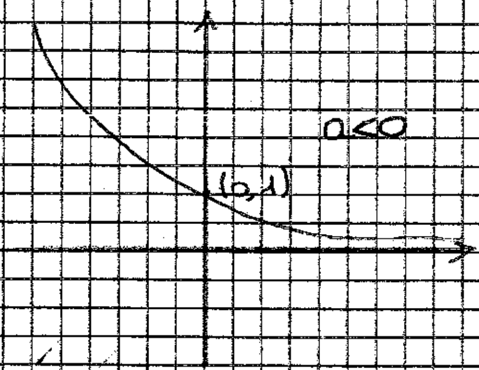
• **FUNZIONE ESPONENZIALE**

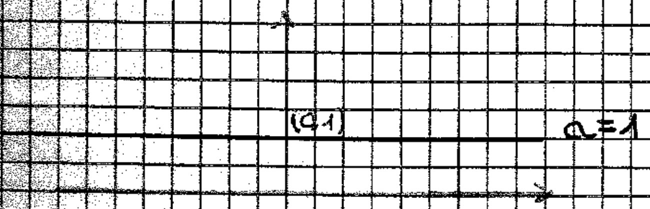
$f(x)=a^x$; $a>0$ DOMINIO: $\mathbb{R}$

STRETTAMENTE CRESCENTE SE $a>1$

STRETTAMENTE DECRESCENTE SE $0<a<1$







PROPRIETÀ

$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{x\cdot y} \qquad a^0 = 1$

$a^x>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

SE $a>0$, $a\neq 1$ LA FUNZIONE INVERSA $f^{-1}: \underbrace{f(\mathbb{R})}_{(0,+\infty)} \Rightarrow \mathbb{R}$

SI DICE LOGARITMO IN BASE a E SI DENOTA $f^{-1}(x)=\log_a x$ DOMINIO: $(0,+\infty)$

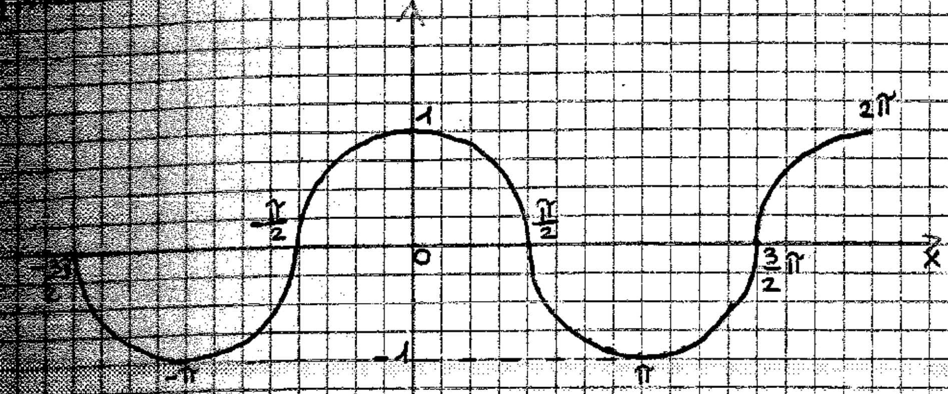
$f(x) = \cos x$

$\cos x = \cos(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

È UNA FUNZIONE PARI

NELL'INTERVALLO $[0, \pi]$

$f(x) = \cos x$ È SEMPRE STRETTAMENTE DECRESCENTE

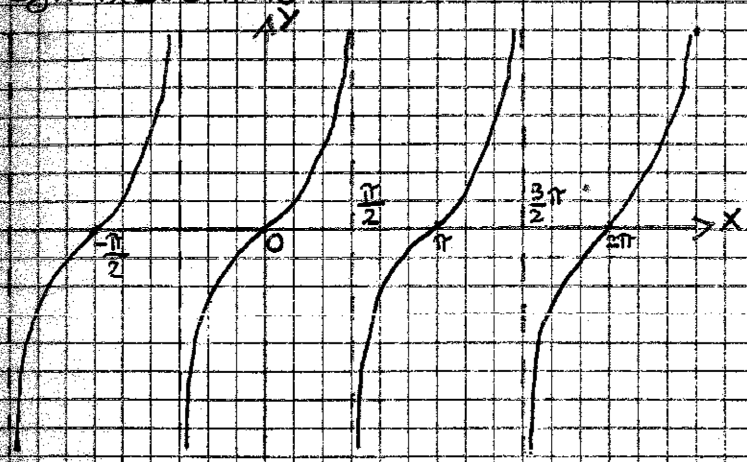


$f(x) = tg(x)$ $\qquad tg(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

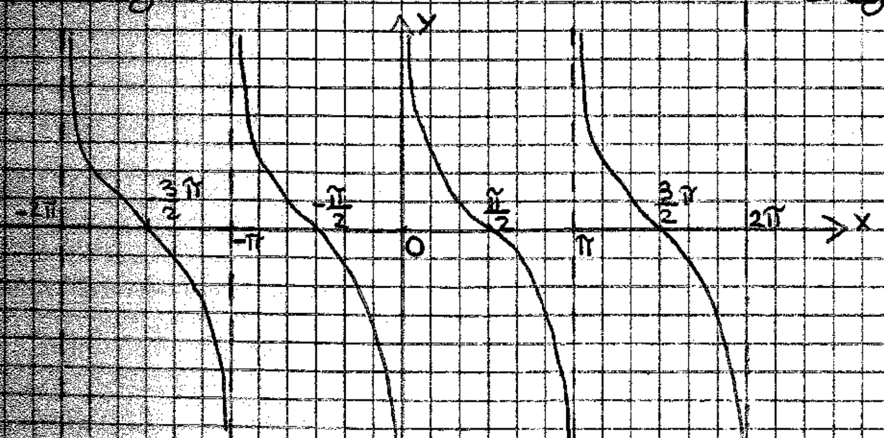
DOMINIO: $\mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

DOMINIO: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$tg(x+\pi) = tg\,x \quad \forall x \in$ DOMINIO



$f(x) = cotg\,x$ $\qquad cotg\,x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$



NUMERI COMPLESSI

SI INTRODUCE UN NUOVO SIMBOLO DENOTATO i E DETTO UNITÀ IMMAGINARIA

SI IMPONE $i^2 = -1$ $\quad i = \sqrt{-1}$

SI DICE NUMERO COMPLESSO UN'ESPRESSIONE DEL TIPO $x + iy$ $\quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

SI DENOTA CON $\mathbb{C} = \{x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}\}$

SOMMA

$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

ESEMPIO:

$1 + 2i + i = 1 + 3i$

PRODOTTO

$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

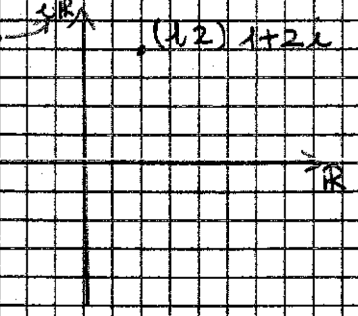
ESEMPIO

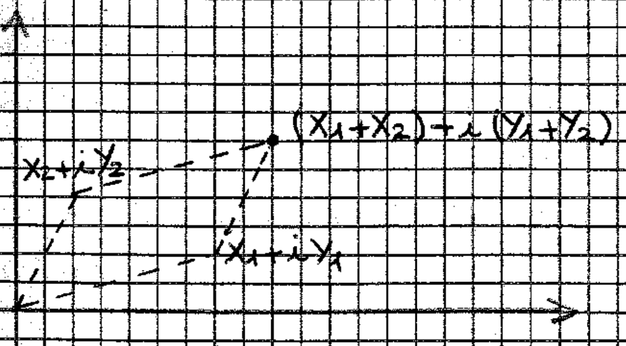
$(1 + 2i) \cdot (2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 4 + 3i$

VALGONO LE PROPRIETÀ NOTE IN $\mathbb{R}$

$\mathbb{C} \longleftrightarrow$ PIANO CARTESIANO $\quad \mathbb{C} = \{\overbrace{x + iy}^{\text{FORMA ALGEBRICA}};\ x, y \in \mathbb{R}\}$

ASSE IMMAGINARIO →





$z = x + iy$ $\qquad \bar{z} = x - iy$ (ZETA CONIUGATO)

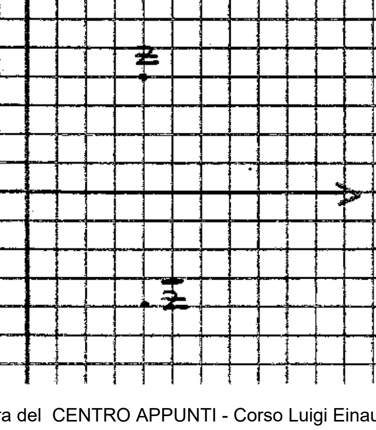
x È LA PARTE REALE DI z, $x = \mathrm{Re}\, z$ $\qquad y$ È LA PARTE IMMAGINARIA DI z $\quad y = \mathrm{Im}\, z$

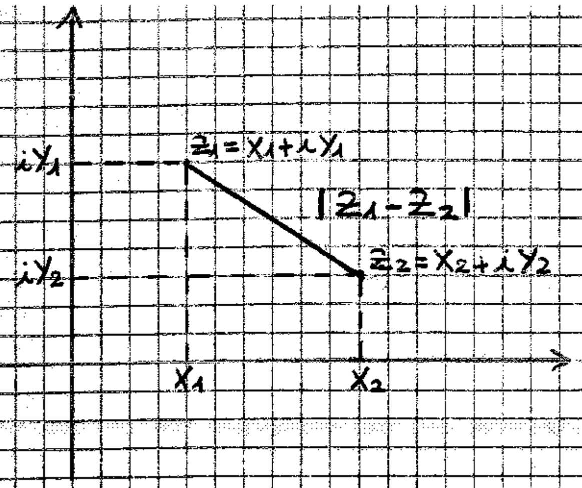
ESEMPIO

$z = 2 - 3i$

$\mathrm{Re}\, z = 2 \quad \mathrm{Im}\, z = -3$

$\bar{z}$ È SIMMETRICO A z RISPETTO ALL'ASSE X

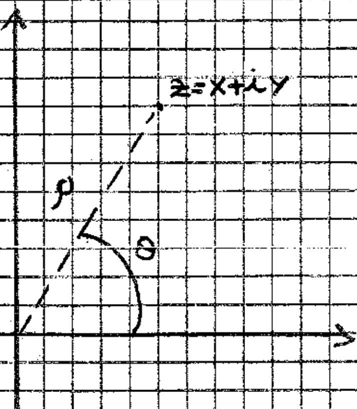




$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ $\qquad$ $|\bar{z}| = |z|$

Se $z_2 \neq 0$ $\quad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI



$x = \rho \cdot \cos\theta \quad y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta$

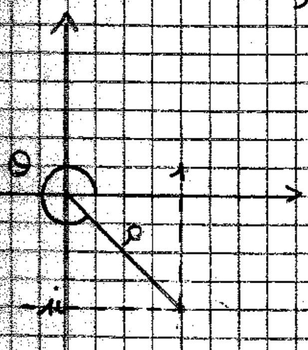
$z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$

$z = \rho \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA DEL NUMERO COMPLESSO z

ESEMPIO

$z = 1 - i \quad x = 1 \quad y = -1$



$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \theta = -\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7}{4}\pi$

$z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\dfrac{7}{4}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{7}{4}\pi\right)\right)$

$z = \sqrt{2} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 1 - i$

θ = ARGOMENTO DI z $\quad$ ρ = MODULO DI $z = |z|$

$z_1 = x_1 + i y_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$

$z_2 = x_2 + i y_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \rho_1 \rho_2 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2) =$

$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$ $\qquad$ $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$

$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2$

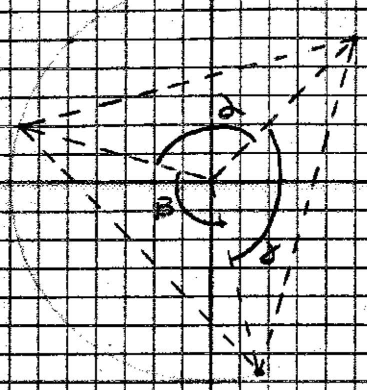
FORMA ESPONENZIALE

$z = \rho \cdot e^{i\theta}$

FORMULA DI EULERO

$\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha = e^{i\alpha}$

$\ldots = \frac{\theta}{n} + 2\pi\, K = n \qquad K = 0, 1, 2, 3 \ldots, (n-1)$



$\alpha = \beta = \gamma$ raggio $= \sqrt[n]{\rho}$

TEOREMA: OGNI NUMERO COMPLESSO $z \neq 0$ HA ESATTAMENTE n RADICI n-ESIME, CIOÈ n NUMERI COMPLESSI $w : w^n = z$, ESSI SONO DATI DALLA FORMULA 1

ESEMPIO

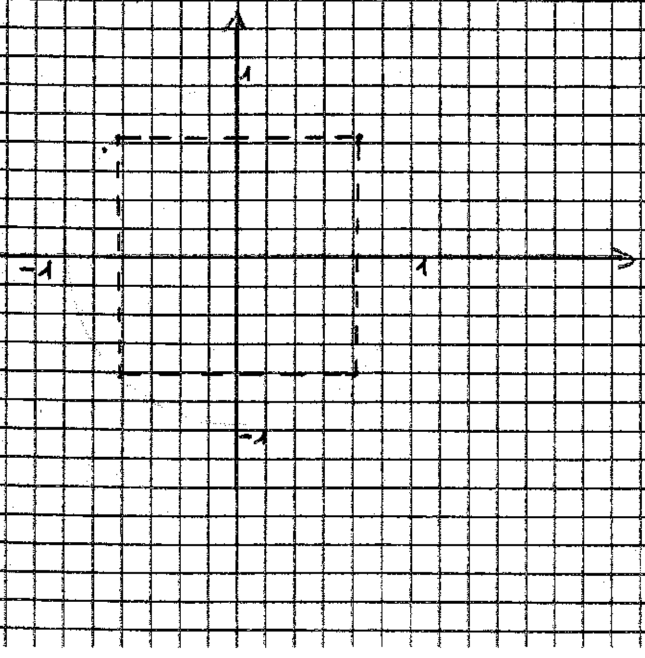
$z = -1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$ CALCOLARE $\sqrt[4]{-1}$ $\rho = 1$

$K=0 \quad z_0 = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$

$K=1 \quad z_1 = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi + 2\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$

$K=2 \quad z_2 = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi + 4\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$

$K=3 \quad z_3 = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 6\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 107

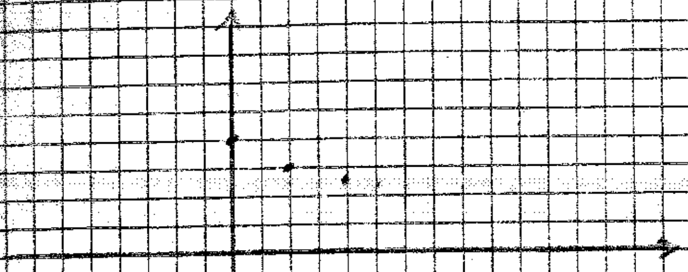
$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ GRAFICO$(f) = \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$

GRAFICO DELLA SUCCESSIONE (a_n):

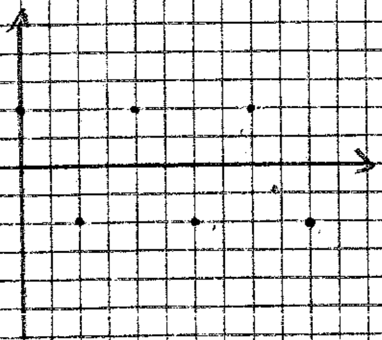
$\{(n, a_n), n \in \mathbb{N}\}$

$a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$

$2, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}$



$a_n = (-1)^n$



UNA SUCCESSIONE a_n SI DICE LIMITATA SUPERIORMENTE (O INFERIORMENTE) SE:

$\exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$ $(a_n \geq M \ \forall n \in \mathbb{N})$

UNA SUCCESSIONE SI DICE LIMITATA SE È LIMITATA SIA SUPERIORMENTE CHE INFERIORMENTE.

