



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 593**

**DATA: 23/07/2013**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Foschini**

**MATERIA: Idraulica**

**Prof. Ridolfi**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



**CORSO DI**

**IDRAULICA**

**TEORIA**

**Prof. L. Ridolfi**

**A.A. 2012 - 2013**

che il moto che descriviamo sia ad una scala superiore o uguale al millimetro.

INNOVA GRANDEZZE DELLA MECCANICA DEI FLUIDI

- DENSITA' ,  $\rho$  ,  $[M \cdot L^{-3}]$

La densita' e' funzione di due variabili: la <sup>pressione</sup> tensione e la temperatura. Pu' la temperatura aumenta e pu' la densita' diminuisce, ad eccez. dell'acqua che ha un minimo di densita' intorno ai 4°C.

$\rho = \rho(\text{tensione}, \theta)$

$\rho = \rho(p, \theta)$  EQ. di STATO

FLUIDO CAROTATI

$0^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$  la densita' dell' H<sub>2</sub>O varia del 0,8%

$\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$

non e' ovvio che si pu' ritenere  $\rho$  indipendente dalla temp. poiche' esse varia di soli 0,8% nelle variazioni ammissibili sul terra.  $\rho = \rho(p, \theta)$  MECCANICA FLUIDI APPLICATA

- PESO SPECIFICO ,  $\gamma = \rho \cdot g$

dove  $g = 9.806 \text{ m/s}^2$  ,  $[N/m^3]$

FLUIDO CAROTATI

$\gamma_{H_2O} = 9806 \text{ N/m}^3 = 0(10^4)$

$\gamma_{ARIA} = 0(10^1)$

Anche il peso specifico e' funzione sia della tensione sia della temperatura.

$\gamma_{H_2} = 133.000 \text{ N/m}^3$

ELASTICITA'

- MODULO DI COMPRESSIBILITA' A COMPRESSIONE CUBICA ,  $\epsilon$  ,  $[N/m^2]$

Esprime la tendenza del fluido a deformarsi sotto una compressione isotropa (= uguale in tutte le direzioni)



$\Delta V = -\Delta p \cdot V \cdot \frac{1}{\epsilon}$

$\epsilon_{liquidi} = 0(10^9) \rightarrow$  molto grande

indica che se compresso  $\rightarrow \Delta V$  diminuisce

$\epsilon$  dipende dal fluido

Maggiore e'  $\epsilon$  e minore e' la variazione di volume, ossia pu' e' grande  $\epsilon$  e meno e' comprimibile il fluido.

- MASSA ,  $m = \rho \cdot V = \text{cost}$

Appena la massa non cambia a seguito di compressioni e dilatazioni bisogna porre  $dm = 0$  che risolvendo in funzione di  $p$  e  $V$  diventa:  $p \cdot dV + dp \cdot V = 0$  e

quindi volume e densita' devono soddisfare quella eq:

$\frac{dV}{V} = - \frac{dp}{\rho}$

$\frac{\Delta V}{V} = \frac{dV}{V} = - \frac{dp}{\rho}$

$\Rightarrow \frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{\epsilon}$

EQ STATO FLUIDI

il cilindro interno con una velocità  $w_i$ . Questo avviene grazie alla presenza di sforzi interni tangenziali, si definisce quindi la viscosità come la capacità di un fluido di trasmettere delle tensioni quando vi sono dei gradienti di velocità. Se si volesse mantenere in quiete il cilindro interno, occorrerebbe applicare una tensione che è funzione del fluido, ed è pari a  $\Omega = 2\pi r_{int} \cdot h$ , di  $\frac{1}{\Delta r}$  e del gradiente di velocità  $\Delta w = w_e r_e - w_i r_i$ .

Dunque

$$T = f(\text{fluido}, \Omega, \frac{1}{\Delta r}, \Delta w) = \mu \cdot \Omega \left( \frac{\Delta w}{\Delta r} \right)$$

ed esplicitando lo sforzo tangenziale:

$$\tau = \frac{T}{\Omega} = \mu \cdot \left( \frac{\Delta w}{\Delta r} \right)$$

↑  
Viscosità o attrito interno

→ gli sforzi tangenziali nascono xché c'è un campo di velocità che varia in direzione trasversale → ci sono gradienti di velocità lungo r

questa relazione può essere trasportata a strati di spessore infinitesimo, assumendo la forma più generale:

$$\tau = \mu \cdot \frac{dw}{dr}$$

$\mu$  celerità di deformaz.

↓ dove  $n$  viene normale al moto

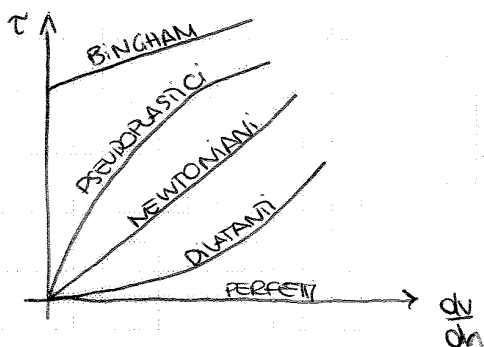
detta LEGGE di NEWTON per i fluidi viscosi, detti anche fluidi Newtoniani.

Per la maggior parte dei fluidi che interessano le pratiche applicazioni, la  $\mu$  presenta un valore praticamente costante per date condizioni di temperatura. I fluidi per i quali si verifica questa proprietà sono detti newtoniani e sono tutti i gas e quasi tutti i liquidi omogenei.

secondo il numero di Reynolds

classificati in funzione del loro comportamento a seconda del gradiente di velocità lungo r

Vi sono vari tipi di fluidi che possiamo caratterizzare in funzione degli sforzi tangenziali e della celerità di deformazione (o gradiente di velocità).



I fluidi perfetti (def. di Eulero) sono fluidi che non danno mai luogo a nessuna  $\tau$ , qualsiasi sia il gradiente di velocità. In altri termini sono fluidi con viscosità zero.

Si nota che al cessare del moto, annullandosi  $\dot{\gamma}$ , gli sforzi all'interno del fluido non cessano ma si estinguono con legge esponenziale.

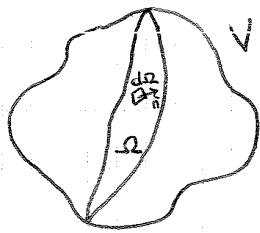
N.B. Noi studieremo i fluidi perfetti e newtoniani.

## SFORZI NEI SISTEMI CONTINUI

Nello studio dei sistemi continui conviene distinguere due tipi di forze: le f. di massa e le f. di superficie.

Le f. di massa comprendono tutte le f. esterne che si esercitano a distanza su tutte le particelle del sistema, proporzionalmente alla loro massa. Fra di esse la f. di gravità. Le f. di superficie invece comprendono tutte le forze che vengono esercitate su una parte qualsiasi del sistema continuo attraverso la superficie di contorno.

Consideriamo un generico volume  $V$  di fluido in condizioni



di equilibrio sotto l'azione delle f. di massa e di superficie. Immaginiamo di dividere in due parti il volume mediante una qualsiasi superficie  $S$ , affinché ciascuna delle due porzioni sia ancora in

equilibrio è necessario esercitare sulla superficie  $S$  un complesso di forze pari all'azione che le particelle di una delle 2 porzioni esercita sull'altra. Sia  $d\Omega$  un elemento infinitesimo della superficie. Il sistema di forze agenti su  $d\Omega$  è riconducibile ad un'unica forza  $d\vec{\pi}$ , quando  $d\Omega \rightarrow 0$ :

$$\lim_{d\Omega \rightarrow 0} \frac{d\vec{\pi}}{d\Omega} = \vec{\phi}_n$$

Il vettore  $\vec{\phi}_n$  tende ad un vettore  $\vec{\phi}$  detto SFORZO UNITARIO sull'elemento infinitesimo, che dipende sia dalla posizione di  $d\Omega$  sia dalla quietura. Dunque la forza elementare agente su  $d\Omega$  può scriversi come:

$d\vec{\pi} = \vec{\phi}_n \cdot d\Omega$  a cui viene assegnato il nome spinta su  $d\Omega$ . Il sistema di tutte le spinte su  $S$  sarà dunque:

$$\vec{\pi} = \int_S \vec{\phi}_n \cdot d\Omega$$

## tensori degli sforzi

Tali info possono essere raccolte in una matrice:

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} & \phi_{xz} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zx} & \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{bmatrix}$$

si trova che  
 dove  $\phi_{xy} = \phi_{yx}$   
 $\phi_{xz} = \phi_{zx}$   
 $\phi_{yz} = \phi_{zy}$

se impongo l'equilibrio alla rotazione  
 definisco lo stato tensionale in un punto

cioè la matrice è simmetrica.

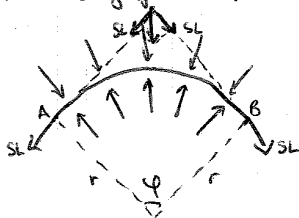
Dunque, nelle f. scalari, bisogna dare 6 info scalari per ogni punto e per ogni istante che sono le tre componenti normali ( $\phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{zz}$ ) e le tre tangenziali ( $\phi_{xy}, \phi_{yz}, \phi_{xz}$ )

Un più accurato esame della relazione che esprime il ~~teorema di Cauchy~~ conduce alle seguenti proprietà:

- ①  $\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = \text{cost}$  → è un invariante  
 cioè non dipende dalla scelta del SR  $\{x, y, z\}$
- ② Tra tutti i SR ce n'è uno in cui la matrice diventa diagonale pur mantenendo le stesse informazioni. Tale sistema è detto "delle DIREZIONI PRINCIPALI".
- ③ Ci sono casi in cui la matrice è sempre diagonale per qualsiasi orientamento del sistema. In questo caso si dice che lo stato delle tensioni è isotropo (tutti gli autovalori sono uguali). Il modulo dello sforzo è chiamato pressione ed è agente sulla normale alla superficie:  $\vec{\phi}_n = p \cdot \vec{n}$   
 (situazione tipica dei fluidi in quiete)

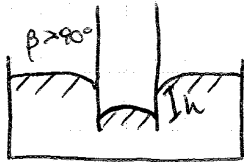
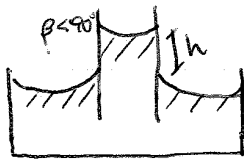
## TENSIONE SUPERFICIALE

Quando ho un'interfaccia tra due fluidi non immiscibili, le molecole di contatto sono soggette ad una tensione superficiale  $S = S(\text{tipo di fluido}, \theta)$ , che diminuisce all'aumentare della temperatura. Immaginiamo di avere una superficie cilindrica di raggio  $r$  e lunghezza  $L$  sottoposta a  $P_{ext}$  e  $P_{int}$ .



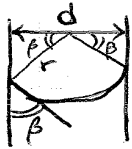
Affinchè il tutto sia in equilibrio la  $P_{int}$  deve essere maggiore della  $P_{ext}$ , poiché deve contrastare anche la

di capillarità: Immergendo un piccolo tubo aperto



superiormente in un liquido, si osserva che la superficie libera entro il tubo si incurva formando quello che si definisce MENISCO, e nel contempo il liquido si innalza o si abbassa rispetto a quello circostante. Per l'eq. del sistema il liquido si alza o si abbassa a seconda della pressione nel liquido in corrispondenza

del menisco sia inferiore o superiore alla pressione nel gas.



$$d = 2r \cdot \cos \beta \rightarrow r = \frac{d}{2 \cdot \cos \beta}$$

quindi

$$\Delta p = s \left( \frac{2 \cos \beta}{d} + \frac{2 \cos \beta}{d} \right) = \frac{4 \cdot s \cdot \cos \beta}{d}$$

poiché  $\Delta p = \gamma \cdot h \rightarrow h = \frac{4s \cos \beta}{\gamma \cdot d}$

dunque più è piccolo il diametro del tubo, più è alto il salto di pressione e più il liquido all'interno della colonna si alza/abbassa.

Nel caso dell'acqua  $h \cdot d = 30$  mentre per il mercurio  $hd = -10$ . Quindi nel caso dell'acqua il livello si alza, mentre nel caso del mercurio si abbassa (con minor velocità).

## → STATICA DEI FLUIDI

Nei fluidi in quiete le singole particelle non subiscono nel tempo alcun spostamento relativo; ciò sia che si tratti di una condizione di equilibrio assoluto rispetto ad una terna fissa, sia nel caso che il fluido rimanga immobile rispetto ad una terna di assi mobili (equilibrio relativo).

