



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 595

DATA: 23/07/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Fiorello

MATERIA: Scienze delle Costruzioni + Eserc.

Prof. Chiaia_Surace

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



CORSO DI

SCIENZA DELLE
COSTRUZIONI

TEORIA

Prof. B. Chiaia, C. Surace

A.A. 2012 - 2013

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE LEZ. 17

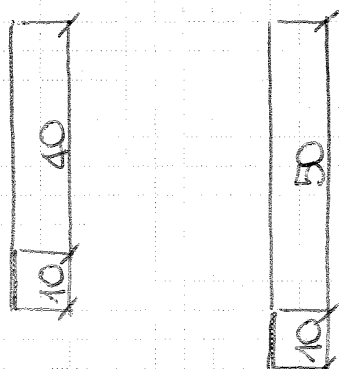
L'analisi della deformazione è lo studio dei cambiamenti di FORMA e di VOLUME di un corpo soggetto a forze esterne. I cambiamenti di forma sono le DISTORSIONI. Le forze esterne sono reazioni vincolari, carichi termiche, ecc.

Le cls maturando perde volume e se non ha lo spazio per deformarsi, si fessura.

ES: DEFORMAZIONE ASSIALE (di un cavo reso da un carico):

- NON È SPOSTAMENTO
- // // ROTAZIONE
- // // ALLUNGAMENTO ASSOLUTO
- È UN ALLUNGAMENTO RELATIVO

ASTA A: ASTA B:



- allungamento

E = deformazione assiale

$$E = \frac{L_f - L_i}{L_i} = \frac{(L_i + \Delta L) - L_i}{L_i} = \frac{\Delta L}{L_i}$$

E è un valore ADIMENSIONALE.

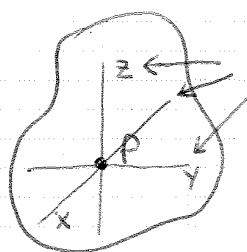
Di solito per E uso la percentuale

$$E_A = \frac{(40 + 10) - 40}{40} = \frac{1}{4} = 25\%$$

$$E_B = \frac{(50 + 10) - 50}{50} = \frac{1}{5} = 20\%$$

Due ferri a parità di allungamento soffrono in modo diverso. La ferrea più corta soffre di più.

$$\Delta A = \Delta B \quad \text{MA} \quad E_A \neq E_B$$



fibre // agli assi x, y, z.

$E > 0$: allungamento

$E < 0$: acciamenti

+ coppie di deformazione

quindi "spacchettare" $[J_p]$
 caso di moto rigido: $[J] = [\varphi]$

$$I = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{matrice di rotazione} \\ \text{RIGIDA, ANTISIMMETRICA} \end{array}$$

scoprire $[J]$ in 2 matrici, una simmetrica
 ed antisimmetrica, quest'ultima la lascio perdere.
 quella simmetrica

$$= \underbrace{\frac{1}{2} ([J_p] + [J_p]^T)}_{\text{SIMMETRICA}} + \underbrace{\frac{1}{2} ([J_p] - [J_p]^T)}_{\text{ANTISIMMETRICA}}$$

SIMMETRICA

ANTISIMMETRICA



$$[E_p]$$

$$[\varphi_p]$$

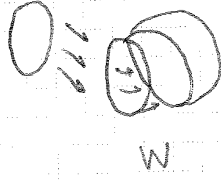
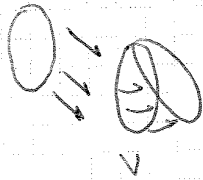
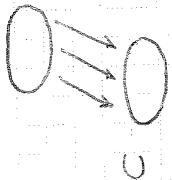
↓
 "MATRICE DI
 DEFORMAZIONE"

$$\{d\} = \{r_p\} + [\varphi_p] \cdot \{dr\} + \boxed{[E_p] \cdot \{dr\}}$$

↓
 TRASLAZIONE

↓
 ROTAZIONE

↓
 DEFORMAZIONE

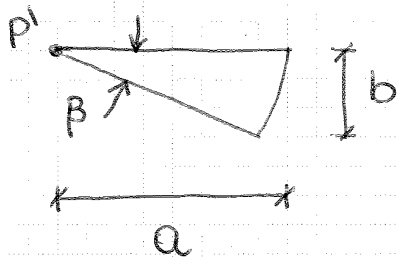


$$[E_p]_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

MATRICE
 SIMMETRICA
 X COSTRUZIONE

... allungamento su x, sulla fibra x

... e gli altri sono le deformazioni delle fibre.



$$\beta = \arctg \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \beta}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \beta - \frac{\beta^3}{6} \dots$$

$$\operatorname{cos} \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2} \dots$$

Se β è piccolo i primi termini della serie si riducono a β
 $\rightarrow \operatorname{tg} \beta \sim \beta$

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \vartheta = \alpha + \beta \rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \left. \vphantom{\gamma_{xy}} \right\} \text{SCORRIMENTI ANGOLARI}$$

deformazione totale = somma delle deformazioni angolari sui due assi x e y

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} > 0$$

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dy} < 0 \text{ perche' } \alpha \text{ è più basso di } \beta$$

$$\alpha + \beta = \gamma \rightarrow \gamma = 0 \text{ se } \alpha = \beta$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ > 0 & < 0 \end{matrix}$$

$\gamma < 0$ se le fibre hanno un angolo acuto compreso fra loro.

\rightarrow TRASFORMATORE del TENSORE di DEFORMAZIONE PER ROTAZIONE del SISTEMA di RIFERIMENTO.

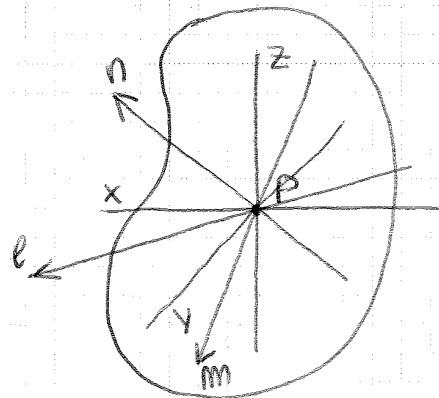
† punto possiamo ∞ fibre

\rightarrow PROP. Determinata la matrice tramite uno schema cartesiano, con una legge di trasformazione tensoriale posso calcolare la matrice rispetto ad un'altro schema di assi.

SISTEMA DI PARTENZA: x, y, z

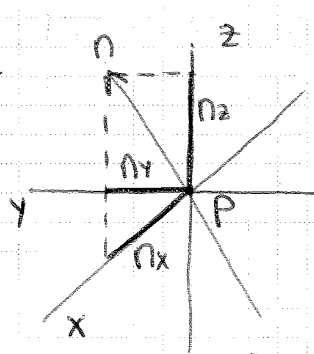
SISTEMA RUOTATO: n, m, l

$$\begin{matrix} [E_P] & \Rightarrow & [E_P] \\ x, y, z & & n, m, l \end{matrix}$$



$$N = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ l_x & l_y & l_z \end{bmatrix} \text{ MATRICE DI ROTAZIONE}$$

Tutti gli elementi di $[N]$ sono ≤ 1 .



Gli elementi di N sono ≤ 1 quindi i vettori n, m, l sono // ad alcune o ad alcune delle assi.

Matrice di rotazione XYZ - nml : $[N]$

CON DIMO. da fare sul

$$[E_P^*] = [N] \cdot [E_P] [N]^T$$

nml XYZ

← forme quadratiche nei libri coseni direttori. pag 211-212

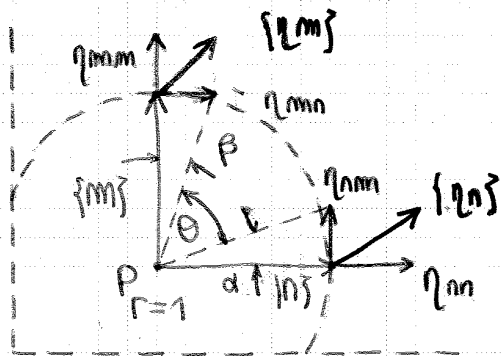
LEZ 18

$$E_n = \frac{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}{(\frac{\partial f}{\partial x})^2} = \eta_{nn}$$

$$\eta_{nn} = \frac{1}{1} \{n\}^T [E_P] \{n\} = E_n$$

COMPONENTI MATRICI DI LE FORMAZIONE 1, 2, 3

E_n, E_m, E_l : forme quadratiche della nuova matrice. I termini fuori della diagonale:



$$\eta_{mn} = \beta \quad \eta_{nm} = \alpha \quad \text{X Hip di de la dip} = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \eta_{nm} = \frac{\eta_{nm}}{1} + \frac{\eta_{mn}}{1} = 2 \eta_{nm}$$

INFINITESIMALI

$$[E]_{nml} = \begin{bmatrix} \{n\}^T [E] \{n\} & \{n\}^T [E] \{m\} & \{n\}^T [E] \{l\} \\ \{m\}^T [E] \{n\} & \{m\}^T [E] \{m\} & \{m\}^T [E] \{l\} \\ \{l\}^T [E] \{n\} & \{l\}^T [E] \{m\} & \{l\}^T [E] \{l\} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \eta_{nm} = \eta_{mn}$$

← QUI NON C'E' IL FATTORE 1/2

MATRICE DI ROTAZIONE

$$[E]_{nml} = \begin{bmatrix} E_n & \frac{1}{2} \eta_{nm} & \frac{1}{2} \eta_{nl} \\ \frac{1}{2} \eta_{mn} & E_m & \frac{1}{2} \eta_{ml} \\ \frac{1}{2} \eta_{ln} & \frac{1}{2} \eta_{lm} & E_l \end{bmatrix}$$

$[N]$ contiene i coseni direttori dei nuovi assi n, m, l rispetto al sistema di riferimento x, y, z .

PROPRIETA' DI TRASFORMAZIONE PER ROTAZIONE DELLA MATRICE DI DEFORMAZIONE $[E_P]$: $[E_P]$ è un TENSORE perché gode di quelle proprietà di trasformazione per rotazione del SR.

Nei sistemi omogenei \exists sempre la soluzione banale, $(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ MODULO DE VERSORE UNITARI
 devo però escluderla x' non è accettabile fisicamente.
 Per trovare la soluz. devo imporre il determinante = 0.

EQ. CARATTERISTICA DEL SISTEMA:

$$\det(A) = \det([E] - [I] E_n) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{PER AVERE SOLUZIONI} \\ \text{DIVERSE DA QUELLA BANALE} \end{array} \right\}$$

$$E_n^3 - J_1 E_n^2 - J_2 E_n - J_3 = 0$$

↑ INCOGNITA ↑ INVARIANTI DELLA DEFORMAZIONE (non dipendono dal SR)
 LINEARE QUADRATICO CUBICO

$J_1 = E_x + E_y + E_z$ (somma dei termini sulla diagonale)

$$J_2 = \begin{bmatrix} E_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & E_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zy} & E_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_x & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & E_z \end{bmatrix}$$

$J_3 = \det [E_p]$ MINORI PRINCIPALI ESTRATTI DAL TENSORE

↳ PROBLEMA DEGLI AUTOVALORI

$\det [A] = 0 \rightarrow$ EQ. DI 3° GRADO \rightarrow 3 SOLUZIONI (AUTOVALORI: $E_1, E_2,$

\rightarrow sostituisco ciascun autovalore nella matrice [A]

e risolvo il sistema lineare (V autovalore ha una direzione principale, un autovettore) \rightarrow 3 soluzioni

(AUTOVETTORI $\{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\}$) (\exists almeno tre fibre

che non sono ruotate tra di loro e sono ancora ortogonali tra di loro).

CON DIMO DA FARE SU LIBRO 2

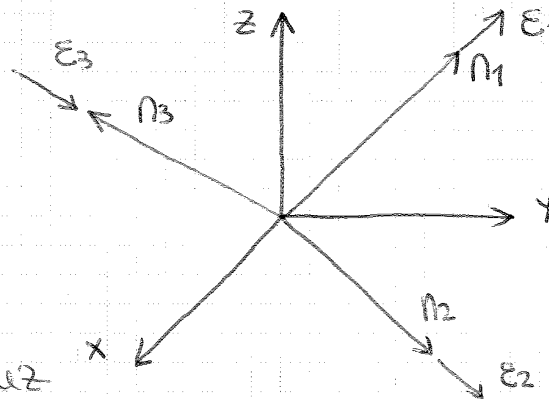
- E_1, E_2, E_3 : uno è MAX POSITIVO, uno MIN NEGATIVO con dimensionalità (non c'è sul corpo).

- $n_1 \perp n_2 \perp n_3$ CON DIMO (VEDI 4 PAG. DOPO DIM 1).

$$\begin{cases} E_1 \rightarrow \{n_1\} \\ E_2 \rightarrow \{n_2\} \\ E_3 \rightarrow \{n_3\} \end{cases}$$

DILATAZIONI PRINCIPALI DIREZIONI PRINCIPALI
 ↓ ↓
 AUTOVALORI AUTOVETTORI

E_1, E_2, E_3 sono soluz sempre in campo reale.