LIMITI

$\ell = \sqrt{2} = 1{,}414$ $a_0 = 1$ $a_1 = 1{,}4$ $a_2 = 1{,}41$ $a_3 = 1{,}414$

a_n È PROSSIMO AD ℓ QUANTO VOGLIAMO, A PATTO DI PRENDERE n SUFFICIENTEMENTE GRANDE $|a_n - \ell| < \varepsilon \to 10^{-4}$ (ALMENO 4 NUMERI DOPO LA VIRGOLA)

$\forall \varepsilon > 0$, CONSIDERO $|a_n - \ell| < \varepsilon$ ESSA È SODDISFATTA SE $n > N$ DOVE N È LA SOGLIA CHE DIPENDE DALLA TOLLERANZA ε

DEFINIZIONE → SIA (a_n) UNA SUCCESSIONE E $\ell \in \mathbb{R}$, SI DICE CHE (a_n) TENDE (O CONVERGE) A ℓ E SI SCRIVE $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$ O ANCHE $a_n \to \ell$

SE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$: SE $n > N$ ALLORA $|a_n - \ell| < \varepsilon$

PROPRIETÀ

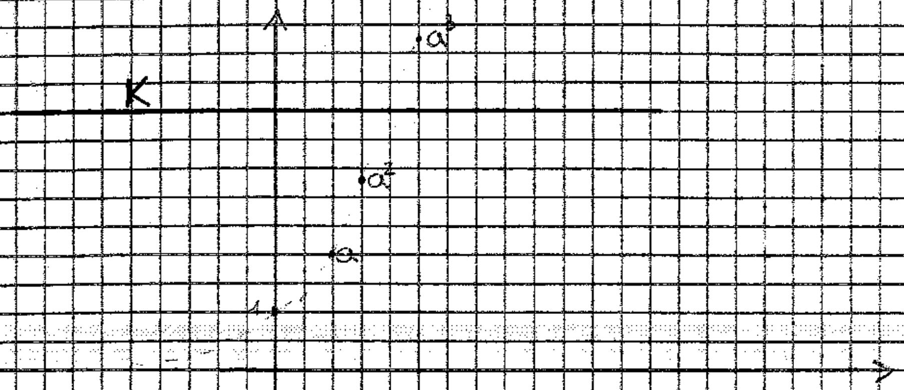
$\lim_{n \to \infty} a_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0$, TUTTI I TERMINI DELLA SUCCESSIONE ECCETTO UN NUMERO FINITO CADONO NELL'INTERVALLO $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

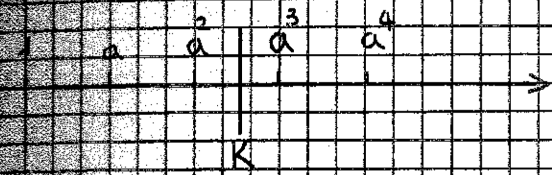
$\ell - \varepsilon$ ℓ $\ell + \varepsilon$

$\underbrace{a_0, a_1, a_2 \ldots a_N}_{\text{non so dove cadono}}, \underbrace{a_{N+1}, a_{N+2} \ldots}_{\text{cadono nell'intervallo } \forall n > N}$ $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ INTORNO SIMMETRICO DEL PUNTO ℓ E RAGGIO $= \varepsilon$

DIMOSTRARE CHE $\lim_{n \to \infty} a^n = +\infty$

n	1	2	3	4
a^n	a	a^2	a^3	a^4





CI SONO UN NUMERO FINITO DI VALORI PRIMA DI K E INFINITI DOPO K, QUINDI $\lim_{n \to \infty} a^n = +\infty$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

SE $h \geq 0, n \geq 0$ $\quad (1+h)^n \geq 1 + n \cdot h$ FORMULA VALIDA PER $h > -1$

$h \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

DIMOSTRAZIONE

$$(1+h)^n = \underbrace{1 + \binom{n}{1} h}_{1+n \cdot h} + \underbrace{\binom{n}{2} h^2 + \binom{n}{3} h^3 \ldots}_{\geq 0}$$

$$a^n = (1 + \underbrace{(a-1)}_{h>0})^n \geq 1 + n\underbrace{(a-1)}_{h} > K \qquad n > \frac{K-1}{a-1}$$

FISSATO $K \in \mathbb{R}$ SI PRENDA UN NUMERO $N \in \mathbb{N}$: $N \geq \frac{K-1}{a+1}$ ALLORA SE $n > N$, $a^n > K$

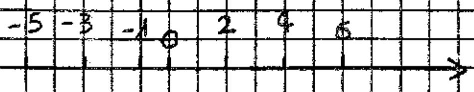
UNA SUCCESSIONE a_n SI DICE REGOLARE SE È CONVERGENTE, POSITIVAMENTE DIVERGENTE O NEGATIVAMENTE DIVERGENTE (QUINDI SE $a_n \to l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)

UNA SUCCESSIONE SI DICE OSCILLANTE SE NON È REGOLARE

ESEMPIO:

$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ QUANDO $\lim_{n \to \infty} |a_n| = +\infty$ $\quad (a_n)$ DIVERGE IN VALORE ASSOLUTO

$a_n = (-1)^n \cdot n$



SUCCESSIONE OSCILLANTE

ESEMPIO DI SUCCESSIONE REGOLARE CONVERGENTE

[illegible] SIANO DATE $(a_n), (b_n)$ CONVERGENTI $a, b \in \mathbb{R}$, $a_n \to a$ $b_n \to b$ ALLORA

[illegible] $(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$

[illegible] $a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

[illegible]RAZIONE

[illegible] $\forall \varepsilon\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad |a_n b_n - a \cdot b| < \varepsilon$

$|a_n b_n - a b| = |a_n b_n - ab + a b_n - a \cdot b_n|$

[illegible] $(a_n - a) + a \cdot (b_n - b)| \leq |b_n (a_n - a)| + |a \cdot (b_n - b)|$

[illegible] $|a_n - a| + |a| \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{<\varepsilon \text{ se } n > N_2,\ <m} < (M + |a|) \cdot \varepsilon$ $\searrow m$

[illegible]

[illegible]CESSIONE CONVERGENTE È LIMITATA

$a_n \to a \Longleftrightarrow \forall m > 0\ \exists N_1: \forall n > N_1, |a_n - a| < m$ $*$

$b_n \to b \Longleftrightarrow \forall m > 0\ \exists N_2: \forall n > N_2, |b_n - b| < m$ $**$

[illegible] ε PRENDO $m = \frac{\varepsilon}{M + |a|}$ ALLORA VALGONO $(*), (**)$

QUINDI SE $n > \max\{N_1, N_2\}$, $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$

3) SE $b \neq 0$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

$+\infty + \infty = +\infty$ $\quad -\infty - \infty = -\infty$ $\quad$ SE $a \in \mathbb{R}, a > 0$ $\quad a \cdot (+\infty) = +\infty$ $\quad a \cdot (-\infty) = -\infty$

(SE $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ $a > 0$

$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ ALLORA $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$)

SE $a \in \mathbb{R}$ $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ (SE $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ SE $b \neq 0$ $\forall n$, SE $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ ALLORA

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$)

SE $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ $\frac{a}{0} = \infty$

FORME INDETERMINATE

$\frac{0}{0} = \text{IND}$ $\quad +\infty - \infty = \text{IND.}$ $\quad \frac{\infty}{\infty} = \text{IND}$ $\quad 1^{\infty} = \text{IND.}$ $\quad 0^{\infty} = \text{IND}$ $\quad 0^{0} = \text{IND.}$

$0 \cdot \infty = \text{IND.}$

$P(n) = c_0 + c_1 \cdot n + c_2 \cdot n^2 + \dots c_p \cdot n^p \quad p \geq 1,\ c_p \neq 0$

$Q(n) = d_0 + d_1 \cdot n + d_2 \cdot n^2 + \dots d_q \cdot n^q \quad q \geq 1 \quad d_p \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{c_p n^p \left(1 + \frac{c_{p-1}}{c_p} \cdot \frac{1}{n} + \dots \frac{c_0}{n^p}\right)}{d_q n^q \left(1 + \frac{d_{q-1}}{d_q} \frac{1}{n} + \dots \frac{d_0}{n^q}\right)}$$

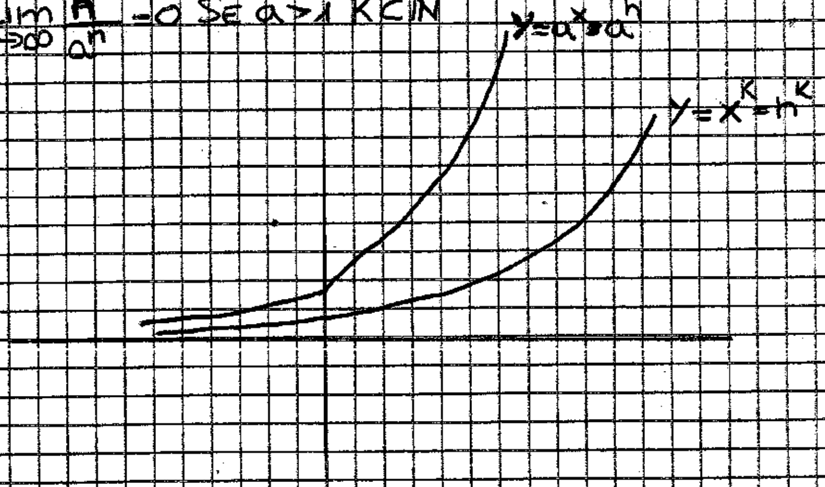
$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_p}{d_q} \cdot n^{p-q} = \frac{c_p \cdot n^p}{d_q \cdot n^q} = \begin{cases} \pm\infty & \text{SE } p>q \text{ IL SEGNO È QUELLO DI } \frac{c_p}{d_q} \\ 0 & \text{SE } p<q \\ \frac{c_p}{d_q} & \text{SE } p=q \end{cases}$$

ESEMPIO

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + 5}{n^7 + 4} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \text{ SE } a > 1 \ k \in \mathbb{N}$$



CONFRONTO TRA INFINITI

$k \in \mathbb{N},\ k \neq 0,\ a \in \mathbb{R},\ a > 1$

$$\frac{1}{n!}, \frac{1}{a^n}, \frac{1}{n^k}, 1, n^k, a^n, n!$$

$\frac{1}{n!} \to 0$, $\frac{1}{a^n} \to 0$, $\frac{1}{n^k} \to 0$; $n^k \to \infty$, $a^n \to \infty$, $n! \to \infty$

ESEMPIO

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 7n^7 + 4n + 5}{5^{-n} + n^{-2} + 4 \cdot n} = \frac{2^n}{4n} = +\infty$$

SUCCESSIONI MONOTONE

UNA SUCCESSIONE (a_n) SI DICE CRESCENTE SE $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ E SI DICE DECRESCENTE SE $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

UNA SUCCESSIONE (a_n) SI DICE STRETTAMENTE CRESCENTE SE $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ E SI DICE STRETTAMENTE DECRESCENTE SE $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

UNA SUCCESSIONE (a_n) SI DICE MONOTONA SE È CRESCENTE O DECRESCENTE

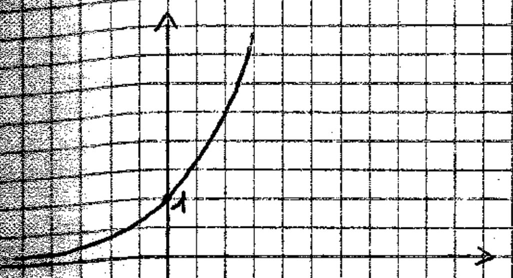
UNA SUCCESSIONE (a_n) SI DICE STRETTAMENTE MONOTONA SE È STRETTAMENTE CRESCENTE O STRETTAMENTE DECRESCENTE

ESEMPIO

$a_n = n^2 \quad 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 \quad a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > a_n$

NUMERO DI NEPERO $e = 2,718281828$

$Y = e^x$



SE $z = x + iy$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$

SI PONE $\quad e^z = e^x \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y)$

$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot (\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) \cdot e^{x_2} \cdot (\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) = e^{x_1+x_2} \cdot (\cos(y_1+y_2) + i \operatorname{sen}(y_1+y_2))$$

ESEMPIO:

$$e^{\pi \cdot i} = e^0 \cdot (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -1 \qquad e^{\pi \cdot i} + 1 = 0$$

$z = \pi i = 0 + i\pi$

SOTTOSUCCESSIONI

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \ldots$

a_0, a_2, a_4, a_6

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

$b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \qquad\qquad b_k = a_{2k} \quad n = 2k$

DATA UNA SUCCESSIONE (a_n) E UNA SUCCESSIONE DI INDICE $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < n_4 \ldots$

DICIAMO SOTTOSUCCESSIONE ESTRATTA DA (a_n) SECONDO LA LEGGE (n_k) LA SUCCESSIONE $b_k = a_{n_k}$

ESEMPIO

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \qquad b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$

$b_k = a_{k^2} \qquad a_0 \; a_1 \; a_4 \; a_9 \; a_{16}$

ESEMPIO:

$a_n = (-1)^n \qquad \boxed{1}, \boxed{-1}, \boxed{1}, \boxed{-1}, \boxed{1}, \boxed{-1}, \boxed{1}, \boxed{-1}, \boxed{1}, \boxed{-1}$

$1, 1, 1, 1, 1$ TENDE A 1 (SUCCESSIONE CHE PRENDE I TERMINI DI POSTO DISPARI)

$-1, -1, -1, -1, -1$ TENDE A -1 (SUCCESSIONE CHE PRENDE I TERMINI DI POSTO PARI)

$|f(x)-l|<\varepsilon \iff l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$

$l-\varepsilon \qquad l \qquad l+\varepsilon$

$|x-x_0|<\delta \iff x_0-\delta<x<x_0+\delta$

$x_0-\delta \qquad x_0 \qquad x_0+\delta$

IL PUNTO (x_0, l) NON È DETTO CHE APPARTENGA AL GRAFICO DELLA FUNZIONE $f(x)$

OPPURE f POTREBBE NON ESSERE DEFINITA IN x_0 O È DEFINITA MA $f(x_0)\neq l$

DEFINIZIONE → SIA f DEFINITA IN UN INTORNO x_0, DICIAMO CH f È CONTINUA IN x_0 SE

$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$: SE $x\in A, |x-x_0|<\delta$ ALLORA $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

ESEMPIO

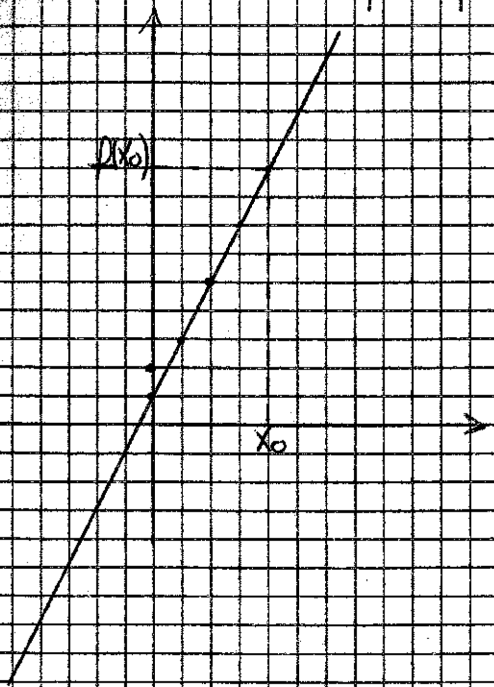
$f(x)=ax+b \quad a,b\in\mathbb{R}$

VERIFICHIAMO CHE $f(x)$ È CONTINUA IN OGNI PUNTO x_0:

$f(x_0)=ax_0+b \quad |f(x)-f(x_0)|=|a|\cdot|(x-x_0)|<\varepsilon$ SE $|x-x_0|<\delta$ CON $|a|\,\delta\leq\varepsilon$