Dunque esiste sempre almeno un SR in cui non c'è campo di moto e quindi  $\vec{U} = 0$  in ogni punto dello spazio ed in ogni istante. Se il campo di moto è



lungo l'asse  $x$  agiscono quindi le seguenti forze di superficie:

$$p \cdot dy \cdot dz \vec{i} - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz \vec{i} = - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \vec{i}$$

↑ conta solo quanto varia  $p$  lungo  $x$  non quanto vale in moduli

analogamente lungo l'asse  $y$  e  $z$  si trovano le seguenti forze di superficie:

$$- \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \vec{j}$$

$$- \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \vec{k}$$

Ora, poiché siamo in statica, applico il principio di conservazione della quantità di moto:  $\vec{F} = m \vec{a} = 0$  dove  $\vec{F}$  = risultante forze e quindi ottengo:

$$\vec{F} \cdot p \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz \vec{i} - \frac{\partial p}{\partial y} dx \cdot dy \cdot dz \vec{j} - \frac{\partial p}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz \vec{k} = 0$$

da cui

$$\boxed{\vec{F} \cdot p = \text{grad } p}$$

EQ. DIFFERENZIALE INDEFINITA

↳ cioè deve valere per qualsiasi elem. infinitesimo all'interno del fl

Tale eq. sta ad indicare che  $\exists$  dei grad di pressione perché esiste la forza peso; se non ci fosse la  $p$  non cambierebbe mai. Inoltre,  $\vec{F}$  è una forza che ammette potenziale  $U$ , dunque può essere scritta come  $\vec{F} = \text{grad } U$  quindi l'eq. vista sopra diventa:

$$p \cdot \text{grad } U = \text{grad } p$$

da cui si deducono due proprietà generali sull'andamento di  $p$  e  $P$ :

• le superfici equipotenziali ( $U = \text{cost}$ ,  $\text{grad } U = 0$ ) sono anche sp. equi isobare e viceversa; quindi le sp. isobare sono orizzontali

• Se ipotizziamo il fluido incompressibile, cioè  $p = \text{cost}$  possiamo scrivere  $\vec{F} = \text{grad } \frac{P}{\rho}$  cioè se il fluido

Si ottiene così l'eq. integrale della ~~EQ. INTEGRALE~~  
 GLOBALE DELL'EQUILIBRIO STATICO :

$$\vec{p} + \vec{F}_c = 0$$

ANALISI DEI TERMI CON I MONOMI

Per <sup>poter</sup> risolvere queste eq. e trovare la pressione devo fare delle ipotesi plausibili. Prima ipotesi si prende in considerazione un fluido in quiete soggetto solo all'azione del campo gravitazionale. Dunque la forza di massa può essere espressa come:

$$\vec{F} = \text{grad}(-gz)$$

dove  $z$  è assunto  $\hat{z}$  rivolto verso l'alto.

Seconda ipotesi si ammette che il fluido sia incompressibile e isoterma, e quindi che la sua densità sia costante:

$$\rho = \text{cost}$$

Questa ipotesi è pienamente accettabile in pratica per tutti i liquidi, la cui comprimibilità è assai piccola, ma può essere ritenuta lecita anche per i gas quando essi occupano serbatoi di altezza limitata.

Ora applicando la 1° ipotesi all'eq. differenziale indefinita trovo:

$$\rightarrow \rho \cdot \text{grad}(-gz) = \text{grad}p$$

ed applicando la seconda ipotesi diventa

$$\text{grad}(-\gamma \cdot z) = \text{grad}p \quad \text{dove } \gamma = \rho g$$

da cui

$$\text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} = h}$$

↑  
 quota  
 geometrica

↑  
 altezza  
 di pressione

(o altezza  
 piezometrica)

↑ detto CARICO PIEZOMETRICO

costante in  $\Pi$  la metà fluida

↑  
 geodetica  
 (rispetto al  
 piano di  
 riferimento  
 $z=0$ )

Nei problemi pratici si fa riferimento alle pressioni relative anziché quelle assolute, intendendosi per  $P_r$  la differenza tra la  $P_{ass}$  e quella atmosferica:

$$P_r = P_{ass} - P_{atm} = \underbrace{\gamma(z_{atm} - z)}_{= h = \text{attondamento rispetto al P.c.i.r.}}$$

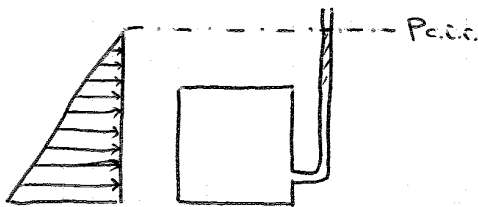
→  $P_r = \gamma \cdot h$       **LEGGE DI STEVINO**

NB: la  $P_{ass}$  può avere solo valori positivi, mentre la  $P_r$  può avere valori negativi fino ad un minimo pari a  $P_r = -P_a$

### MISURA DELLA PRESSIONE

Come si è visto, è suff. conoscere la  $p$  in un punto per individuare con facilità la distribuzione delle pressioni nell'intera massa liquida. Vediamo quali apparecchi permettono di misurare la  $p$  in un punto, o meglio di ricavare il P.c.i.r.:

• Uno è il PIEZOMETRO, costituito da un tubo verticale, aperto in sommità, e collegato all'altra estremità con il recipiente contenente il liquido:

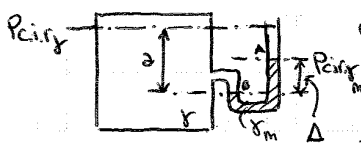


Il vantaggio del piezometro è che funziona sempre, però ha dei problemi. Il primo problema si ha se il P.c.i.r. è molto alto, poiché si necessita di un tubo molto alto.

Il secondo problema si ha se ad es. il liquido è infiammabile poiché è necessario metterlo a contatto con l'atmosfera.

• Un altro strumento è il MANOMETRO (A MERCURIO) SEMPLICE.

I manometri semplici sono costituiti da un tubo ad "U" di cui un'estremità è collegata ad un recipiente chiuso e l'altra è in contatto con l'atmosfera.

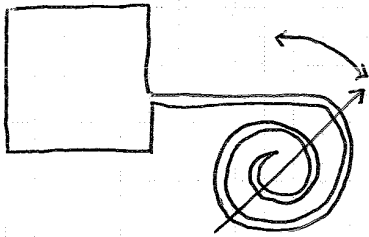


Nel tubo si inserisce del fluido con  $\gamma_m$  superiore a quello  $\gamma$  del fluido recipiente (spesso si usa del mercurio, da qui il nome dello strumento).

Per effetto dello stato di pressione il fluido si porta a

Esistono poi altri manometri, utilizzati quando le pressioni sono molto grandi, che sono detti MANOMETRI METALLICI.

Un esempio è costituito da un tubo a sezione ovoidale

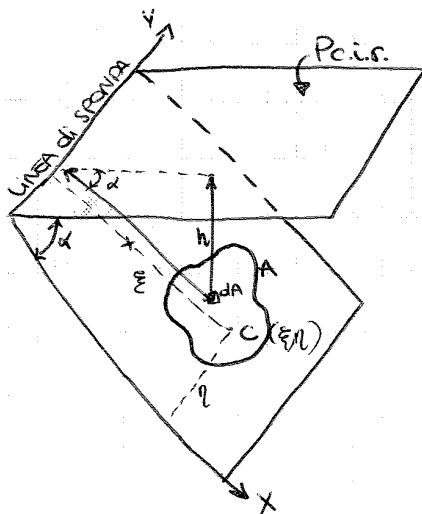


e curvato a spirale, chiuso da un'estremità e collegato all'altra all'ambiente di cui si vuole misurare la pressione. Per effetto di essa la spirale tende a scontrarsi / distendersi.

Su di essa è applicata una lancetta che ne indica il movimento. Attenzione: tale manometro misura, in base al movimento della lancetta, la pressione alla quota del baricentro dello strumento. che porta una scala graduata

### SPINTA SU UNA SUPERFICIE PIANA

Consideriamo una generica sup. piana del fluido.



L'intersezione tra la superficie ed il  $P_{c.i.r.}$  si chiama LINEA o ROTA di SPONDA.

Noi vogliamo ricavare la spinta  $\vec{S}$  che il fluido esercita su tale superficie. Di  $\vec{S}$  dobbiamo ricavarne:

la DIREZIONE: poiché  $\vec{S}$  è la risultante di tutte le azioni

sul fluido e queste sono tutte normali al fluido, la direzione di  $\vec{S}$  è normale alla superficie;

il VERSO: che è entrante, ma dipende da dove osservo la superficie;

↳ se  $p_r > 0$

il MODULO: e per uscente se  $p_r < 0$

Consideriamo un'area infinitesima  $dA$ , la spinta infinitesima (ricordo  $d\vec{\pi} = \vec{\rho} \cdot dA$ ) è  $d\vec{s} = p \cdot \vec{n} \cdot dA = \rho \cdot h \cdot \vec{n} \cdot dA$  posso scrivere  $h = x \cdot \sin \alpha$  dunque  $d\vec{s} = \rho \cdot x \cdot \sin \alpha \cdot dA \cdot \vec{n}$

Per ricavare la spinta totale eseguo l'integrale su tutta l'area della superficie: →

dunque

$$r \cdot \sin \alpha \cdot I_y = S \cdot \xi \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{r \cdot \sin \alpha \cdot I_y}{r \cdot \sin \alpha \cdot M} = \frac{I_y}{M}$$

Cerco  $\eta$  analogamente a quanto fatto per  $\xi$  e trovo:

$$r \cdot \sin \alpha \int_A xy \cdot dA = S \cdot \eta \quad \rightarrow \quad \eta = \frac{I_{xy}}{M}$$

$I_{xy} =$  momento  
centrifugo

Dall'eq. delle coordinate di  $\xi$  ed  $\eta$  si mostra che:

- la posizione del centro di spinta è indipendente dall'inclinazione  $\alpha$ , essa rimane inalterata al ruotare del piano della sp. intorno alla retta di sponda;  $x_c = I_{xy}$
- la  $\eta$  si annulla se l'asse delle  $x$  è di simmetria della superficie  $A$ ; il centro di spinta si trova cioè sull'eventuale asse di simmetria di  $A$  e questo coincide con una linea di max pendenza;  $\triangle C \text{ e } G \text{ sono allineati!}$
- se la sp. è // al  $P_{air}$ , la linea di sponda è all'0 ed il centro di spinta coincide con il baricentro, infatti:

$$\xi = \frac{I_y}{M} \quad \text{dove} \quad I_y = \underbrace{I_{oy}}_{\substack{\uparrow \\ \text{retta } // y \text{ e passante per } G}} + x_G^2 \cdot A$$

$\uparrow$  distanza tra le 2 rette  $x = 0$

dunque

$$\xi = \frac{I_{oy}}{M} + \frac{x_G^2 \cdot A}{x_G \cdot A} = x_G + \frac{I_{oy}}{M}$$

$C \equiv G \Leftrightarrow$   $\frac{I_{oy}}{M} = 0$  ed  
 $\Rightarrow$  "le P<sub>air</sub> sono //"

a mano a mano che le due sp. diventano // il centro  $C \rightarrow G$  poiché  $M \rightarrow \infty$ ,  $\frac{I_{oy}}{M} \rightarrow 0$  e  $\xi \rightarrow x_G$

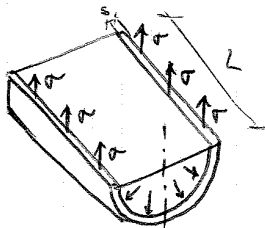
- se ho una sp. libera e la sp. su cui voglio calcolare la spinta ha un vertice sulla sp. libera sono //
- $\rightarrow$  non devo calcolare  $\xi$  ed  $\eta$  perché  $C \equiv G$

dove  $\vec{P}$  è il peso del fluido ipoteticamente contenuto all'interno della superficie di contorno. In altre parole il principio di Archimede afferma che un corpo immerso in un liquido riceve una spinta verticale verso l'alto, di modulo pari al peso di volume di liquido uguale a quello del corpo immerso; ed essa passa per il baricentro del volume del fluido stesso.

### MARIOTE

Nel caso di un condotto di diametro piccolo ed in profondità rispetto al P.c.r., in modo che  $d \ll a$ , si può ritenere che nell'ambito di ogni sezione trasversale del tubo la pressione sia costante. (\*)

Se consideriamo un tubo cilindrico di lunghezza  $L$  e diametro  $d$ , nelle condizioni sopra descritte, e immaginiamo di sezionarlo con un qualsiasi piano diametrico.



Applicando  $\vec{P} + \vec{F}_c = 0$

$$p \cdot d \cdot L = 2\sigma \cdot s \cdot L \rightarrow \sigma = \frac{p \cdot d}{2s}$$

↑ i due semicilindri si trasmettono

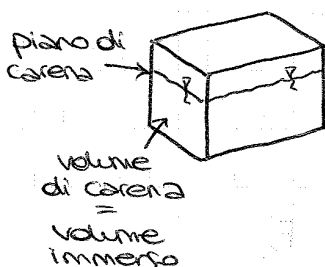
attraverso le superfici longitudinali che

forze complessivamente uguali alla spinta che il liquido con pressione  $p$  esercita sul semicilindro.

Per l'approssimazione (\*) fatta la spinta che agisce sulla superficie curva del semitubo è la stessa che sulla sup. del suo piano diametrico.  $s$  deve essere almeno  $1/50$  del diametro in modo da poter ritenere la sollecitazione di trazione ripartita uniformemente sullo spessore.

### ESERCIZIO DI APLICAZIONE

Consideriamo un corpo parzialmente immerso.



I momenti del corpo dipendono dalla posizione del centro di spinta  $C$  rispetto al baricentro geometrico  $G$ .