Quando inserisco nel $\det [A]$ E_1 , ottengo i 3 coseni direttori di $n_1 \dots$
 $E_1 \parallel n_1, E_2 \parallel n_2, E_3 \parallel n_3$
 $E > 0$ TRAZIONE
 $E < 0$ COMPRESSIONE

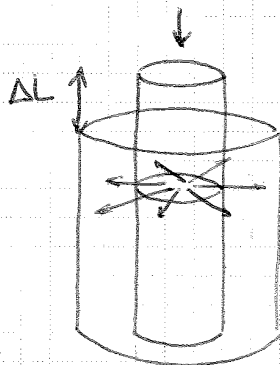
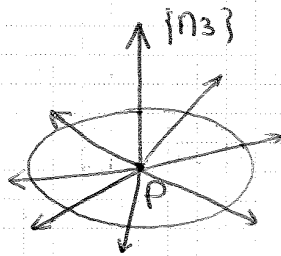
- CASO 1: $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$

↳ 3 DIREZIONI PRINCIPALI MUTUAMENTE ORTOGONALI

- CASO 2: $(\epsilon_1 = \epsilon_2) \neq \epsilon_3$

↳ $\{n_3\}$ principale con ∞^1 direzioni ortogonali

ϵ_3 è \perp al piano individuato da ϵ_1 e ϵ_2 .



- CASO 3: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$

↳ DEFORMAZIONE IDROSTATICA: la sfera nell'intorno di P, a deformazione avvenuta è ancora una sfera. Tutte le ∞^2 direz. dello stella di centro P sono principali → TENSORE SFERICO

- CASI PARTICOLARI:

- $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \neq 0$ → STATO TRIASSIALE di deformazione
- $(\epsilon_1, \epsilon_2) \neq 0, \epsilon_3 = 0$ → " BIASSIALE " (PIANO)
- $(\epsilon_1, \epsilon_2) = 0, \epsilon_3 \neq 0$ → " MONOASSIALE "

↳ INVARIANTI LETTI NEL RIFERIMENTO PRINCIPALE:

- $J_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ → individua la variazione di VOLUME.
- $J_2 = -[(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) + (\epsilon_2 \cdot \epsilon_3) + (\epsilon_1 \cdot \epsilon_3)]$ → è un parametro di DISTORSIONE
- $J_3 = (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_3) = \det [\epsilon]$ → $J_3 = 0$ implica stato piano o biassiale ($\exists ! \epsilon = 0$)

- DIMOSTRAZIONI AGGIUNTIVE -① ORTOGONALITÀ DI n_1, n_2, n_3

$$\begin{cases} \eta_1 = \varepsilon_1 n_1 \\ \eta_2 = \varepsilon_2 n_2 \end{cases}$$

con $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dilatazioni lungo le direzioni n_1 e n_2 .

Moltiplico scalarmente la 1^a eq per n_2 e la 2^a per n_1 :

$$\begin{cases} n_2 \cdot \eta_1 = \varepsilon_1 n_1 \cdot n_2 \\ n_1 \cdot \eta_2 = \varepsilon_2 n_2 \cdot n_1 \end{cases}$$

Essendo la matrice $[\varepsilon_i]$ (tensore) simmetrica, i primi due membri delle 2 eq. saranno uguali:

$$n_2 \cdot \eta_1 = n_1 \cdot \eta_2$$

uso le eq. del primo sistema:

$$n_2 \cdot \varepsilon_1 n_1 = n_1 \cdot \varepsilon_2 n_2$$

$$(n_2 \cdot n_1) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0$$

se imponiamo che $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \Rightarrow n_2 \cdot n_1 = 0$ e qst eq. è verificata e solo se le 2 direz. sono fra loro ortogonali.

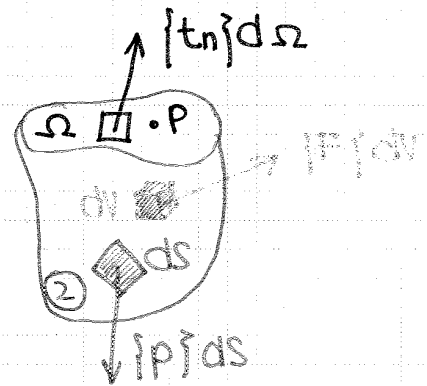
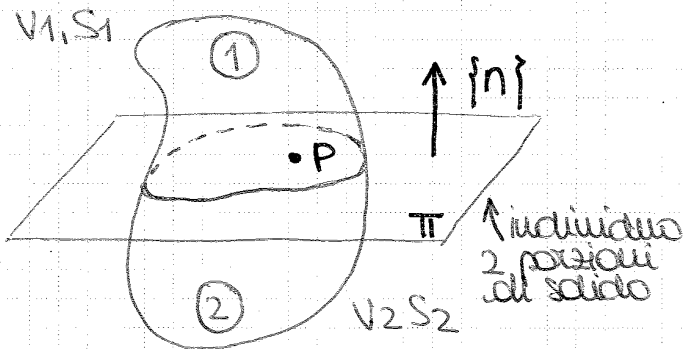
$$\int_V \{F\} dV + \int_S \{p\} dS = \{0\} \quad \text{FORZE} \quad 1^a \text{ ED. STATICA}$$

$$\int_V \{r\} \wedge \{F\} dV + \int_S \{r\} \wedge \{p\} dS = \{0\} \quad \text{MOMENTI} \quad \text{ED. EQUILIBRIO ROTAZIONE}$$

↓
VETTORE DI POSIZIONE

Queste 2 eq ci garantiscono che il corpo sia in equilibrio

Toglio il corpo con un piano che seziona il e passa per un punto P. Identifico il piano π con P e $\uparrow \vec{n}$



scrivo l'equilibrio su una sola parte del corpo.

$$\int_{V_2} \{F\} dV + \int_{S_2} \{p\} dS \neq 0 \quad \text{NON HO EQUILIBRIO}$$

La porzione di solido isolata non è in equilibrio sotto le sole forze agenti. È venuta meno la continuità sulla sp. di taglio. Per equilibrare devo aggiungere le azioni generate sulla nuova sp. Ω ($\{tn\} d\Omega$).

$\{tn\}$: VETTORE TENSIONE

← EQUILIBRIO STATICO:

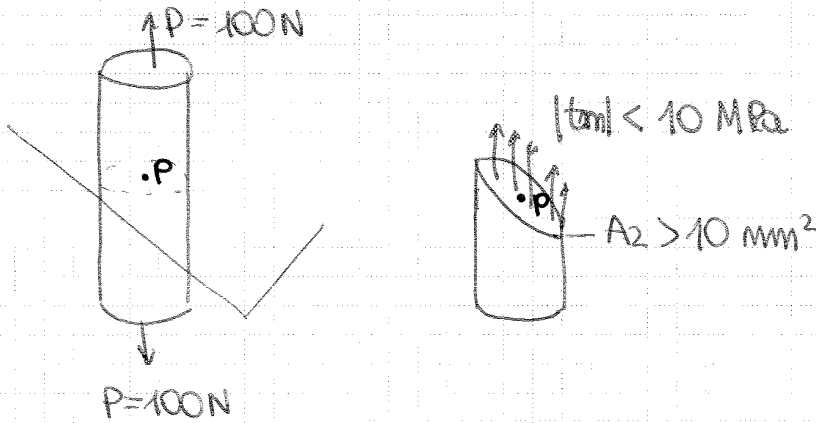
$$\int_{V_2} \{F\} dV + \int_{S_2} \{p\} dS + \int_{\Omega} \{tn\} d\Omega = 0 \quad \text{HO EQUILIBRIO}$$

← EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE:

$$\int_{V_2} \{r\} \wedge \{F\} dV + \int_{S_2} \{r\} \wedge \{p\} dS + \int_{\Omega} \{r\} \wedge \{tn\} d\Omega = 0$$

$\{tn\} d\Omega$: forze di superficie esercitate dal corpo 1 sul corpo 2 in corrispondenza del punto P.

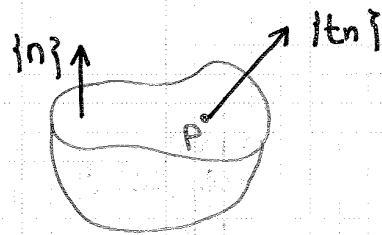
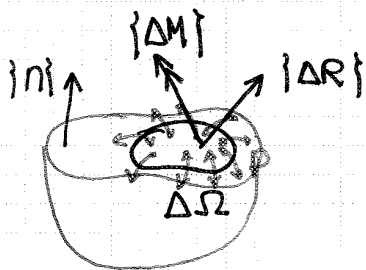
se cambio sup. di taglio:



$$A_2 > A (10 \text{ mm}^2)$$

$t_m < t_n$ per mantenere l'equilibrio dato da $A_2 > A_1$ ma P è sempre la stessa.

DEFINIZIONE LIMITE DEL VETTORE TENSIONE IN P



ΔR : risultante delle forze mutue.
 ΔM : risultante dei momenti

$$\lim_{\Delta \Omega \rightarrow 0} \frac{|\Delta R|}{\Delta \Omega} = |t_n|$$

$$\lim_{\Delta \Omega \rightarrow 0} \frac{|\Delta M|}{\Delta \Omega} = |0|$$

$\Delta \Omega \rightarrow 0$: Ω collosa nel punto P.

ASSENZA DI MICRO COPPIE (formulazione di Cauchy).

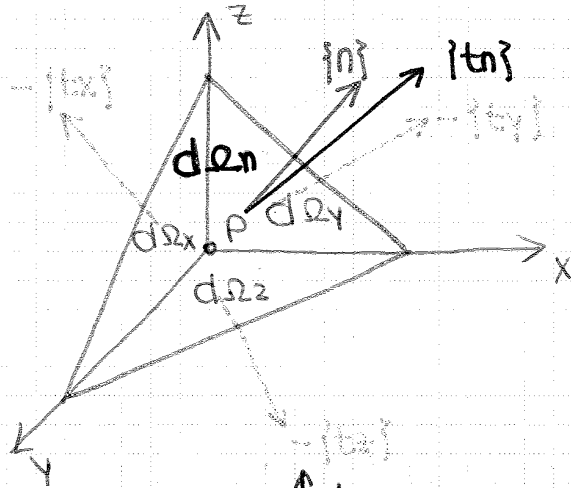
Facciamo un'analisi della tensione nel punto P e non consideriamo la micro-coppia di forze $|\Delta M|$ e $|\Delta R|$.

Le micro-coppe sono considerate dalla teoria dei protetti cosserat. (μ : microcoppe)

La tensione non è una quantità fisica misurabile sono misurabili le deformazioni ma non le tensioni. Il concetto di tensione è un concetto limite, è un costrutto mentale.

TETRAEDRO DI CAUCHY

uso il tetraedro di Cauchy per vedere come cambia il vettore tensione al variare della geometria del piano di



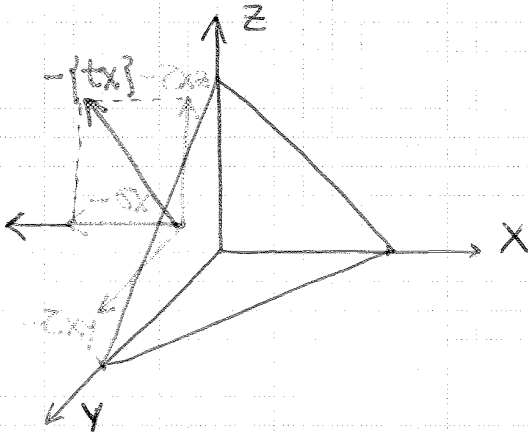
tetraedro infinitesimo nell'intorno del punto P.

Definisco i 4 vettori tensioni: t_x, t_y, t_z, t_n , hanno come pedice la retta normale al piano.

Questo intorno deve essere in equilibrio in ogni direzione (x, y, z)

↑ hanno segno meno perché agiscono sui giacchianti opposti.

Sulla direzione x avrò 4 eq: le prime 3 saranno le componenti di t_y, t_z, t_x sulla direzione x (t_{yx}, t_{zx}, t_{xx}) la 4 componente è la t_{nx} .



Componenti dei vettori agenti:

$$t_x = (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})$$

$$t_y = (\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz})$$

$$t_z = (\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy})$$

Il piano n non è un vettore coordinato quindi:

$$t_n = \{t_{nx}, t_{ny}, t_{nz}\} :$$

Equilibrio alla traslazione del tetraedro: (trascurare le forze di volume che sono co-ordinati del 3° ordine)

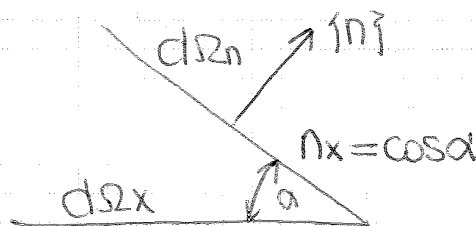
$$t_n d\Omega_n - t_x d\Omega_x - t_y d\Omega_y - t_z d\Omega_z = 0 \quad (1)$$

per ricondurre a delle forze devo moltiplicare le componenti di t per le aree.

