NUMERO: 592 DATA: 17/07/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Bellone

MATERIA: Analisi Matematica II + Eserc.
Prof. Camporesi

1 / 10 / 20

RICHIAMI SOMMATORIE

$$\sum_{k=1}^{n} d_k = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

Proprietà:

- se c non dipende da $k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} c\, d_k = c \sum_{k=1}^{n} d_k$

  in particolare $\sum_{k=1}^{n} c = c + c + c + c + \dots + c = n\, c$

- $\sum_{k=1}^{n} (d_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} d_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

- $\sum_{k=1}^{n} (d_{k+1} - d_k) = d_2 - d_1 + d_3 - d_2 + \dots + d_{n+1} - d_n = d_{n+1} - d_1$

Esempio della somma della PROGRESSIONE GEOMETRICA di ragione $x \in \mathbb{R}$:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \forall x \neq 1$$

Infatti

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^n)(1 - x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n - x - x^2 - x^3 - \dots - x^n - x^{n-1}$$
$$= 1 - x^{n+1}$$

oppure con Ruffini:

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

	1	0	0	0	.....	0	-1
1		1	1	1	.....	1	1
	1	1	1	1		1	0

Per definizione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \iff \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

La notazione è ragionevolmente:

$$\boxed{s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k}$$

ESEMPIO:

- Serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \quad \forall x \neq 1$$

Se $x = 1$: $s_n = n+1$

Ricordando che:

$$\lim_{n\to\infty} x^n \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } |x| < 1 \\ \nexists & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

E scrivendo $x^{n+1} = x \cdot x^n$ si ottiene

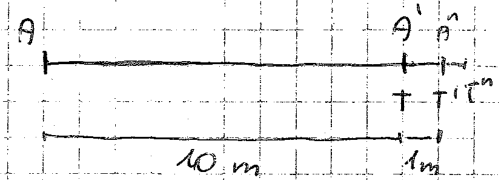
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} : \begin{cases} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } |x| < 1 \\ \nexists & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Vale dunque

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = \boxed{\frac{1}{1-x}} \quad \text{se } -1 < x < 1$$

PARADOSSO DI ZENONE



$v_A = 10\ m/s$

$v_T = 1\ m/s$

Per raggiungere la Tartaruga, Achille dovrà percorrere la distanza $10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 10 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n =$

$$= \cancel{10+1}\ 10 + \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 10 + \frac{10}{9} = \frac{100}{9}\ m$$

In effetti

$x_A(t) = 10t$

$x_T(t) = t + 10$

$$10t = t + 10 \Rightarrow 9t = 10 \Rightarrow t = \frac{10}{9}$$

RAPPRESENTAZIONE NUMERI DECIMALI

$$\underline{0,\bar{3}} = 0,3333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = 3\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots\right)$$

$$= 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 3\frac{x}{1-x} = 3\,\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \underline{\frac{1}{3}}$$

In genere ogni allineamento decimale è una serie (= somma di infinite frazioni decimali)

$x > 0$

$$x = d_0, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots d_n = d_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$$

$$s_1 = d_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$s_2 = d_1 + d_2 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}$$

$$s_3 = d_1 + d_2 + d_3 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Di qui si deduce che la serie di Mengoli CONVERGE a 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Si definisce TELESCOPICA una serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \quad \text{dove} \quad d_n = b_n - b_{n+1}$$

$$\Rightarrow s_1 = b_1 - b_2$$

$$s_2 = b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - b_3$$

$$s_3 = b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \cancel{b_3} - b_4$$

$$\vdots$$

$$s_n = b_1 - b_{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = b_1 - \lim_{n \to \infty} b_{n+1}$$

~~ESEMPIO~~

TEOREMA

I) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono due serie convergenti con somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = t \in \mathbb{R}$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ è convergente e ha somma $s+t$

II) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a $s \in \mathbb{R}$ e se $c \in \mathbb{R}$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n$ converge e ha somma $c \cdot s$

Il teorema afferma che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergono allora valgono:

- $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

- $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

e in generale $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

cioè due serie convergenti si possono sommare, sottrarre o combinare linearmente termine a termine

ESEMPI

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n \right] = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{8} + \frac{1}{125} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{13}{4}$$

Il teorema si può estendere al caso in cui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e/o $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergono, cioè se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}^*$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = t \in \mathbb{R}^*$ $[\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$ esteso $= \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}]$ allora continuano a valere $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ oppure $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ oppure $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ esclusi i casi in cui a destra si ottengono forme indeterminate del tipo, ad esempio, $-\infty + \infty$.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)n} + 3^n\right] = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}}_{\text{converge a } 1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 3^n}_{\text{diverge a } +\infty} = 1 + \infty = +\infty$$

Trova l'errore

$x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{x-1}$$

$$= \frac{1-x}{1-x} = 1$$

L'errore è nel trattare la somma con l'algebra in modo sbagliato perchè una somma diverge e l'altra converge la condizione " $a_n \to 0$ " è SOLO NECESSARIA ma non sufficiente, cioè se $a_n \to 0$ non è detto che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}$ converge

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$$

però $a_n = \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \lg 1 = 0$

Vedremo che la serie armonica [somma dei reciproci dei numeri naturali] diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots \longrightarrow +\infty$$

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

Proposizione: se $a_n \geq 0 \ \forall n$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o converge o diverge ma non può essere oscillante

Dimostrazione:

La successione delle somme parziali

$$S_{n+1} - S_n = \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq 0$$

S_n crescente e $S_{n+1} \geq S_n \Rightarrow$ per il teorema sui limiti di successioni monotone esiste sempre $S = \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o converge o diverge

8/10/12

Esempi

1 - $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{5^n \lg n}$

$\frac{1}{5^n \lg n} \overset{?}{\leq} \frac{1}{5^n} \iff \frac{1}{\lg n} \leq 1 \iff \lg n \geq 1 \iff n \geq e$

$\iff n \geq 3$

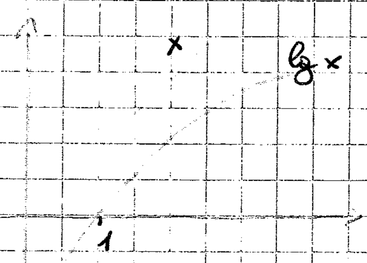
La relazione è vera e converge perché è maggiorata da $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

2 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{3^n + n}$

$|\operatorname{sen} n| \leq 1 \implies \frac{|\operatorname{sen} n|}{3^n + n} \leq \frac{1}{3^n + n} \leq \frac{1}{3^n}$

La somma converge perché è maggiorata da $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3 - $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lg n}$



$\lg x < x \quad \forall x > 0$

$\frac{1}{\lg n} > \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2$

La serie diverge perché è maggiorata da $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

5- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ infatti

$n(n+1) \leq 2n^2 \iff n^2+n \leq 2n^2 \iff n^2-n \geq 0$

$\iff n(n-1) \geq 0$ vera $\forall n \geq 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge perché maggiorata da due volte la serie di Mengoli.

Eulero ha dimostrato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \simeq 1{,}6449340668482\dots$$

n	S_n
1	1
2	1,25
10	1,54976...
100	1,6349839...
1000	1,64393456...
...	...

Sommando 1000 termini, ovvero calcolando S_{1000} si ha un valore della somma corretto solo fino alla II^a cifra decimale.

TEOREMA (criterio di McLaurin)

Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ funzione positiva e decrescente. Allora l'integrale improprio

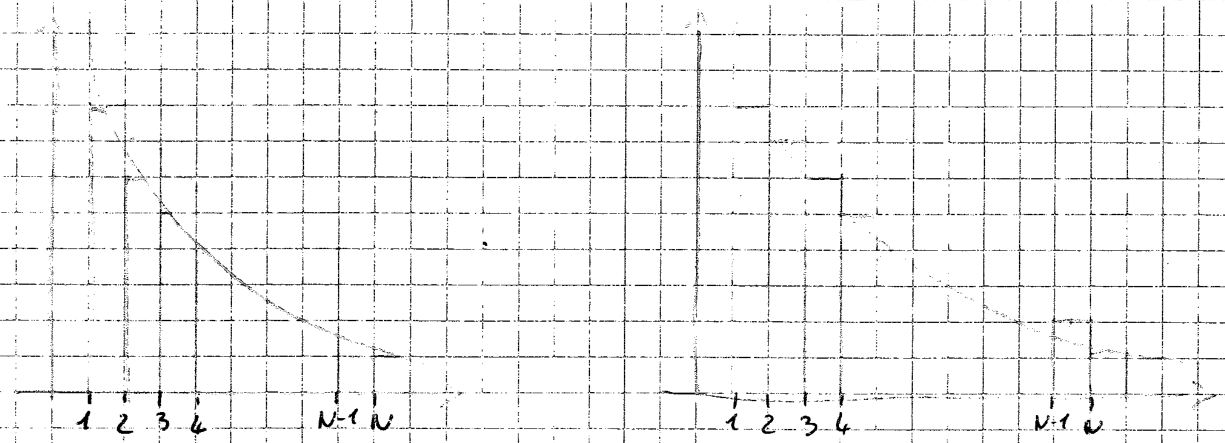
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

<u>hanno lo stesso comportamento</u>, cioè sono entrambi convergenti o divergenti

Dimostrazione



Poiché f è decrescente, se $n \le x \le n+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(n+1) \le f(x) \le f(n)$

Integro tra n e $n+1$

$$f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le f(n) \qquad \text{ovvero:}$$

$$f(2) \le \int_1^{2} f(x)\,dx \le f(1) \qquad n=1$$

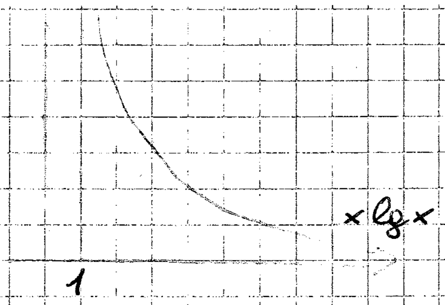
$$f(3) \le \int_2^{3} f(x)\,dx \le f(2) \qquad n=2$$

$$f(4) \le \int_3^{4} f(x)\,dx \le f(3) \qquad n=3$$

$\vdots$

2- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \lg n}$

$f(x) = \frac{1}{x \lg x}$



Si vede che f è decrescente in $[1, +\infty)$ e positiva

La serie si comporta come $\cancel{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \lg x}}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \lg x} = \Big[\lg(\lg x)\Big]_2^{+\infty} = \lim_{x \to \infty} \lg(\lg x) - \lg(\lg 2) = +\infty$$

La serie quindi <u>diverge</u>

3- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \lg^2 n}$ si comporta come

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \lg^2 x}\, dx = \left[-\frac{1}{\lg x}\right]_2^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{\lg x}\right)}_{0} + \frac{1}{\lg 2}$$

La serie <u>converge</u>

4- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\lg n)^\alpha}$ $\begin{cases} \text{converge} & \alpha > 1 \\ \text{diverge} & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$

TEOREMA

1) Sia $a_n > 0$, $b_n > 0$ $\forall n$ e sia $a_n \sim b_n$ con $n \to \infty$ ($\sim$ = equivalente cioè $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$) Allora le due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento cioè o entrambe divergono o convergono.