Questo momento deve essere uguale <sup>al momento</sup> della ~~forza~~  $F$  archimede complessiva che si è spostata da  $C$  a  $C'$ :

$$b = \overline{CM} \cdot \sin \theta \, d\theta \approx \overline{CM} \cdot d\theta$$

↑  
distanza  
C-C'

$$\rightarrow b \cdot v_c \cdot \gamma = M$$

vel.  
corona

$$b \cdot v_c \cdot \gamma = \gamma \cdot d\theta \cdot I_0$$

$$\overline{CM} \cdot d\theta \cdot v_c \cdot \gamma = \gamma \cdot d\theta \cdot I_0$$

$$\rightarrow \overline{CM} = \frac{I_0}{v_c}$$

Per aumentare  $\overline{CM}$  o faccio in modo che  $v_c$  sia più piccolo o che  $I_0$  sia grande. Bisogna comunque stare attenti perché più  $\overline{CM}$  è grande e più la velocità di ritorno nella posizione di equilibrio è grande.

## → CINEMATICA DEI FLUIDI

Le particelle del fluido si muovono su determinate traiettorie, che possono essere descritte da:

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

La particella si muove perché c'è una variazione di velocità, ossia c'è un CAMPO DI MOTO:

$$\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

dove

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ z = z(x, y, z, t) \end{cases}$$

Conoscere il campo di moto significa conoscere  $u, v, w$ .

Si cerca, allora, di riscrivere l'eq. sopra in altro modo:

$$\frac{\vec{v}_B(t+\Delta t) - \vec{v}_B(t) + \vec{v}_B(t) - \vec{v}_A(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\vec{v}_B(t+\Delta t) - \vec{v}_B(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_B(t) - \vec{v}_A(t)}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

↑ moltiplico e divido per Δs

ora faccio  $\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}}$

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} \left[ \frac{\vec{v}_B(t+\Delta t) - \vec{v}_B(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_B(t) - \vec{v}_A(t)}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right]$$

$\underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{\text{VARIAZIONE LOCALE DELLA VELOCITÀ}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial s}}_{\text{VARIAZ. DI } \vec{u} \text{ NELLO SPAZIO AL TEMPO } t \text{ FISSATO}} \cdot \underbrace{\frac{\Delta s}{\Delta t}}_{= |\vec{u}| = \text{MODULO DELLA VELOCITÀ}}$

quindi ho ottenuto:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \cdot |\vec{u}| = \frac{D\vec{u}}{Dt}$$

↑ ACCEL. LOCALE      ↑ VARIAZIONE DI VELOCITÀ NELLO SPAZIO      ↑ OPERATORE MATEMATICO DETTO DERIVATA SOSTANZIALE / DERIVATA EULERIANA  
 ↳ VALE × QLS VARIAZIONE (di p, m, ...)

Scritto nel SR x, y, z tale eq. diventa:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

le eq. delle traiettorie sono:

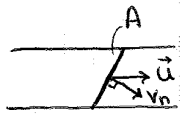
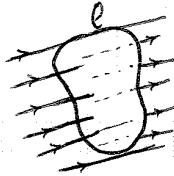
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t) \end{cases}$$



NOTO PIANO: se il vettore velocità è ovunque parallelo ad un piano e quindi per la descrizione del moto non è necessaria la 3° coordinata  $\frac{\partial}{\partial z} = w = 0$

### TUBO DI FLUSSO

Un tubo di flusso è l'insieme di tutte le linee di flusso che poggiano su una generica curva chiusa  $C$ .  
 L'interno della curva ha area  $A$ , ne considero un elementino  $dA$  e definisco la componente di velocità normale a  $dA$ :  $v_n$   
 $v_n$  è la componente che fa transitare il fluido attraverso la superficie  $dA$  (l'altra componente è tangente  $\rightarrow$  non contribuisce).



Chiamo PORTATA INFINITESIMALE il volume di fluido che transita attraverso  $dA$ :

$$dQ = v_n \cdot dA = \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dA$$

Integro su  $A$  per calcolare l'intera portata:

$$Q = \int_A dQ = \int_A \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dA$$

Nel caso in cui  $A$  sia  $\perp$  al flusso:

$$Q = \int_A u \cdot dA$$

e si dice che  $A$  è trasversale al moto.

Si definisce la VELOCITÀ MEDIA NELLA SEZIONE come:

$$V = \frac{Q}{A}$$

tale relazione ci permette di trovare subito  $Q$  anche se non si conosce  $\vec{u}$  in dettaglio.

### EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Il principio di conservazione della massa, valido per qualunque massa fluida in movimento, comporta un legame tra i caratteri cinematici del processo di moto e la densità del fluido; a questo legame viene universalmente dato il nome di EQUAZIONE DI CONTINUITÀ.

Nel caso di fluido incompressibile, cioè  $\rho = \text{cost}$ , si ottiene:

$$\underline{\text{div } \vec{u} = 0}$$

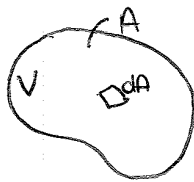
e si dice che il campo di moto è solenoidale.

Nel caso di fluidi stratificati, ossia nel caso in cui  $\rho \neq \rho(t)$  ma  $\rho = \rho(x, y, z)$  si scrive:

$$\underline{\text{div } \rho \cdot \vec{u} = 0}$$

### EQUAZIONE GLOBALE

Isoliamo nel campo di moto un volume finito  $V$  di fluido racchiuso dalla sp. chiusa di contorno  $A$ . ~~Nell'intervallo~~ <sup>Nell'intervallo</sup> di tempo  $dt$  una superficie infinitesima  $dA$  è attraversata dalla massa:



$$\rho \cdot dQ = \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dA \cdot dt$$

Attraverso l'intera superficie passa perciò:

$$dt \int_A \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dA \quad (1)$$

Questa differenza tra massa entrante ed uscente deve essere compensata dalla variazione che la massa ha subito nel tempo  $dt$  per effetto dei cambiamenti di densità:

$$\int_V \rho \cdot dV \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_V \rho \cdot dV \right] dt \quad (2)$$

Perciò uguagliando la (1) e la (2):

$$dt \int_A \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dA = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_V \rho \cdot dV \right] dt$$

↪ si può scambiare ordine di derivata e integrale quando i denomi sono indipendenti

e quindi:

$$\boxed{\int_A \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dA = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV}$$

EQ. GLOBALE di CONTINUITA'

→

Se il fluido è incompressibile ( $\rho = \text{cost}$ ), si ottiene:

$$\underline{\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0}$$

Se il moto è permanente (cioè  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) si ottiene:

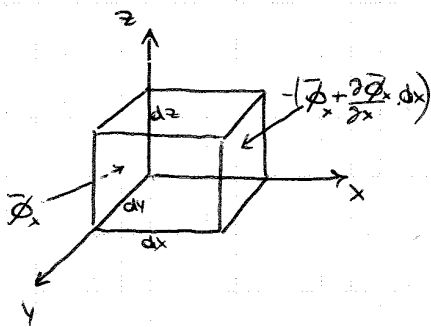
$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \rightarrow \underline{Q = \text{cost}}$$

che indica la costanza della portata lungo tutta la corrente, dove che nel tempo.

## DINAMICA DEI FLUIDI

### Equazione dinamica del movimento

Consideriamo un parallelepipedo elementare di lati  $dx, dy, dz$  paralleli ai tre assi coordinati. Per la



massa  $dm = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$  contenuta nel volume deve valere la prima eq. cardinale della dinamica:

$$d\vec{R} = dm \cdot \vec{A}$$

$$\text{dove } \vec{A} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

Cerchiamo di riscrivere la 1<sup>a</sup> eq. cardinale, cercando la risultante delle forze. Quest'ultima è costituita da:

- la forza di massa  $\vec{F} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ . Questa forza dipende dal campo cui si trova sottoposto il fluido; se il moto del fluido avviene nel campo gravitazionale, si ha  $\vec{F} = \vec{g}$ , essendo  $\vec{g}$  l'accelerazione di gravità;

- la risultante delle forze di superficie:

Il contributo della forza di sup. lungo l'asse  $x$  è:

$$\vec{p}_x \cdot dy \cdot dz - \left( \vec{p}_x + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot dz = - \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

analogamente lungo l'asse  $y$  e  $z$  trovo rispettivamente

$$- \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dx \cdot dz$$

$$- \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \cdot dz \cdot dx \cdot dy$$

Esistono quindi tante soluzioni quanti sono i tipi di fluido che analizzo.

STUDIAMO il caso di un FLUIDO PERFETTO, cioè di un fluido in cui gli sforzi tangenziali sono sempre nulli, qualsiasi sia la velocità di deformazione, mentre gli sforzi normali sono tutti uguali tra loro e prendono il nome di pressione ( $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \Rightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$  per le proprietà dell'algebra lineare che dicono che se  $\sigma_{ij} \neq 0 \forall i \neq j \rightarrow$  gli autovalori devono essere uguali tra loro). Allora l'eq. indefinita della dinamica per fluidi perfetti diventa:

$$\rho (F_x - \frac{DU}{Dt}) = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho (F_y - \frac{DV}{Dt}) = \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho (F_z - \frac{DW}{Dt}) = \frac{\partial p}{\partial z}$$

che in forma vettoriale può essere scritta come:

$$\rho (\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p$$

nota sotto il nome di EQUAZIONE DI EULERO

Osservazioni su l'eq. di EULERO:

- 1] Tale eq. può essere applicata in casi di fluidi Newtoniani: in cui la viscosità non gioca un ruolo importante in quel tipo di moto
- 2] È un'eq. NON LINEARE, infatti un operatore è lineare se  $\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v)$  e  $\mathcal{L}(\lambda u) = \lambda \mathcal{L}(u)$ , mentre in questo caso in  $\vec{A}$  vi è un operatore non lineare:

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{|\vec{u}| \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial s}}_{\text{termine non lineare}}$$

$$(u+v) \cdot \frac{\partial (u+v)}{\partial s} = u \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + \dots + \text{ci sono termini misti}$$

Se fosse lineare si potrebbe applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, che semplifica il problema.

dunque il relativo integrale di volume è:

$$-\int_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} \cdot dV - \int_V \left[ \frac{\partial(\rho v \vec{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \vec{u})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \vec{u})}{\partial z} \right] \cdot dV =$$

↑ ultimo teo. Green, scegliere la normale  $\vec{n}$  entrante nel vol.

$$= -\int_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} \cdot dV + \int_A \rho \vec{u} \cdot (\underbrace{u \cos \hat{n}_x + v \cos \hat{n}_y + w \cos \hat{n}_z}_{= U_n = \text{componente normale alla superficie del vettore velocità}}) \cdot dA =$$

$$= -\int_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} \cdot dV + \int_A \rho \cdot \vec{u} \cdot u_n \cdot dA$$

dunque il primo membro dell'eq. diventa:

$$\int_V \rho \vec{F} \cdot dV - \int_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} \cdot dV + \int_A \rho \vec{u} \cdot u_n \cdot dA$$

Considero ora il secondo membro:

$$\int_V \left( \frac{\partial \bar{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\phi}_z}{\partial z} \right) \cdot dV \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{teorema} \\ \text{Green}}}{=} - \int_A (\underbrace{\bar{\phi}_x \cos \hat{n}_x + \bar{\phi}_y \cos \hat{n}_y + \bar{\phi}_z \cos \hat{n}_z}_{= \bar{\phi}_n \text{ sforzo che agisce su } dA \text{ e che ha come direzione la normale } \vec{n}}) \cdot dA =$$

$$= - \int_A \bar{\phi}_n \cdot dA$$

dunque l'eq. iniziale diventa:

$$\int_V \rho \vec{F} \cdot dV - \int_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} \cdot dV + \int_A \rho \vec{u} \cdot u_n \cdot dA + \int_A \bar{\phi}_n \cdot dA = 0$$

due ognuno dei quattro termini ha un preciso significato meccanico:

- Il termine

$$\int_V \rho \vec{F} \cdot dV$$

rappresenta la risultante delle forze di massa agenti sulle singole particelle che occupano il volume  $V$ . Se il fluido è sottoposto esclusivamente al campo gravitazionale, tale integrale fornisce il peso del fluido,  $\vec{P}$ , che è rappresentato da un vettore verticale, rivolto verso il basso ed applicato nel baricentro del volume;

Tale eq., però, non è ancora facilmente risolvibile, salvo in alcune condizioni. Per calcolare le inerzie locali, ~~ad~~ devo saper calcolare  $\vec{u}$  in tutti i punti del volume, eccetto nel caso in cui  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ . Dunque in condizioni di moto PERMANENTE le inerzie locali si annullano e l'eq. risulta indipendente dalle caratteristiche del moto all'interno del volume, ma dipende solo dalla distribuzione degli sforzi e delle velocità sulla sup. di controllo. Per il calcolo effettivo del flusso della quantità di moto bisogna comunque conoscere la distribuzione di  $\vec{u}$  e  $p$  in tutti i punti della superficie; ma una notevole semplificazione interviene nel caso delle correnti. Una sezione trasversale della corrente può spesso ritenersi piana, con il vettore velocità ovunque diretto normalmente alla superficie; le velocità sono perciò parallele tra loro ed hanno modulo pari alla componente normale  $u_n$  nel punto. Dunque il flusso della quantità di moto ~~è~~ della massa che attraversa  $A$  diventa:

$$\vec{M} = \vec{n} \int_A \rho U^2 dA$$

Il suo calcolo richiede ancora la conoscenza della distribuzione di  $U$  e  $p$  lungo la sezione. Si è inventato così un coeff.:

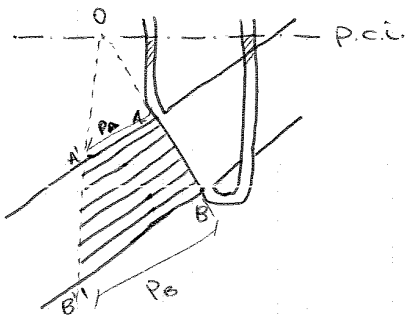
$$\beta = \frac{\int_A \rho u_n^2 dA}{\rho_m U^2 A} \quad \xrightarrow{\text{se } p = \text{cost}} \quad \beta = \frac{\int_A u_n^2 dA}{U^2 A}$$

dato dal rapporto tra l'effettiva quantità di moto e quella di una corrente di ugual portata, ma con velocità e densità costante in tutti i punti della sezione e pari ai rispettivi valori medi. Ci si accorge che i valori di  $\beta$ , salvo casi particolari, sono sempre superiori all'unità soltanto di qualche centesimo, cosicché in prima approssimazione possono ritenersi pari ad 1. Con l'introduzione di tale coeff. nel caso di  $p = \text{cost}$  si può dunque riscrivere il momento come:

$$\vec{M} = \vec{n} \cdot \beta \cdot U^2 \cdot A = \vec{n} \cdot \beta \cdot U \cdot Q$$

⇒ Quando tratto correnti di fluidi incomprimibili in moto PERMANENTE, ho risolto il problema del calcolo delle eq. differenziali dell'eq. indefinita della dinamica dei fluidi.

binormale  $b'$ , lungo la quale la quota piezometrica rimane costante (e la pressione risulta distribuita secondo la legge idrostatica). Per contro la quota piezometrica varia in generale lungo la normale principale e diminuisce nel verso di  $\vec{n}$ , tanto maggiore è la variazione di  $h$  quanto maggiori sono  $U$  e la curvatura  $1/r$ . Dunque quando la curvatura è nulla, ossia quando mi muovo su una traiettoria rettilinea, la quota piezometrica è costante anche lungo la normale principale. Esiste quindi un intero piano, che è il piano normale determinato dalle rette  $b'$  ed  $\vec{n}$ , sul quale  $h$  rimane costante, e perciò anche l'andamento di  $p$  rimane costante. In questo caso se attacchiamo a

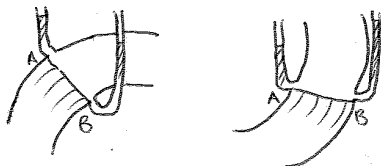


due punti A e B qualsiasi del perimetro della sezione trasversale, due piezometri, i menischi si portano in essi allo stesso livello. Il piano  $p$  orizzontale passante per i due menischi è il piano dei carichi idrostatici relativo alla sezione considerata. La retta OA'B' rappresenta

il diagramma delle pressioni.

Quando invece la curvatura delle traiettorie è notevole, nella sezione normale la pressione non varia idrostaticamente. Si possono avere due situazioni a seconda che la concavità delle traiettorie sia rivolta verso il basso o verso l'alto.

In ogni caso se si considera una sezione normale trasversale, un diametro AB, il piezometro che ha il punto d'attacco situato sulla sua parete concava indica una quota



piezometrica maggiore di quella indicata dal piezometro che si attacca dalla parete convessa. Dunque lungo

la direzione di  $\vec{n}$  il carico piezometrico scende e la pressione va in modo che  $h$  scenda.

Dai punti A, B, C riportiamo le altezze piezometriche e da punti A', B', C' riportiamo le altezze cinetiche. Osserviamo che, come ci assicura il teorema di Bernoulli, anche se le tre altezze variano da punto a punto, la loro somma rimane costante (sono le 4 ipotesi del teorema).

#### INTERPRETAZIONE ENERGETICA DEL TRINOMIO DI B.

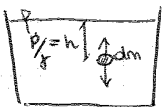
Al teorema di B. può essere attribuito un preciso significato energetico. Si può infatti dimostrare che il carico totale  $H$  rappresenta l'energia meccanica complessiva contenuta dall'unità di peso del fluido in movimento. Consideriamo separatamente i tre addendi del trinomio di Bernoulli. La quota  $z$  rappresenta l'energia potenziale della particella per unità di peso:

$$\frac{mgz}{mg} = z$$

Il termine  $\frac{v^2}{2g}$  rappresenta invece l'energia cinetica della particella per unità di peso, infatti:

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2}{mg} = \frac{v^2}{2g}$$

Meno semplice è l'interpretazione della ~~quarta~~ altezza piezometrica come termine energetico. In un recipiente contenente del liquido si isoli un elementino di massa  $dm$ .



Questo sarà soggetto ad una pressione  $p = \rho \cdot h$

Si tale elem. agisce la  $P$  peso e la  $P$  di

Archimede che si bilanciano in modo che la risultante sia nulla.

Se ora pensiamo di trasferire quel peso in prossimità del pelo libero dell'acqua, ovviamente non compiamo lavoro perché spostiamo un elemento con risultante nulla. A seguito di tale spostamento la sua energia potenziale è aumentata e quindi deve essere conseguentemente diminuita in un'altra forma di energia, anch'essa di tipo potenziale. Nelle condiz. in cui si trova ora l'elemento è intervenuto un solo mutamento nella press., si può concludere che l'acquisto di en. pot. è avvenuto a spese di una forma di en. legata alla pressione, che è detta



perfetto (1 ipotesi). Siamo ovviamente nel solo campo gravitazionale (2 ipotesi semplificata). Quando le variazioni in volume sono piccole,  $\Delta V \rightarrow 0$ , si può considerare  $\rho = \text{cost}$  (3 ipotesi). Infine se studio il problema in un piccolo intervallo di tempo posso supporre che il volume rimanga costante, poiché  $d \ll h$ , e quindi posso accettare l'ipotesi (4) di moto permanente. Appliciamo quindi il teo. di B. ad una generica traiettoria che partendo da un punto A, raggiunga un punto B della sezione contratta:

$$H_A = H_B \Rightarrow z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g}$$

$\underbrace{z_A + \frac{P_A}{\gamma}}_{= h_A = h}$ 
 $\underbrace{\frac{U_A^2}{2g}}_{= 0}$ 
 $\underbrace{z_B + \frac{P_B}{\gamma}}_{= (0.5+1)d}$ 
 $\underbrace{\frac{U_B^2}{2g}}_{= 0}$

carico piez. in A è uguale a qll del serbatoio  
 xke all'interno velocità = 0

Abbiamo visto, inoltre, che quando ho una corrente il carico piezom. sulla sezione trasversale è costante e poiché tale sezione è orizzontale tutti i punti su di essa hanno la stessa pressione:  $P_B = 0$  poiché la p al centro della sezione è nulla poiché è al contatto con l'atmosfera. Quindi:

$$U_B = \sqrt{2g [h + (0.5+1)d]}$$

Se  $h \gg d$  possiamo trascurare il termine  $d$  al fronte di  $h$  e quindi otteniamo:

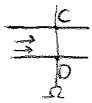
$$U_B = \sqrt{2gh}$$

Questa è la velocità TORRICELIANA che ci dice che la velocità di efflusso di un liquido da una luce è pari a quella che assumerebbe un grave, inizialmente in quiete, cadendo nel vuoto da una altezza pari al carico,  $h$ .

L'influenza dei fatti dissipativi che abbiamo ammesso di poter trascurare è ovviamente nel senso che la velocità di efflusso effettiva risulterà un po' minore di quella torriceliana:

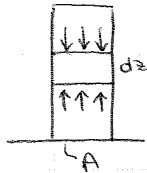
$$U_B^{vera} = C_v U_B = C_v \sqrt{2gh}$$

Tutti i punti sulla sezione contratta hanno lo stesso carico piezometrico ma non hanno la stessa pressione poiché la sup. è verticale è vero però che tutti i punti sul contorno (es c e D)



hanno pressione nulla poiché a contatto con la sup. pressione atmosferica, giustificavamo questa

contraddizione. Considero un cilindro di fluido di sezione A, poggiante sul fondo del recipiente. Prendo una fetta di altezza dz e applico l'eq. fondamentale dell'idrostatica. la risultante delle forze laterali è zero ~~le forze verticali dal b~~ l'equilibrio alla traslazione verticale è assicurato dall'annullarsi del risultante del peso e delle spinte che agiscono sulle due facce:



$$pA - \left( p + \frac{dp}{dz} dz \right) \cdot A - \gamma \cdot A \cdot dz = 0$$

da cui

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \quad \rightarrow \quad p(z) = -\gamma z + \text{cost}$$

Immaginiamo ora di prendere tale cilindro sulla sezione contratta. Tale pacchetto di fluido, non essendo sorretto ~~è assente del~~ è soggetto all'accelerazione g e quindi ad una forza d'inerzia diretta verticalmente verso l'alto che vale  $-g \cdot dm = -g \cdot \rho A \cdot dz = -\gamma \cdot A \cdot dz$  e rifacendo il bilancio:

$$pA - \left( p + \frac{dp}{dz} dz \right) \cdot A - \gamma \cdot A \cdot dz + \gamma \cdot A \cdot dz = 0$$

si ottiene

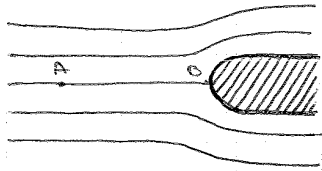
$$\frac{dp}{dz} = 0 \quad \rightarrow \quad p = \text{cost}$$

poiché la pressione sul bordo è nulla, la p su tutta la sezione verticale sarà uguale a zero:  $p_B = 0$

$\left( z_B + \frac{p_B}{\gamma} = \text{cost} \right)$  non è valido poiché le traiettorie non possono supportarsi //.

## TUBO DI PITOT

È un dispositivo per misure locali di velocità nelle correnti fluide. Consideriamo una corrente che investe un ~~fluid~~ ostacolo



costituito da un corpo di rivoluzione a testa tondeggiante: la corrente, a sufficiente distanza a monte dell'ostacolo abbia traiettorie rettilinee e // . Avvicinandosi

all'ostacolo le traiettorie divergono; la traiettoria AB sul prolungamento dell'asse del corpo, lo investe in B dove il fluido ha una brusca deviazione. Qui la velocità va a zero, sicché il punto B viene detto d'arresto. Applico B. a tale traiettoria:  $h_A = h_B$

$$\underbrace{z_A + \frac{P_A}{\gamma}}_{h_A} + \frac{U_A^2}{2g} = \underbrace{z_B + \frac{P_B}{\gamma}}_{=h_B} + \frac{U_B^2}{2g} = 0$$

da cui

$$U_A = \sqrt{2g(h_B - h_A)}$$

La quota piezometrica della sezione dove si trova il punto A può essere individuata tramite un comune piezometro; quella del punto B aprendo un forellino nel corpo e collegato con un piezometro. In pratica i due tubi piezometrici possono essere incorporati in un unico apparecchio che può avere varie forme e che viene detto TUBO di PITOT. Ci sono altri modi per misurare la velocità, uno è quello dei mulinelli, un altro è quello degli anemometri a filo caldo. Se il fluido è trasparente con due raggi laser posso misurare la velocità in un punto. Al posto dei raggi laser si possono usare anche onde sonore. Il vantaggio è che possono andare anche in un fluido non trasparente, lo svantaggio è che sono più difficili da direzionare.

introducendo il coeff. di correzione:

$$Q = c \cdot \left[ \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \cdot \sqrt{2g \cdot \Delta \frac{\delta_m - \delta}{\delta_m}} \right]$$

↑  
valore molto vicino all'1

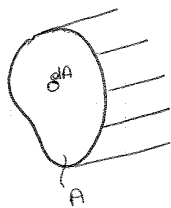
Il solo inconveniente del venturimetro è l'ingombro, per questa ragione sono stati studiati altri dispositivi meno ingombranti ma più imprecisi, C è maggiore.



### TURBINE IDRAULICHE

#### ESISTENZA DEL TEOR. DI BERNOULLI A UN CORRENTE

Immagino un tubicino di flusso di sezione  $dA$  in cui scorre



una corrente di portata  $dQ$  (= volume di fluido che passa nell'unità di tempo in  $dA$ )

Il peso del liquido che attraversa  $dA$  nell'unità di tempo è  $\gamma \cdot dQ$ ; la potenza

del filetto di corrente nella sezione è

$$dP = \gamma \cdot dQ \cdot H \quad (\gamma dQ: \text{peso del fluido che passa nell'unità di tempo in } dA)$$

Se integro ottengo la potenza di una corrente in una sezione A:

$$P = \int_P dP = \int_Q \gamma \cdot H \cdot dQ = \int_A \gamma \cdot H \cdot u \cdot dA = \gamma \int_A H \cdot u \cdot dA$$

↑ = energia che sta passando nell'unità di tempo in A

Nell'ipotesi di validità del teo. di B. (perdite nulle e moto permanente) sia  $H$  che  $dQ$  restano costanti sezione per sezione; allora anche  $P$  resta costante lungo la coordinata  $s$ : coordinata curvilinea lungo la quale si svolge la corrente.

$$\gamma \cdot \int_A H \cdot u \cdot dA = \text{cost}_s$$

Diunque nel moto permanente di una corrente di fluido perfetto incomprimibile la potenza si mantiene costante, cioè assume lo stesso valore in tutte le successive sezioni trasversali.