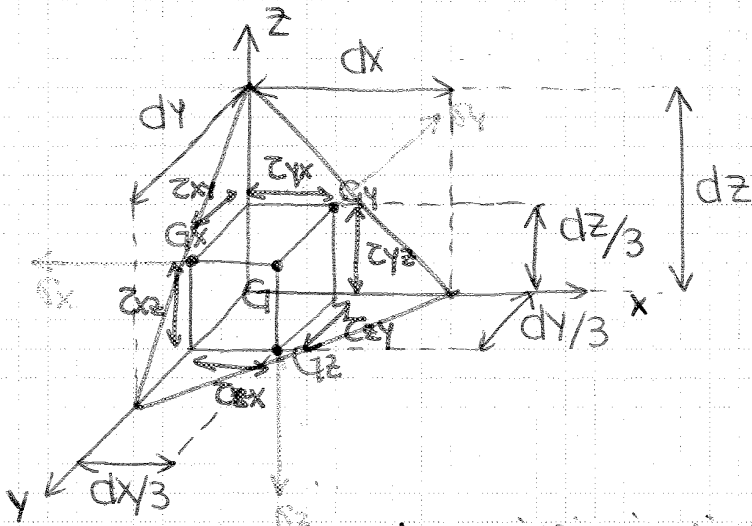
$$d\Omega_x = n_x d\Omega_n$$

$$d\Omega_y = n_y d\Omega_n \quad (2)$$

$$d\Omega_z = n_z d\Omega_n$$



EQULIBRIO ALLA ROTAZIONE



G_x, G_y, G_z : baricentri delle facce triangolari sui 3 assi coordinati
 Essendo G_x, G_y, G_z i baricentri dei triangoli si' esattamente dae si' trovano $(dx/3, dy/3, dz/3)$.

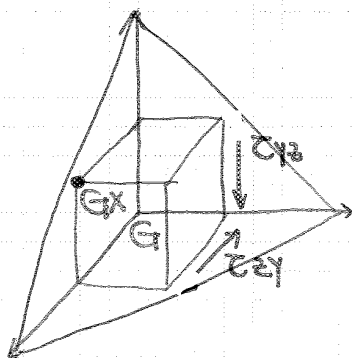
Le proiezioni di G sulle 3 facce coordinate sono i baricentri delle 3 facce stesse.

Scrivo gli equilibri allo rotazione intorno a G, G_x, G_y, G_z .

Le componenti di $\{T_n\}$ non mi daranno mai momenti perché hanno il braccio = 0. Sono applicati in G .

Rotazione intorno a G, G_z : danno contributo. T_{yx}, T_{xy}
 Rotazione o G, G_x :

- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: hanno braccio nullo x' convergono in G
- τ_{xy}, τ_{xz} : // // // // in G_x
- τ_{yx}, τ_{zx} : sono // a G, G_x
- τ_{zy}, τ_{yz} : contribuiscono al momento



EQULIBRIO ATTORNO A G, G_x .

$$\underbrace{\tau_{yz} \cdot \frac{1}{3} dx dy}_{\text{FORZA}} \cdot \underbrace{\frac{dz}{3}}_{\text{BRACCIO}} - \tau_{zy} \cdot \frac{1}{3} dx dy \cdot \frac{dz}{3} = 0$$

Essendo:

$$\frac{1}{3} \underbrace{dx dy}_{\text{AREA BASE}} \cdot \underbrace{dz}_{\text{ALTEZZA}} = \frac{1}{3} d\Omega_z dz = dv$$

si ottiene semplificando volume tetraedro dv .

sono = in modulo e reciproche di segni delle rotazione

$\tau_{yz} = \tau_{zy}$: reciprocità delle tensioni t_g

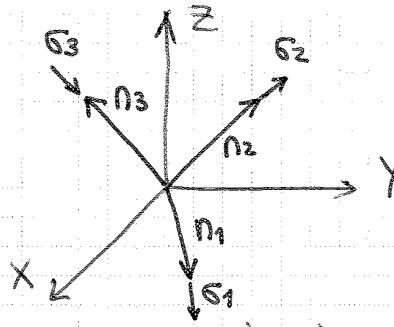
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

↑ 6 comp. indipend.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

TENSIONI PRINCIPALI

DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE



NB! $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono
sempre REALI

Tensore DIAGONALIZZATO nel sist principale:

$$[\sigma_P] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

n_1, n_2, n_3

Annullamento delle tensioni tangenziali $\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{13} = 0$

* Invariante lineare: $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = T_1$: tensione normale media ($\sigma_m = T_1/3$)

$\sigma > 0$: trazione

$\sigma < 0$: compressione

* Invariante quadratico: $T_2 = -[(\sigma_1 \sigma_2) + (\sigma_2 \sigma_3) + (\sigma_1 \sigma_3)]$
è un parametro di distorsione.

* Invariante cubico: $T_3 = (\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3)$

$T_3 = 0$: implica uno stato piano o monoassiale

Relazione d'ordine algebrica:

Se $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

MAX TRAZIONE
in P ($\sigma_1 > 0$)

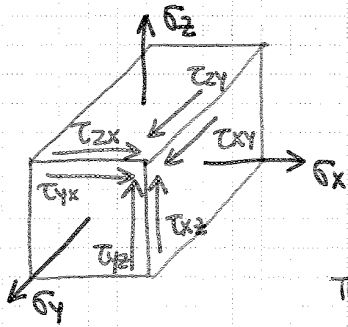
MIN TRAZIONE
in P ($\sigma_3 > 0$)

MIN COMPRES.
in P ($\sigma_1 < 0$)

MIN COMPRESSIOE
in P ($\sigma_3 < 0$)

TENSORE IDROSTATICO E TENSORE DEVIATORICO

Condiz. generale di sforzo in un punto P all'interno di un corpo.



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \tau \text{ sono indipendenti}$$

TENSIONE NORMALE MEDIA: $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1}{3} (= \frac{1}{3} \text{SR})$

È sempre possibile scomporre la sollecitazione in 2 parti

$$[\sigma] = [\sigma^i] + [\sigma^d]$$

$$[\sigma^i] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{TENSORE} \\ \text{IDROSTATICO} \end{array} \rightarrow \text{variaz. di volume}$$

← è intrinsecamente principale.

↑
tensione diagonalizzata con tensioni normali pari a tensione media

È indipendente dal SR perché $\bar{\sigma}$ è indipendente dal SR

$$[\sigma^d] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{TENSORE} \\ \text{DEVIATORICO} \end{array} \rightarrow \text{distorsioni combinate di primo.}$$

Qst invece dipende dal SR. È il responsabile delle crisi del materiale. Sulla diagonale ci sono le deviazioni delle σ dalla $\bar{\sigma}$.

Impoq $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ - ricavo i segni dei denominatori delle frazioni.

$D(1) > 0$ ← denominatore 1^a frazione

$D(2) < 0$ ← // 2^a //

$D(3) > 0$ ← // 3^a //

$(1) \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) > 0$
 $(2) \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3) < 0$
 $(3) \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) > 0$

} impoq qst diseq. in base ai segni dei denominatori. $D(1), D(2), D(3)$

↑
sono delle eq. di cerchi

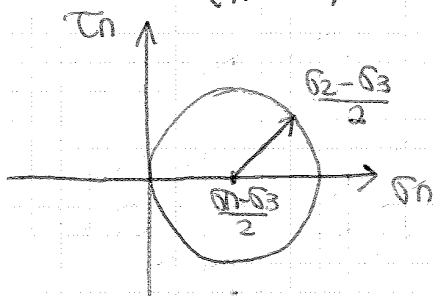
Sviluppando i prodotti si ricavano disequazioni corrispondenti a domini circolari nel piano $\sigma_n - \tau_n$

↳ Domini circolari:

→ DOMINIO ESTERNO: (1)

$$\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

\downarrow $\underbrace{\hspace{10em}}$ $\underbrace{\hspace{10em}}$
 $= \tau_n^2$ centro del cerchio sull'asse delle ascisse (σ) raggio circonferenza = R^2
 $= (x - x_c)^2$



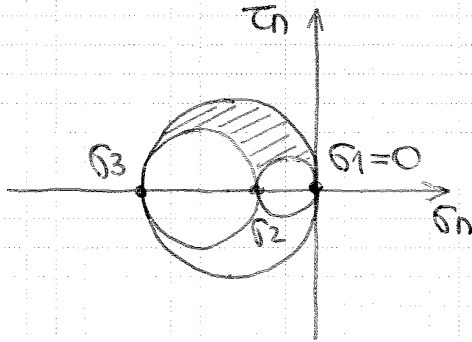
← gli stati tensionali sono esterni alla circonferenza.

$C_1 = \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; 0\right)$ $R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$

CASI PARTICOLARI:

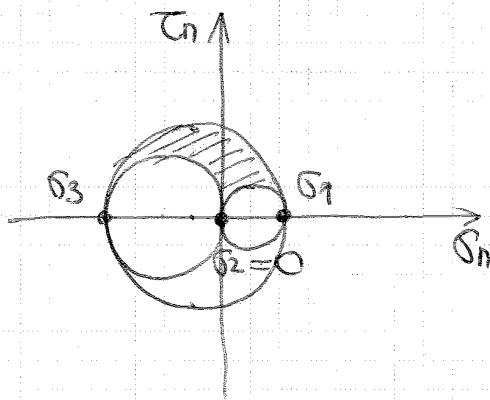
• STATI BIASSIALI

$$\sigma_1 = 0$$



Lo stato tensionale è comunque di compressione perché σ_2 e σ_3 sono < 0 .

$$\sigma_2 = 0$$

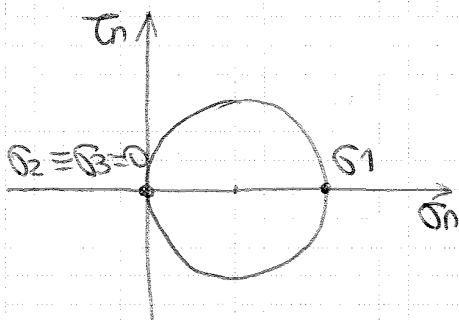


CASO DEL SOLIDO DI SAINT-VENANT

Auremo sempre due segni diversi per le tensioni $\neq 0$. Questo è il caso delle travi auto compressioni e trazioni.

• STATO MONDASSIALE

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$



Est è il caso di un'asta tesa. $\tau_{max} = \sigma_1/2$

Un piano a 45° che taglia una fibra mi dà la τ_{max} .

Le particelle di materiale disposte lungo una linea isostatica sono soggette per definizione a tensione normale, di tensione o compressione.

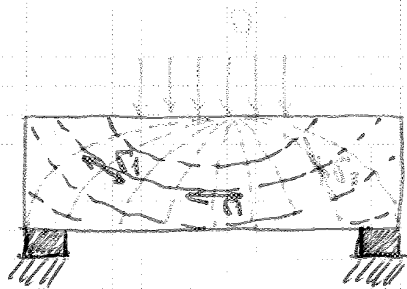
Se si riuscisse a concentrare la materia lungo un reticolo formato da linee isostatiche si realizzerebbe una condizione ottimale di peso, si risparmierebbe materiale.

TEOREMA DI MICHELL

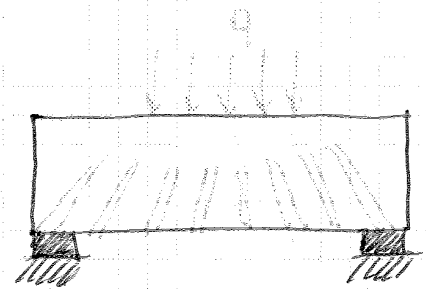
Struttura di minimo peso come reticoli di aste mutuamente ortogonali

Se massimizzo le parti tese e minimizzo le parti di compressione raggiungo il minimo peso.

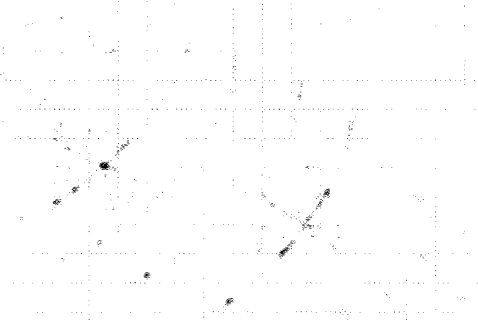
Applicazione delle linee isostatiche: disposizione delle trabeccole d'asse secondo le isostatiche di compressione.



-- trazione
-- compressione



I materiali fragili si rompono ortogonalmente alle tensioni principali di trazione. La fessurazione segue le linee isostatiche di compressione.