3 - $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{2}}{n^{1/2}}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < 1$ la serie quindi divergere

4 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + \operatorname{sen} n}{2n^3+n^2+n+7}$

$$\cancel{d_n =} \quad d_n = \frac{n\left(3 + \cancel{\frac{\operatorname{sen} n}{n}}^{0}\right)}{n^3\left(2 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^2}\right)} \sim \frac{3n}{2n^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

0

$2 > 1$ la serie converge

5 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n+n^{3/2}}$

$$d_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n+n^{3/2}} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{n^{3/2}} \qquad \frac{3}{2} > 1 \text{ la serie converge}$$

6 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{n^2+1}$

$$d_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{n^2+1} = \frac{e}{n^2+1} \sim \frac{e}{n^2} \qquad 2 > 1 \text{ la serie}$$

converge

7 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

$$\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n!}{(n+1)(n+2)\,n!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^2}$$

$- \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \qquad e^x - 1 \sim x \quad \text{per } x \to 0$

$1 - e^{\frac{1}{n}} \sim -\left(-\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \Rightarrow \text{diverge}$

$- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} - 1\right) \qquad (1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x \quad \text{per } x \to 0$

$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/3} - 1 \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{converge}$

$- \sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$

$\lg\left(\frac{n+2+1}{n+2}\right) = \lg\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \sim \frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n} \Rightarrow \text{diverge}$

$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$

$\frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2n} \Rightarrow \text{diverge}$

$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\lg n}} \qquad \text{generalmente: } a^{\lg b} = e^{\lg b \lg a} = b^{\lg a}$

$2^{\lg n} = e^{\lg n \lg 2} = \left(e^{\lg n}\right)^{\lg 2} = n^{\lg 2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lg 2}} \qquad \lg 2 < 1 \iff 2 < e \Rightarrow \text{converge}$

TEOREMA (criterio della radice)

Sia $a_n \geq 0 \quad \forall n$ ed esiste

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Allora:

1 - Se $\ell > 1$ (incluso $+\infty$) la serie diverge

2 - Se $\ell < 1$ (incluso $\ell = 0$) la serie converge

3 - Se $\ell = 1$ caso dubbio, il criterio è inefficace

TEOREMA (criterio del rapporto)

Sia $a_n > 0 \quad \forall n$ ed esiste

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Allora

1 - Se $\ell > 1$ (incluso $\ell = +\infty$) la serie diverge

2 - Se $\ell < 1$ (incluso $\ell = 0$) la serie converge

3 - Se $\ell = 1$ caso dubbio

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n > \bar{n} \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - \ell| < \varepsilon$$

$$\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$$

Sia $\ell > 1$ prendo ε piccolo tale che $\ell - \varepsilon > 1$

$$(\ell - \varepsilon)^n < a_n < (\ell + \varepsilon)^n \quad \text{quindi } a_n > (\ell - \varepsilon)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n > \sum_{\bar{n}}^{\infty} (\ell - \varepsilon)^n = +\infty$$

Se $\ell < 1$ prendo ε tale che $\ell + \varepsilon < 1 \quad a_n < (\ell + \varepsilon)^n$

5- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$

$$\sqrt[n]{\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}} = \frac{(2n-1)^{1/2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{n}\left(2-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ converge}$$

6- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$

$$\sqrt[\cancel{n}]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{\cancel{n}}} = \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1 \text{ converge}$$

7- $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 3^{-\sqrt{n}}$

$$\sqrt{2^n \cdot 3^{-\sqrt{n}}} = 2 \cdot 3^{-\frac{\sqrt{n}}{n}} = 2 > 1 \text{ diverge}$$

II^e dimostrazione:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \cdot 3^{-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{n\lg 2 - \sqrt{n}\lg 3} = \lim_{n\to\infty} e^{n\left(\lg 2 - \frac{\sqrt{n}}{n}\lg 3\right)} =$$

$$= e^{+\infty} = +\infty$$

8- $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

$$\sqrt[\cancel{n}]{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\cancel{n}}} = 1-\frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} \to 1 \text{ caso dubbio}$$

Controlliamo se $a_n \to 0$ oppure no

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \to \left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1$$ diverge per la condizione necessaria

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^\alpha ; \left(1+\frac{\alpha}{b_n}\right)^{b_n} \to e^\alpha \text{ se } b_n \to \pm\infty$$

ESEMPI CON IL RAPPORTO

1 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1 \qquad \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$

2 - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1 \text{ converge}$$

In generale se $x > 0$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{(n+1)} \to 0 < 1 \quad \text{converge}$$

Notiamo che dalla condizione necessaria di convergenza segue che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

3 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\frac{(n+1)^5}{(n+1)!}}{\frac{n^5}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \cdot \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = 0 < 1 \text{ converge}$$

In questo caso si adopera la formula di stirling che fa una stima del fattoriale con n grande

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

perciò:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ con il confronto asintotico diventa

$$\frac{e^n n!}{n^n} \sim \frac{e^n n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n^n} = \sqrt{2\pi n} \quad \text{diverge}$$

15/10/12

SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALSIASI

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie in cui i termini a_n hanno segno arbitrario. Il primo criterio che si tenta di applicare è:

TEOREMA (della convergenza assoluta)

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e inoltre vale

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad *$$

Dimostrazione:

Definiamo $a_n^+ = \max(a_n, 0)$ $\begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$

$$a_n^- = \max(-a_n, 0) \quad \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

basta osservare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-)$$

da questo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-) \geq \sum_{n=0}^{\infty} (-a_n^+ - a_n^-) = -\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Definizione

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se la serie dei valori assoluti converge.