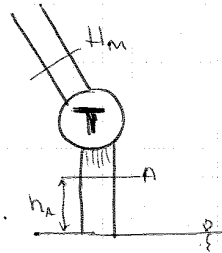
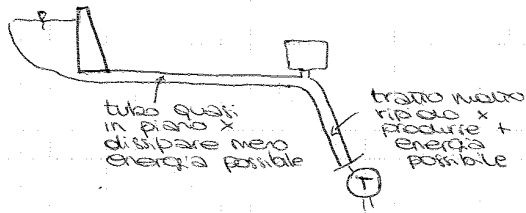
Si può dimostrare che:  $(\alpha - 1) = 3(\beta - 1)$  dunque:

MOTO TURBOLENTO  $\alpha \approx 1 \rightarrow \beta \approx 1$

MOTO LAMINARE  $\alpha = 2 \rightarrow \beta = 4/3$

**TURBINE**

Le turbine sono macchine che ricevono energia dalla corrente idrica.

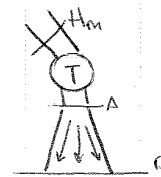


$$H = z + \frac{P}{\rho} + \frac{\alpha U^2}{2g}$$

$$= \left[ h_A + \alpha \frac{Q^2}{A^2 \cdot 2g} \right]$$

Se aggiungo un divergente e non si hanno distacchi di vena posso dire

$H_A = H_B$  uguale a quella del serbatoio di valle  
dunque

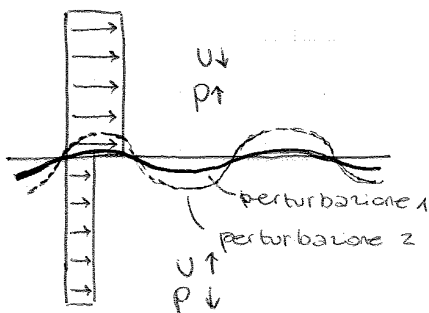


$$z_A + \frac{P_A}{\rho} + \frac{\alpha U_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\rho} + \frac{\alpha U_B^2}{2g}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$$

affinchè l'uguaglianza sia verificata il divergente crea una depressione in A ( $P_A < 0$ )

**INSTABILITÀ DI KELVIN - HELMOLTZ**



Supponiamo un fluido perfetto.

A seguito della perturbaz. 1 la U al di sopra della linea diminuisce poiché la sezione è lievemente aumentata e la pressione aumenta. Al di sotto invece la U aumenta e la p diminuisce.

Dunque l'eq. globale per fluidi viscosi risulta essere:

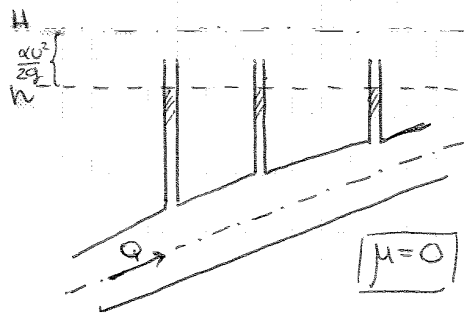
$$\vec{p} + \vec{I} + \vec{M} + \underbrace{\vec{\pi} - \vec{T}} = 0$$

$= \vec{F}_c =$  RISULTANTE DELLE FORZE AL CONFINO (su A):  
contributi normali + tangenziali

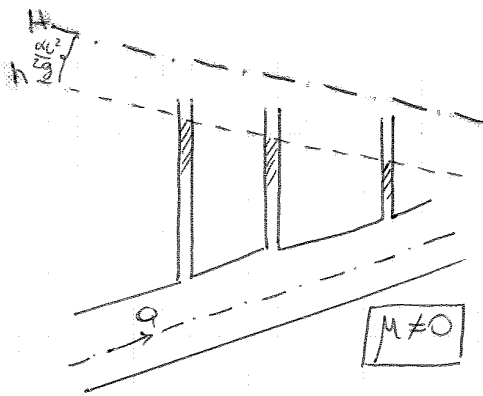
### CONCETTO DI DISSIPAZIONE

Nel caso di un fluido viscoso vi sono tensioni tangenziali che tendono a "smorzare" i movimenti  $\rightarrow$  nasce il concetto di dissipazione. (concetto assente nel caso di fluidi perfetti poiché non vi sono tensioni tangenziali  $\rightarrow$  infatti il teo. di Bernoulli può essere interpretato come conservazione dell'en. meccanica  $\rightarrow$  accettabile solo se non vi sono dissipazioni).

Supponiamo di avere un tubo circolare dentro cui scorre una corrente con portata  $Q$  (=cost). Colleghiamo al fluido tre piezometri, uno di seguito all'altro.



Se il fluido è perfetto il carico totale  $H$  non varia e poiché la sezione <sup>non varia</sup> è dunque la portata non varia, anche  $h$  rimane costante  $\rightarrow$  nei piezometri misuro lo stesso livello.



Se, invece, il fluido è viscoso ( $\mu \neq 0$ ) ho dissipazioni e quindi  $H$  non è costante, ma sarà una retta inclinata verso il basso  $\rightarrow$  perdita en. meccanica che si trasforma in calore. Il termine cinetico  $\frac{\rho U^2}{2g}$  non cambia poiché non vi sono variazioni di sezione e lo  $u$  rimane costante, dunque  $H$  ed  $h$

sono parallele.  $\rightarrow$  i <sup>tre</sup> ~~due~~ piezometri segnano livelli differenti che mano a mano si abbassano.

Definiamo una nuova quantità, indicata con  $i$  o  $J$ :

$$i = - \frac{\partial H}{\partial s}$$

che viene detta PENDENZA MOTRICE o CADENTE PIEZOMETRICA

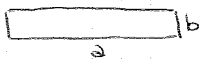
Lo sforzo riferito su unità di misura è:

$$\tau = \frac{T}{p \cdot L} = \gamma \cdot i \frac{A}{P} = \gamma \cdot i R \quad \rightarrow \text{formula GENERALE}$$

Contorno bagnato  
(perimetro)  $\hookrightarrow$  lunghezza

dove  $R = \frac{A}{P}$  è detto RAGGIO IDRAULICO e sintetizza l'efficienza idraulica di una sezione di una corrente. Mentre l'area  $A$  è indicativa della portata  $Q$ , il  $R$  è indicativo della superficie su cui agiscono le tensioni. Maggiore è  $R$  e maggiori sono le resistenze. A parità di area il cerchio è la sezione che ha maggiore efficienza idraulica poiché ha il perimetro minore ( $P_{\min} \rightarrow R_{\max} \rightarrow T_{\min}$ ). Invece la sezione rettangolare lunga, a parità di area, è quella che ha il perimetro maggiore e quindi minor  $R$  e quindi minor efficienza.

Nel caso del cerchio:  $R = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2} = \frac{d}{4}$   $\rightarrow$  diametro

Nel caso di sezione rettangolare larga  con  $b \ll a$ :

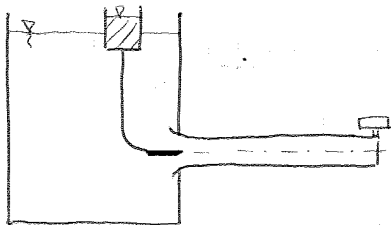
$$R = \frac{a \cdot b}{2a + 2b} = \frac{\cancel{a} \cdot b}{2\cancel{a}} = \frac{b}{2}$$

$\uparrow b \ll a \Rightarrow$  trascuro  $2b$

## CONCETTO DI MOTO LAMINARE E TURBOLENTO

### ESPERIMENTI DI RAYLEIGH

C'è un serbatoio da cui parte un tubo in vetro con al fondo un rubinetto. Questo strumento è completato da un ago posto nell'asse del tubo e collegato ad un serbatoio di colorante.



Apri di poco il rubinetto e dall'ago esce fuori un po' di colorante che scorre  $\perp$  lungo l'asse del tubo. Immagino quindi un moto laminare, cioè per lamine sovrapposte, dove nel centro della sezione del tubo vi è la velocità massima, mentre sui bordi

Ora adimensionalizziamo ciascuna grandezza in funzione di queste scale:

$$x' = \frac{x}{l} ; \quad y' = \frac{y}{l} ; \quad z' = \frac{z}{l}$$

$$u' = \frac{u}{u_0} ; \quad v' = \frac{v}{u_0} ; \quad w' = \frac{w}{u_0}$$

$$p' = \frac{p}{\rho u_0^2}$$

$$t' = \frac{t}{l/u_0}$$

tutte queste grandezze, adesso, variano tra 0 e 1.

Introduco le variabili adimensionali appena trovate nell'eq (\*):

$$\frac{\rho u_0^2}{l} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \rho \frac{\partial h'}{\partial x'} = -\rho \frac{u_0}{l/u_0} \frac{Du'}{Dt'} + \mu \frac{u_0}{l^2} \nabla^2 u'$$

da cui

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\rho}{\rho u_0^2} \frac{\partial h'}{\partial x'} = - \frac{Du'}{Dt'} + \frac{\mu}{\rho u_0 l} \nabla^2 u'$$

ho moltiplicato tutti i termini per  $\frac{l}{\rho u_0^2}$  così ho semplificato i coeff. di ogni termine.

che si può riscrivere come:

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial h'}{\partial x'} = - \frac{Du'}{Dt'} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u'$$

dove  $\nearrow Fr^2 = \frac{u_0^2}{gl}$   
 $\searrow Re = \frac{\rho u_0 l}{\mu}$

I singoli termini, ora, sono tra loro confrontabili:

se  $\frac{1}{Fr^2}$  e  $\frac{1}{Re}$  fossero uguali ad uno, i quattro termini

avrebbero tutti la stessa importanza.

Per vedere cosa posso trascurare guardo i coeff.:

1) NUMERO DI REYNOLDS :  $Re = \frac{\rho u_0 l}{\mu}$

dove  $\frac{\mu}{\rho} = \nu =$  viscosità cinematica

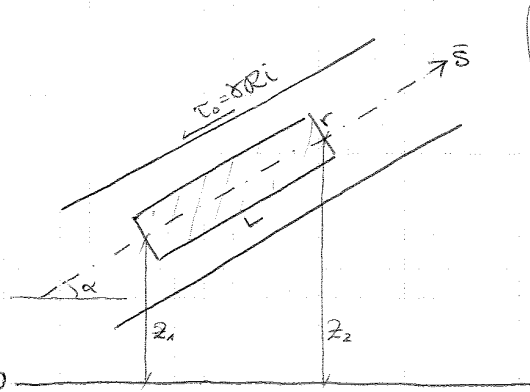
tale numero esprime il rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscosse  $\left( \frac{F_{inerzia}}{F_{viscose}} \right)$

se  $Re \rightarrow \infty$  il termine  $\nabla^2 u' \rightarrow 0$  e dunque posso trascurare i termini d'inerzia,  $-\frac{Du'}{Dt'}$ , rispetto al laplaciano



**MOTO LAMINARE : DIAGRAMMA TENSIONI  $\tau$  e PROFILLO VELOCITÀ**

Consideriamo il caso di una corrente in un condotto circolare in moto laminare. Applichiamo l'eq. globale dell'equilibrio



ad un cilindretto coassiale di raggio  $r$  e lunghezza  $L$ .

$$\vec{P} + \vec{M} + \vec{I} + \vec{\pi} - \vec{T} = 0$$

Determino i vari termini al fine di ricavare le tensioni.

$$\vec{P}: -\gamma \cdot \pi r^2 \cdot L \cdot \sin \alpha = -\gamma \cdot \pi r^2 \cdot L \cdot \frac{z_2 - z_1}{L}$$

$$\vec{M}: \vec{M}_u = \vec{M}_e \Rightarrow \vec{M} = 0$$

$$\vec{I}: \vec{I} = 0 \text{ perche considero il moto uniforme } (= \frac{\partial}{\partial t} = 0)$$

$$\vec{\pi}: \pi r^2 (P_1 - P_2)$$

$$\rightarrow T = -\gamma \cdot \pi r^2 \cdot L \cdot \frac{z_2 - z_1}{L} + \pi r^2 (P_1 - P_2) = \dots = \text{da cui}$$

$$T = \gamma \cdot \pi r^2 \cdot L \cdot i$$

e più in generale:

$$\tau = \frac{T}{L \cdot 2\pi r} = \frac{\gamma \cdot \pi r^2 \cdot L \cdot i}{L \cdot 2\pi r} = \gamma \cdot \frac{r}{2} i$$

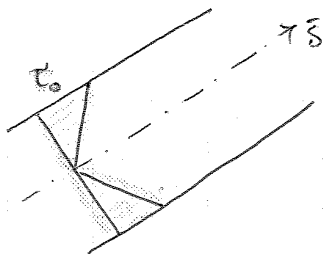
$\uparrow$  sup. di contorno

$\rightarrow$  le  $\tau$  variano in maniera lineare

$$\text{per } r=0 \rightarrow \tau=0$$

$$\text{per } r \rightarrow R \rightarrow \tau = rRi$$

dunque il diagramma delle tensioni tangenziali risulta essere:



Se dimezzo il diametro, la portata diminuisce di 16 volte.  
 Se voglio mantenere  $Q = \text{cost}$ ; ~~per~~ dimezzando il diametro, devo aumentare di 16 volte la pendenza motrice,  $i$ .