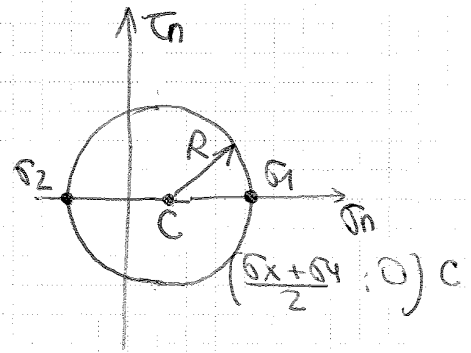
le 2 tensioni principali

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

ascissa del
centro C

di diametro del
cerchio di Mohr



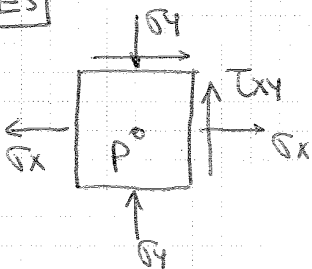
Dall'eq:

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = 0$$

si ricava l'angolo θ_0 ($\theta_0 > 0$ anticlockwise) di cui deve ruotare il SR XY per raggiungere il SR principale $X'Y'$:

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

ES



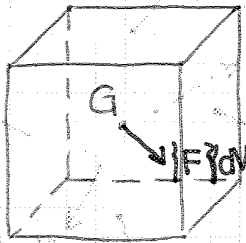
ci sono le τ quindi NON sono nel SR principale. Devo quindi trovare le tensioni principali (σ_1, σ_2) date σ_x e σ_y . Trovo la direzione delle τ usando la formula per calcolare θ_0 (↑)

EQ INDEFINITE DI EQUILIBRIO VP E V. LEZ 22 28 OTT 12

- 1: studio dell'equilibrio statico di un elemento infinitesimo.
- 2: Eq differenziali che legano gli sforzi che si generano in punti posti ad una distanza infinitesima. (Come varia il tensore degli sforzi al variare del punto considerato).

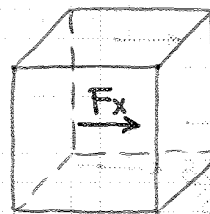
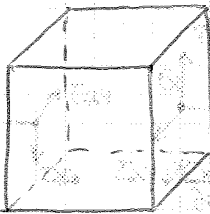
Prendo un parallelepipedo co-essimo con lati // agli assi coordinati.

FORZA DI VOLUME applicata in G



vettori tensionali sulle facce laterali

Faccio la scomposizione negli assi x, y, z



$$-\sigma_x + \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz + F_x = 0$$

componenti che agiscono in direzione x: (sto σ_x e le componenti che hanno come 2° pedice x).

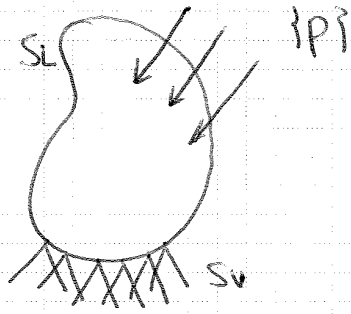
Affinché ci sia equilibrio: (moltiplico tensione * area)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx (dy dz) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy (dx dz) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz (dx dy) + F_x dx dy dz = 0$$

↳ 1° EQ. DI EQUILIBRIO INFINITESIMO

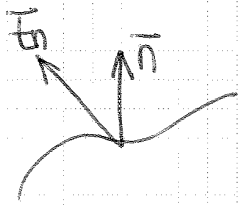
$$\boxed{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0}$$

EQ. DI EQUIVALENZA SULLA FRONTIERA - V P E SL

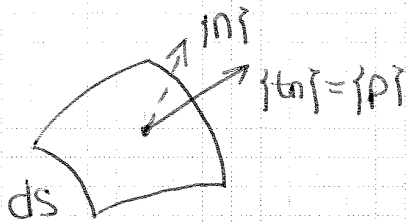


S_L : superficie libera (qui applico forze superficiali p)
 S_V : superficie vincolata (dove conosco gli spostamenti e metto i vincoli)

$\forall P \in S_L \exists$ un equilibrio delle componenti del vettore tensione. sono pressioni = forza/area



$$\begin{cases} t_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = p_x \\ t_{ny} = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z = p_y \\ t_{nz} = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = p_z \end{cases}$$



↑ c'è identità tra t e p ↑
 Queste 3 eq derivano dal principio di azione e reazione.

DUALITÀ STATICO-CINEMATICA

Le 6 componenti indipendenti che compongono i tensori si possono ordinare in vettori perché simmetrici:

TENSORE $[E(P)] \rightarrow$ VETTORE $\{E(P)\}$ (6x1)
 TENSORE $[\sigma(P)] \rightarrow$ VETTORE $\{\sigma(P)\}$

} I campi di TENSORE e DEFORMAZIONE sono funz. dipendenti dal punto P e dalla geometria n considerato

vettore ϵ delle deformazioni:

$$\{E\} = \begin{matrix} \left[\begin{array}{c} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right] \end{matrix} \left. \begin{array}{l} \} \text{dilatazioni specifiche} \\ \} \text{scorimenti angolari} \end{array} \right\}$$

DUALITA' STATICO - CINEMATICA :

Come nella meccanica dei corpi rigidi la matrice statica è la trasposta di quella cinematica, così nella meccanica dei corpi deformabili tra i 2 operatori differenziali vale la stessa relazione.

EQ. DI EQUIVALENZA AL CONFINO :

$$\boxed{[N]^T \cdot \{\sigma\} = \{p\}}$$

3×6 6×1 3×1

↑
contiene i coseni direttori delle normali alla sp.

(il vettore tensionale coincide con la forza di sp. sulla frontiera del dominio → EQ. di EQUIVALENZA SU FRONTIERA)

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_x & n_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad \forall P \in S_L$$

MATRICE OPERATORIALE (STATICA) E MATRICE DEI COSENI DIRETTORI

$$[N]^T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_x & n_y \end{bmatrix}$$

↑
3x6
OPERATORE GEOMETRICO

Alle derivate parziali corrispondono i coseni direttori (teorema di Green)

Forza lavorare le forze di (a) per gli spostamenti di (b) → LAVORO VIRTUALE ESTERNO.

Il lavoro virtuale interno è = a. qll esterno
 ↳ il lavoro totale = 0.

PLV: Dati 2 sistemi indipendenti, l'uno equilibrato e l'altro congruente, il PLV afferma l'uguaglianza tra il lavoro virtuale esterno ed il lavoro virtuale interno: $L^*_{EST} = L^*_{INT}$

DIMOSTRAZIONE BRISTICA: si dim. che la somma componente di tensione lavoro per effetto della corrispondente componente di deformazione.

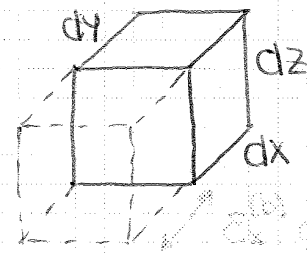
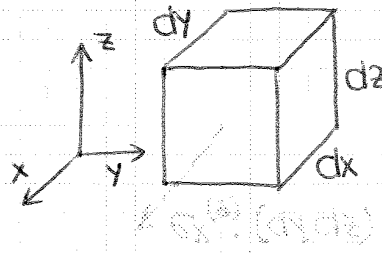
lavoro virtuale interno: lavoro di deformazione delle componenti normali di tensione.

FORZA:

$$\sigma_x^{(a)} (dy dz)$$

SPOSTAMENTO:

$$du^{(b)} = \epsilon_x^{(b)} dx$$



↑
 è dimensionale quindi lo devo moltiplicare per dx per avere una misura.

$\sigma_x^{(a)}$ compie lavoro x uno spostamento
 $\epsilon_x^{(b)}$ → lavoro:

$$dL^*_{INTERNO} = \sigma_x^{(a)} \cdot \epsilon_x^{(b)} dx dy dz$$

$$= \sigma_x^{(a)} \cdot \epsilon_x^{(b)} dV$$

↑ ↑
 tensione deformazione
 normale specifica
 in (a) in (b)

PLV: lavoro virtuale esterno = lavoro virtuale interno

$$\int_V \{F_a\}^T \{ \eta_b \} dV + \int_S \{p_a\}^T \{ \eta_b \} dS = \int_V \{ \sigma_a \}^T \{ \epsilon_b \} dV$$

NB il PLV è l'identità fondamentale della meccanica del continuo.

NB il principio è indipendente dal tipo di materiale (ossia dal legame costitutivo tra tensioni e deformazioni)

La dimostrazione rigorosa del Principio dei lavori virtuali può condursi attraverso il teorema di Gauss-Cremona applicato ai domini tridimensionali, sfruttando la fondamentale proprietà di dualità tra gli operatori statico e cinematico.

DIM: (vedi "Capitoli" pg. 238)

Si consideri il lavoro virtuale compiuto dalle forze di volume $\{F_a\}$ per gli spostamenti $\{ \eta_b \}$

$$(1) L_F = \int_V \{F_a\}^T \{ \eta_b \} dV = - \int_V ([\partial]^T \{ \sigma_a \})^T \{ \eta_b \} dV$$

$$[\partial]^T \{ \sigma_a \} = - \{F_a\}$$

$$L_F = \int_V \{ \sigma_a \}^T [\partial] \{ \eta_b \} dV = \int_S \{ \sigma_a \}^T [N] \{ \eta_b \} dS \quad (\text{per 8.21})$$

Applico le eq cinematiche e le condizioni di equivalenza al continuo:

$$(2) L_F = \int_V \{ \sigma_a \}^T \{ \epsilon_b \} dV - \int_S \{ p_a \}^T \{ \eta_b \} dS$$

uguagliando (1) e (2) ottengo:

$$\underbrace{\int_V \{ \sigma_a \}^T \{ \epsilon_b \} dV}_{L_{INT}^*} = \underbrace{\int_V \{F_a\}^T \{ \eta_b \} dV + \int_S \{ p_a \}^T \{ \eta_b \} dS}_{L_{EST}^*} //$$

2: Restrizioni delle deformazioni possibili:

↳ CORPI RIGIDI: corpi capaci soltanto di moto rigido (rotolamento - traslazione)

↳ CORPI INCOMPRESSIBILI: corpi capaci solo di deformazioni isocore ($\rho = \text{cost}$)

↳ CORPI INESTENSIBILI (ASTE): aste capaci di inflettersi ma non di variare la lunghezza assiale

ASSIOMI DI NOLL (1958):

1: PRINCIPIO DEL DETERMINISMO: lo stato di tensione (σ) nel continuo dipende dallo storia di deformazione.

2: PRINCIPIO DI AZIONE LOCALE: lo stato di tensione in un punto P può determinarsi ignorando la deformazione del continuo in punti posti a sufficiente distanza da P (vedi def. di tensione)

3: PRINCIPIO DELL'INDIFFERENZA MATERIALE: la risposta di un materiale alle sollecitazioni deve essere indipendente dall'osservatore.

TEORIA DELL'ELASTICITÀ - LEZ. 23

LEGAME COSTITUTIVO ELASTICO:

$$[\sigma] = \sigma([E])$$

Un corpo deformabile si dice elastico quando il campo tensionale $[\sigma]$ è funzione diretta e biunivoca del campo di deformazione $[E]$.

Quando E si annulla, si annulla anche σ , e il valore di σ dipende soltanto dal valore finale raggiunto da E .

Applicando il PLV:

1: sistema staticamente ammissibile: (di forze e tensioni)
 $\{F\}, \{p\} \rightarrow \{s\}$

2: sistema cinematicamente ammissibile (di deformazioni spostamenti).
 $\{d\eta\} \rightarrow \{d\epsilon\}$

Le forze esterne $\{F\}, \{p\}$ lavorano per incrementi di spostamento $\{d\eta\}$. $\{s\}$ lavora per gli incrementi $\{d\epsilon\}$

NB: il lavoro infinitesimo è reale.

È possibile trascurare il lavoro degli incrementi delle forze esterne $\{dF\}, \{dp\}$: infinitesimo di ordine superiore.

$$dL_e = \int_V \{F\}^T \{d\eta\} dV + \int_S \{p\}^T \{d\eta\} dS$$

$$dL_i = \int_V \{s\}^T \{d\epsilon\} dV$$

uso il "trucco" perché così posso ottenere come risultato uno scalare quale è appunto il lavoro.

Per il PLV:

$$dL_e = dL_i$$

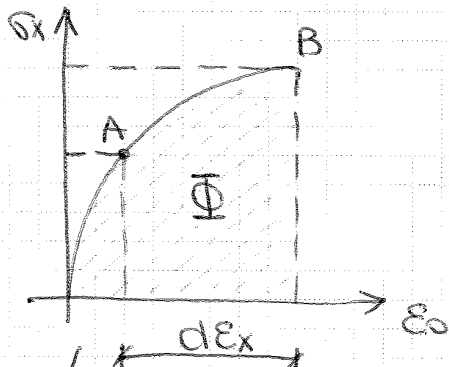
Il corpo si dice iperelastico quando il lavoro esterno risulta un differenziale esatto. \exists un potenziale delle deformazioni \rightarrow il processo deformativo avviene fornendo energia al corpo. Tale energia viene integralmente restituita al cessare delle deformazioni in assenza di dissipazioni (campo conservativo).