Si ~~dice~~ dice invece che $\sum_{n=0} a_n$ è ~~so~~ convergente solo semplicemente (o non assolutamente) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge mentre $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Il teorema è da intendersi in un'unica direzione:

$$\sum_{n=0} |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0} a_n \text{ converge}$$

L'implicazione opposta non vale!

Esempio tipico di serie che converge semplicemente è la serie armonica a segni alterni.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \dots$$

Vedremo che questa converge, mentre

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

5) Serie esponenziale con $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Si era visto che se $x > 0$ questa serie converge per il criterio del rapporto.

Se $x < 0$

$a_n = \frac{x^n}{n!}$ $\quad |a_n| = \frac{|x|^n}{n!}$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x^n|}{n!}$ converge

La serie esponenziale converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$

6) Le seguenti serie (con $x \in \mathbb{R}$)

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

convergono assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$ Infatti:

I° serie:

$|a_n| = \left| \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \right| = \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ usando il criterio del rapporto $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ si ottiene:

$$\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{2n!}{|x|^{2n}} = \frac{|x|^2 \cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{2n!}} \longrightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

- Differenza tra una serie convergente assolutamente o solo semplicemente:

TEOREMA (criterio di LEIBNIZ)

Data la serie a segni alterni $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} d_n$ con $d_n > 0 \ \forall n$, se la successione d_n è decrescente e tende a 0 allora la serie converge

ESEMPI

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

converge per LEIBNIZ perché la successione d_n tende a 0 e inoltre $d_{n+1} \leq d_n$ perché $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \ \forall n$

Vedremo che la sua somma è $S = \lg 2$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$

$d_n = \frac{1}{n^\alpha} \longrightarrow 0 \qquad \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow (n+1)^\alpha \geq n^\alpha \ \forall n \in \mathbb{N}$

per LEIBNIZ questa converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge assolutamente se } \alpha > 1 \\ \text{converge semplicemente se } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Dimostrazione del criterio di Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} d_n = d_1 - d_2 + d_3 - d_4 + d_5 - d_6$$

Consideriamo le somme parziali di indice pari S_{2n} e dispari S_{2n+1}

$$\left.\begin{aligned} S_{2n} &= d_1 - d_2 + d_3 - d_4 + \dots + d_{2n-1} - d_{2n} \\ S_{2n+1} &= d_1 - d_2 + d_3 - d_4 + \dots - d_{2n} + d_{2n+1} \end{aligned}\right\} **$$

s_{2n+1} è monotona decrescente e limitata inferiormente essendo tutte le $s_{2n+1} \geq s_2$ se

$$\exists\ s'' = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} \in \mathbb{R}$$

Passando al limite in $\boxed{1}$ per $n \to \infty$ si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s'' = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = s' + 0$$

$$\Rightarrow s'' = s'$$

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{n^2+n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+n} = 0$$

$$a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n \Rightarrow \frac{n+1-1}{(n+1)^2+n+1} \leq \frac{n-1}{n^2+n} \Leftrightarrow n(n^2+n) \leq (n-1)((n+1)^2+n+1)$$

$$\Leftrightarrow n^2\cancel{(n+1)} \leq (n-1)\cancel{(n+1)}(n+2) \Leftrightarrow n^2 \leq (n-1)(n+2)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{n^2} \leq \cancel{n^2} + 2n - n - 2 \Leftrightarrow n \geq 2$$

Vero $\forall n \geq 2 \Rightarrow$ converge

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(\sqrt[n]{3} - 1)$

$$a_n = \sqrt[n]{3} - 1 = 3^{\frac{1}{n}} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{n+1}} \cancel{-1} \leq 3^{\frac{1}{n}} \cancel{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \quad \text{Vero } \forall n$$

converge per il criterio di LEIBNIZ. Non assolutamente perché

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} (3^{\frac{1}{n}} - 1) \Rightarrow 3^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n} \lg 3$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+\operatorname{sen} n}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n+\operatorname{sen} n}$

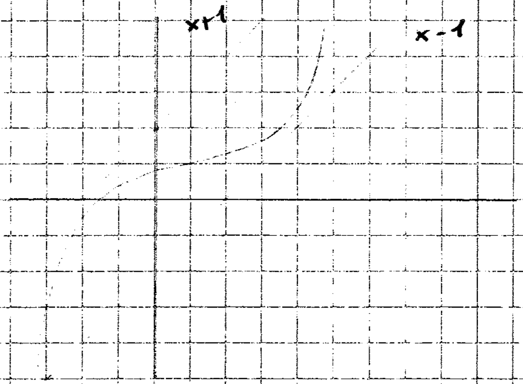
$a_{n+1} \leq a_n \quad = \frac{1}{(n+1)+\operatorname{sen}(n+1)} \leq \frac{1}{n+\operatorname{sen} n}$