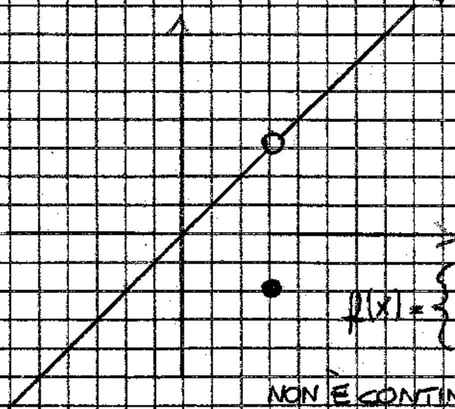
CIOÈ DATO ε, PRENDO $\delta>0$ $|a|\cdot\delta\leq\varepsilon$

ALLORA SE $|x+x_0|<\delta$ RISULTA $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$



$y=2x+1$

x	y
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9



$f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1 \\ -1, & x=1 \end{cases}$

NON È CONTINUA IN $x_0=1$

$\lim_{x\to 1} f(x)=1$

$f(x)=\operatorname{sen} x \quad g(x)=\cos x$ FUNZIONI CONTINUE IN OGNI PUNTO $x_0\in\mathbb{R}$

$|f(x)-f(x_0)|=|\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x_0|$

FORMULE DI PROSTAFERESI

$\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x_0=2\operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$

$\cos x-\cos x_0=-2\operatorname{sen}\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x-x_0}{2}\right)$

f È CONTINUA IN $X_0 \iff \exists$ FINITO IL LIMITE $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

SE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ESISTE FINITO,

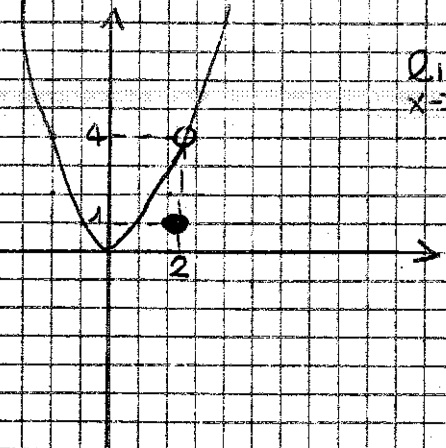
MA 1) f NON È DEFINITA IN X_0 $f(x_0)$ NON ESISTE

O 2) f È DEFINITA IN X_0 MA IL VALORE $f(x_0) \neq \ell$

ALLORA SI DICE CHE f HA UNA **DISCONTINUITÀ** ARTIFICIALE O ELIMINABILE

ESEMPIO:

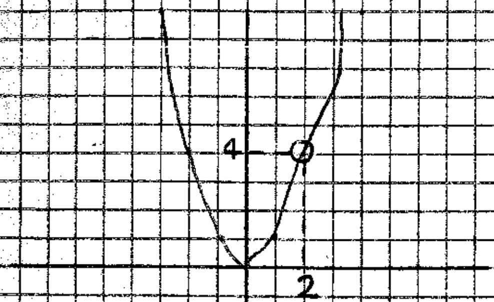
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$



$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \neq 1$

ESEMPIO

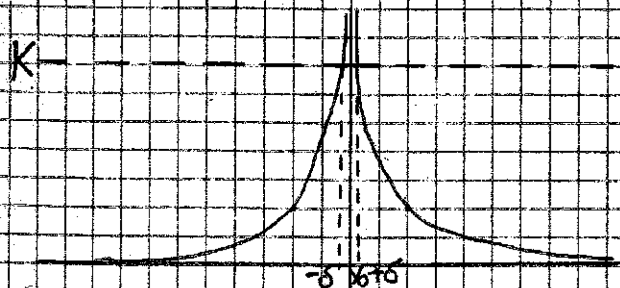
$f(x) = x^2$ SE $X \neq 2$



$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ f NON È DEFINITA IN $X_0 = 0$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ DOMINIO: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$



I VALORI DELLA FUNZIONE DIVENTANO GRANDI QUANTO SI VUOLE A PATTO DI PRENDERE X SUFFICIENTEMENTE VICINO A $X_0 = 0$

DISCONTINUITÀ DI II SPECIE

SUPPONIAMO CHE $f: A \to \mathbb{R}$ SIA DEFINITA IN UN INTORNO DI X_0, PRIVATO DI X_0, DICIAMO CHE f TENDE A $+\infty$ PER X CHE TENDE A X_0 E SCRIVIAMO $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

SE $\forall K > 0\ \exists \delta > 0$ SE $x \in A$ E $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ ALLORA I VALORI CHE LA FUNZIONE ASSUME SONO MAGGIORI DI K $f(x) > K$

$\frac{1}{x^2} > K$ $x^2 < \frac{1}{K}$ $-\sqrt{\frac{1}{K}} < x < \sqrt{\frac{1}{K}}$, $x \neq 0$ $\delta = \sqrt{\frac{1}{K}}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

DEFINIZIONE UNIFICATA DI LIMITE → SIA $x_0, \ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

SIA $f: A \to \mathbb{R}$ DEFINITA IN UN INTORNO DI x_0, PRIVATO EVENTUALMENTE DI x_0, ALLORA SI DICE CHE $f \to \ell$ PER $x \to x_0$ E SI SCRIVE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ SE $\forall$ INTORNO V DI ℓ ESISTE UN INTORNO U DI x_0 TALE CHE SE $x \in A$, $x \in U$, $x \neq x_0$ ALLORA $f(x) \in V$

OSSERVAZIONE

SE $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$

$U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$V = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

ESEMPIO

FUNZIONE PARTE INTERA $f(x) = \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$

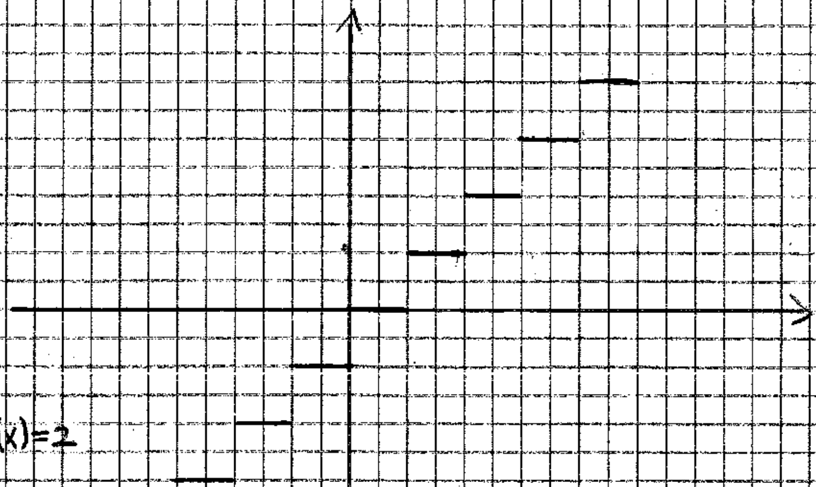
$f(3.5) = 3$

$f(0) = 0$

$f(-2.5) = -3$

$f(2) = 2$

$f(1.9) = 1$



$\lim_{x \to 2} f(x) =$ NON ESISTE

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$

$\lim dx \neq \lim sx$ DISCONTINUITÀ DI I SPECIE

SE $x_0 \in \mathbb{R}$, DICIAMO INTORNO DESTRO (SINISTRO) DI x_0 UN INTERVALLO DEL TIPO $(x_0, x_0 + \delta)$, $((x_0 - \delta, x_0))$

DEFINIZIONE → SIA $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

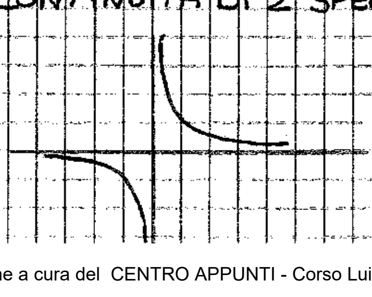
SIA $f: A \to \mathbb{R}$ DEFINITA IN UN INTORNO DESTRO (SINISTRO) DI x_0 ALLORA SI DICE CHE f TENDE A ℓ PER $x \to x_0$ DA DESTRA (DA SINISTRA) E SI SCRIVE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ ($\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$) SE VALE LA DEFINIZIONE UNIFICATA DI LIMITE CON "INTORNO U" SOSTITUITO DA "INTORNO DESTRO U (INTORNO SINISTRO U)"

SE ESISTONO FINITI $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ MA SONO DIVERSI SI DICE CHE f HA UNA DISCONTINUITÀ DI I SPECIE O DI TIPO SALTO

SE f NON È CONTINUA IN x_0 E NON HA UNA DISCONTINUITÀ ARTIFICIALE O DI I SPECIE IN x_0 SI DICE CHE HA IN x_0 UNA DISCONTINUITÀ DI 2ª SPECIE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

ESEMPIO:

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$



...ZIONE 2) BASTA VERIFICARE CHE $a_n \to x_0$, $a_n \neq x_0$ ... $\lim g(a_n) = ...$

l_1 $\quad$ l

PER IL TEOREMA DI RELAZIONE

CONSEGUENZA: LA SOMMA DI FUNZIONI CONTINUE È UNA FUNZIONE CONTINUA

$$\lim (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0)$$

IL PRODOTTO DI FUNZIONI CONTINUE È UNA FUNZIONE CONTINUE

SE $g(x)$ È CONTINUA $\frac{1}{g(x)}$ È CONTINUA

... FUNZIONI CONTINUE

POLINOMI, SU TUTTO $\mathbb{R}$ $\quad (3x^3+2x-1)$

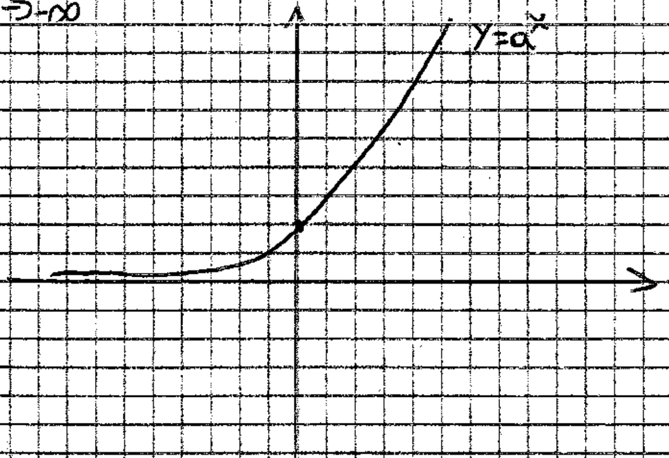
FUNZIONI RAZIONALI, LADDOVE NON SI ANNULLA IL DENOMINATORE

$\frac{x^2+2x+1}{x^3+5}$ DOMINIO $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt[3]{5}\}$

$\frac{(\text{sen}\, x)^3}{\cos x}$ $\quad \cos x \neq 0 \quad x \neq \frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

MOSTRARE CHE, SE $a>1$

$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$



$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty$, SAPPIAMO CHE $\lim_{n\to\infty} a^n=+\infty \Rightarrow \forall K>0\ \exists N: a^N>K$

SE $x>N$, $a^x>a^N>K$

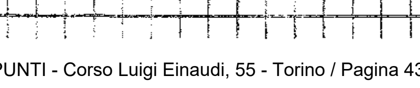
DEFINIZIONE → UNA FUNZIONE $f:[a,b] \to$ SI DICE CONTINUA IN $[a,b]$ SE È CONTINUA IN OGNI PUNTO DI (a,b) E SE $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ $\quad \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

OSSERVAZIONE

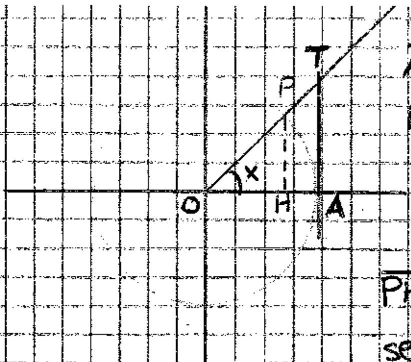
SE $x_0\in\mathbb{R}$, $l\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ $\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=l \iff \begin{cases} \lim_{x\to x_0^+} f(x)=l \\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=l \end{cases}$

$\forall$ INTORNO V DI l $\exists$ INTORNO U DI x_0

SE $x\in U$, $x\neq x_0$ ALLORA $f(x)\in V$



...NOTEVOLI



$\widehat{AP}$ = ARCO

PH = SENO

OH = COSENO

$\overline{AT}$ = TANGENTE

$\overline{PH} < \widehat{PA} < \overline{AT}$

$\operatorname{sen}x < x < \operatorname{tg}x$

$\lim \frac{\operatorname{sen}x}{x} = 1$

DIMOSTRAZIONE

$\lim \frac{\operatorname{sen}x}{x} = \frac{0}{0}$ DIVIDO PER senx

$1 < \frac{x}{\operatorname{sen}x} < \frac{1}{\cos x}$ RECIPROCI

$\cos x < \boxed{\frac{\operatorname{sen}x}{x}} < 1$

$\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \qquad \lim_{x\to 0} 1 = 1$

$\downarrow$ ARGOMENTO DEL LIMITE — TEOREMA DEL CONFRONTO

1

$\lim \frac{\operatorname{tg}x}{x} = 1$

DIMOSTRAZIONE

$\lim \frac{\operatorname{tg}x}{x}$ $\qquad \operatorname{tg}x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$

$\lim \frac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{x \cdot \cos x} \qquad \lim_{x\to 0} \overbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}^{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{1} = 1$

$\lim \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

DIMOSTRAZIONE

$\lim \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) \xrightarrow{\text{PROPRIETÀ DEI LOGARITMI}} \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ INVERTO lim E ln

$\ln \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ PONIAMO $\frac{1}{x} = y \quad x\to 0 \quad y \to \infty \quad x = \frac{1}{y}$

$\ln \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = \ln e = 1$

$\lim \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^r} = 0 \quad \forall r>0, a>0 \ a\neq 1$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^r} = +\infty \quad \forall r>0 \ \forall a>1$

$\lim_{x\to 0^+} x^r \log_a x = 0 \quad \forall a>0 \ \forall r>0 \ a\neq 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a \qquad y = a^x - 1 \quad x = \log_a(y+1)$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

DIMOSTRAZIONE $\qquad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$\lim \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2 \cdot (1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\overbrace{\operatorname{sen}^2 x}^{1}}{(1+\cos x)\,x^2} = \frac{1}{2}$

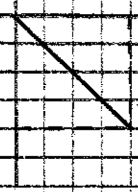
ESEMPIO

$f(x) = -x$ su $A = (0,2]$

f NON AMMETTE MASSIMO SU A

f HA MINIMO $= -2$

$x=2$ È L'UNICO PUNTO DI MINIMO



$f(A) = [-2;0)$

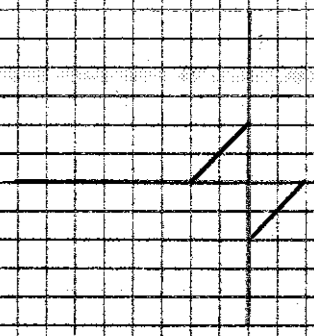
$\max f(A)$ NON ESISTE

$\min f(A) = -2$

ESEMPIO:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{SE } -1 \leq x < 0 \\ x-1 & \text{SE } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$A[-1,1]$



f NON AMMETTE MASSIMO

$x=0$ È UN PUNTO DI MINIMO

$\min_{x \in A} f(x) = -1$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

SIA f UNA FUNZIONE DEFINITA E CONTINUA SU UN INTERVALLO LIMITATO E CHIUSO $[a,b]$. ALLORA f AMMETTE ALMENO UN PUNTO DI MASSIMO E ALMENO UN PUNTO DI MINIMO

CENNO DI DIMOSTRAZIONE

SI CONSIDERA $f([a,b])$

SIA $M = \sup f([a,b])$

$(M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$

1) ESISTE UNA SUCCESSIONE $\exists (x_n),\ x_n \in [a,b] \cdot f(x_n) \to M$

A) SE $M \in \mathbb{R}$

$\exists y_n \in f([a,b])$

$M - \frac{1}{n} < y_n < M$

$M - \frac{1}{n} \quad y_n \quad M$

$\exists x_n \in [a,b] \cdot f(x_n) = y_n \qquad \underbrace{M - \frac{1}{n}}_{\to M} < f(x_n) \leq M \quad \forall n \geq 1$

2) SE $x_n \to c \quad c = [a,b] \quad x_n \geq a\ \forall n \quad c \geq a$ SE CONVERGE

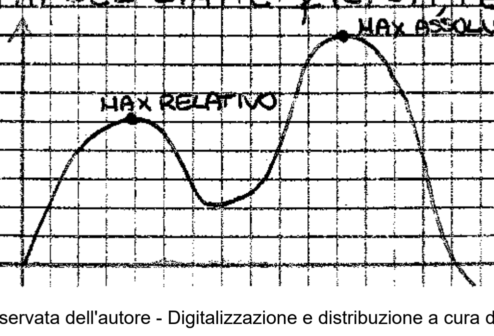
$f(x_n) \to f(c) = M$

2) PER IL TEOREMA DI BOLZANO WEIERSTRASS, SICCOME (x_n) È LIMITATA, ESSA HA UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE $x_{n_k} \to c \quad c \in [a,b] \quad (x_{n_k} \geq a,\ c \geq a)$

$f(x_{n_k}) \to f(c)$ (SICCOME $f(x_n) \to M$, LA SOTTOSUCCESSIONE $f(x_{n_k}) \to M$

PER L'UNICITÀ DEL LIMITE $f(c) = M$ PERCIÒ $M \in \mathbb{R}$ E $M = \max f([a,b])$

ESEMPIO



DIMOSTRAZIONE

SI CONSIDERA IL PUNTO $\frac{a+b}{2}$

SE $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ ALLORA BASTA PRENDERE $c=\frac{a+b}{2}$

SE $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ $a_1=\frac{a+b}{2}$, $b_1=b$

SE $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$ $a_1=a$ $b_1=\frac{a+b}{2}$

L'INTERVALLO $[a_1,b_1]$ È NELLE STESSE CONDIZIONI DELL'INTERVALLO $[a,b]$:

$f(a_1)<0, f(b_1)>0$ $\left(b_1-a_1=\frac{b-a}{2}\right)$

RIPETIAMO IL RAGIONAMENTO PRECEDENTE ALL'INTERVALLO $[a_1,b_1]$ E COSÌ VIA FIN A TROVARE UN INTORNO OPPORTUNAMENTE PICCOLO.