Se il campo è conservativo allora posso andare a definire una funzione potenziale ϕ .

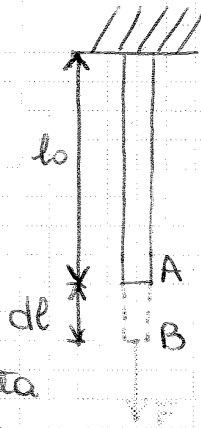
Nel caso monassiale, sia ϕ che σ_x sono funzioni delle solo dilatazione ϵ_x

$$\phi = \phi(\epsilon_x) \quad \sigma_x = \sigma_x(\epsilon_x)$$

I percorsi di carico e scarico nel piano (σ_x, ϵ_x) coincidono \rightarrow l'energia elastica immagazzinata viene completamente restituita.



L'energia immagazzinata è pari all'area sotto della curva $\sigma_x = \sigma_x(\epsilon_x)$



$$\sigma_x = F/A$$

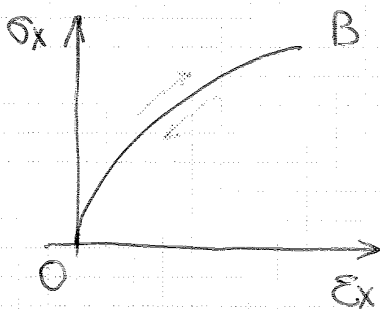
$$\epsilon_x = dl/l_0$$

nei corpi iper-elastici non c'è dissipazione di energia.

Il lavoro di deformazione e la differenza delle energie potenziali e dipende solo da punti di inizio e fine, non dal percorso.

Energia per passare da A \rightarrow B

$$dL_{A \rightarrow B} = \Phi_B - \Phi_A$$



Il lavoro di deformazione in corrispondenza di un cammino chiuso è nullo:

$$L = \oint d\phi = 0 \rightarrow \Phi_0 - \Phi_0 = 0$$

$$L_{0 \rightarrow B \rightarrow 0} = 0$$

non ci sono dissipazioni se il materiale è elastico.

POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE

lavoro virtuale infinitesimo: $d\psi = \underbrace{\{d\sigma\}^T}_{1 \times 6} \cdot \underbrace{\{\epsilon\}}_{6 \times 1}$

Differenziale: $d\phi + d\psi = d(\{\sigma\}^T \{\epsilon\})$
 incrementi di tensione σ e deformaz. ϵ .

$$d\phi + d\psi = \underbrace{\{\sigma\}^T}_{d\Phi} \{d\epsilon\} + \underbrace{\{d\sigma\}^T}_{d\psi} \{\epsilon\}$$

ψ : potenziale complementare dal lavoro gli incrementi di σ e non di ϵ .

Essendo il potenziale elastico ϕ ed il prodotto scalare $\{\sigma\}^T \{\epsilon\}$ entrambi funzioni di stato (suo potendi)

$d\phi$
 $d(\{\sigma\}^T \{\epsilon\})$ } differenziali esatti

↳ anche ψ è una funz. di stato e $d\psi$ differenziale esatto

ψ è funzione delle 6 componenti di tensione

$\psi = \psi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ ϕ è funz. delle 6 componenti di deformazione.

Si deducono le componenti di deformazione mediante derivate parziali di ψ .

Il differenziale totale può scriversi:

$$(1) \quad d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_z} d\sigma_z + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz}$$

componenti =

Andando ad esplicitare il prodotto ottenuto prima:

$$d\psi = \{d\sigma\}^T \{\epsilon\}$$

$$(2) \quad d\psi = \epsilon_x d\sigma_x + \epsilon_y d\sigma_y + \epsilon_z d\sigma_z + \gamma_{xy} d\tau_{xy} + \gamma_{xz} d\tau_{xz} + \gamma_{yz} d\tau_{yz}$$

confrontando (1) e (2) ottengo le componenti di deforma

$$\epsilon_x = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xy}} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xz}} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{yz}}$$

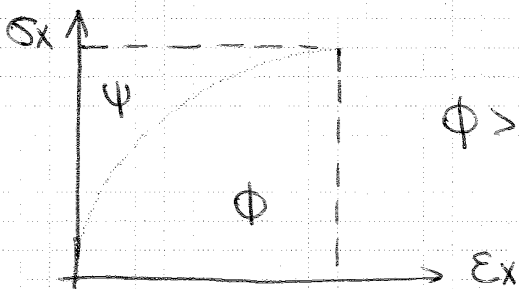
Procedimento analogo a primo.

ψ assicura l'invertibilità del legame costitutivo.

Elasticità non lineare - 1

Nel caso generale $\phi \neq \psi$

I materiali come le gomme mostrano in genere concavità verso il basso: $\phi > \psi$

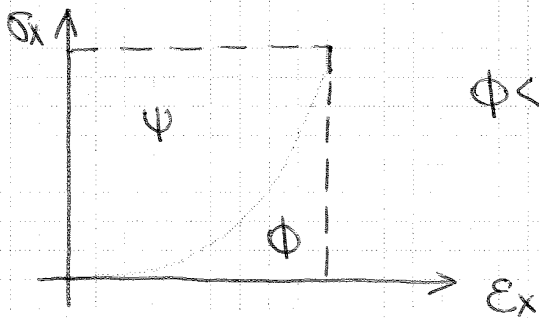


$\phi > \psi \rightarrow$ sto immagazzinando molta energia ϕ . (le fessure si propagano facilmente).

All'inizio il materiale è molto rigido \rightarrow servono grandi sforzi x piccoli spostamenti. (la pendenza però man mano diminuisce). Poi però la gomma diventa più elastibile

Elasticità lineare - 2:

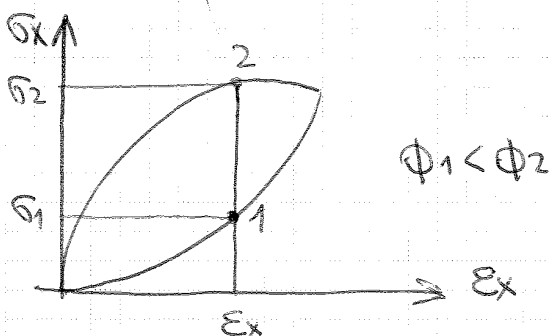
I materiali biologici mostrano invece concavità verso l'alto $\phi < \psi$ (curva a "J")



$\phi < \psi \rightarrow$ l'energia immagazzinata è poca. (le fessure non si propagano)

VANTAGGI DELLA CURVA A "J":

Grande tenuta a rottura delle strutture biologiche
 \hookrightarrow ridotto accumulo di energia elastica per grandi deformazioni



$\phi_1 < \phi_2$

A parità di deformazione nel punto 1 ho meno energia accumulata quindi meno possibilità di propagare la frattura, rispetto al punto 2.

Si può introdurre un tensore del IV ordine che rappresenta $[E]$ in $[\sigma]$:

$$[\sigma] = [[A]] \cdot [E] \leftarrow \text{relazione tensoriale}$$

↑
tensore di elasticità del IV ordine

$[[A]]$ ha 81 componenti che legano le componenti di $[\sigma]$ a quelle di $[E]$

Per la simmetria di $[\sigma]$ e $[E]$ il tensore gode delle proprietà di SIMMETRIA MINORE:

$$\hookrightarrow A_{ikjh} = A_{kijh} = A_{ikhj}$$

vi sono 36 componenti indipendenti.

ciò è ipotesi che esista un potenziale elastico.

Aggiungo la condizione di iperelasticità:

$[[A]]$ gode delle prop. di simmetria maggiore

$$\hookrightarrow A_{ikjh} = A_{jhik}$$

vi sono 21 componenti indipendenti

DEDUZIONI DELLE COSTANTI

Sviluppo in serie di McLaurin (intorno allo stato indeformato) del potenziale Φ .

Ricordiamo l'hip di piccole deformazioni. (così posso fermare lo sviluppo in serie a 2° ordine)

$$\Phi = \Phi(\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}) =$$

$$= \Phi(0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x}\right)_0 \epsilon_x + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y}\right)_0 \epsilon_y + \dots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}}\right)_0 \gamma_{yz} + \parallel \begin{matrix} 6 \\ \text{DERIV} \\ \text{PRIME} \end{matrix}$$

↑ potenziale nell'origine lo sviluppo = 0

↑ max. ind. derivate prime

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x^2}\right)_0 \epsilon_x^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz}^2}\right)_0 \gamma_{yz}^2 + \parallel \begin{matrix} 6 \\ \text{DERIV.} \\ \text{SECONDE} \end{matrix} \right.$$

↑ derivate seconde analoghe

$$+ 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y}\right)_0 \epsilon_x \epsilon_y + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{xz} \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \gamma_{xz} \gamma_{yz} \right\} + \dots \parallel \begin{matrix} 6 \\ \text{DERIV} \\ \text{SEC MISTE} \end{matrix}$$

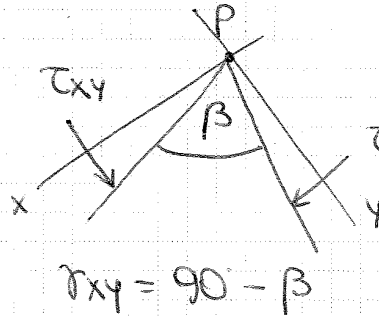
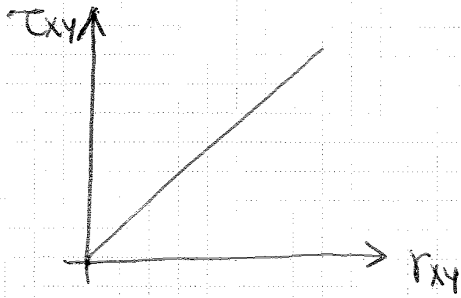
metto 2 x le derivate $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y}$ solo = a $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_y \partial \epsilon_x}$ etc...

derivate sequenti che non considero x solo molto piccole → il mio addomente è lineare.

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r_{xy}^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial r_{xy}} \right)_0$$

↑ termine 44

↑ pendenza della curva di carico τ_{xy} in funz. di r_{xy} .



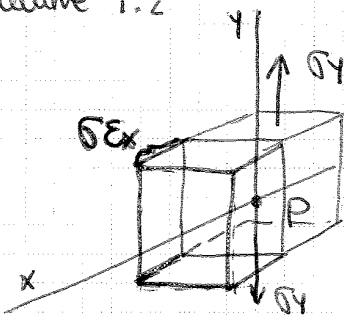
le 2 τ tendono a far \downarrow l'angolo compreso tra x e y

Le costanti fuori dalla diagonale invece sono:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_y} \right) = \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial \epsilon_x} \right)_0$$

↑ termine 1.2

↑ ci dice come varia σ_y al variare delle ϵ_x (Assumendo il materiale lungo $x - \epsilon_x$ auto delle deformazione σ_y anche trasversalmente).



POTENZIALE ELASTICO LINEARE

in forma matriciale compatta

$$\phi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [H] \{\epsilon\} \quad \phi: \text{funz. quadratica in } \epsilon$$

↑ qui ho le costanti elastiche
 ↑ è uscito dallo sviluppo di Taylor, e è l'area del triangolo.

Analogia con la funz. quadratica dell'oscillatore armonico:

$$\phi = \frac{1}{2} K x^2$$

tramite derivazione parziale si ottiene il legame costitutivo elastico lineare: nel campo tridimensionale

$$\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\} \quad \text{EQ. COSTITUTIVA} \quad (\text{analogia con oscillatore: } F = kx)$$

PROBLEMA ELASTICO LINEARE E SUE PROPRIETA' LEZ. 24

Le 3 eq indefinite di equilibrio sono insuff. per determinare le 6 componenti di tensione.

Aggiungendo le 6 eq costitutive elastiche lineari, si ottiene un sistema di 9 eq. nelle 9 incognite.

$$\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, u, v, w\}$$

u, v, w : componenti di η ci sono perché c'è la ϵ se aggiungo $\{F\} [H] \{\epsilon\}$

Si può arrivare ad una espressione sintetica del problema, assumendo come incognita il vettore spostamento $\{\eta\}$ (u, v, w) tensioni forze di volume

Eq di equilibrio : $[\partial]^T \{\sigma\} = -\{F\}$

Eq costitutive : $\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\}$

Eq compatibilità : $\{\epsilon\} = [\partial] \{\eta\}$

\uparrow Le ϵ sono le derivate dello spostamento η .

Manipolando le eq:

$$[\partial]^T \{\sigma\} = -\{F\} \quad \leftarrow 3 \text{ eq in 6 incognite}$$

$$\downarrow$$

$$[\partial]^T [H] \{\epsilon\} = -\{F\}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{[\partial]^T [H] [\partial]}_{\text{matrice dei coeff.}} \{\eta\} = -\{F\} \quad \leftarrow \text{Problema ben posto: 3 eq in 3 incognite + punto HO DERIVATE 2^{\wedge}}$$

\downarrow termini noti

$(u, v, w) \rightarrow$ incognite.