$\cancel{n}+1 \operatorname{sen}(n+1) \geq \cancel{n}+\operatorname{sen} n \Rightarrow 1 \geq \operatorname{sen} n - \operatorname{sen}(n+1)$ non ovvio

$f(x) = \frac{1}{x+\operatorname{sen} x} \qquad g(x) = x + \operatorname{sen} x$

$g'(x) = 1 + \cos(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow g$ cresce strettamente

$x-1 \leq g(x) \leq x+1$

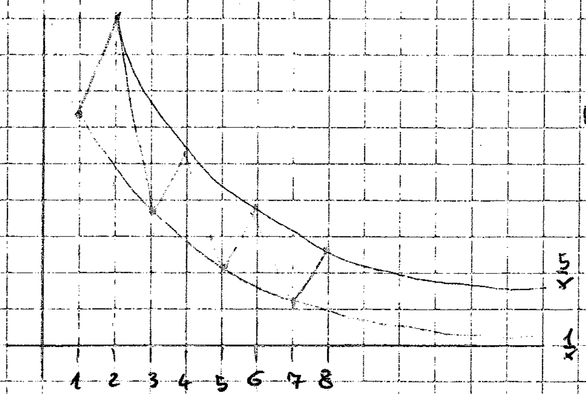


f strettamente decrescente, la successione $\frac{1}{n+\operatorname{sen} n}$ è decrescente, la serie decresce per Leibniz.

<u>Se $a_n \to 0$ ma non è decrescente, la serie potrebbe non convergere</u>

3) $\sum_{n=1}^{n} (-1)^{n-1} a_n$

$a_n \begin{cases} \frac{5}{n} & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n} & n \text{ dispari} \end{cases}$



$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

ma a_n NON DECRESCE!

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3+(-1)^n}} \right| = \frac{1}{n^{3+(-1)^n}} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{converge assolutamente}$$

Approssimazione della somma s di una serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 \ldots$$

$s_2 \quad s_4 \quad s_6 \quad s_{2n} \quad s \quad s_{2n+1} \quad s_5 \quad s_3 \quad s_1$

$s - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$

$s_{2n-1} - s \leq s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n}$

da questo si ottiene: $|s - s_n| \leq a_{n+1} \quad \forall n$

L'errore che si commette approssimando la somma s con s_n, cioè $R_n = |s - s_n|$, è minore o uguale ad a_{n+1} cioè il valore assoluto del primo termine trascurato in s_n, cioè

$$|(-1)^{n-1} a_{n+1}| = a_{n+1}$$

$\Rightarrow$ per calcolare s con un errore prefissato $\varepsilon > 0$ è sufficiente richiedere che $a_{n+1} < \varepsilon$

Questo risulterà $n > \bar{n}$ $(\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon))$ e quindi approssimando s con $s_{\bar{n}+1}$ sono sicuro che l'errore $|s - s_{\bar{n}+1}| < \varepsilon$

ESEMPI

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots$$

Calcolare s con errore $< \frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$

3) Stimare con errore $< \frac{1}{10}$

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\lg n} \quad \text{oppure} \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\lg(\lg(n))}$$

$$\frac{1}{\lg(n+1)} < \frac{1}{10} \Rightarrow \lg(n+1) > 10 \Rightarrow n+1 > e^{10} \Rightarrow n \geq \lceil e^{10} \rceil \cong 22026$$

$S \cong S_{22026}$

$$\frac{1}{\lg(\lg(n+1))} < \frac{1}{10} \Rightarrow \lg(\lg(n+1)) > 0 \Rightarrow \lg(n+1) > e^{10} \Rightarrow n+1 > e^{e^{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq \lceil e^{e^{10}} \rceil \cong \lceil e^{22026} \rceil \cong \lceil 10^{\frac{22026}{\lg 10}} \rceil \cong 10^{9565}$$

$e = 10^{\lg_{10} e} = 10^{\frac{1}{\lg 10}}$

ESERCIZI VARI

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+3n+5}$ vedo se converge assolutamente

$$\left| (-1)^{n-1} a_n \right| = \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+3n+5} \sim \frac{\pi}{2n^2} \Rightarrow \text{converge assolutamente!}$$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\lg n}}$

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\lg n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\lg n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$ perché $\lg \sqrt{n} < \sqrt{n}$ $\rightarrow$ non converge assolutamente

leibniz $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lg n}} \rightarrow 0$ è decrescente perché

$$\frac{1}{\sqrt{\lg(n+1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\lg n}} \Leftrightarrow \sqrt{\lg(n+1)} \geq \sqrt{\lg n} \Leftrightarrow \lg(n+1) \geq \lg n$$

vero $\forall n$

$\rightarrow$ converge

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ possono avere lo stesso comportamento. Ad esempio può succedere che $a_n, b_n \to 0$, a_n decrescente ma b_n non decrescente e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ convergente mentre $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ divergente.

ESEMPIO

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} & n \text{ pari} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

a_n è sempre > 0 $\forall n \geq 2$ $\quad a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \; (n \to \infty)$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ decrescendo

$\Rightarrow$ anche $a_n \to 0$ però a_n non è decrescente (come si dimostra)

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}}_{\Downarrow \; l \in \mathbb{R}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\Downarrow \; +\infty} = -\infty$$

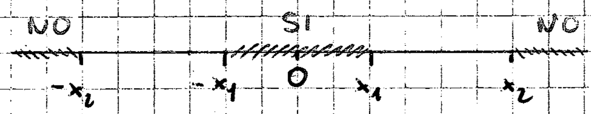
quindi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = -\infty$ mentre $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ converge con $b_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Notiamo che la ① converge sicuramente in $x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \in A$

TEOREMA 1:

Se la serie ① converge in un punto $x_1 \neq 0$ allora essa <u>converge assolutamente</u> $\forall x : |x| < |x_1|$.