TROVIAMO UNA SUCCESSIONE DI INTERVALLI $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\ldots$

$a \quad a_1 \quad a_2\, a_3 \quad b_3\, b_2 \quad b_1 \quad b$

$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\longrightarrow 0$ PER $n\to\infty$

LA SUCCESSIONE a, a_1, a_2, a_3 È CRESCENTE E LIMITATA SUPERIORMENTE (AD ESEMPIO LIMITATA SUPERIORMENTE DA b)

QUINDI $a_n\to l_1\in[a,b]$ ALLORA ANALOGAMENTE $b_n\to l_2\in[a,b]$

SICCOME $b_n-a_n\to 0$ ALLORA $l_1=l_2$

SIA $c=l_1=l_2$ VERIFICHIAMO CHE $f(c)=0$

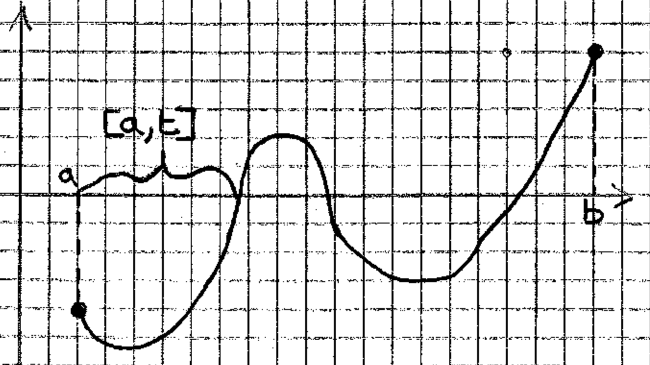
- NON PUÒ ESSERE $f(c)>0$ PERCHÉ $\underbrace{f(a_n)}_{\downarrow\, f(c)}<0\ \forall n$

- NON PUÒ ESSERE $f(c)<0$ PERCHÉ $\underbrace{f(b_n)}_{\downarrow\, f(c)}>0\ \forall n$

QUINDI $f(c)=0$ E $c\in(a,b)$

IN ALTERNATIVA (DIMOSTRAZIONE)

SIA $c=\sup\{t\in[a,b]: f(x)<0, \forall x\in[a,t]\}$

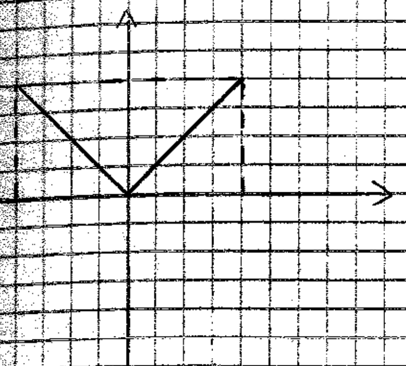


COROLLARIO

UN'EQUAZIONE POLINOMIALE DI GRADO DISPARI HA SEMPRE ALMENO UNA RADICE REALE

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots a_1x+a_0=0$ $n\geq 1$ DISPARI $a_n\neq 0$

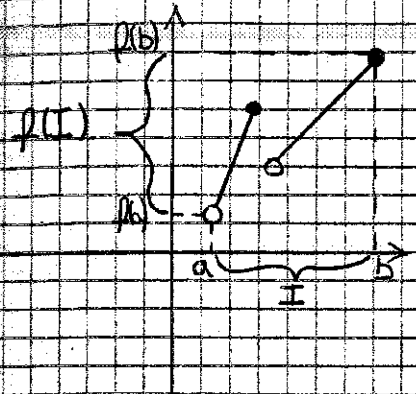
ESEMPIO

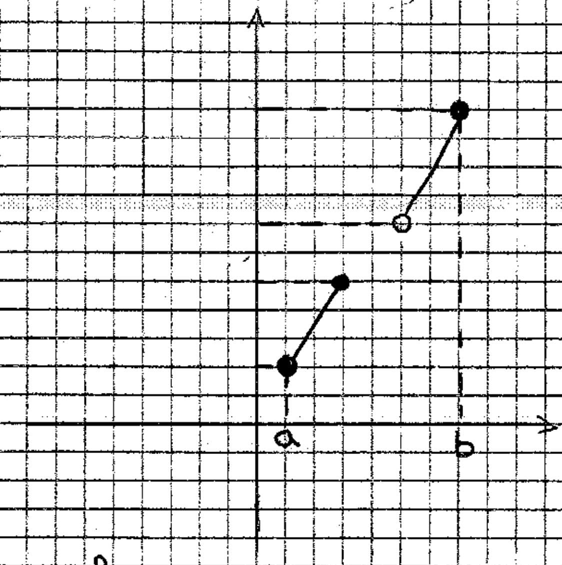


$f(x) = |x|$ su $I = (-1,1)$

$f(I) = [0,1)$

f CONTINUA, L'IMMAGINE È SEMPRE UN INTERVALLO





f NON CONTINUA,
L'IMMAGINE È UN INTERVALLO

f NON CONTINUA,
L'IMMAGINE NON È UN INTERVALLO

TEOREMA DELLA CONTINUITÀ DELL'INVERSA

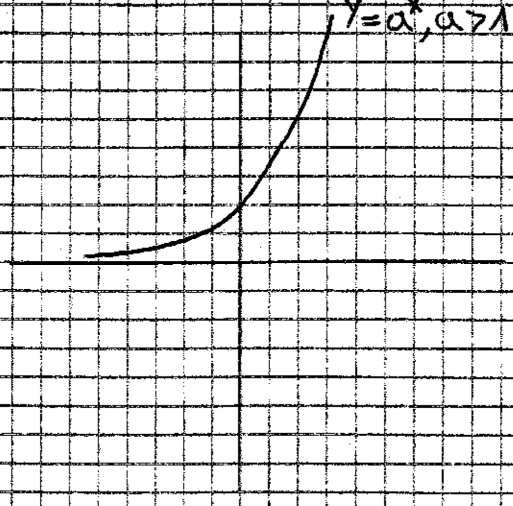
SIA f UNA FUNZIONE STRETTAMENTE MONOTONA E CONTINUA SU UN INTERVALLO I, ALLORA $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}(I)$ È CONTINUA

ESEMPIO

$f(x) = a^x$, $x \in I = \mathbb{R}$

$(a>0, a \neq 1)$

$f(I) = (0, +\infty)$



$y = \log_a(x)$, $x \in (0, +\infty)$ È CONTINUA

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\qquad \omega(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$

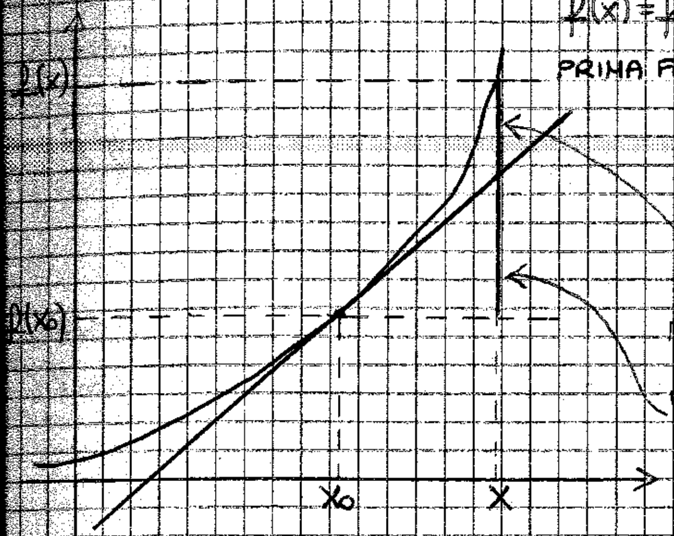
MOLTIPLICO PER $x - x_0$

$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$

$\omega(x) \cdot (x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \omega(x) \cdot (x - x_0)$

PRIMA FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

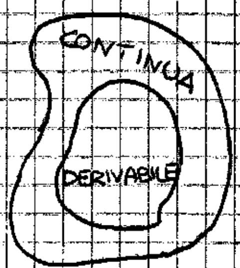


$f(x) - f(x_0) \simeq f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$dx = \Delta x = x - x_0$ $\qquad \Delta y = f(x) - f(x_0)$ $\qquad dy = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ DIFFERENZIALE DI f CALCOLATO IN x_0

$dy = f'(x_0)\, dx$ LA DERIVATA SI DENOTA ANCHE CON $\frac{dy}{dx}$

PROPOSIZIONE $\longrightarrow$ SE f È UNA FUNZIONE DERIVABILE IN x_0, ALLORA f È CONTINUA IN x_0



DIMOSTRAZIONE

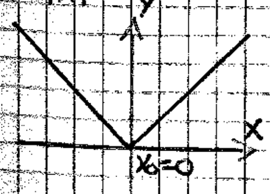
BISOGNA VERIFICARE CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

OSSIA $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ $\qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot x - x_0$ MOLTIPLICO E DIVIDO PER $x - x_0$

$\lim_{x \to x_0} f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$

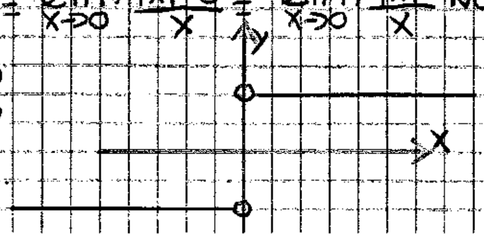
ESEMPIO

$f(x) = |x|$



$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ NON ESISTE IL LIMITE

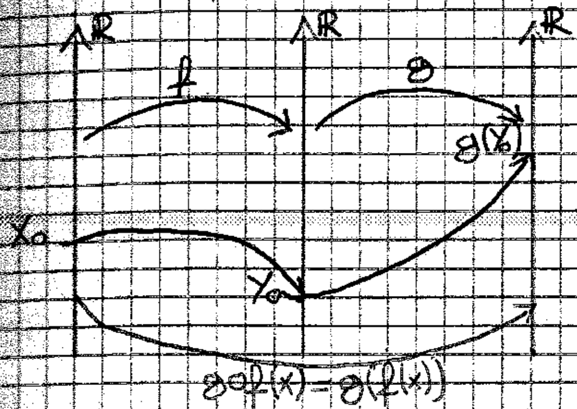
$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{SE } x > 0 \\ -1 & \text{SE } x < 0 \end{cases}$



PROPRIETÀ:

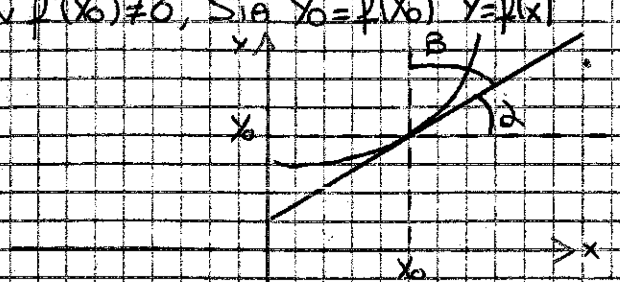
SIA f DERIVABILE IN UN PUNTO X_0, SIA $Y_0 = f(X_0)$ E SIA g UNA FUNZIONE DERIVABILE IN Y_0 ALLORA LA COMPOSIZIONE $g(f(x)) = h(x)$ È DERIVABILE IN X_0

$h'(X_0) = g'(f(X_0)) \cdot f'(X_0)$



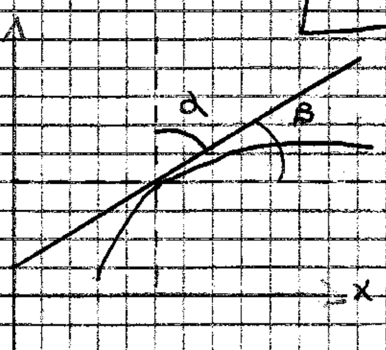
PROPRIETÀ:

SIA f UNA FUNZIONE STRETTAMENTE MONOTONA IN UN INTORNO DI X_0 E SIA DERIVABILE IN X_0, CON $f'(X_0) \neq 0$, SIA $Y_0 = f(X_0)$ $y = f(x)$



$tg\alpha = f'(X_0)$

SIA $Y_0 = f(X_0)$, SE INDICHIAMO CON $H(Y)$ LA FUNZIONE INVERSA, DEFINITA IN UN INTORNO DI Y_0, ALLORA $H(Y)$ È DERIVABILE IN Y_0 E $\boxed{H'(Y_0) = \frac{1}{f'(X_0)}}$



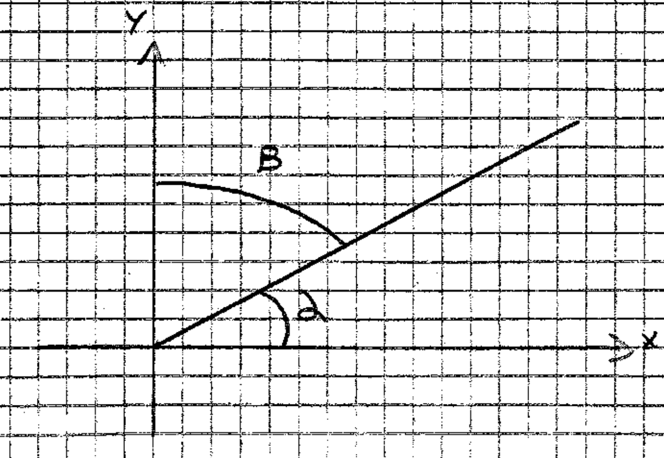
$tg\beta = (f^{-1})'(Y_0)$

$f'(X_0) = tg\alpha$

$f'(Y_0) = tg\beta$

$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{1}{tg\beta}$

$tg\beta = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$



$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f'(x) = \cos x$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x + x_0 - x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Delta x + x_0 + x_0}{2}\right)}{\Delta x}$$

USO LA FORMULA DI PROSTAFERESI

$$\lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{1} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos(x_0)$$

$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\operatorname{sen} x$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x + x_0) - \cos(x_0)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\cos x_0} \cdot \overset{1}{\cos \Delta x} - \operatorname{sen} x_0 \cdot \operatorname{sen} \Delta x - \cancel{\cos(x_0)}}{\Delta x} = -\operatorname{sen} x_0$$

- $f(x) = \operatorname{tg} x \qquad f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