ES. OPERATORE DI LAME:

$$([\partial]^T [H] [\partial]) \{\eta\} = -\{F\}$$

$$\boxed{[L] \{\eta\} = -\{F\}}$$

$[L]_{3 \times 3}$: operatore differenziale di Lamé, contiene le costanti elastiche del materiale ($[H]$) e un operatore differenziale del 2° ordine ($[\partial]$)

La sovrapposizione degli effetti, che discende direttamente dalla linearità delle eq, vale per gli spostamenti, le tensioni e le deformazioni MA NON per il LAVORO di deformazione:

$$L_{A+B} \neq L_A + L_B$$

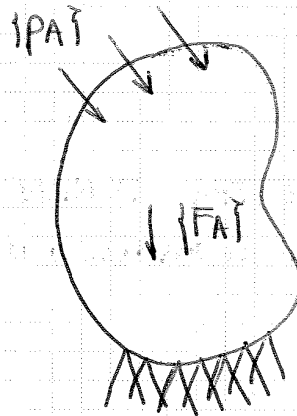
→ UNICITÀ DELLA SOLUZIONE ELASTICITÀ: TEOREMA DI KIRCHHOFF
Per la linearità \exists una sola soluzione.

Assunti:

$\{F\}$, $\{P\}$, $\{q\}$ SPOSTAM. IMPOSTI

Se la soluzione $\{q\}$ esiste, essa è UNICA

↳ $\{q\}$, $[EA]$, $[\sigma]$: UNICI
DERIVATO EQ. COSTITUTIVA



Il campo di spostamenti $\{q\}$ soluz. del problema elastico lineare, se \exists è unica.

DIM (per assurdo): si immagina che un sistema di sollecitazioni $\{F\}$, $\{P\}$ possa generare due diverse risposte:

$$\begin{aligned} &\{q_A\}, [EA], [\sigma_A] \\ &\{q_B\}, [EB], [\sigma_B] \end{aligned}$$

Si applichi il PLV al sistema differenza:

$$(1) \int_V \underbrace{\{0\}^T}_{\text{differenza forze}} \cdot \underbrace{\{\Delta q\}}_{\text{differenza spostamenti}} dV + \int_S \underbrace{\{0\}^T}_{\text{differenza forze}} \cdot \underbrace{\{\Delta q\}}_{\text{differenza spostamenti}} dS + \int_{S_V} \underbrace{\{\Delta R\}^T}_{\text{differenza reaz. vincolari}} \cdot \underbrace{\{0\}}_{\text{diff. spost. imposti}} dS = !$$

$$(2) = \int_V \{\Delta \sigma\}^T \{\Delta \epsilon\} dV$$

↑
deve essere uguale

(1) = 0 per definizione poiché tutti i termini sono moltiplicati per zero ($\{0\}$). → anche (2) $\neq 0$

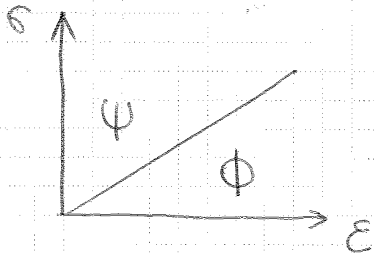
(2): $\int_V \{\Delta \sigma\}^T \{\Delta \epsilon\} dV$ è il doppio del potenziale elastico ϕ del sistema differenza:

$$2 \int_V \phi(\Delta \epsilon_x, \Delta \epsilon_y, \dots, \Delta \gamma_{yz}) dV$$

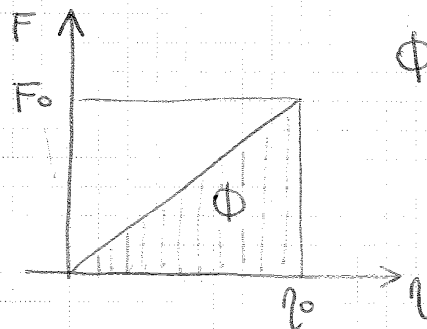
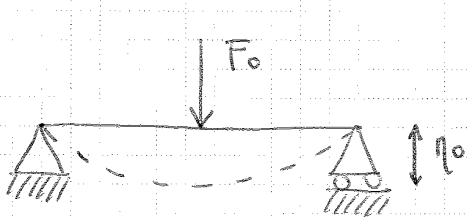
da cui ricavò:

$$\frac{1}{2} \int_V \mathbf{F} \mathbf{i}^T \mathbf{i} \, dV + \frac{1}{2} \int_{S_L} \mathbf{P} \mathbf{i}^T \mathbf{i} \, dS = \int_V \phi \, dV$$

(L'energia potenziale del corpo che è stata immagazzinata è uguale alla metà del lavoro interno)



Il lavoro di deformazione compiuto dalle forze esterne per portare il corpo dallo stato indeformato a quello deformato è pari alla metà del lavoro che tali forze compierebbero se agissero con il loro valore finale durante tutto il processo di carico.



φ: potenziale elastico

$$L_{DE} = \int_0^{\eta_0} F(\eta) \, d\eta = \frac{1}{2} F_0 \eta_0$$

↑
 lavoro di deformazione: energia che andiamo a dare per effetto dello azione di F.
 ↑ ↑ valori finali di forza e spostamento

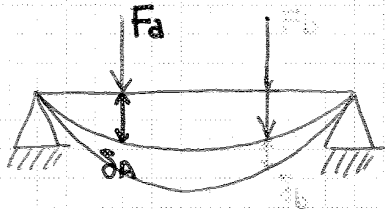
se la forza F fosse pari ad F_0 sin dall'inizio avremmo un "lavoro rettangolare", caso delle forze impulsive.

Applicando il teorema di Clapeyron:

$$L_a = \frac{1}{2} \int_V \{F_a\}^T \{\eta_a\} dV + \frac{1}{2} \int_{S_L} \{p_a\}^T \{\eta_a\} dS$$

$$L_b = \frac{1}{2} \int_V \{F_b\}^T \{\eta_b\} dV + \frac{1}{2} \int_{S_L} \{p_b\}^T \{\eta_b\} dS$$

Mentre si sollevano gli η_b ci sono ancora le forze F_a .

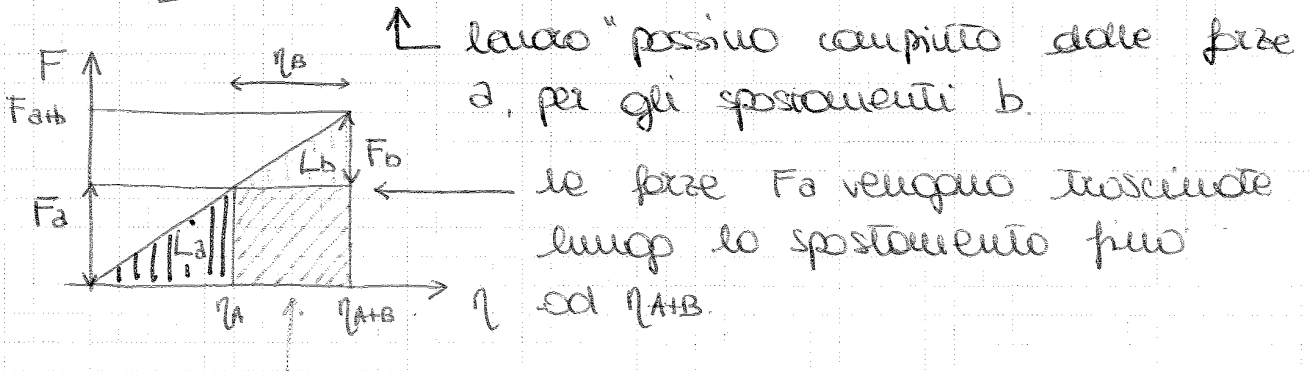


$$L_{a+b} \neq L_a + L_b$$

L'applicazione del sistema (b) in aggiunta al sistema (a) già presente, produce il lavoro di trasciamento delle forze del sistema (a) (già presente) per gli spostamenti indotti dal sistema (b).

$$L_{ab} = \int_V \{F_a\}^T \{\eta_b\} dV + \int_{S_L} \{p_a\}^T \{\eta_b\} dS \leftarrow \text{lavoro mutuo}$$

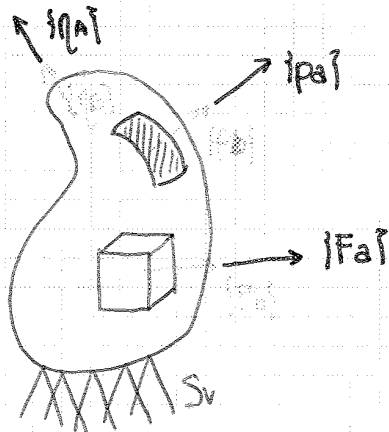
$$L_{a+b} = L_a + L_b + L_{ab}$$

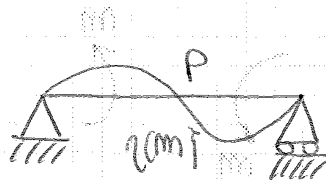
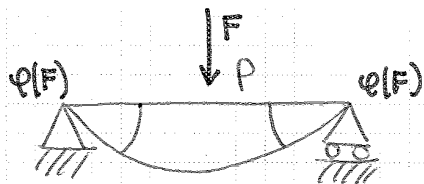


lavoro mutuo rettangolare (non è triangolare come invece afferma il teorema di Clapeyron)

si inverte ora l'ordine del processo di carico

Prima il sistema (b) e poi (a)



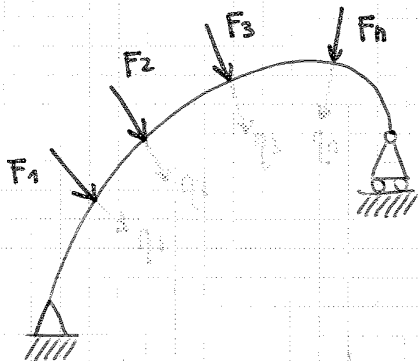


$$F \times 0 = m \varphi(F) - m \varphi(F) = 0 \leftarrow \text{lavori mutui} = 0$$

questi sono 2 sistemi energeticamente ortogonali

→ TEOREMA DI CASTIGLIANO

Il teorema fornisce un metodo alternativo di applicazione del PLV per il calcolo di spostamenti elastici, nel caso in cui siano assenti distorsioni termiche e cedimenti vincolari.



Il principio di sovrapposizione degli effetti permette di esprimere

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n \psi_{ij} F_j \quad i=1,2 \dots n$$

↑
spostamento del punto di applicazione della forza nella direz. della forza stessa.

η : spostamenti unici delle forze

ψ_{ij} : coeff. di influenza (spostamento generato nell'i-esimo punto dalla j-esima forza).

Il teorema di Betti fornisce il lavoro di deformazione

$$L_{DEF} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \eta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i F_j \psi_{ij}$$

derivando il L_{DEF} rispetto ad ogni forza, otteniamo:

$$\frac{\partial L_{DEF}}{\partial F_i} = \sum_{j=1}^n \psi_{ij} F_j \quad i=1,2 \dots n$$

$$\frac{\partial L_{DEF}}{\partial F_i} = \eta_i \quad i=1,2 \dots n$$

la derivata del lavoro di deformazione rispetto al modulo di una forza è uguale allo spostamento elastico globale, unico rispetto alla forza stessa.

Esprimendo gli invarianti in funz. delle generiche componenti di $\{\sigma\}$:

$$\psi = \frac{1}{2E} (\overset{\text{TENSIONI } \sigma_z}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}) - \frac{\nu}{E} (\overset{\text{PRODOTTI SCALARI}}{\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z}) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

avendo posto $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ← COMPORTAMENTO CROCC. CONTROLLATO DA ν .

G ma è una mola cost. ν dipende sempre da E e ν che sono le uniche costanti indipendenti!

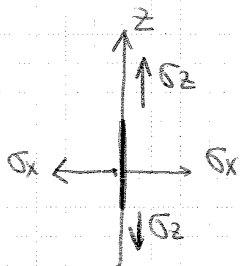
Le componenti di deformazioni si ricavano dalle derivate parziali di ψ .

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)) \\ \epsilon_y &= \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)) \\ \epsilon_z &= \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_z} = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)) \end{aligned}$$

Anche se ho solo σ_x si generano comunque $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z \rightarrow$ 3 stati di deformazione

← sono importantissime

NB: ciascuno dilatazione dipende in generale da tutte e 3 le tensioni normali. (A stati monoassiali di tensione non corrispondono stati monoassiali di deformazione).



$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

di tensione non corrispondono stati monoassiali di deformazione).

Gli effetti primari (σ_z) e trasversali (σ_x) hanno segni \neq .