Se la ① non converge in un punto $x_2 \neq 0$ allora essa <u>non converge</u> $\forall x : |x| > |x_2|$



La convergenza di x_1 fa "guadagnare" la convergenza nei punti x tali che $-x_1 < x < x_1$; la non convergenza in un punto x_2 mi fa "perdere" la convergenza nei punti x tali che $x > |x_2|$ oppure $x < -|x_2|$

Dimostrazione

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ converge con $x_1 \neq 0$

$a_n x_1^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow$ è limitata $\Rightarrow \exists M : |a_n x_1^n| \leq M \ \forall n$

$$|a_n x^n| = \left| a_n \frac{x^n}{x_1^n} x_1^n \right| = |a_n x_1^n| \left| \left(\frac{x}{x_1} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ è <u>maggiorata</u> da $M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$

$\Rightarrow$ converge se $\frac{x}{x_1} < 1$ cioè se $|x| < |x_1|$

$(-R, R)$ = intervallo di convergenza

L'insieme di convergenza A può essere

$A = (-R, R)$, $A = [-R, R]$, $A = [-R, R)$, $A = (-R, R]$

a seconda dei casi.

Per la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, posto $R = \sup\{x : \text{converge}\}$

vale l'analogo, cioè:

1) $R = 0 \Rightarrow A = \{x_0\}$

2) $R = +\infty \Rightarrow A = \mathbb{R}$

3) $R > 0 \Rightarrow$ converge per $|x - x_0| < R$ cioè $x_0 - R < x < x + R$

1° Problema: dato $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ calcolare R

TEOREMA 3 (calcolo della radice)

Se esiste

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (\geq 0)$$

1) Se $l = +\infty \Rightarrow R = 0$

2) Se $l = 0 \Rightarrow R = +\infty$

3) Se $l > 0 \Rightarrow R = 1/l$

Quindi in ogni caso $R = \dfrac{1}{l}$ intendendo che

$\dfrac{1}{\infty} = 0$ e $\dfrac{1}{0} = \infty$

TEOREMA 4 (criterio del rapporto)

Se esiste

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad (\geq 0)$$

(dove gli a_n si assumono tutti $\neq 0$)

2) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad a_n = 1 \ \forall n \quad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{1} = 1$

$\Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$ la serie non convergerà né per $x = 1$ né per $x = -1$ $\Rightarrow A = (-1, 1)$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \left[a_n = \frac{1}{n} \right] \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$

↳ criterio della radice

$\Rightarrow R = 1$; Agli estremi:

- $x = 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge
- $x = -1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (LEIBNIZ)

$\Rightarrow A = [-1, 1)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad a_n = \frac{1}{n^2} \quad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \rightarrow 1$

$\Rightarrow R = 1$; agli estremi

- $x = 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge
- $x = -1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge

$\Rightarrow A = [-1, 1]$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{a_n} = n + 1 \rightarrow \infty$

$\Rightarrow R = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\Rightarrow A = \{0\}$

$\Rightarrow |x|^4 < 3 \Rightarrow |x| < \sqrt[4]{3}$

$\Rightarrow R = \sqrt[4]{3}$ Agli estremi

$x = \pm\sqrt[4]{3} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (\pm\sqrt[4]{3})^{4n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge

$\Rightarrow A = (-\sqrt[4]{3}, +\sqrt[4]{3})$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{5^n + n3^n}$

I° metodo) $2x+1 = t$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{5^n+n3^n}$ $\quad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{5^n+n3^n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{5^n\left(1+\frac{n3^n}{5^n}\right)}} = \frac{1}{5} \frac{1}{\left(1+\frac{n}{\left(\frac{5}{3}\right)^n}\right)^{\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{5}$

$\Rightarrow R' = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5 \Rightarrow$ in t converge per $|t| < 5$

cioè $|2x+1| < 5 \Rightarrow \left|x+\frac{1}{2}\right| < \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}-\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$

$\Rightarrow -3 < x < 2$

II° metodo)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n+n3^n}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ [centrate in $x_0 = -\frac{1}{2}$]

$s = x + \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n+n3^n} s^n \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{2^n}{5^n+n3^n}} = \frac{2}{5} \frac{1}{\left(1+\frac{n3^n}{5^n}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$ converge per $|x-x_0| < R$

cioè $\left|x+\frac{1}{2}\right| < \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}-\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(\frac{n+2}{n}\right) x^n$$

$d_n = \lg\left(\frac{n+2}{n}\right) = \lg\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n} \Rightarrow$ ~~ha~~ ha lo stesso R della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x^n$

$$\sqrt[n]{d_n} = \sqrt[n]{\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{1} = 1$$

$\Rightarrow R = 1$; Agli estremi

- $x = 1 \to \sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(\frac{n+2}{n}\right)$

$$\lg\left(\frac{n+2}{n}\right) = \lg\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n} \text{ diverge}$$

- $x = -1 \to \sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(1+\frac{2}{n}\right)(-1)^n$ converge Leibniz

$$\lg\left(1+\frac{2}{n+1}\right) \leq \lg\left(1+\frac{2}{n}\right) \Leftrightarrow 1+\frac{2}{n+1} \leq 1+\frac{2}{n}$$