DIMOSTRAZIONE

$$D \operatorname{tg} x = D \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$\frac{\overbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}^{1}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- $f(x) = a^x \qquad f'(x) = a^x \cdot \ln a \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (a > 0, a \neq 1)$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x_0} \cdot \overbrace{(a^{\Delta x} - 1)}^{\ln a}}{\Delta x} = a^{x_0} \cdot \ln a$$

- $f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot \overbrace{(e^{\Delta x} - 1)}^{1}}{\Delta x} = e^{x_0}$$

- $f(x) = \log_a x \qquad f'(x) = \frac{\log_a e}{x} \quad (a > 0, a \neq 1)$

DIMOSTRAZIONE

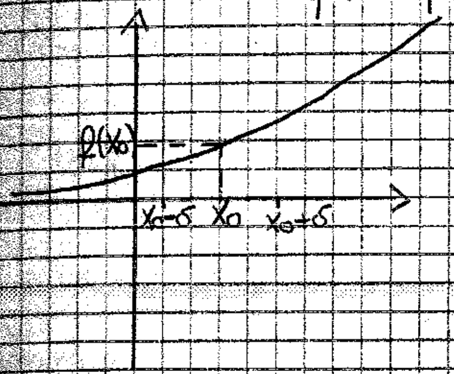
$y = a^x \qquad x = \log_a y \qquad D \log_a y = \frac{1}{D a^x} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a} = \frac{\log_a e}{y}$

SE $a = e$

$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

...IONE

... UNA FUNZIONE DEFINITA IN UN INTORNO DI UN PUNTO X_0, ALLORA f SI DICE ...ENTE IN X_0 SE $\exists \delta > 0$: $f(x) \leq f(X_0)$ SE $X_0 - \delta < X < X_0$ E $f(x) \geq f(X_0)$ SE $X_0 < X < X_0 + \delta$



FUNZIONE CRESCENTE

$$\frac{f(x)-f(X_0)}{x-X_0} \geq 0 \text{ SE } X \in (x-\delta, x+\delta) \; x \neq X_0$$

FUNZIONE DECRESCENTE

$$\frac{f(x)-f(X_0)}{x-X_0} \leq 0 \text{ SE } x \in (X_0-\delta, X_0+\delta) \; x \neq X_0$$

...AZIONE

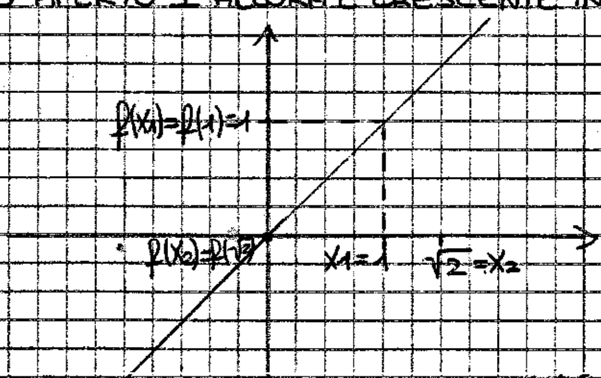
... CRESCENTE IN UN INTERVALLO APERTO I ALLORA È CRESCENTE IN OGNI PUNTO

$$f(x) = \begin{cases} X & \text{SE } X \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{SE } X \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

...CRESCENTE IN $X_0 = 0$

... $x > 0$ $f(x) \geq 0 = f(0)$

... $x < 0$ $f(x) \leq 0 = f(0)$



...TAVIA f NON È CRESCENTE IN NESSUN INTORNO DI $X_0 = 0$ INFATTI $\forall \delta > 0$ POSSO ...ENDERE X_1, X_2: $0 < X_1 < X_2 < \delta$ CON $X_1 \in \mathbb{Q}$, $X_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ E ALLORA $f(X_1) = X_1 > f(X_2) = 0$

...OREMA

...A f DERIVABILE IN UN PUNTO X_0, ALLORA:

1) SE $f'(X_0) > 0$, f È STRETTAMENTE CRESCENTE IN X_0

2) SE f È CRESCENTE IN X_0 ALLORA $f'(X_0) \geq 0$

...MOSTRAZIONE 1)

SE $f'(X_0) > 0$ PER IL TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

$\exists \delta > 0$ $\dfrac{f(x)-f(X_0)}{x-X_0} > 0$ SE $x \in (X_0-\delta, X_0+\delta)$ $x \neq X_0$

QUINDI f È STRETTAMENTE CRESCENTE IN X_0

DIMOSTRAZIONE 2)

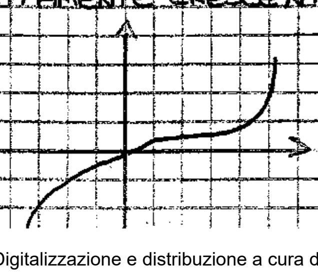
$\dfrac{f(x)-f(X_0)}{x-X_0} \geq 0 \Rightarrow f'(X_0) \geq 0$ SI DIMOSTRA PER ASSURDO E PER IL TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

...RVAZIONE

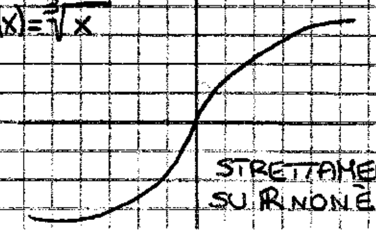
... POTREBBE ESSERE STRETTAMENTE CRESCENTE ... MA $f'(X_0) = 0$

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$ $f'(0) = 0$

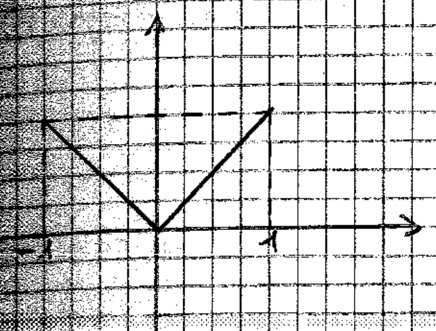


$f(x) = \sqrt[3]{x}$



STRETTAMENTE CRESCENTE SU $\mathbb{R}$ NON È DERIVATA IN $X_0 = 0$

$|x|, x \in [-1,1]$



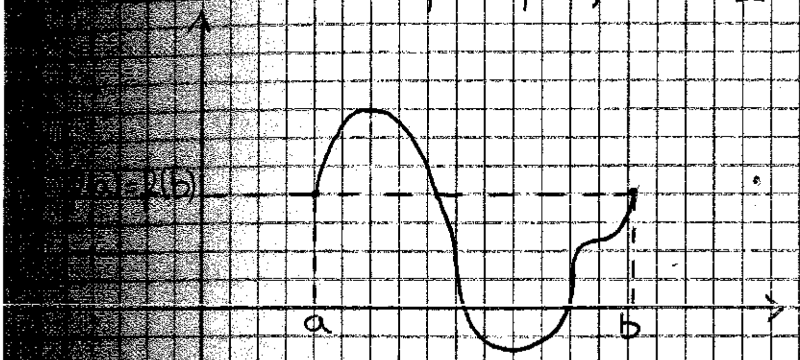
X=0, PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO

X=±1 PUNTI DI MASSIMO ASSOLUTO

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{PER } x>0 \\ -x & \text{PER } x<0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{PER } x>0 \\ -1 & \text{PER } x<0 \end{cases}$$

TEOREMA DI ROLLE

...UNA FUNZIONE CONTINUA IN UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a,b]$ DERIVABILE ...(a,b), SUPPONIAMO CHE $f(a)=f(b)$, ALLORA $\exists c \in (a,b): f'(c)=0$ $f'(c)=0$



DIMOSTRAZIONE

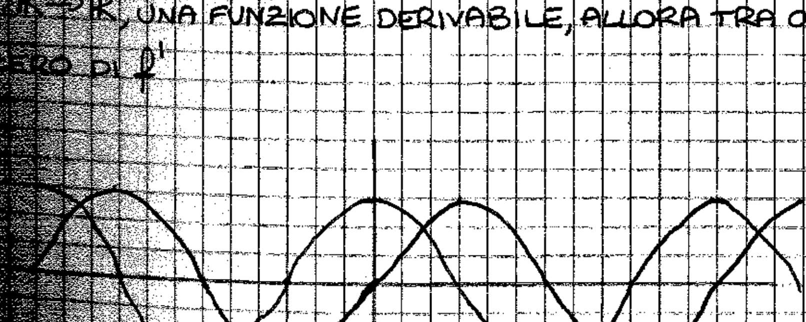
PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS ESISTONO ALMENO UN PUNTO X_m E UN PUNTO ... $\in [a,b]$ DI MINIMO E MASSIMO:

SUPPONIAMO CHE UNO DEI DUE CADA IN (a,b) ALLORA DETTO C QUESTO PUNTO, PER TEOREMA DI FERMAT $f'(c)=0$

SE INVECE X_m E X_M CADONO AGLI ESTREMI DELL'INTERVALLO $[a,b]$ ALLORA $f(X_m)=f(X_M) \Rightarrow f$ È COSTANTE E QUINDI RISULTA $f'(c)=0$ $\forall c \in (a;b)$

CONSEGUENZA

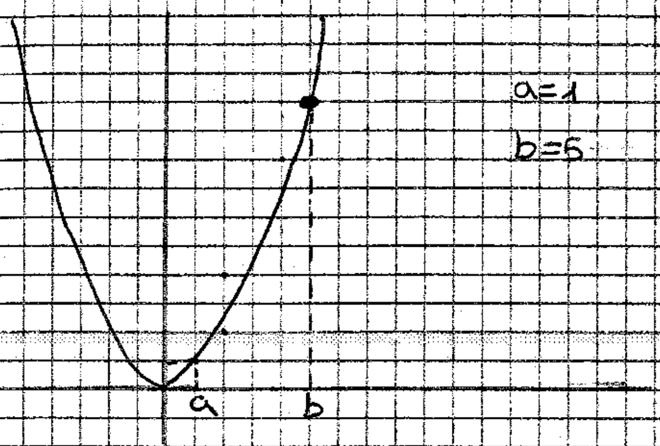
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, UNA FUNZIONE DERIVABILE, ALLORA TRA OGNI COPPIA DI ZERI DI f C'È ALMENO UNO ZERO DI f'



COSX E SENX HANNO MASSIMI E MINIMI ALTERNATI.

ESEMPIO

DETERMINARE I PUNTI DI LAGRANGE DELLA FUNZIONE $f(x)=x^2$ SULL'INTERVALLO $[1,5]$



$a=1$

$b=5$

$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\quad 2c=\frac{25-1}{5-1}$ $\quad 2c=6$ $\quad c=3$

$f(b)=f(a)+f'(c)\cdot(b-a)$ 2ª FORMULA DELL'INCREMENTO

QUESTA FORMULA IMPLICA $|f(b)-f(a)|=|f'(c)|\cdot|b-a|$

SE SAPPIAMO CHE $f'(x)\le M \ \forall x\in(a,b)$ ALLORA $|f(b)-f(a)|\le M\cdot|b-a|$

$x\in[a,b]$ SE $|\text{VELOCITÀ}|\le 10\frac{m}{s}$ ALLORA NELL'INTERVALLO DI TEMPO DA $X=1$ A $X=5$

IL PUNTO NON PUÒ PERCORRERE PIÙ DI $10\frac{m}{s}\ (\underset{b}{5}-\underset{a}{1})s$ $\quad S=40m$

TEOREMA

SIA $I\subset\mathbb{R}$ UN INTERVALLO E $f:I\to\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA IN I E DERIVABILE NEI PUNTI INTERNI AD I ALLORA

1) SE $f'(x)\ge 0$ $\forall$ PUNTO x INTERNO AD I, f RISULTA CRESCENTE SU I

(SE $f'(x)\le 0$ $\forall$ PUNTO x INTERNO AD I, f RISULTA DECRESCENTE SU I)

2) SE $f'(x)=0$ $\forall$ PUNTO x INTERNO AD I, f RISULTA COSTANTE SU I

OSSERVAZIONE

UN PUNTO DI I È DETTO INTERNO SE NON È UN ESTREMO.

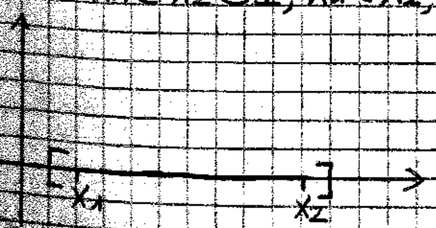
ESEMPIO

SE $I=[2,3)$ I PUNTI INTERNI AD I SONO TUTTI I PUNTI DELL'INTERVALLO $(2,3)$

SE $I=(-\infty,5)$ OGNI PUNTO $x\in I$ È UN PUNTO INTERNO AD I

DIMOSTRAZIONE 1)

SIANO X_1 E $X_2\in I$, $X_1<X_2$; DEVO VERIFICARE CHE $f(X_1)\le f(X_2)$



APPLICHIAMO IL TEOREMA DI LAGRANGE A f SULL'INTERVALLO $[X_1,X_2]$: $\exists c\in(X_1,X_2)$: $\frac{f(X_2)-f(X_1)}{\underbrace{X_2-X_1}_{>0}}=f'(c)\ge 0$

QUINDI $f(X_2)-f(X_1)\ge 0$

...RAZIONE

x_0

...SINISTRO $(x_0-\delta, x_0)$

...DESTRO $(x_0, x_0+\delta)$

$x_0-\delta \quad x_0 \quad x_0+\delta$

...TEOREMA PRECEDENTE f È CRESCENTE IN $(x_0-\delta, x_0]$ ED È DECRESCENTE IN $[x_0, x_0+\delta)$

...x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO

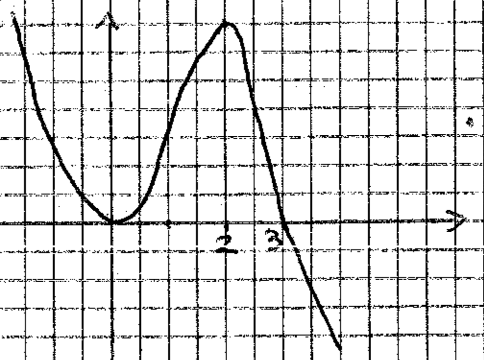
...PROPOSIZIONE

...VALGONO $>$, $<$ ALLORA x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO O MINIMO RELATIVO FORTE (STRETTO)

...EMPIO

$f(x) = x^2(3-x) = 3x^2 - x^3$

...RAPPRESENTARE IL GRAFICO QUALITATIVO



$f'(x) = 6x - 3x^2 = 3x\cdot(2-x) \qquad f'(x) \geq 0$ SE $0 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow f$ È CRESCENTE IN $[0,2]$

$f'(x) \leq 0$ SE $x<0 \vee x>2$

$\Rightarrow f$ È DECRESCENTE SU $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

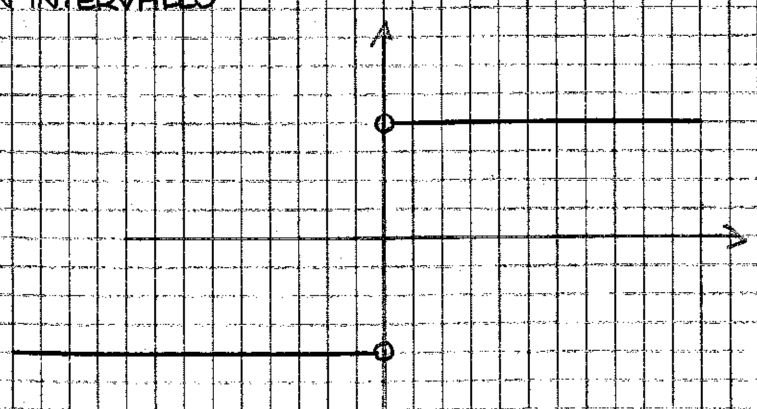
$x=0$ PUNTO DI MINIMO $\quad x=2$ PUNTO DI MASSIMO

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x>0 \\ -1 & \text{SE } x<0 \end{cases}$$

f È DEFINITA SU TUTTO $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x) = 0 \ \forall x \in A$ MA f NON È COSTANTE