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xz}} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{yz}} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned}$$

NB: ciascuno scorrimento dipende solo dall'analoga tensione tangenziale.

Lo stato di deformazione è sempre massale.

Si ricavano quindi 4 disequazioni che impongono delle limitazioni al valore delle costanti elastiche:

$$\left. \begin{array}{l} E > 0 \\ -1 < \nu < 1/2 \end{array} \right\} \text{limitazioni matematiche.}$$

Un coeff. di Poisson < 0 significa che se schiacciassi una trave anziché allargarsi trasversalmente, si restringerebbe \rightarrow non è reale anche se lo è matematicamente. Materiali granulari come la sabbia possono però avere $\nu < 0$ durante la prima storia di carico. Per esempio se carichi la sabbia all'inizio i moti consentono la compattazione dei granelli di sabbia. Quando i moti sono stati ottimizzati ν diventa > 0 .

significato fisico di E e ν

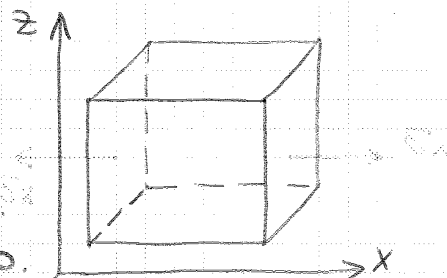
Parallelepipedo elementare soggetto alla sola componente normale σ_x .

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\epsilon}$$

$$E_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\nu E_x$$

$$E_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\nu E_x$$

lo stato di tensione σ_x e non τ_x ma se E non lo so.

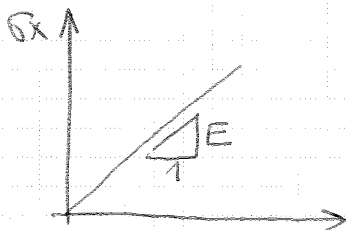


E rappresenta la rigidità del materiale nei confronti della deformazione (dilatazione)

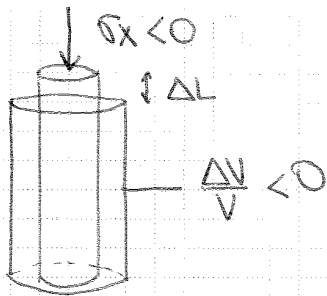
Le deformazioni trasversali sono proporzionali a E_x ma hanno segno opposto. Le ν non hanno rapporti con σ_x , se non c'è τ non c'è ν .

E : modulo di elasticità o di Young

Rappresenta la rigidità del materiale (coeff. angolare della retta che descrive il processo di carico).



$$E_x = \frac{\sigma_x}{\epsilon}$$



$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$$

Maggiore è ν tanto più le deformazioni trasversali compensano quelle principali ed ho un ΔV prossimo a zero
 → deformazioni ISOCORE (a volume costante)

TRAZIONE → AUMENTO DI VOLUME
 COMPRESSIONE → RIDUZIONE DI VOLUME

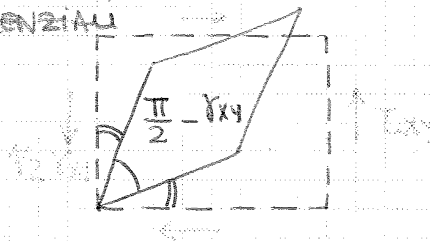
$\nu = 1/2 \rightarrow \Delta V/V = 0$ "DEFORMAZIONE ISOCORA" (corpi incastrati)

Se ciugo una colonna in compressione con delle fosse in acciaio, si generano delle σ_y radici che inibisce alla σ_x principale dando più sicurezza alla colonna.

significato fisico di G

Parallelepipedo elementare soggetto alla sola componente τ_{xy} .

$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$ ← TENSIONI TANGENZIALI
 ↑
 SCORRIMENTI ANGOLARI
 $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0$
 $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

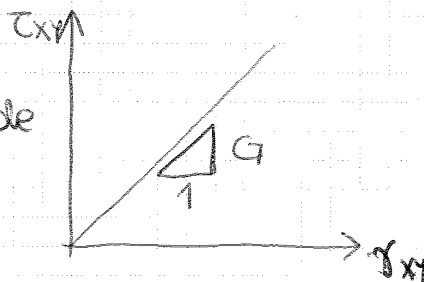


G : rapporto tra tensioni tangenziali e scorrimenti angolari.

G : modulo di elasticità τ_{xy}

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

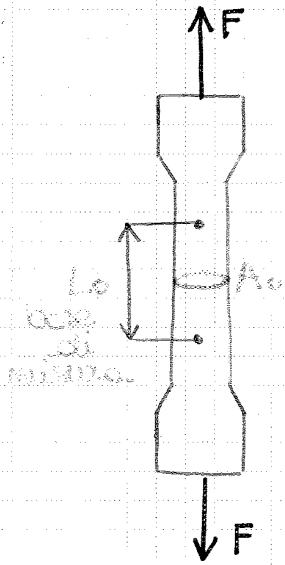
Tanto più il materiale si oppone alla distorsione da parallelepipedo a rombo, tanto più G sarà grande.



CRITERI DI RESISTENZA LEZ. 26

→ PROVA DI TRAZIONE UNIASSIALE:

Materiali "duttile" (acciai, ghisa)



si usano macchine che sviluppano tensioni di trazione provocando l'allungamento del provino per le macchine sono statiche

PROVINO: ↑ 20-40 cm → 5-8 cm ↗ 10

le provino ha forma a clessidra. la macchina si attacca alle 2 estremità (zone di grip).

Gli spazi più alti saranno nelle sezioni ma, quindi su A0.

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad \text{pressione (tensione)}$$

↑ sez. trasversale indeformata

Devo arrivare a disegnare un diagramma σ - ϵ .
Ma come calcolo la ϵ ?

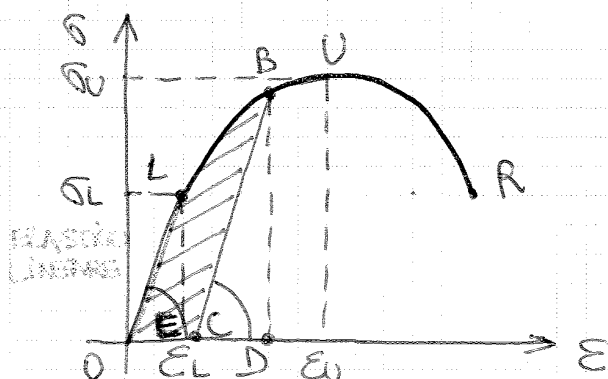
$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

L_0 lunghezza iniziale, base di misura delle deformazioni di interno delle zone controllate.

le lunghezze sono misurate con dei comparatori elettrici che si basano sulle leggi di Ohm. ($i = V/R$)

↑ $L \rightarrow \uparrow R$

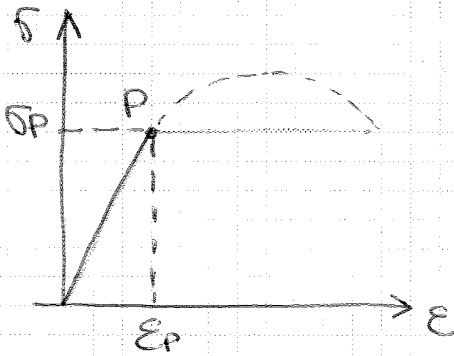
caricando lentamente il provino otengo σ - ϵ .



Nel primo tratto elastico lineare ricavo il modulo di Young. Ho una retta con pendenza costante.

Posso controllare la forza o la deformazione.

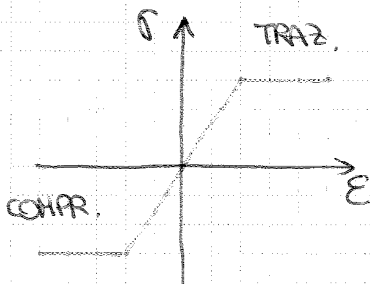
COMPORTAMENTO ELASTIC-PLASTICO PERFETTO



Secondo la normativa si può usare ma σ compreso tra σ_L e σ_U
 σ_p tensione di snervamento
 $\sigma_L < \sigma_p < \sigma_U$

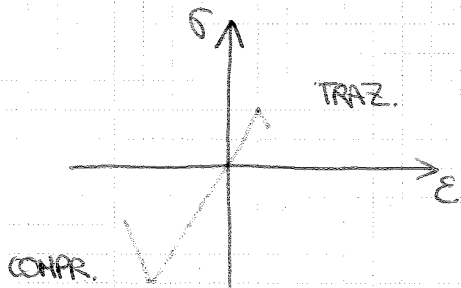
Approssimo il tratto plastico con una retta. Non $\uparrow \sigma$ ma $\uparrow \epsilon$.

→ MATERIALI DUTILI: fase plastica



$\sigma_U^+ \cong \sigma_U^-$
 \uparrow tensione ultima a trazione
 \uparrow compressione

→ MATERIALI FRAGILI: rottura improvvisa



$\sigma_U^+ \ll \sigma_U^-$

I materiali fragili hanno comportamenti diversi a trazione (a dx) e a compressione (a sx)

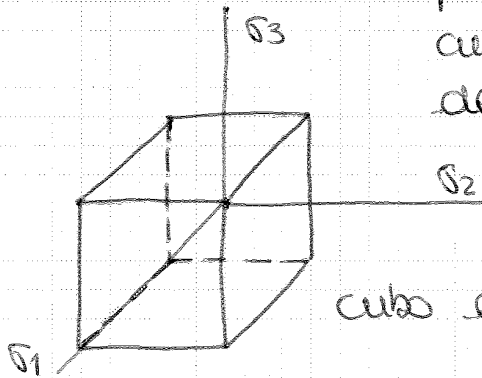
Nel ds della parte delle fibre tese si mette il ferro che assorbe le trazioni che il ds non riesce ad assorbire.

1° CRITERIO DELLE MAX TENSIONI (di RANKINE)

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq |\sigma_P|$$

Confronto le tensioni principali e la + grande deve essere $< \sigma_P$. Questo confronto ci fornisce 6 diseguaglianze

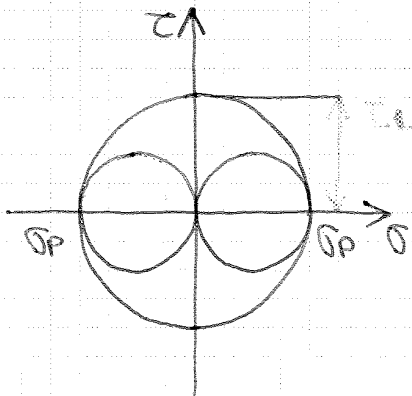
DOMINIO 3D:



cubo di lato $2\sigma_P$.

si è visto che qst criterio non funziona soprattutto sui materiali duttili hanno problemi sugli stati distorti.

DEFINIZIONE:



τ_1 tensione tangenziale max
 → ROTTURA!

le prove sperimentali evidenziano rotture se

$$\tau < \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$$

τ_1 porta a rottura il primo prima del valore σ_P che ci dice il teorema delle massime tensioni. Il max raggio del cerchio di Mohr è quello che porta a rottura per primo del valore σ_P .

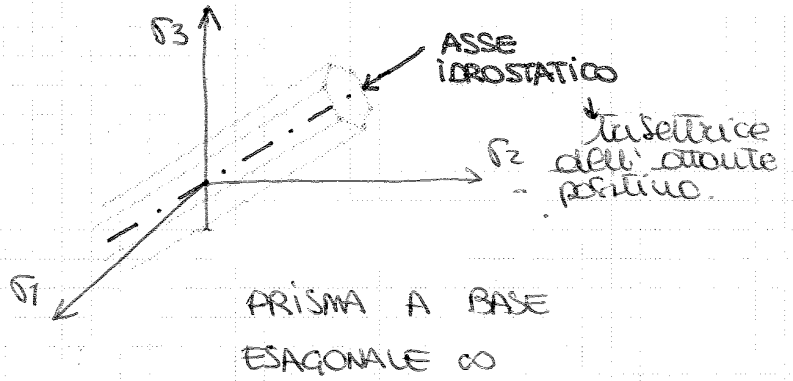
Rappresentazione nello spazio $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$

DOMINIO 3D

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_p$$

$$|\sigma_1 - \sigma_3| < \sigma_p$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| < \sigma_p$$



Esempio di Tresca →

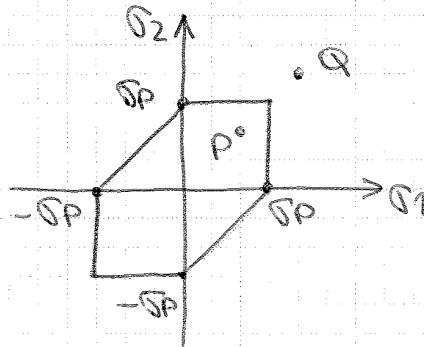
In uno stato biassiale il criterio di Tresca lo vedo sezionando con un piano il prisma → l'esempio non è più regolare.