N.B.: le sezioni su cui si conosce l'andamento delle velocità e degli sforzi tangenziali sono poche perché qui spigoli creano problemi di calcolo matematico.

### NOTE TURBOLENTE

Applicazioni: (molte)

- corpi che si muovono nei fluidi
- interazione fluido-struttura
- motori
- ecc..

La turbolenza è un processo non lineare, è un fenomeno apparentemente casuale e dissipativo, ~~ed~~ incrementa i processi di trasporto e crea vorticità.

Cerco il valore medio di  $u$  nel tempo:

$$\bar{u} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} u(t) \cdot dt$$

tale operatore è lineare:  $\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$  cioè l'operatore

media applicato all'operatore derivata è uguale all'operatore derivata applicato all'operatore media.

Il mio obiettivo è quello di cercare equazioni per le grandezze medie e in modo da trascurare la turbolenza. Per fare ciò applico 3 convenzioni:

1) convenzione degli indici ripetuti di Einstein:

per la quale quando un indice latino è ripetuto, si sottintende il simbolo di sommatoria

es:

$$\phi_{ii} = \phi_{11} + \phi_{22} + \phi_{33} \quad \rightarrow \text{evito di scrivere } \sum_{i=1}^3$$

$$\text{div } \vec{u} \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Se sottraggo membro a membro l'eq. trovata dall'eq. di partenza trovo:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{(\tilde{u}_i - u_i)}_{= u_i} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Ora cerco di riscrivere l'eq. di N-S:

$$\underbrace{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}_{\bar{A}} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\mu}{\rho}}_V \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + g \cdot \delta_{i3} \quad \uparrow x_3$$

↳ operatore detto DELTA DI KRONECKER:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

ci serve per fare il prodotto tra v e u che ci dà solo per

Adesso inserisco la decomposizione delle

variabile ed applico il teorema di media ai vari termini:

①  $\frac{\partial \overline{(u_i + u_i)}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \cancel{x_i}}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t}$  ok! è scomparsa la turbolenza

↑  
Per linearità op. medio

②:  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{(P+p)}}{\partial x_i} = \text{come sopra} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}$  " " "

③:  $\frac{\partial^2 \overline{(u_i + u_i)}}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 \cancel{x_i}}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$  " " "

④:  $\overline{(u_j + u_j) \cdot \frac{\partial (u_i + u_i)}{\partial x_j}} = \overline{u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} =$

$$= u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \cdot \frac{\partial \cancel{x_i}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$

media degli scalari (\*)

↳ non è dato che la media del loro prodotto sia anch'essa nulla

(\*) lo scompongo:

$$\frac{\partial a \cdot b}{\partial x} = a \cdot \frac{\partial b}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial a}{\partial x}$$

$$= u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i \cdot u_j}{\partial x_j} - \bar{u}_i \cdot \frac{\partial \cancel{x_j}}{\partial x_j} = \rightarrow$$

dunque

$$\frac{DU_i}{Dt} = f(U_i, \overline{u_i u_j}) \rightarrow \text{ho un numero di eq. minore del numero delle incognite}$$

se provo a riscrivere <sup>le correlaz. doppie</sup> ~~questa~~ trovo che:

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = f(U_i, \overline{u_i u_j}, \overline{u_i u_j u_k})$$

↑  
correlazioni triple

↳ ho ancora un numero di eq. minore del numero delle incognite

⇒ la turbolenza è un problema che non si può chiudere (dovrei scrivere 30 equazioni)

Vedo se approssimando riesco a chiudere il problema inventando una forma di  $f$  che faccia meno errori possibili.

Dal punto di vista energetico ci interessa come cambia il contributo di en. cinetica quando seguo la particella:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_i^2 \right) = \text{trasporto} - 2\nu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 + \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + g \cdot \delta_{i3}$$

↓  
 spostato en. cinetica da 1 p.to ad un altro del fluido  
 ↓  
 tensioni viscosi che sottraggono energia (segno "meno")  
 $= -2\nu E_{ij} - E_{ij}$

↓  
 termine legato alle tensioni di Reynolds, che alimenta il moto turbolento  
 ↳ dissipa energia (in genere  $\overline{u_i u_j} < 0$ )  
 ecco che un sistema naturale cerca di non andare in turbolenza.

↓  
 termine di en. potenziale (legato all'accel. di energia)

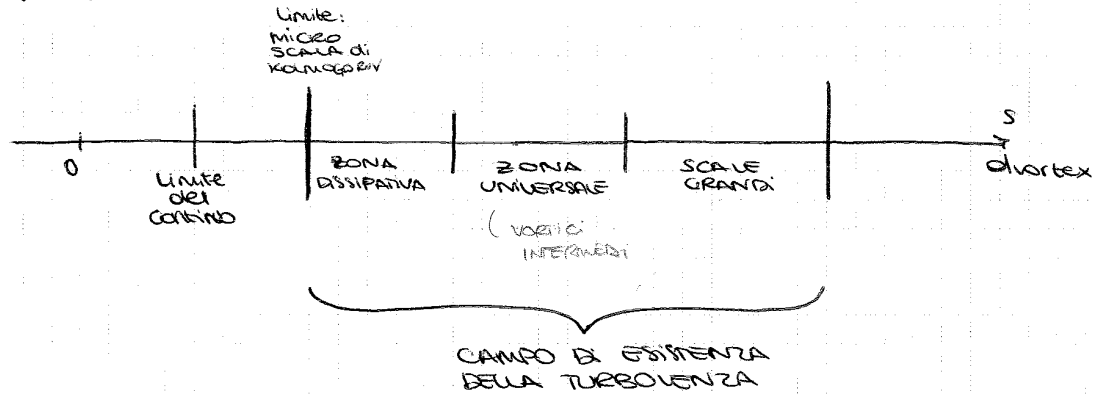
Tale termine ha ordine di grandezza molto superiore al precedente, tale che lo si potrebbe trascurare.

### TEORIA DELLE CASCADE DI VORTICI

Si può definire la turbolenza come un insieme di vortici di varie dimensioni, annidati l'uno dentro l'altro ed in movimento attorno a degli assi di rotazione. Tali vortici hanno dimensioni differenti: i vortici + grandi hanno scala spaziale grande compatibilmente con le condizioni al contorno. Ad esempio in un fiume i vortici grandi hanno scala spaziale pari alla profondità del fiume, mentre i vortici piccoli nel ventricolo del cuore avranno scala ben più piccola.

ci sarebbe un limite alla turbolenza. Inoltre si deduce che se voglio studiare solo i vortici grandi, posso trascurare la viscosità.

Graficamente:



Si definisce ZONA DISSIPATIVA la zona entro la quale i vortici risentono della viscosità  $\nu$ . La dissipazione dunque avviene alle piccole scale. Tutti i vortici di diametro compreso tra il minor di delle scale grandi ed il max di dei vortici dissipativi sono detti vortici universali. Questo perché tali vortici non risentono della viscosità e sono abbastanza piccoli da non rientrare nelle condizioni al contorno. Dipendono quindi solo dal flusso di energia,  $\epsilon$ .

EQ. GLOBALE del MOTO MEDIO

Parto dall'eq. globale  $\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{N} = 0$  e cerco di riscriverla applicando la decomposizione delle variabili e l'operatore media ai vari termini.

$\vec{P}$  rimane tale

$$\vec{F}_c = \int_A \vec{\phi}_c \cdot dA = \int_A (\vec{\phi}_c + \vec{\tilde{\phi}}_c) dA$$

$$\vec{F}_c = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_A (\vec{\phi}_c + \vec{\tilde{\phi}}_c) dA \cdot dt = \int_A \left[ \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\vec{\phi}_c + \vec{\tilde{\phi}}_c) dt \right] dA =$$

$\uparrow$  due termini indipendenti                       $\uparrow$  sparisce xkè la media delle oscillazioni turbolente è nulla

$$= \int_A \overline{\vec{\phi}_c} dA$$

$\uparrow$  perché era già mediato

→ le  $\vec{F}_c$  non danno problemi, è basta calcolarne il valore medio

$$\vec{M} = \rho \int_A \vec{u} \cdot \vec{u}_n \, dA = 0$$

lungo s

x' FLUSSO ENTRANTE = FLUSSO USCENTE  
(MEDIO) (MEDIO)

$$\vec{M}' = \rho \int_A \vec{u} \cdot \vec{u}_n \, dA = \rho \int_A \vec{u} \cdot \vec{u}_n \, dA = -\rho \overline{u u_n} \cdot 2\pi r L$$

componente lungo s

sup. simmetria  
sinistra → immagine  
sinistra su III la sp  
→ tiro fuori dall'integrale

metto tutti i termini insieme:

$$-\gamma \cdot \pi r^2 L \frac{z_2 - z_1}{L} + (P_1 - P_2) \pi r^2 = -\mu \frac{d\bar{u}}{dr} 2\pi r L + \rho \overline{u u_n} 2\pi r L$$

$$= \gamma \cdot \pi r^2 L \cdot i$$

uguale a qnt visto  
per moto laminare

$$= 2\pi r L \left[ -\mu \frac{d\bar{u}}{dr} + \rho \overline{u u_n} \right]$$

raccolto

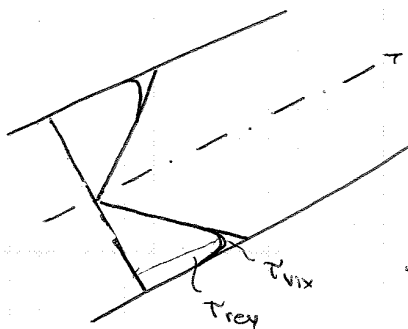
$\tau_{visc.} + \tau_{reyn.} = \tau$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\gamma \pi r^2 k i}{2\pi r k} = \gamma \cdot R_i$$

VALIDO SIA IN MOTO LAMINARE  
SIA IN MOTO TURBOLENTO

In moto laminare le  $\tau$  sono solo di origine viscosa, mentre nel moto turbolento le  $\tau$  hanno anche componente di Reynold.

Il grafico delle tensioni <sup>discrepanza</sup>



⇒ nel moto turbolento la viscosità non conta quasi mai eccetto vicino alle pareti

### TEOREMA II o TEOREMA DI BUCKINGHAM

Ogni grandezza fisica ha opportune dimensioni rispetto alle unità di misura delle grandezze fondamentali, che per la meccanica sono tre:  $M, L, T$  corrispondenti a  $kg, m, s$ .

Considero un sistema fisico  $Y$  per il quale so' che c'è ha una relazione funzionale  $f$ , con  $n$  grandezze:

$$Y = f(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \dots, Q_n) \quad \text{spazio ad } (n+1) \text{ dimensioni}$$

Scelgo come nuove grandezze fondamentali le prime tre, invece di LTM. Adimensionizzo  $Y$ :

$$\frac{Y}{Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_3^\gamma} = g\left(Q_1, Q_2, Q_3, \underbrace{\frac{Q_4}{Q_1^{\alpha_4} Q_2^{\beta_4} Q_3^{\gamma_4}}}_{\Pi_4}, \dots, \underbrace{\frac{Q_n}{Q_1^{\alpha_n} Q_2^{\beta_n} Q_3^{\gamma_n}}}_{\Pi_n}\right)$$

che posso riscrivere in maniera più compatta:

$$\Pi = g(Q_1, Q_2, Q_3, \underbrace{\Pi_4, \dots, \Pi_n}_{\text{adimensionali}})$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 devono essere  
 tutte distinte valga  
 l'uguaglianza

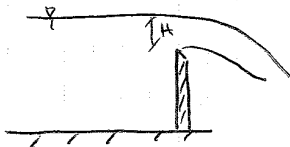
$n$  grandezze adimensionali

→ sono passato da uno spazio  $(n+1)$  ad uno spazio  $\mathbb{R}^n$   $(n+1-1)$  dimensioni ⇒ ho semplificato il problema

Dunque tale teorema dice che:

Se in un fenomeno fisico intervengono " $n$ " grandezze ed " $m$ " è il numero delle grandezze fondamentali, il legame tra le " $n$ " grandezze è riconducibile ad un legame tra " $n-m$ " numeri puri (adimensionali).