A NON È UN INTERVALLO



VARIANTI

1) LO STESSO TEOREMA VALE SE $X \to X_0^-$ E QUINDI ANCHE QUANDO $X \to X_0$

2) LO STESSO TEOREMA VALE SE INVECE DELLA FORMULA 1 SI HA $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = \pm\infty$ ANCHE NEL CASO IN CUI $X \to X_0^-$ E QUINDI $X \to X_0$

3) TUTTI I RISULTATI PRECEDENTI VALGONO ANCHE SE $X \to +\infty$ OPPURE SE $X \to -\infty$ (CI SI RICONDUCE AI CASI PRECEDENTI CON LA SOSTITUZIONE $x = \frac{1}{y}$ QUINDI $\lim_{y \to 0^+}$, $\lim_{y \to 0^-}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} = \lim_{y \to 0} \frac{f'(\frac{1}{y}) \cdot \cancel{(-\frac{1}{y^2})}}{g'(\frac{1}{y}) \cdot \cancel{(-\frac{1}{y^2})}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ FORMA $\frac{\infty}{\infty}$

ESEMPIO

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

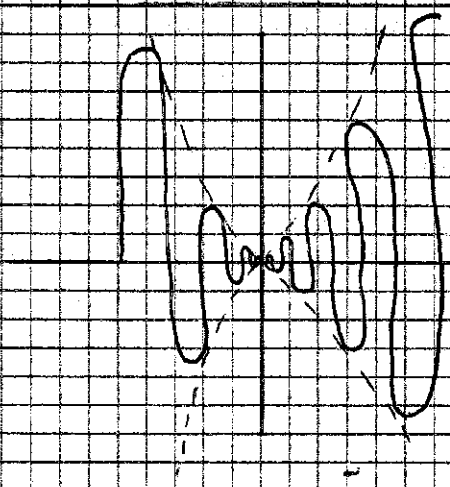
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+2x}} - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{3}{2}}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x}}$ SI PUÒ APPLICARE DE L'HOPITAL MA NON SERVIREBBE A SEMPLIFICARE IL LIMITE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{SE } x \neq 0 \\ 0 & \text{SE } x = 0 \end{cases}$$



$0 \leq |x^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}| \leq \underset{\searrow 0}{x^2}$

$\underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}}_{0} = \lim_{x \to 0} f'(x)$ NO PERCHÉ NON ESISTE IL LIMITE DELLA DERIVATA

$0 \leq \left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right| \leq \underset{\searrow 0}{|x|}$

$$f'(x) = 2x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$\lim_{x \to 0} \underbrace{2x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}_{0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{NON ESISTE}}$

OSSERVAZIONE

f È DERIVABILE SU TUTTO $\mathbb{R}$ (ANCHE IN 0) MA LA $f'(x)$ NON È CONTINUA IN 0

INFINITI E INFINITESI

DEFINIZIONE → SIA $X_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ E f UNA FUNZIONE DEFINITA IN UN INTORNO DI X_0 PRIVATO DI X_0 ALLORA:

1) f SI DICE INFINITESIMO PER $X \to X_0$ SE $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

2) SI DICE CHE f È UN INFINITO PER $X \to X_0$ SE $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

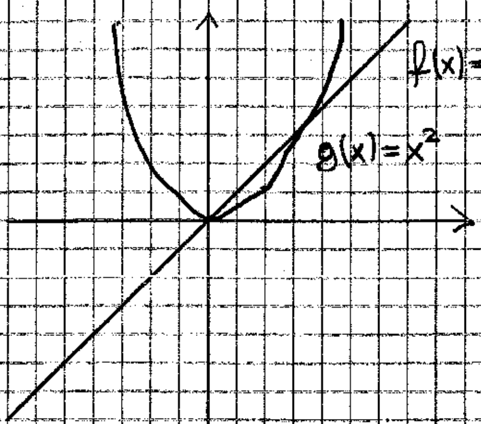
ESEMPIO:

$f(x) = 1 - \cos x$ È INFINITESIMA PER $X \to 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} 1 - \cos x = 0$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ È UN INFINITO PER $X \to 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$f(x) = x^2$ È UN INFINITO PER $X \to +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$f(x) = \frac{1}{x}$ È UN INFINITESIMO PER $X \to +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$



$g(x)$ HA UN GRADO INFINITESIMO MAGGIORE DI $f(x)$

SIMBOLI DI LANDAU

PAG 127 ANALISI MATEMATICA I (CANUTO E TABACCO)

SIANO f E g DUE FUNZIONI DEFINITE IN UN INTORNO $\mathcal{U}$ DI X_0, PRIVATO DI X_0, CON $g(x) \neq 0$ PER $x \in \mathcal{U}$, $x \neq X_0$, ALLORA:

1) $f = o(g)$ [f È UGUALE A "o PICCOLO" DI g]

SE $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

2) $f \sim g$ PER $x \to x_0$ [f È ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTE A g]

SE $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

3) $f = O(g)$ PER $X \to X_0$ [f È O GRANDE DI g]

SE $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ESISTE FINITO

$\exists c > 0 : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq c$ PER X IN UN INTORNO DI X_0 CON $X \neq X_0$

4) $f \asymp g$ PER $X \to X_0$ [f È EQUIGRANDE CON g]

SE $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ESISTE FINITO E NON NULLO

$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq c_2$ PER X IN UN INTORNO DI X_0, $X \neq X_0$

$o(x)+o(x)=o(x)$

[SE $f=o(x)$ E $g=o(x)$ ALLORA $f+g=o(g)$]

ESEMPIO

$o(x^2)+o(x^3)=o(x^2)$ PER $x\to 0$ [SE $f=o(x^2)$ E $g=o(x^3)$ $f+g=o(x^2)$]

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x^2}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}}_{0}+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}}_{0}=0+\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^3}\cdot x=0$$

$o(x^3)=o(x^2)$ SE $f=o(x^3)$ ALLORA $f=o(x^2)$

$\rightarrow$ NON È VERO IL CONTRARIO, QUINDI $o(x^2)\neq o(x^3)$

$o(x^2)+o(x^3)=o(x^3)$ PER $x\to+\infty$

$x^\alpha\cdot o(x^\beta)=o(x^{\alpha+\beta})$

$o(x^\alpha)\cdot o(x^\beta)=o(x^{\alpha+\beta})$

$[o(x^\alpha)]^\beta=o(x^{\alpha\beta})$

PROPRIETÀ

1) SE $f_1\sim g_1$ E $f_2\sim g_2$ ALLORA $\frac{f_1}{f_2}\sim\frac{g_1}{g_2}$

2) SE $f_2=o(f_1)$ E $g_2=o(g_1)$ ALLORA $\lim_{x\to x_0}\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}$ QUANDO QUESTO LIMITE ESISTE

ESEMPIO

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x-e^{2x}+2^x}{(1+\frac{1}{x})^x+2^x}$ $\quad g_2(x)=(1+\frac{1}{x})^x \quad g_2 x=o(2^x)$

$f_2(x)=\operatorname{sen}x+2^x \quad f_2(x)=o(e^{2x})$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{2x}}{2^x}=\lim_{x\to+\infty}-\left(\frac{e^2}{2}\right)^x=-\infty$

DEFINIZIONE $\rightarrow$ SIANO f E g DUE INFINITESIMI DEFINITI IN UN INTORNO U DI x_0 PRIVATO DI x_0, CON $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$ PER $x\in U$, $x\neq x_0$ ALLORA SI DICE CHE

1) f È UN INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A g SE $f=o(g)$ PER $x\to x_0$

2) f È UN INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE A g SE $g=o(f)$ PER $x\to x_0$

3) f E g SONO INFINITESIMI DELLO STESSO ORDINE SE $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ ESISTE FINITO E NON NULLO.

ESEMPIO 1)

x^3 È UN INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE DI x, PER $x\to 0$ $(x^3=o(x))$

ESEMPIO 3)

$1-\cos x$ È UN INFINITESIMO DELLO STESSO ORDINE DI x^2 $\quad\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

$f(x)=x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\to 0 \quad g(x)=x\to 0$ PER $x\to 0$

$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\frac{1}{x}=$ NON ESISTE, QUINDI f E g NON SONO CONFRONTABILI

PROPRIETÀ

$D^2(f+g) = D\cdot(D(f+g)) = D\cdot(Df+Dg) = D^2f + D^2g$

$D^2(f\cdot g) = D(D(fg)) = D\cdot(Df\cdot g + f\cdot Dg) = D^2f\, g + Df\cdot Dg + Df\cdot Dg + f\cdot D^2g = D^2f\cdot g + 2Df\,Dg + f\cdot D^2g$

ASSOMIGLIA ALLA FORMULA DEL QUADRATO DI BINOMIO

$(f\cdot g)''' = f'''\cdot g + 3f''\cdot g' + 3f'g'' + f\cdot g'''$ FORMULA DI LEIBNIZ

FORMULA DI TAYLOR

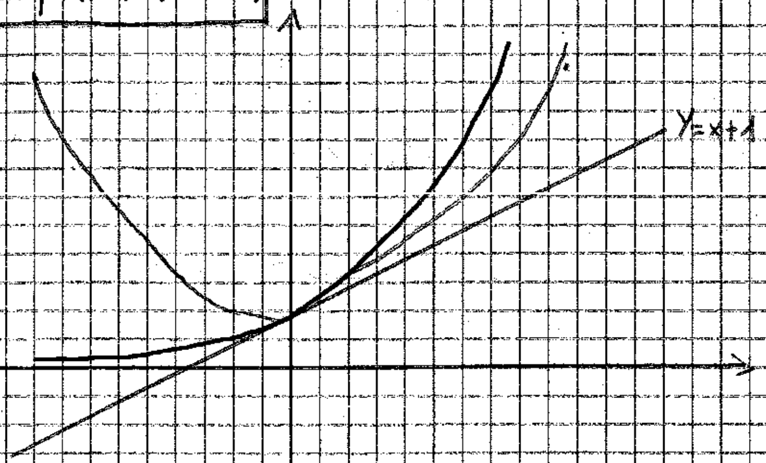
PREMESSA: SIA $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$

$\varphi(x) = (x-x_0)^n$ $\varphi'(x) = n\cdot(x-x_0)^{n-1}$ $\varphi''(x) = n\cdot(n-1)\cdot(x-x_0)^{n-2}$

$\varphi^{(n-1)}(x) = n\cdot(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot(x-x_0)$ $\varphi^{(n)}(x) = n!$ $\varphi^{(n+1)}(x) = 0$ $\varphi^{(n+2)}(x) = 0$

$$\varphi^{(k)}(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{SE } k \neq n \\ k! & \text{SE } k = n \end{cases}$$

$f(x) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)} + o(x-x_0)$



PROBLEMA: SIA $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$

SIA f UNA FUNZIONE DEFINITA E DERIVABILE $(n-1)$ VOLTE IN UN INTORNO DI x_0 E n VOLTE IN x_0

VOGLIAMO TROVARE DEI NUMERI REALI $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ PER $x \to x_0$

GENERALIZZAZIONE DELLA 1ª FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

POSTO $P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n$

CERCHIAMO $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ IN MODO CHE $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $k = 0,1,2 \ldots n$

$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_{k-1}(x-x_0)^{k-1} + a_k(x-x_0)^k + a_{k+1}(x-x_0)^{k+1} + \ldots + a_n(x-x_0)^n$

$P^{(k)}(x_0) = a_k\cdot k!$ $a_k\cdot k! = f^{(k)}(x_0)$ $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE n DELLA FUNZIONE f CENTRATO IN x_0

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

SVILUPPI NOTEVOLI

(SE $X_0=0$ SI PARLA DI SVILUPPO DI Mc LAURIN)

$f(x)=e^x \quad X_0=0 \quad f^{(k)}(x)=e^x \quad f^{(k)}(0)=1$

POLINOMIO DI TAYLOR (Mc LAURIN) DI ORDINE n

$$P_n(x)=f(X_0)+f'(X_0)\cdot(X-X_0)+\frac{f''(X_0)}{2!}\cdot(X-X_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(X_0)}{n!}(X-X_0)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(X_0)}{k!}(X-X_0)^k$$

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

SVILUPPO DI Mc LAURIN

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$f(x)=\operatorname{sen}x \quad X_0=0 \quad f(0)=0$

$f'(x)=\cos x \quad f''(x)=-\operatorname{sen}x \quad f'''(x)=-\cos x \quad f''''(x)=\operatorname{sen}x$

$f'(0)=1 \quad f''(0)=0 \quad f'''(0)=-1 \quad f''''(0)=0$

DERIVATE DI ORDINE PARI $=0$

DERIVATE DI ORDINE DISPARI $=1,-1,1,-1,1,-1$

SVILUPPO DI Mc LAURIN

$$\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5) \quad +o(x^6)$$

$$\operatorname{sen}x=\underbrace{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\dots+\frac{x^{(2n+1)}\cdot(-1)^n}{(2n+1)!}}_{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\cdot x^{2k+1}}+o(x^{2n+2})$$

f PARI $\Rightarrow f'$ DISPARI $\quad f$ DISPARI $\Rightarrow f'$ PARI

f DISPARI $\Rightarrow$ SI ANNULLA NELL'ORIGINE $f(0)=0$

$f(x)=\cos x$ (PARI) $\quad X_0=0$

SVILUPPO DI TAYLOR

$$\cos x=\underbrace{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}}_{}+o(x^{2n})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n\cdot x^{2k}}{(2k)!}$$

$f(x)=\ln(1+x) \quad f'(x)=\frac{1}{1+x} \quad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}=-(1+x)^{-2} \quad f'''(x)=2(1+x)^{-3} \quad f''''(x)=-6(1+x)^{-4}$

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot(1+x)^{-n} \quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot(1)^{-n}=(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n}+o(x^n)$$

$$\frac{(-1)^{n+1}\cdot\cancel{(n-1)!}}{n\cdot\cancel{(n-1)!}}\cdot x^n$$

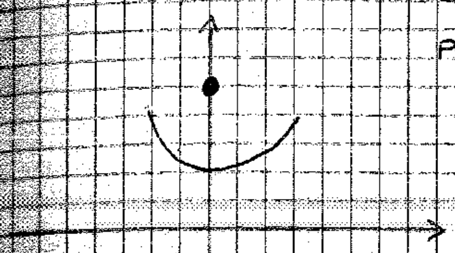
ESEMPIO

SUPPONIAMO CHE $f(x)=2+x^2+x^3+o(x^3)$ PER $x \to 0$

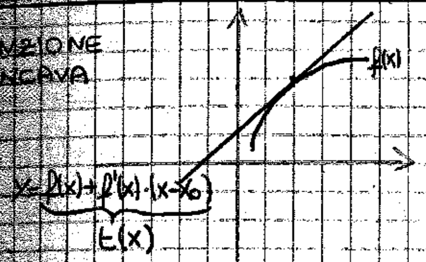
$$f(x)=\begin{cases} 5 & \text{SE } x=0 \\ 2+x^2+x^3 & \text{PER } x\neq 0 \end{cases}$$

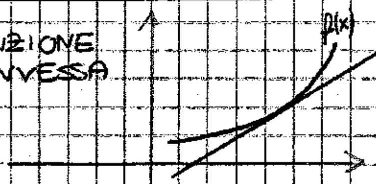
NON POSSO DIRE CHE $f(0)=2$ ECC...