CASO BIASSIALE: ($\sigma_3 = 0$)

$$\left. \begin{array}{l} |\sigma_1| < \sigma_p \\ |\sigma_2| < \sigma_p \\ |\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_p \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6 \text{ eq nel} \\ \text{piano } \sigma_1 - \sigma_2 \end{array}$$

$P(\sigma_1, \sigma_2)$: verificato

$Q(\sigma_1, \sigma_2)$: non verificato



Uno stato tensionale P è uno stato sicuro. Q è uno stato tensionale non ammissibile.

Nei quadranti dove le σ hanno lo stesso segno il dominio è più grande perché il materiale preferisce avere sforzi con lo stesso segno.

IL SOLIDO IN STATO TENSIONALE

$$N, M_x, M_y \rightarrow \sigma_z$$

$$T_x, T_y, M_z \rightarrow \tau_z = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$$

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} < \frac{\sigma_p}{\gamma}$$

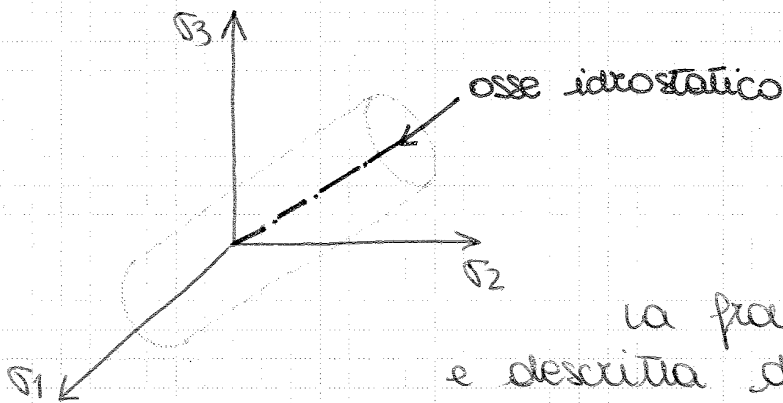
questo valore è da confrontare con l'energia elastica misurata in laboratorio.

$$\phi^d_{\text{MONOASSIALE}} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_P^2 \leftarrow \text{valore che ha causato la rottura}$$

$$\left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right] < \sigma_P^2$$

Tensione ideale

Rappresentazione nello spazio



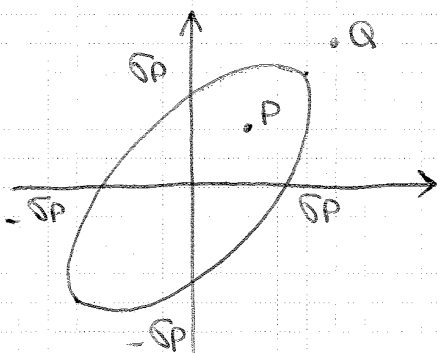
Cilindro a base circolare indefinito sull'asse idrostatico

la frontiera è continua e descritta da una sola eq.

se seziono il cilindro con un piano orizzontale otteniamo un'ellisse.

Stato tensionale piano ($\sigma_3 = 0$)

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) \leq \sigma_P^2$$



Ellisse con asse maggiore sui quadranti positivi.

$P(\sigma_1, \sigma_2)$: verificato

$Q(\sigma_1, \sigma_2)$: non verificato

L'escopo di Tresca è contenuto nell'ellisse di von Mises.

✓: la frontiera del dominio è descritta da una sola diseq. e non da 6 come invece capita per l'escopo di Tresca.

4. CRITERIO DI COULOMB-MOHR

questo criterio vale per i materiali fragili.

CRITERIO DI ROTTA PER MATERIALI FRAGILI (cls, rocce...)

2 parametri caratteristici: attrito interno e coesione

la resistenza aumenta con lo stato di compressione

la rottura avviene per raggiungimento di τ_{max}

PIANO DI MOHR:

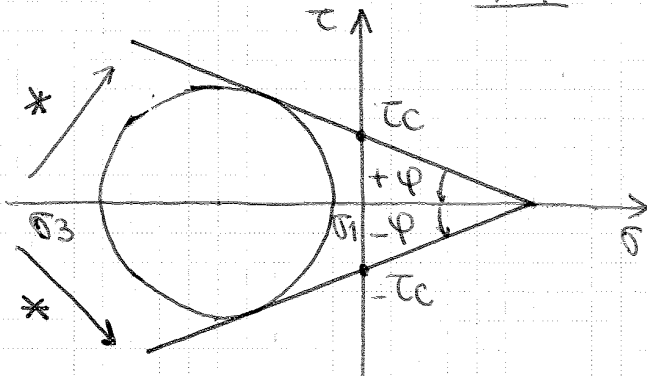
$$\tau_{max} = \tau_c + \sigma \tan \varphi$$

↑
coesione

↑
angolo di attrito interno (angolo a cui una pila su un mantovignone a essa sta in piedi da sola).



$\varphi < 30^\circ$ per sabbie.

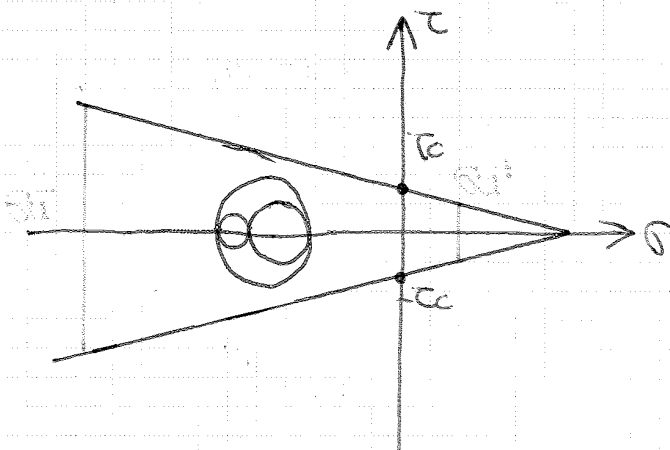


dominio costituito da 2 rette divergenti.
I cerchi di Mohr devono essere contenuti all'interno, se vanno fuori il materiale collassa

* piani di scorrimento

la τ_{max} non è costante nei materiali fragili → le rette di Tresca // (τ_p) diventano 2 rette divergenti.

DOMINIO AMMISSIBILE

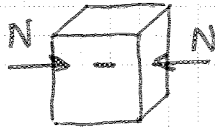
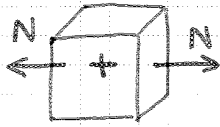


si possono altri limiti:
 σ_u^- e σ_u^+

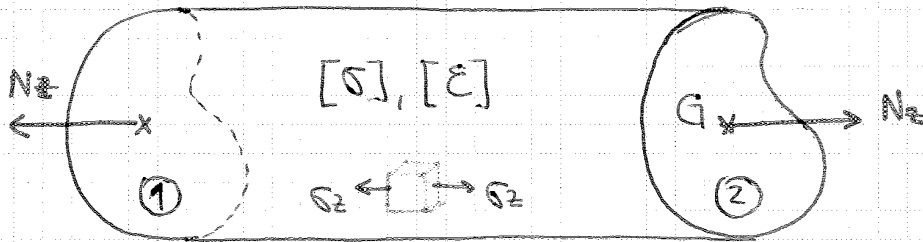
SFORZO NORMALE CENTRATO

TRAZIONE > 0 (fiumi, travi)

COMPRESSIONE < 0 (colonne, archi)



Stato tensionale:



Rispetto delle eq. cardinali della statica
 \Rightarrow sistema equilibrato

condizioni di equidivergenza al contorno sulle basi

$$\int_{A_1} p \, dA = \int_{A_1} t_z \, dA = \begin{cases} \int_{A_1} \tau_{zx} \, dA = 0 & \leftarrow \text{Taglio } x \text{ nullo} \\ \int_{A_1} \tau_{zy} \, dA = 0 & \leftarrow \text{Taglio } y \text{ nullo} \\ \int_{A_1} \sigma_z \, dA = N \end{cases}$$

↑
vettore tensione
sullo base

Metodo semi-inverso:

ipotezzando una soluz. tensionale sotto sforzo normale

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = C : \text{costante} \end{cases} \quad \forall p \in V$$

si verifica che la soluz. soddisfi tutte le eq. del problema elastico.

Inserisco qst quantità nell' eq. statica:

$$N = \int_{A_1} \sigma_z \, dA = C \cdot A \quad \rightarrow \quad C = \frac{N}{A}$$

↑ qst e' ho dedotto dalla
 una ipotesi di partenza.

STATO DEFORMATIVO:

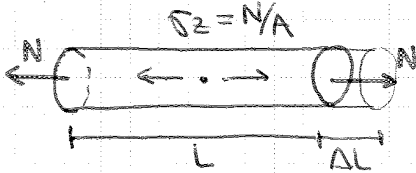
$$\begin{cases} \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{EA} \end{cases}$$

EA: RIGIDEZZA ESTENSIONALE della sezione trasversale.
 E: modulo di Young
 A: area della sezione trasversale

$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \epsilon_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

sono nulle perché \exists proporzionalità diretta tra γ e τ tramite G.



$$\Delta L = \frac{N \cdot l}{EA} \quad (\epsilon_z \cdot l = \Delta L)$$

$$\epsilon_z = N/EA$$

↑ EA → ↓ εz → ↑ capacità di opporsi alle deformazioni

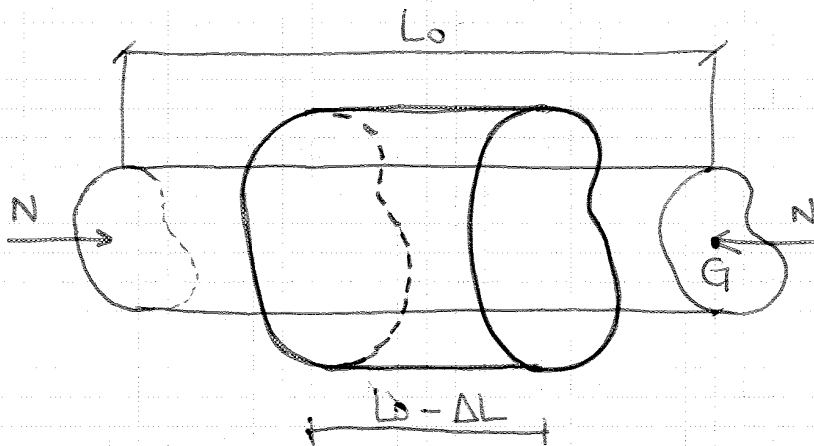
"EA" mi dice qui si oppone quello sez. alle deformazioni

$\frac{EA}{L}$: RIGIDEZZA ESTENSIONALE della fessura lunga L

Poiché $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ sono $\neq 0$ lo stato tensionale è triassiale (lo stato tensionale è invece monoassiale)

↑ coeff. di Poisson → ↓ ΔV

Le ν dipendono direttamente dalle τ che però sono tutte = 0 $\nu = \tau/G$, ho uno stato piano di deformazione e tutte le direz. nodali sono principali di deformazione.



un'asta più lunga a parità di deformazione subisce allungamenti maggiori.

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{EA}$$

$\frac{EA}{L}$: RIGIDEZZA ESTENSIONALE dell'ASTA

$$\epsilon_z = \frac{N}{EA}$$

EA: rigidità estensionale della sezione
 ↑ EA → ↓ εz

INSTABILITÀ: Le strutture snelle non rispettano la teoria di Saint Venant → SVERGOLAMENTO o instabilità dell'equilibrio in compressione.

Quel le strutture sono snelle dopo un certo limite si passa ad una condiz. di equilibrio instabile.

$$N_c = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} \quad : \text{carico critico di Eulero}$$

$\lambda = \frac{L_0}{\rho}$ ← lunghezza libera di inflessione ~ L ASTA
 ρ ← raggio di inerzia minimo

λ : SNEZZA DELL'ELEMENTO STRUTTURALE

FLESSIONE LEZ 29

→ FLESSIONE RETTA

→ FLESSIONE DEVIATA

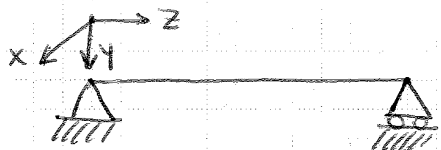
Flessione è lo stato tensionale associato al momento flettente. Si ha flessione su travi orizzontali.

la flessione si dice retta quando agisce solo un momento rispetto ad un asse.

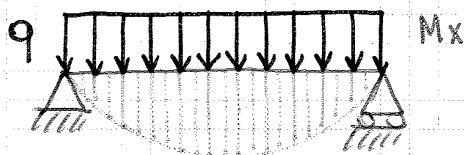
Se M_x ed M_y agiscono contemporaneamente si parla di flessione deviata.

↳ FLESSIONE RETTA

TRAVE APPOGGIATA



Il piano dei carichi è yz .
 quindi c'è solo M_x .



← Diagramma del momento

Uogliamo studiare cosa succede all'interno delle travi per effetto della sollecitazione momento flettente.