ES) Voglio calcolare la portata di un fiume



So' che applicare l'eq. di N-S non mi porta ad avere alcun risultato. Provo a risolvere il problema per via sperimentale.

la portata sarà funzione di  $H$ , della gravità  $g$  (motivo x cui cade il getto) e della larghezza dello stramazzo  $L$ . La viscosità non ha ruolo poiché il getto cadendo non è a contatto con pareti.

Quindi:

$$Q = f(H, g, L)$$

non ipotizzo che  $F$  dipenda dalla gravità  $g$  perché non può essere a sufficiente profondità in modo che non si creano onde sulla superficie libera.

Studiare  $F$  in modo sperimentale al variare di  $\rho$  e  $\mu$  è estremamente complicato  $\rightarrow$  motivo  $\times$  cui utilizzo teo  $\Pi$ .

Le grandezze fondamentali in gioco sono 3: LTM

↳ scelgo una nuova terna:  $\rho, u_0, D$  in modo che il determinante delle dimensioni di tale terna sia  $\neq 0$ .

Quindi, adimensionalizzo: DELLA MATRICE DEI LORO COEFF. è  $\neq 0$

$$\frac{F}{\rho^{\alpha} D^{\beta} u_0^{\delta}} = g \left( \frac{L}{D}, \frac{\mu}{\rho u_0 D} \right) \quad \text{due tra cui } \alpha=1 \quad \beta=2 \quad \delta=2$$

$\Rightarrow$  ora posso lavorare in uno spazio a tre dimensioni in cui i termini dominanti sono (e non i 6 di partenza)

$$\frac{F}{\rho u_0^2 D^2}, \quad \frac{L}{D}, \quad \frac{\mu}{\rho u_0 D} \quad [M] = \frac{[kg]}{[s][m]}$$

↑  
numero Reyn.

Devo che il teo  $\Pi$  è importante perché:

1) Semplicifica le cose dal pto di vista sperimentale

Nel nostro caso devo studiare il problema al variare dei tre termini trovati, non dei 6 di partenza

2) dal punto di vista fisico mi tira fuori direttamente i rapporti adimensionali che governano il sistema

3) passo da una relazione dimensionale ad una adimensionale

$\rightarrow$  non importa specificare le unità di misura utilizzate

$\rightarrow$  universalità dei risultati

Altra applicazione:  $[V] = \frac{[m^2]}{[s]}$

Quanto vale la microscala di Kolmogorov? Applico teo  $\Pi$

$$\eta = \eta(\nu, \varepsilon)$$

↑  
flusso di energia

Le grandezze fondamentali coinvolte sono L, T  $\rightarrow$  scelgo

altre due nuove grandezze:  $\nu, \varepsilon$

$\rightarrow$



Adesso le grandezze fondamentali coinvolte sono solo  $L, T \rightarrow$  scelgo due nuove grandezze che soddisfino il vincolo  $det \neq 0 : \nu, u_*$

Adimensionizzo:

$$\frac{u}{u_*} = f' \left( \frac{\nu}{u_* y} \right) \quad \text{dove } \alpha=0 \quad \beta=1$$

quindi la relazione è

$$\frac{u}{u_*} = f \left( \frac{\nu}{u_* y} \right)$$

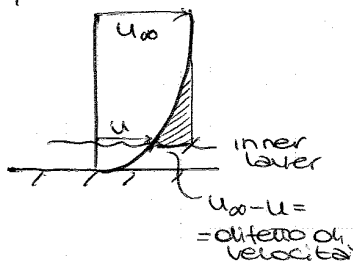
poiché la funzione  $f$  è generica posso considerare:

$$\frac{u}{u_*} = f \left( \frac{u_* y}{\nu} \right) \quad \text{lo posso ribaltare xché è ADIMENSIONALE}$$

↑ numero Reynolds

$\rightarrow$  la  $u$  ha come scala tipica  $u_*$  ed è funzione del n° Reynolds

Per quanto riguarda la zona di outer layer (a distanza maggiore di  $y$  dalla parete), cerco il profilo di velocità come DIFETTO DI VELOCITÀ tra  $u_\infty$  e la  $u$  nell'inner layer



$$(u_\infty - u) = g \left( u_*, y, \nu, \frac{y}{\delta} \right)$$

la posso trascurare xché sono a distanza sufficientemente grande dalla parete

Scelgo come nuove grandezze:  $u_*$  e  $\delta$

Adimensionizzo:

$$\frac{u_\infty - u}{u_*} = F \left( \frac{y}{\delta} \right)$$

$\xi = \frac{y}{\delta}$

dunque

nell'inner layer:  $\frac{u}{u_*} = f \left( \frac{u_* y}{\nu} \right) = f(y^+)$  (A)

nell'outer layer:  $\frac{u_\infty - u}{u_*} = F(\xi)$  (B)

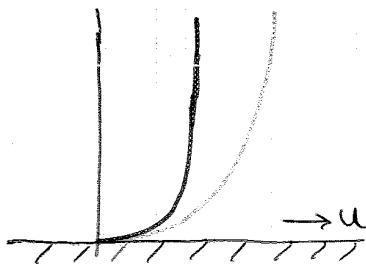
dunque in tale zona:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \left( \frac{y u_*}{\nu} \right) + 5.0$$

$$\frac{u_0 - u}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \left( \frac{y}{\delta} \right) - 1$$

⇒ posso ipotizzare un profilo di velocità logaritmico in tutta la sezione (anche se lo sarebbe solo nella zona di overlap).

Dunque mentre nel moto laminare si ha un profilo parabolico delle velocità, nel moto turbolento si ha un profilo logaritmico più schiacciato quindi rispetto a quello laminare



— = moto turbolento  
 - - - = moto laminare

→ nel moto turbolento i forti gradienti di velocità li ho tutti vicino alla parete

All'interno dell'inner layer si può localizzare un altro strato, molto attaccato alla parete, detto sottostato viscoso. In questo strato le tensioni sono solo di natura viscosa, infatti il termine  $\overline{u_i u_j} \rightarrow 0$  perché la componente di  $u$  perpendicolare alla parete si annulla in quanto quest'ultima è impermeabile.

Quindi 
$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy} + \rho \overline{u_i u_j} = 0$$

Inoltre in questa zona, visto che è molto piccola non si risentono le variazioni spaziali, quindi posso dire che le tensioni sono costanti:  $\tau = \mu \frac{dU}{dy} = \tau_0$  (\*)

⇒ in questa zona si risente solo della viscosità.

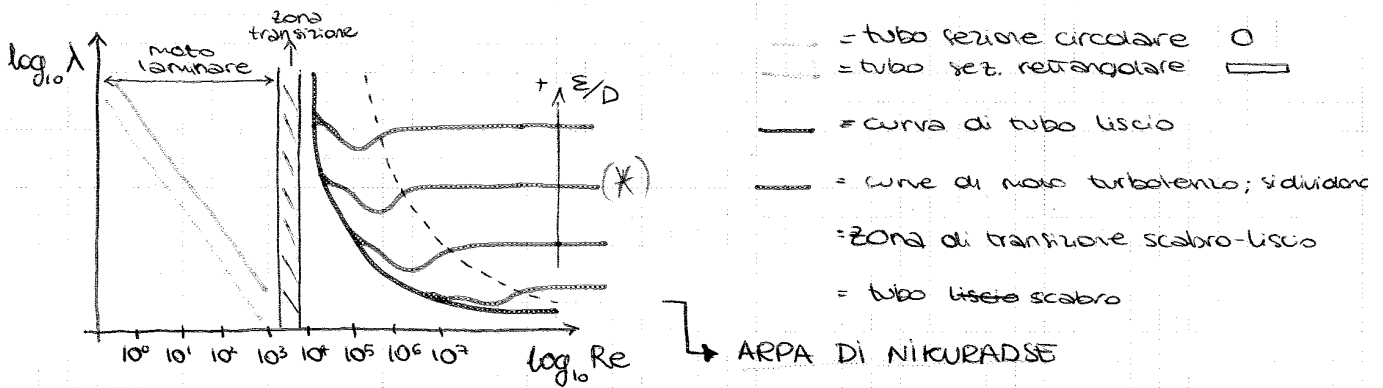
Dalla legge (\*) trovo:

$$u = \frac{\tau_0}{\mu} \cdot y + \text{cost} = 0 \text{ perché per } y=0 \text{ la } u=0$$

Per trovare una legge, quindi, faccio esperimenti al variare di  $\lambda$ ,  $Re$ ,  $\varepsilon/D$ :

$$\lambda = \lambda(Re, \varepsilon/D)$$

Nikuradse conduce tali esperimenti e li riporta su un piano logaritmico:



fino a quando il  $\log_{10} Re$  vale 2000 ( $\sim 10^3$ ) la turbolenza non si vede e siamo in moto laminare: Nel caso di sez. circolare

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{1}{32} \cdot \frac{\delta i}{\mu} \cdot D^2 \Rightarrow i = \frac{32 \mu U}{\delta D^2}$$

da cui

$$\lambda = \frac{2gDi}{U^2} = \frac{32 \mu U}{\delta D^2} \cdot \frac{2gD}{U^2} = \frac{64}{Re}$$

È NON C'È XKE IL MOTO LAMINARE NON RISENTE DELLA SCABREZZA

in scala logaritmica  $\lambda = 64/Re$  è una retta:  $\log \lambda = \log 64 - \log Re$

Se la sezione è rettangolare larga si trova che  $\lambda = 96/Re$ .

Poiché tutte le altre sezioni a parità di area sono comprese tra queste due, le rette delle altre sezioni sul grafico si trovano tra la retta azzurra e quella verde.

La zona in cui il  $\log_{10} Re$  vale tra 2000 e 4000 è detta di transizione; dopo di questa si passa nella zona turbolenta. Nikuradse fa diversi esperimenti:

Prende sfere di differenti sopra le quali incolla dei granelli di sabbia di ugual diametro e ne studia il moto al variare di  $Re$ ,  $\lambda$ ,  $\varepsilon/D$ .  
ma variante da tubo a\*

Da questi studi ricava:

la curva di tubo liscio, che si ottiene quando la scabrezza è sommersa dal sottostato viscoso;

b)  $\lambda = 0.0032 + \frac{0.221}{Re^{0.227}}$  se  $Re \geq 10^5$  EQ. di NIKURADSE

c)  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log_{10} \left[ \frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} \right]$

La curva di tubo scabro, invece, ha eq.:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log_{10} \left[ \frac{\varepsilon}{3.17 D} \right]$$

Se prendo queste ultime due eq. e sommo gli argomenti, ricavo l'espressione di COLEBROOK - WHITE, che descrive tutto il diagramma di Moody:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left[ \frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.17 D} \right]$$

4) Nel moto laminare

$$\lambda = \frac{c}{Re} \rightarrow \frac{2gDi}{u^2} = \frac{c \cdot v}{uD} \Rightarrow i \cdot d \cdot \frac{u}{D^2} = \frac{Q}{D^4}$$

Se voglio dimezzare le resistenze devo ridurre di 16 volte il diametro.

5) Nel moto nel tubo liscio:

$$\lambda = \frac{c}{Re^{0.25}} \rightarrow \frac{2gDi}{u^2} = \frac{c \cdot v^{0.25}}{u^{0.25} \cdot D^{0.25}} \Rightarrow i \cdot d \cdot \frac{u^{0.75}}{D^{1.25}} = \frac{Q^{1.75}}{D^{4.75}}$$

6) Nel moto completamente scabro:

$$\lambda = \lambda \left( \frac{\varepsilon}{D} \right) = c$$

$$\frac{2gDi}{u^2} = c \Rightarrow i \cdot d \cdot \frac{u^2}{D} = \frac{Q^2}{D^5}$$

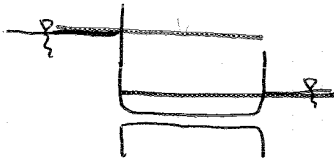
Se raddoppio la portata, quadruplo la resistenza

7) La formula di Colebrook-White è molto scomoda perché abbiamo la presenza di  $\lambda$  in entrambi i membri. Si sono scerte delle formule empiriche che si basano sulla formula di Chezy:

$$\rightarrow u = \chi \cdot \sqrt{R \cdot i}$$

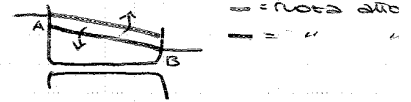
se la sup. è scabra  $i = \beta \frac{Q^2}{D^n}$  e quindi  $\Delta H = \beta \frac{Q^2}{D^n} \cdot L + \frac{\alpha U^2}{2g}$  con  $\alpha =$

Se non ci fossero dissipazioni:



Minori sono le resistenze e maggiore diventa

il salto tra le 2 linee:

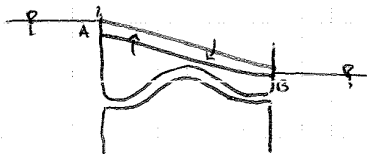


Se aumento la lunghezza del tubo,  $L' > L$ , così da non renderlo orizzontale, e lascio costanti D ed E si ha:

$$\Delta H = \beta \frac{Q^2}{D^n} \cdot L' + \frac{\alpha U^2}{2g}$$

affinché  $\Delta H$  non cambi, si riduce la portata Q.