SE INVECE SO CHE f È DERIVABILE 3 VOLTE IN 0 ALLORA POSSO CONCLUDERE CHE $f(0)=2$ $f'(0)=0$ $f''(0)=2$ $f'''(0)=6$



FUNZIONI CONVESSE, CONCAVE E PUNTI DI FLESSO





DEFINIZIONE → SIA f UNA FUNZIONE DEFINITA IN UN INTORNO DI X_0 E DERIVABILE IN X_0 ALLORA

1) f SI DICE CONVESSA IN X_0 SE ESISTE UN INTORNO $\mathcal{U}$ DI X_0 TALE CHE $f(x)\geq t(x)$ $\forall x \in \mathcal{U}$

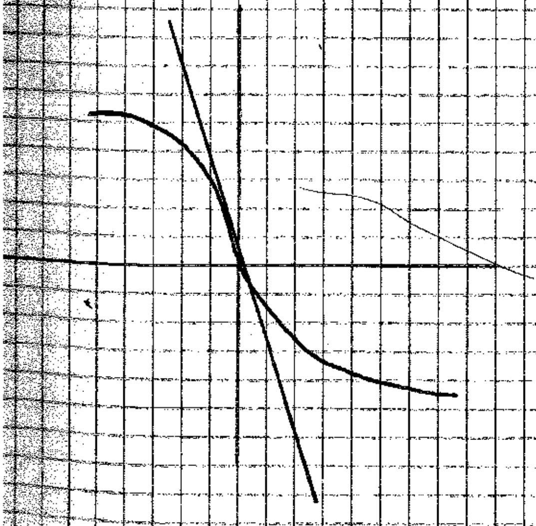
2) f SI DICE CONCAVA IN X_0 SE ESISTE UN INTORNO $\mathcal{U}$ DI X_0 TALE CHE $f(x)\leq t(x)$ $\forall x \in \mathcal{U}$

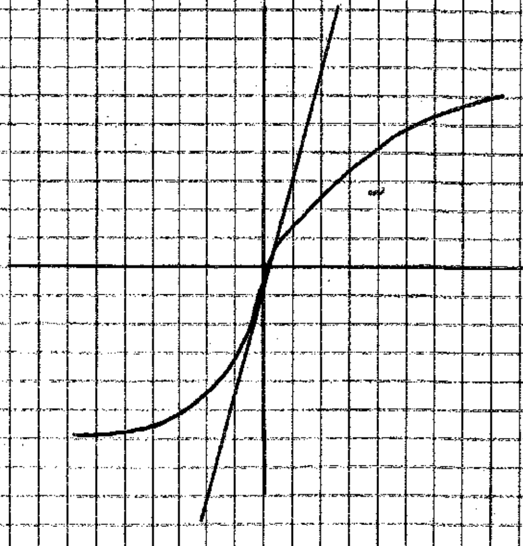
SE IN QUESTE DUE DEFINIZIONI VALGONO $>,<$ PER $x\in\mathcal{U}, x\neq X_0$ SI PARLA DI FUNZIONE STRETTAMENTE CONCAVA O STRETTAMENTE CONVESSA

3) X_0 È UN PUNTO DI FLESSO PER f SE ESISTE UN INTORNO $\mathcal{U}$ DI X_0 TALE CHE

$$\begin{cases} f(x)\leq t(x) & \text{PER } x\in\mathcal{U}, x<X_0 \\ f(x)\geq t(x) & \text{PER } x\in\mathcal{U}, x>X_0 \end{cases} \quad \text{OPPURE} \quad \begin{cases} f(x)\geq t(x) & \text{PER } x\in\mathcal{U}, x<X_0 \\ f(x)\leq t(x) & \text{PER } x\in\mathcal{U}, x>X_0 \end{cases}$$

FLESSO ASCENDENTE — FLESSO DISCENDENTE



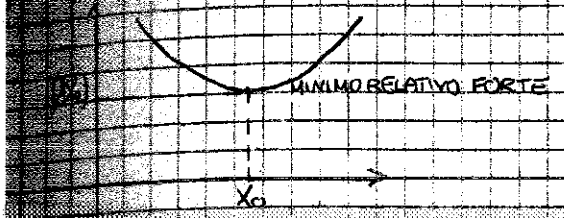


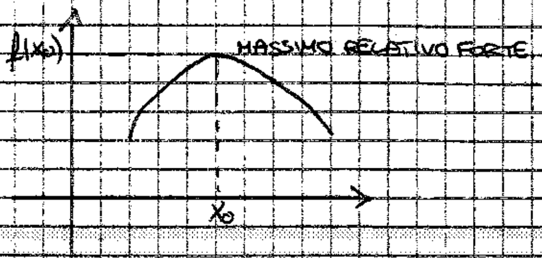
CONSEGUENZA

NELLE STESSE IPOTESI DEL TEOREMA, SE INOLTRE $f'(x_0)=0$

$f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO FORTE

$f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ È UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO FORTE





TEOREMA

SIA f DERIVABILE 2 VOLTE IN UN INTERVALLO APERTO I ALLORA:

1) $f''(x)\geq 0 \ \forall x\in I \Rightarrow f$ CONVESSA IN I

2) SE $x_0\in I$ CON $f''(x_0)=0$ SE ESISTE UN INTORNO $\mathcal{U}$ DI x_0 TALE CHE

$\begin{cases} f''(x)\geq 0 \ \forall x\in\mathcal{U},\ x>x_0 \\ f''(x)\leq 0 \ \forall x\in\mathcal{U},\ x<x_0 \end{cases}$ OPPURE $\begin{cases} f''(x)\leq 0 \ \forall x\in\mathcal{U},\ x>x_0 \\ f''(x)\geq 0 \ \forall x\in\mathcal{U},\ x<x_0 \end{cases}$ ALLORA x_0 È UN PUNTO DI FLESSO.

TEOREMA

SIA f UNA FUNZIONE DERIVABILE n VOLTE IN UN PUNTO x_0, CON $f'(x_0)=f''(x_0)=f^{(n-1)}(x_0)=0$ $f^{(n)}(x)\neq 0$

ALLORA:

SE n PARI

1) $f^{(n)}(x_0)>0$ x_0 È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO (FORTE)

2) $f^{(n)}(x_0)<0$ x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO (FORTE)

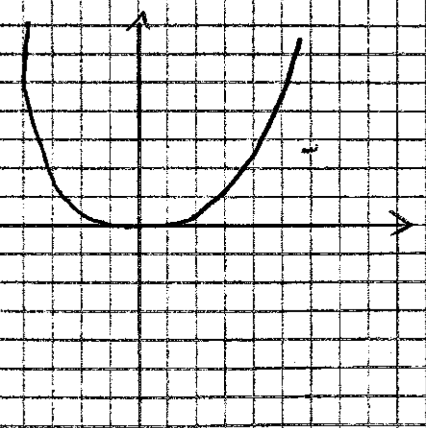
SE n DISPARI

1) $f^{(n)}(x_0)>0$ x_0 È UN PUNTO DI FLESSO ASCENDENTE

2) $f^{(n)}(x_0)<0$ x_0 È UN PUNTO DI FLESSO DISCENDENTE

ESEMPIO

$f(x)=x^4$



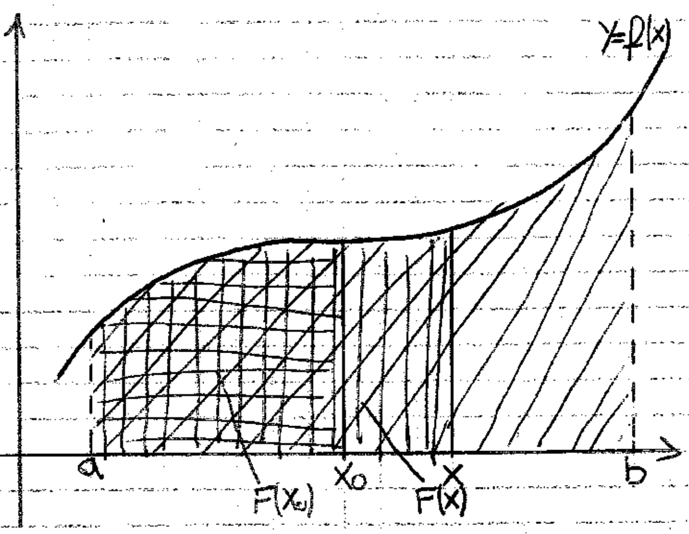
$f'(x)=4x^3$ $\quad f'(0)=0$

$f''(x)=12x^2$ $\quad f''(0)=0$

$f'''(x)=24x$ $\quad f'''(0)=0$

$f''''(x)=24$ $\quad f''''(0)=24>0$ MINIMO RELATIVO

CALCOLO INTEGRALE

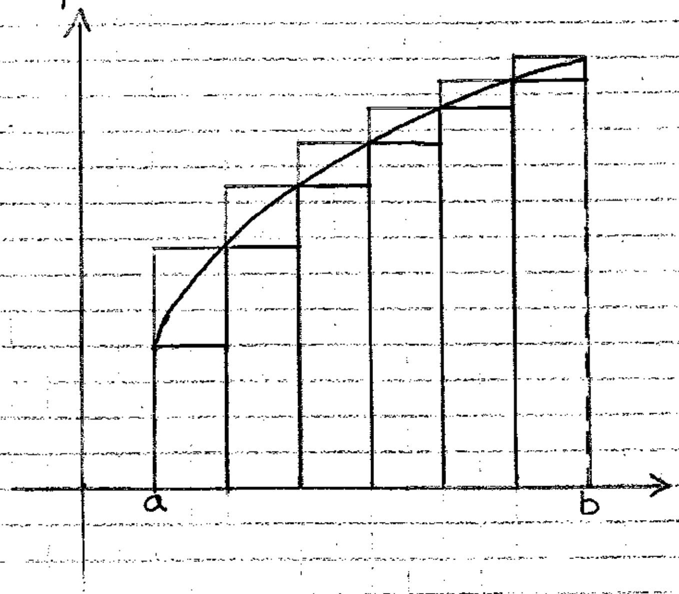


$\int_a^b f(x)\,dx$

$F'(x_0)=f(x_0) \qquad \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[\text{PER } x\to x_0]{} f(x_0)$

DEFINIZIONE DI INTEGRALE DEFINITO

SIA f UNA FUNZIONE DEFINITA SU UN INTERVALLO $[a,b]$ LIMITATA (SU TALE INTERVALLO)



RETTANGOLI INSCRITTI
RETTANGOLI CIRCOSCRITTI

CONSIDERIAMO DEI PUNTI $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$

$P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ SUDDIVISIONE O PARTIZIONE DI $[a,b]$

CONSIDERIAMO

$m_i=\inf f(x) \quad x\in[x_{i-1},x_i]$

$M_i=\sup f(x) \quad x\in[x_{i-1},x_i]$

$i=1,2,\ldots,n$

SIA $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$

$\underbrace{s(P)}_{\text{SOMMA INFERIORE DI RIEMAN ASSOCIATA ALLA PARTIZIONE } P}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{m_i\Delta x_i}_{\text{AREA DELL'}i\text{ESIMO RETTANGOLO INSCRITTO}}$

$s(P)$ = AREA DEL TRAPEZOIDE INSCRITTO (UNIONE DI RETTANGOLI INSCRITTI AVENTI COME

TEOREMA

SONO INTEGRABILI SU UN INTERVALLO $[a,b]$

1) LE FUNZIONI CONTINUE

2) LE FUNZIONI MONOTONE

3) LE FUNZIONI CONTINUE A TRATTI (CONTINUE ECCETTO CHE IN UN NUMERO FINITO DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILI O DI 1ª SPECIE).

PROPRIETÀ

SIANO f E g DUE FUNZIONI (LIMITATE) E INTEGRABILI SU $[a,b]$ ALLORA VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

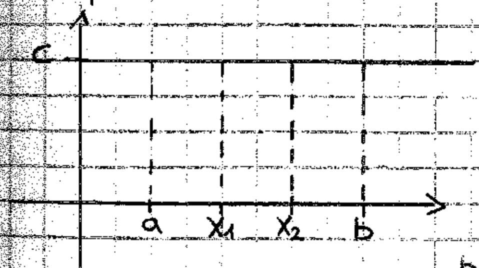
1) LINEARITÀ $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ LA FUNZIONE $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ È INTEGRABILE SU $[a,b]$ E

$$\int_a^b c_1 f(x) + c_2 g(x)\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx$$

2) MONOTONIA SE $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

(SE $f = 0$ E $g(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$)

3) SE $f(x) = c$ COSTANTE ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a)$



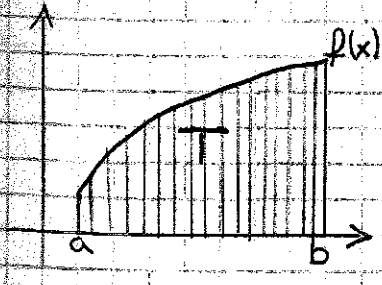
$s(P) = c \cdot (b-a)$ $\quad S(P) = c \cdot (b-a)$

$S = s = c \cdot (b-a)$

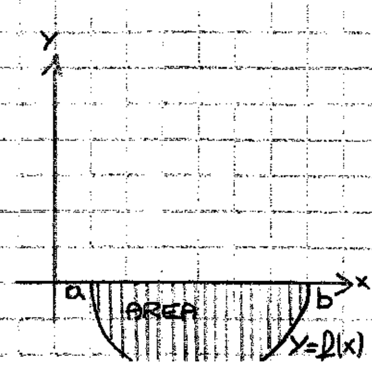
4) $|f(x)|$ È INTEGRABILE E $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

DEFINIZIONE → SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE CON $f(x) \geq 0$ SU $[a,b]$ E SIA

$T = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$

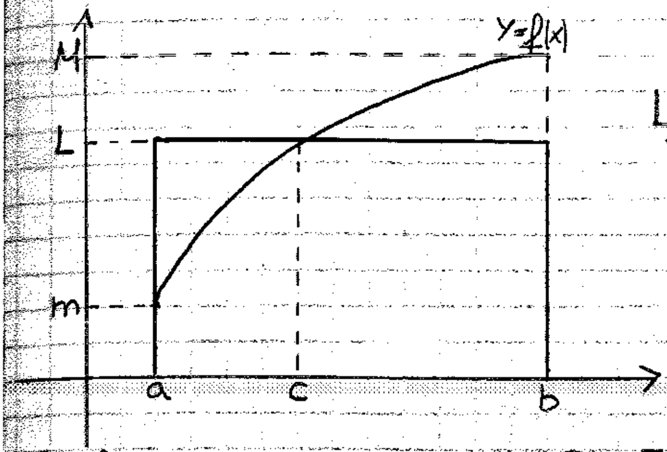


DEFINIAMO AREA $(T) = \int_a^b f(x)\,dx$



AREA $= -\int_a^b f(x)\,dx$

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE



$$L = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

MEDIA INTEGRALE DI f SU $[a,b]$

$$(b-a)\cdot L = \int_a^b f(x)dx$$

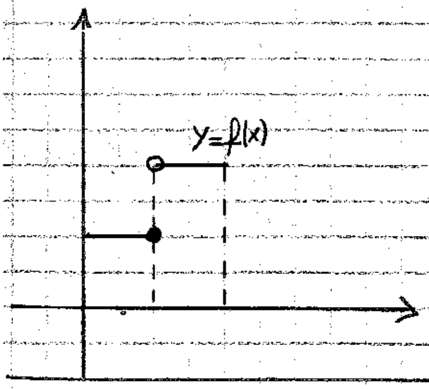
SIA f UNA FUNZIONE CONTINUA SU $[a,b]$ ALLORA $\exists c \in [a,b]$ TALE CHE $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

DIMOSTRAZIONE

$m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ $\quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ $\quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\cdot(b-a)$

$m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$ PER IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI $\exists c \in [a,b] : f(c) = L$

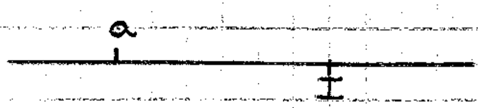
CONTROESEMPIO



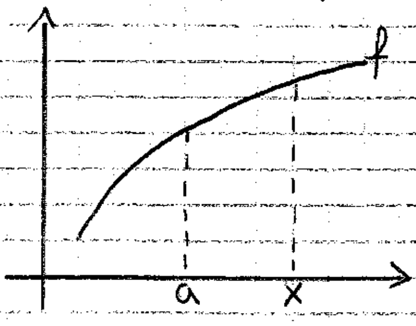
$$\int_0^2 f(x)\,dx = 3 \qquad \frac{\int_0^2 f(x)dx}{2-0} = \frac{3}{2}$$

$$\nexists c : f(c) = \frac{3}{2}$$

SIA f UNA FUNZIONE DEFINITA SU UN INTERVALLO I E INTEGRABILE SUI SOTTOINTERVALLI LIMITATI E CHIUSI. SIA $a \in I$ ⊛



POSSO CONSIDERARE $F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in I$



$F(x)$ = FUNZIONE INTEGRALE DI f

DIMOSTRAZIONE

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x-x_0}=\frac{\int_a^x f(t)\,dt+\int_{x_0}^{a} f(t)\,dt}{x-x_0}=\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x-x_0}$$

BISOGNA VERIFICARE CHE

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x-x_0}=f(x_0)$$ OSSIA $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$: SE $|x-x_0|<\delta,\ x\neq x_0$

$$f(x_0)-\varepsilon\le\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x-x_0}\le f(x_0)+\varepsilon \quad ②$$

ORA, SICCOME f È CONTINUA IN x_0 $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0$: SE $x-x_0<\delta,\ x\neq x_0$ ALLORA:

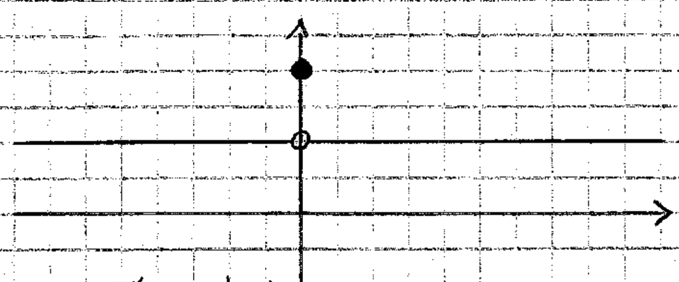
$$\underbrace{f(x_0)-\varepsilon}_{\alpha}<f(x)<\underbrace{f(x_0)+\varepsilon}_{\beta} \quad ③$$

CONSEGUENZA

SE f È CONTINUA IN UN INTERVALLO APERTO I ALLORA f AMMETTE UNA PRIMITIVA F IN I CONSIDERANDO $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\ x\in I$ DOVE $a\in I$ È FISSATO.

CONTROESEMPIO

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{SE } x\neq 0\\ 2 & \text{SE } x=0\end{cases}$$



f NON HA NESSUNA PRIMITIVA OSSIA $\nexists F: F'(x)=f(x)$

PER ASSURDO SE ESISTESSE LA PRIMITIVA ALLORA:

$$F'(x)=\begin{cases}1 & \text{SE } x\neq 0\\ 1 & \text{SE } x=0\end{cases}$$ $\longrightarrow$ PERCHÉ $F'(0)=\lim_{x\to 0}F'(x)$ PERCHÉ QUESTO ESISTE FINITO.

CONSEGUENZA

SE f È CONTINUA IN UN INTERVALLO E G È UNA PRIMITIVA ALLORA $\int_a^x f(t)\,dt=G(x)+c$

SE PONIAMO $x=a$ TROVIAMO CHE $G(a)+c=0 \quad c=-G(a) \quad \int_a^x f(t)\,dt=G(x)-G(a)$

SE FISSO $x=b$

$$\int_a^b f(t)\,dt=G(b)-G(a)=\Big[G(t)\Big]_a^b$$ FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE DOVE G È UNA PRIMITIVA DI f FUNZIONE CONTINUA

- $f(x) = \operatorname{sen} x \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$
- $f(x) = \cos x \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$
- $f(x) = \operatorname{sh} x \qquad \int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c$
- $f(x) = \operatorname{ch} x \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c$
- $f(x) = e^x \qquad \int e^x\,dx = e^x + c$
- $f(x) = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \qquad \int \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,dx = \sqrt[n]{x}$

- $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$
- $\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)\,dx = \dfrac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \alpha \neq -1$
- $\int K^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \dfrac{K^{f(x)}}{\ln K} + c$

ESEMPIO

$$g(x) = \begin{cases} \log|x| + 1 & \text{SE } x > 0 \\ \log|x| + 2 & \text{SE } x < 0 \end{cases} \qquad g'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

ESERCIZIO: CALCOLARE TUTTE LE PRIMITIVE DI $f(x) = \begin{cases} x & \text{SE } x < 0 \\ x^2 & \text{SE } x \geq 0 \end{cases}$

CERCHIAMO $F(x)$: $F'(x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

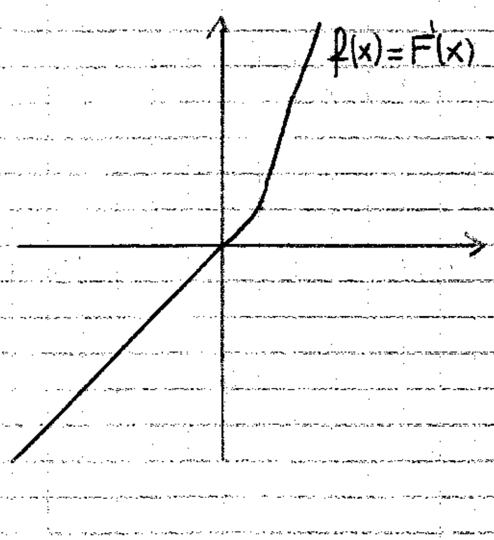
$$F'(x) = \begin{cases} x & \text{SE } x < 0 \\ x^2 & \text{SE } x > 0 \end{cases}$$

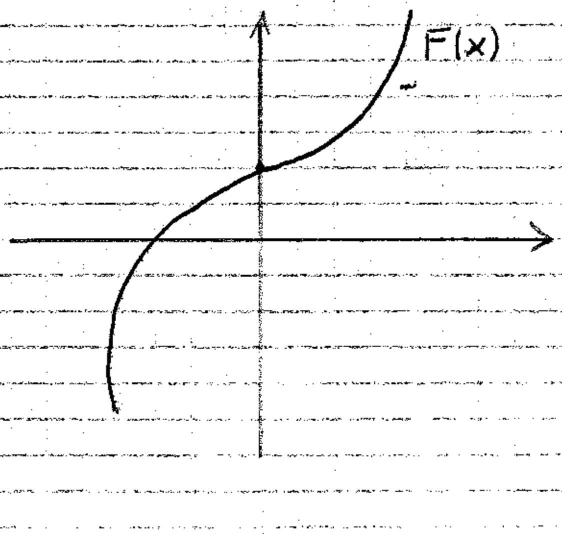
$x<0$	0	$x>0$
$\frac{x^2}{2} + c$		$\frac{x^3}{3} + K$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c & \text{SE } x < 0 \\ \frac{x^3}{3} + K & \text{SE } x \geq 0 \end{cases}$$

F È CONTINUA IN $x=0$ SE E SOLO SE $c=K$ E QUINDI:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c & x < 0 \\ \frac{x^3}{3} + c & x \geq 0 \end{cases} \qquad F'(0) = f(0) = 0$$





ESEMPIO

$\int x e^{x^2} dx \qquad y = \underset{\varphi(x)}{x^2} \qquad dy = 2x\,dx$

$\frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{1}{2} e^y + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

ESERCIZIO

$\int \mathrm{sen}^2 x\, dx = \int \overset{f'(x)}{\mathrm{sen}x} \cdot \overset{g(x)}{\mathrm{sen}x}\, dx = -\cos x\, \mathrm{sen}x - \int -\cos x \cdot \cos x\, dx$

$-\cos x\, \mathrm{sen}x + \int 1 - \mathrm{sen}^2 x\, dx \qquad \int \mathrm{sen}^2 x\, dx = -\cos x\, \mathrm{sen}x + x - \int \mathrm{sen}^2 x\, dx$

$2\int \mathrm{sen}^2 x\, dx = -\cos x\, \mathrm{sen}x + x \qquad \int \mathrm{sen}^2 x\, dx = \frac{-\cos x\, \mathrm{sen}x + x}{2}$

DECOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI → CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE RAZIONALE $\frac{P(x)}{Q(x)}$ DOVE IL GRADO$(P) <$ GRADO (Q)

SI CONSIDERI LA FATTORIZZAZIONE DI Q IN FATTORI IRRIDUCIBILI (NON ULTERIORMENTE FATTORIZZABILI) CHE SONO DI GRADO 1 O 2, EVENTUALMENTE RIPETUTI.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ SI SCRIVE COME UNA SOMMA DI TERMINI OTTENUTI COME SEGUE $(x-a)^m$ DI $Q(x)$ CORRISPONDE LA SOMMA $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m}$ DOVE DA A_1 A A_m SONO OPPORTUNE COSTANTI

MENTRE AD OGNI FATTORE $(x^2+bx+c)^m$ (CON $\Delta < 0$) CORRISPONDE UNA SOMMA

$\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_mx+B_m}{(x^2+bx+c)^m}$

ESERCIZI

$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{(1+x^2)^3} dx \qquad y = 1+x^2 \quad y-1 = x^2 \quad 1\,dy = 2x\,dx$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{y^3} dy = \frac{1}{2}\int y^{-3} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{4y^2} + c = -\frac{1}{4\cdot(1+x^2)^2} + c$

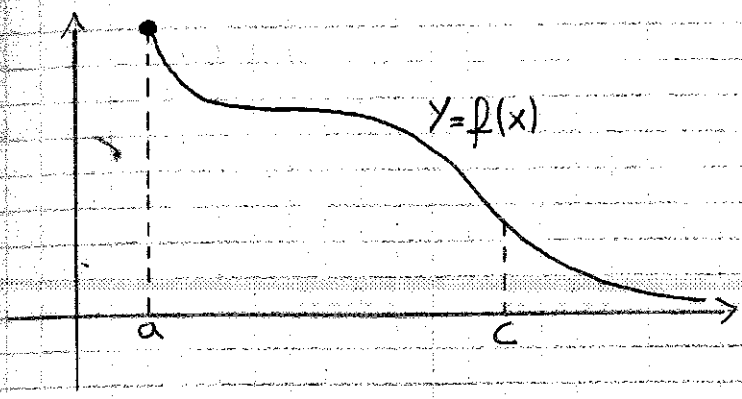
$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \mathrm{arctg}\,x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx =$

$= \mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\underbrace{\int \overset{g}{x} \cdot \overset{f'}{\frac{2x}{(1+x^2)^2}} dx}_{\text{PER PARTI}} = \mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{2} x \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) + \int -\frac{1}{1+x^2} \cdot 1\, dx =$

$\cancel{\mathrm{arctg}\,x} + \frac{1}{2} x \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) - \cancel{\mathrm{arctg}\,x} + c$

INTEGRALI IMPROPRI

SIA $a \in \mathbb{R}$ E $f:[a,+\infty) \to \mathbb{R}$



SIA f LOCALMENTE INTEGRABILE, CIOÈ INTEGRABILE SU OGNI SOTTOINTERVALLO $[a,c]$, DOVE $c>a$; POSSIAMO CONSIDERARE $\int_a^c f(x)dx$ $\quad F(x)=\int_a^c f(x)dx$

SI DEFINISCE INTEGRALE IMPROPRIO DI f SU $[a,+\infty)$ E SI INDICA CON $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ IL LIMITE $\lim_{c\to+\infty} F(c)$.

IN PARTICOLARE SI DICE CHE L'INTEGRALE IMPROPRIO È CONVERGENTE, POSITIVAMENTE DIVERGENTE, NEGATIVAMENTE DIVERGENTE O INDETERMINATO A SECONDA CHE IL LIMITE SUDDETTO ESISTA FINITO, VALGA $+\infty$ OPPURE VALGA $-\infty$ OPPURE NON ESISTA.

$f(x)=\frac{1}{x}$ SU $[1,+\infty)$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx \quad \lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{1}{x}dx$$

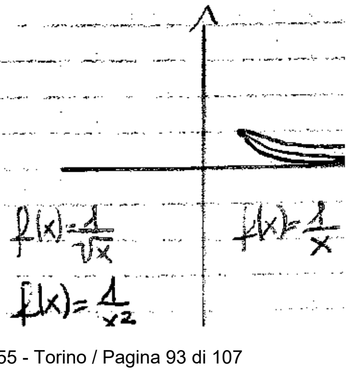
$$\int_1^c \frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^c=\ln c$$

$\lim_{c\to+\infty}\ln c=+\infty$ INTEGRALE IMPROPRIO POSITIVAMENTE DIVERGENTE

$f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ SU $[1,+\infty)$ DOVE $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{c\to+\infty}\int_1^c\frac{1}{x^\alpha}dx \quad \alpha\neq 1 \quad \int_1^c x^{-\alpha}dx=\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^c=\frac{c^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}$$

$$\text{PER } c\to+\infty \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} & \text{SE } \alpha>1 \text{ CONVERGE}\\ +\infty & \text{SE } \alpha\le 1 \text{ DIVERGE POSITIVAMENTE}\end{cases}$$



ESEMPIO

DETERMINARE IL CARATTERE DI

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

VEDIAMO SE CONVERGE

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\right| dx \qquad 0 \leq \underbrace{\left|\frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\right|}_{f(x)} = \frac{|\cos x|}{x^{\frac{3}{2}}} \leq \underbrace{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}_{g(x)}$$

SICCOME $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ CONVERGE ALLORA PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO

$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\right| dx$ CONVERGE E QUINDI PER IL CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA

ANCHE $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ CONVERGE

(SE $\int_a^{+\infty} f(x)$ CONVERGE ALLORA f SI DICE ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE SU $[a,+\infty)$)

VERIFICARE $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$ CONVERGE $\quad \int_1^{c} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx \quad \int_1^{c} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{f'} \cdot \underbrace{x^{-\frac{1}{2}}}_{g}\,dx$

$$-\cos x \cdot x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}} = \cos 1 - \underbrace{\frac{\cos c}{\sqrt{c}}}_{0 \text{ PER } c \to +\infty} - \frac{1}{2}\int_1^{c} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

HA LIMITE FINITO

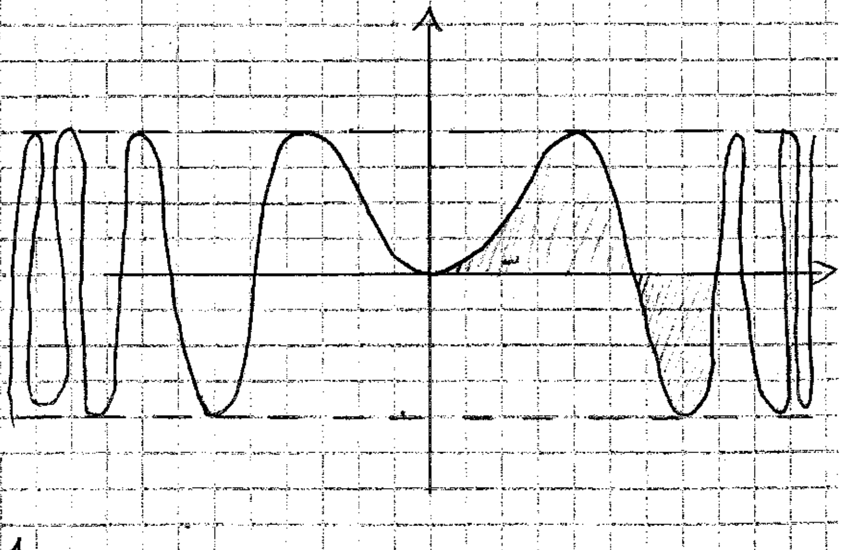
PER $c \to +\infty$ PERCHÉ $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ CONVERGE (ASSOLUTAMENTE)

ESEMPIO

$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ CONVERGE

INTEGRALE DI FRESNEL

$\int_1^{c} \operatorname{sen}(x^2)\,dx \qquad x^2 = y \quad y = \sqrt{x}$



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \quad \text{CONVERGE SE } \alpha > 1, \quad \text{DIVERGE SE } \alpha \leq 1$$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO INFINITO

SIA $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ LOCALMENTE INTEGRABILE, AVENTE ORDINE DI INFINITO α PER $x \to b$ RISPETTO ALL'INFINITO CAMPIONE $\frac{1}{b-x}$ ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGE SE $\alpha < 1$, DIVERGE SE $\alpha \geq 1$

ESERCIZIO

$$\int_2^4 \left[\frac{1}{\sqrt{4-x}} + \frac{1}{(x-2)^2}\right] dx$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{4-x}} + \frac{1}{4} + o(1) \sim \frac{1}{(4-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$\int_3^4 f(x)\,dx$ CONVERGE

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(-2+x)^2} + o(1) \sim \frac{1}{(x-2)^2}$$

$\int_2^3 f(x)\,dx$ DIVERGE

QUINDI $\int_2^4 f(x)\,dx$ DIVERGE PERCHÉ PER DEFINIZIONE L'INTEGRALE CONVERGE SE CONVERGONO SEPARATAMENTE I DUE INTEGRALI IMPROPRI