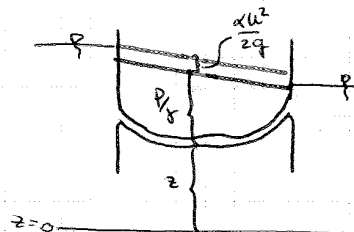
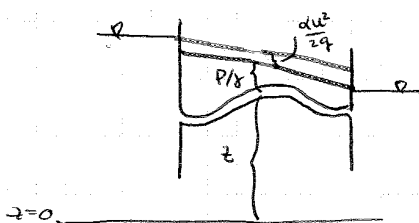
Diminuisce il termine cinetico e le rette di h e H si avvicinano:



la l.c.p. ruota attorno a B

la l.c.t. ruota attorno ad A

Se la curvatura è verso l'alto ho pressioni minori, infatti  $\frac{P}{\rho}$  è minore e viceversa

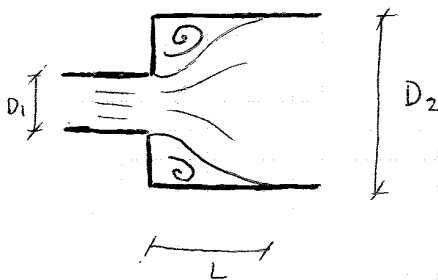


Se la sezione del condotto varia, ci sono perdite di energia localizzate. Il tratto  $l$ , in cui c'è il distacco di

vena, è dello stesso ordine di grandezza della discontinuità,  $(D_2 - D_1)$ .

In tale tratto si creano i vortici, responsabili della dissipazione di

energia. Posso vedere le correnti come lunghi tratti di moto uniforme alternate da brevi tratti in cui vi



è dissipazione di energia.

moltiplico tutto per  $\frac{1}{\rho}$ :

$$-\rho(z_2 - z_1) + \frac{\rho u_1}{g} - \frac{\rho u_2}{g} + \rho \left( \frac{P_1}{\rho} - \frac{P_2}{\rho} \right) = 0$$

$$-\rho \left[ \left( z_1 + \frac{P_1}{\rho} \right) - \left( z_2 + \frac{P_2}{\rho} \right) \right] = \frac{\rho}{g} (u_2 - u_1) \quad (*)$$

$\downarrow$   
 $> 0$

$< 0$  perché  $u_2 < u_1$

Il secondo membro è minore di zero e di conseguenza anche il primo. Ciò significa che nonostante la perdita di energia totale  $\Delta H$  si ha un recupero del carico piezometrico  $h_2 > h_1$ . Quindi non ho perso en. di pressione <sup>(P/ρ)</sup>, né potenziale <sup>(z)</sup> perché  $h_2 > h_1$ , ma ho perso energia cinetica infatti  $h_1 > h_2 \Rightarrow$  cioè  $\frac{\alpha u_2^2}{2g} < \frac{\alpha u_1^2}{2g}$

Per definizione so che  $\Delta H$  è pari a:

$$\Delta H = \left[ \left( z_1 + \frac{P_1}{\rho} \right) + \frac{\alpha u_1^2}{2g} \right] - \left[ \left( z_2 + \frac{P_2}{\rho} \right) + \frac{\alpha u_2^2}{2g} \right]$$

Sostituendo i valori trovati nell'eq. precedente (\*) ottengo:

$$\Delta H = \frac{1}{2g} (2u_2^2 - 2u_1u_2 + u_1^2 - u_2^2) = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \Delta H = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g} = n \cdot \frac{u_2^2}{2g}$$

$\frac{\rho}{2g} (u_2 - u_1) + \frac{\alpha u_1^2}{2g} - \frac{\alpha u_2^2}{2g}$   
 $\frac{u_2 - u_1}{2g} + \frac{\alpha(u_1^2 - u_2^2)}{2g}$

ossia il valore dell'energia dissipata localmente è uguale al termine cinetico della differenza delle velocità tra le sezioni di dissipazione.

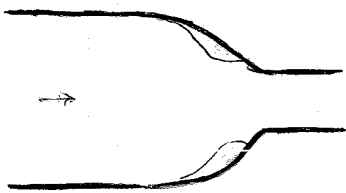
Questo è l'unico caso in cui posso calcolare e dimostrare il valore di  $\Delta H$ , in tutti gli altri casi non è possibile perché non conosco il valore della sezione contratta, ma comunque si è giunti a valori sperimentali di  $n$ .

- le bove prodotte urtando la parete erodono il materiale

la massima depressione possibile da raggiungere è  $\frac{P_{atm}}{\rho}$   
Quando raggiungo tale valore la portata nella sezione contratta non aumenta più anche se inclino maggiormente il tubo verso valle in modo da aumentare la velocità  $u_c$  (e quindi  $Q$ ).

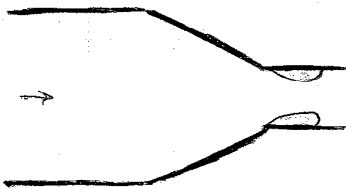
### - CONVERGENTI & DIVERGENTI

Vi sono vari metodi per raccordare una condotta con un'altra più piccola. Tra i quali:



Cercare di accompagnare la condotta in bove al movimento del fluido è una pessima idea perché:

- costi elevati
- distacco di vena nella zona di flesso

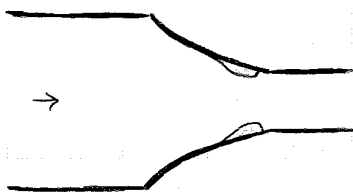


Utilizzo di un convergente è un'idea migliore:

- meno costoso
- distacco di vena in una sezione più piccola rispetto al caso precedente

In generale si cerca di portare il distacco di vena in zone in cui si hanno sezioni contratte più piccole e quindi  $u_c$  maggiori.

Altra possibile soluzione



Anche questo metodo è abbastanza efficiente, anche se è meglio l'utilizzo del convergente

zona costante dal punto di vista geometrico, si hanno perdite di carico distribuite. Le linee di carico mi permettono di graficare e comprendere come avvengono le perdite di energia. All'inizio, all'entrata del fluido nel tubo  $D_1$ , ho una dissipazione di  $0,5 \frac{u_1^2}{2g}$  per la causa della discontinuità geometrica. Poi ho un tratto costante, di diametro  $D_2$ , ho quindi una perdita di carico distribuita graficata da una retta con coefficiente angolare negativo. In questo tratto ho una dissipazione pari a  $i_1 \cdot L_1$ . La condotta, poi, subisce un'ulteriore discontinuità geometrica, si passa da  $D_1$  a  $D_2$  e quindi la LCT si abbassa di un valore pari a  $(u_1 - u_2)^2 / 2g$ . Nel serbatoio ② la LCT arriva con un termine cinetico pari a  $u_2^2 / 2g$ , quindi è più alta del pelo libero  $\rightarrow$  il serbatoio acquista energia. La LCP idrometrica sta al di sotto della LCT di un termine  $u_1^2 / 2g$  ed è // a LCT. Nel passaggio da  $D_1$  a  $D_2$  si ha un recupero di energia poiché il liquido decelera ed  ~~$u_1^2 / 2g$~~  il termine cinetico diminuisce quindi la LCP si avvicina alla LCT. Maggiore è la velocità della corrente e maggiore è l'energia dissipata, nel 1° tratto quindi essendo  $u_1 > u_2$  le linee dei carichi hanno maggiore pendenza.

Parto con un'energia pari a  $z_1$  ed arrivo con un'energia pari a  $z_2 + \frac{u_2^2}{2g}$ , la differenza tra queste energie è stata dissipata, dunque, facendo il bilancio:

$$z_1 - \left( z_2 + \frac{u_2^2}{2g} \right) = \underbrace{0,5 \frac{u_1^2}{2g}}_{\text{perdite localizzate}} + \underbrace{i_1 \cdot L_1}_{\text{perdite distribuite}} + \underbrace{\frac{(u_1 - u_2)^2}{2g}}_{\text{perdite distribuite}} + \underbrace{i_2 \cdot L_2}_{\text{perdite distribuite}}$$

scrivo  $u_1$  ed  $u_2$  in funzione della portata:

$$u_2 = \frac{Q}{\Omega_2} \quad ; \quad u_1 = \frac{Q}{\Omega_1}$$

coe noi dipende da noi

se ipotizzo il moto turbolento in tubo scabro, allora

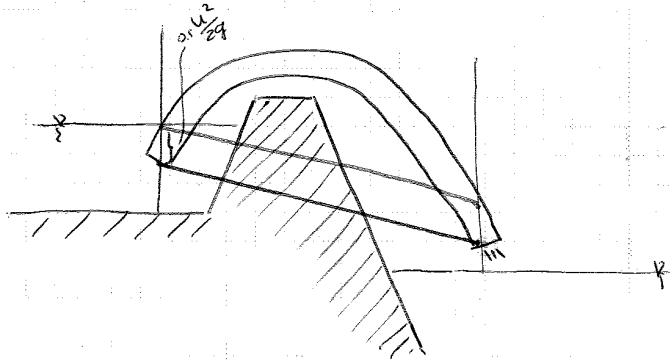
$$i_1 = \beta_1 \frac{Q^2}{D_1^n} \quad ; \quad i_2 = \beta_2 \frac{Q^2}{D_2^n}$$



Scende bruscamente in tale tratto perché la velocità aumenta e quindi il termine cinetico  $u^2/2g$  aumenta molto.

### es) CONDOTTA A CAVALIERI

C'è un fiume con un argine con il cortile pieno di acqua mentre il livello del fiume si è abbassato. Voglio svuotare



il cortile: metto una condotta a cavallo dell'argine ed innesco una depressione per avviare il moto.

Il carico piezometrico di valle è 0 perché  $p=0$  e dunque  $h=z$  la lcp perde subito nel condotto il termine cinetico a causa della discontinuità. L'acqua scorre nel tubo perché questo è in depressione e quindi la "risacca" avviando il moto, infatti il p.c. a sx è più in alto dell'uscita della condotta.

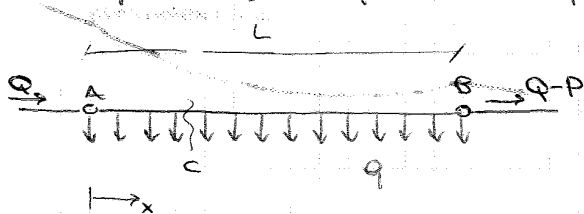
### → LUNGHE CONDOTTE

Nella pratica capita sovente di incontrare delle condotte in pressione di lunghezza rilevante, dell'ordine di centinaia/migliaia di metri  $L = O(10^2 - 10^3)m$ , rispetto al diametro. In queste, che vengono usualmente dette lunghe condotte, le perdite localizzate risultano di entità trascurabile rispetto a quelle distribuite dovute alla resistenza delle pareti. La relativamente modesta velocità del liquido defluente in queste condotte rende lecito trascurare l'altezza cinetica  $u^2/2g$  rispetto ai dislivelli piezometrici e perciò considerare coincidenti fra loro la linea dei carichi totali e piezometrici. L'unica linea con continuità viene chiamata piezometrica. È bene però precisare quanto deve essere  $L$  affinché si possano trascurare le perdite di carico localizzate. Il risultato dipende ovviamente anche dalla precisione che si

Bisogna tener conto che le lunghe condotte, salvo casi particolari, sono costituite con tubi commerciali e quindi con diametri fissati.  $\rightarrow$  non posso perciò scegliere un diametro qualsiasi a mio piacere. (x diametri da 100-250 mm la graduazione è di 25 mm, x diam. maggiori è di 50 mm)

CONDOTTA A DIAMETRO COSTANTE CON DISTRIBUZIONE UNIFORME

Consideriamo una condotta di diametro costante  $D$ . Lungo il tratto  $AB$  di lunghezza  $L$  si verificano erogazioni che per semplicità di calcoli vengono assimilate ad una erogazione uniforme distribuita, di portata  $q$  per unità di lunghezza, e quindi di portata complessiva  $P=q \cdot L$ .



Si ha perciò una portata entrante pari a  $Q$  ed una portata uscente pari a  $Q-P$ .

(Avendo supposto il diametro costante una diminuzione di portata equivale anche una diminuzione della velocità).  
Bisognerebbe tenerne conto, ma è una quantità trascurabile

Indichiamo con  $x$  la distanza di una generica sezione  $c$  dal punto iniziale  $A$ ; in essa la portata vale  $Q-qx$  e lungo il tratto di lunghezza  $dx$  compreso tra la sezione  $x$  e quella a valle  $x+dx$ , la piezometrica subirà un abbassamento pari a:

$$dH = i(x) \cdot dx = \beta (Q-qx)^2 D^{-n} dx$$

Il carico in funzione di  $x$  si ottiene quindi integrando:

$$\begin{aligned} H(x) &= H_A - \beta D^{-n} \int_0^x (Q-qx)^2 dx = \\ &= H_A - \beta D^{-n} x \left[ Q^2 + \frac{q^2 x^2}{3} - Qqx \right] \end{aligned}$$

la piezometrica quindi, come ci aspettavamo non va in modo lineare perché la portata varia, ma è costituita da un arco di parabola cubica (col concavità verso l'alto)