25/10/12

OPERAZIONI SU SERIE DI POTENZE

TEOREMA

Date le due serie di potenze, $\sum_{x=0}^{\infty} d_n x^n$ con raggio $R_1 \geq 0$ e $\sum_{x=0}^{\infty} b_n x^n$ di raggio $R_2 \geq 0$, la serie cosiddetta somma è

$$\sum_{x=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{con } c_n = d_n + b_n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = (d_0+d_1x+d_2x^2+d_3x^3+\dots)(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$$

$$= d_0b_0 + (d_0b_1+d_1b_0)x + (d_0b_2+d_1b_1+d_2b_0)x^2 +$$

$$+ (d_0b_3+d_1b_2+d_2b_1+d_3b_0)x^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{dove}$$

$$c_0 = d_0 b_0$$

$$c_1 = d_0b_1 + d_1b_0$$

$$c_2 = d_0b_2 + d_1b_1 + d_2b_0$$

$$\vdots$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_k b_{n-k} \quad * \quad \text{serie prodotto}$$

TEOREMA

Se $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ ha raggio R_1 e $\sum b_n x^n$ ha raggio R_2, allora la serie prodotto $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ha raggio $R \geq \min(R_1, R_2)$

Dette inoltre $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ vale che la somma della serie prodotto vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x)g(x) \quad \forall x \in (-R, +R)$$

ESEMPIO (esponenziale)

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$E(x)\,E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k} = \frac{1}{n!}\cdot 2^n$$

Posto che $E(1) = e$ si dimostra che

$$E(x) = e \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

Una funzione $f(x)$ che è la somma di una serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ definita almeno per $|x| < R$ o anche $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ definita tra $|x - x_0| < R$ si chiama <u>FUNZIONE ANALITICA</u>

<u>Proprietà</u>

TEOREMA

Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, allora f è una funzione continua $\forall x \in (-R, R)$ cioè ~~per~~ $\forall x_0 \in (-R, R)$ vale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to x_0} a_n x^n$$

dunque il limite si può portare dentro la somma calcolando il limite termine a termine.

Agli estremi:

- $x_0 = R$: se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ <u>converge</u> allora vale

$$\lim_{x \to R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

- $x_0 = -R$ se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ <u>converge</u> allora vale

$$\lim_{x \to -R^+} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$$

Ponendo $x=0$ e $k=1 \Rightarrow \underline{f(x)=e^x \quad \forall x}$

2) $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad ch(x) \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$sh(x) = \frac{1}{2}\left\{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \dots\right)\right\} =$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$Sh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left\{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \dots\right)\right\} =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3) $a^x = e^{x \lg a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \lg a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lg a)^n}{n!} x^n \quad \forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

4) $x^\alpha = e^{\alpha \lg x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \lg x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\lg x)^n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

5) $\forall x \in \mathbb{R}$ sia

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

6) Per $z \in \mathbb{C}$ definiamo $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Poniamo $z = ix$ con $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} \dots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots\right) =$$

$$= \cos(x) + i\,\text{sen}(x)$$

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos(x) + i\,\text{sen}(x) \\ e^{-ix} = \cos(x) - i\,\text{sen}(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \\ \text{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

FORMULE DI EULERO

$z = x + iy$

$\Rightarrow e^z = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y)$

7) $\forall x \in (-1, 1)$ sia

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$$

Questa ha raggio 1 infatti

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \longrightarrow \quad R = \frac{1}{1} = 1$$

Converge per $x = 1$, diverge per $x = -1$

$A(-1, 1]$

$$L'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{d}{dx} A(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\operatorname{arctg}(x) - A(x)) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}(x) = A(x) + K$$

se pongo $x = 0 \Rightarrow K = 0$

TEOREMA

$\forall x \in (-1,1)$

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Poiché la serie converge anche per $x = \pm 1$, dal teorema della continuità di una serie di potenze

$$\lim_{x \to 1^-} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \Rightarrow \pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots\right)$$

Iterando il teorema di derivazione per serie si ha

TEOREMA

Sia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

una funzione analitica per $|x| < R$. Allora $f \in C^\infty(-R,R)$ cioè ha derivate di ogni ordine in ogni punto $x \in (-R,R)$. Inoltre si ha

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n$$

cioè se vale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \forall x \in (-\delta, \delta)$ allora esse sono identiche cioè $a_n = b_n \ \forall n$ Dunque la rappresentazione di una funzione analitica come serie di potenze è unica

Dimostrazione

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ per $-\delta < x < \delta$ si ha

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n = b_n$$

ESEMPIO

Supponiamo che la funzione $\sqrt{1+x}$ si possa riscrivere come serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergente in un intorno di $x=0$ $\Rightarrow$ moltiplicandola per se stessa si avrà:

$$(1+x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) =$$
$$= a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (2a_0 a_2 + a_1^2) x^2 + (2a_0 a_3 + 2a_1 a_2) x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0^2 = 1 \\ 2a_0 a_1 = 1 \\ 2a_0 a_2 + a_1^2 = 0 \\ 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 = 0 \\ \vdots \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1/2 \\ a_2 &= -1/8 \\ a_3 &= 1/16 \end{aligned}$$

TEOREMA (interpretazione per serie)

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

Sia una funzione analitica definita per $|x| < R$

Ex $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$

3) Data $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n$

a) calcolare il raggio di convergenza

b) calcolare $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

c) Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$

a - $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n+1}{2^n}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{n+1} \to \frac{1}{2}$ $\quad R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

estremi:

- $x = 2$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} 2^n \to +\infty$

- $x = -2$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^n} 2^n$ non converge

converge per $-2 < x < 2$

b - $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \int_0^x t^n\,dt =$

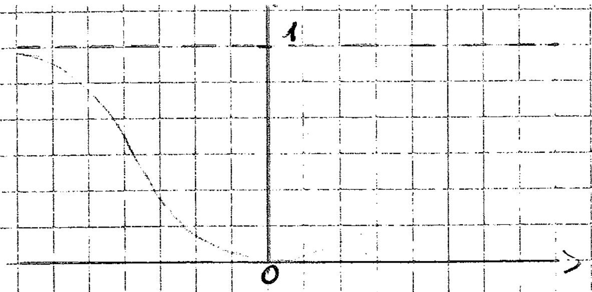
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n} = x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n =$$

$$= x \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2x}{2-x}$$

c - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = f(1)$,

$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} \frac{2x}{2-x} = \frac{2(2-x) - 2x(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4}{(2-x)^2}$ $\quad \forall x \in (-2,2$

$f(1) = 4$



f è continua in x_0:

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = 0 = f(0)$$

Inoltre $\exists f'(0)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$\frac{1}{x^2} = t \; ; \; x \to 0 \; ; \; t \to \infty$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \lim_{t\to\infty} e^{-t}\sqrt{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{e^{t}} = 0$$

$\Rightarrow f'(0) = 0$

In generale si dimostra che

$$\exists f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

La serie di McLaurin di f è ∞

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

dunque la somma di tale serie è diversa da $f(x)$ per $x\neq 0$

Definizione

Data $f\in C^{\infty}(I)$ e $x_0\in I$, si dice che f è sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0

se la serie:

tende a zero per $n \to \infty$, cioè $\Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,x_0,f^{(n)}} = 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \quad \delta>0$$

Dimostrazione

Infatti passando al limite nella ① per $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,x_0,f^{(n)}} = \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - P_{f,x_0,f^{(n)}}\right) = f(x) - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$= f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Da questo segue la tesi

TEOREMA

Sia f un $f \in C^{\infty}(I)$ ed esiste una costante $M>0$:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora fissato un punto x_0 interno a I, f è sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0 e converge a $f(x)$ $\forall x \in I$. La stessa tesi vale più in generale $M, K > 0$:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \cdot K^n \quad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione

Dati $x_0, x \in I$, applico la formula di Taylor col resto di Lagrange all'ordine n, cioè:

$$R_{n,x_0,f^{(n)}} = f(x) - P_{n,x_0,f(x)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$$

dove $c = c(x_0, x, n, f)$ è un punto compreso tra x_0 e x

Allo stesso modo si possono riottenere gli sviluppi già visti in serie di McLaurin delle funzioni elementari.

Un altro sviluppo importante è quello binomiale

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \,,\quad \binom{\alpha}{1} = \alpha \,,\quad \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \,,\quad \ldots$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} =$$

= coefficiente binomiale generalizzato

Serie binomiale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Ricordiamo che il polinomio di McLaurin di ordine n della funzione $(1+x)^\alpha$ è proprio

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

TEOREMA

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, allora:

1) La serie binomiale ha raggio di convergenza $R=1$

2) Se $|x|<1$ vale che $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ è $(1+x)^\alpha$

Dimostrazione

1) Applico il criterio del rapporto alla serie binomiale

TEOREMA

1) Se $\alpha \geq 0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ converge anche per $x = 1$ e $x = -1$ $(\alpha, 2^\alpha, 0)$

2) $-1 < \alpha < 0$ converge per $x = 1$ ma non per $x = -1$

3) $\alpha \leq -1$ non converge né per $x = 1$ né per $x = -1$

OSSERVAZIONE

Se $\alpha \in \mathbb{N}$, la serie binomiale di $(1+x)^\alpha$ si riduce allo sviluppo del binomio di Newton

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

In questo caso vale $\binom{\alpha}{n} = 0$ per $n = \alpha+1, \alpha+2, \alpha+3$

ESEMPIO $\alpha = 4$

la serie termina al termine $\binom{\alpha}{\alpha} x^\alpha$

cioè si riduce a un polinomio

OSSERVAZIONE

Se $\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha < 0$ cioè $\alpha = -1, -2, -3 \ldots$

lo sviluppo binomiale di $(1+x)^\alpha$ si ottiene più velocemente partendo dallo sviluppo di $(1+x)^{-1} =$

$$= \frac{1}{(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

e derivando (una volta per ottenere $(1+x)^{-2}$, 2 volte per $(1+x)^{-3}$ ...)

ESEMPIO

Usando gli sviluppi di McLaurin delle funzioni elementari, calcolare la serie di McLaurin delle seguenti funzioni, indicando il raggio di convergenza

1) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - - - = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n$$

$$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{3}x}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}x\right)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^n)}{3^n}x^n$$

$$|t|<1 \Rightarrow \left|\frac{2}{3}x\right|<1 = |x|<\frac{3}{2} \Rightarrow R=\frac{3}{2}$$

2) $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{x}{2}+1}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1 - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{2^n}\right)x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1) + \frac{(-1)^{(n+1)}}{2^{(n+1)}}\right)x^n$$

$$|x|<1 \qquad \left|\frac{x}{2}\right|<1 \Rightarrow |x|<2 \qquad R=1$$

3) $f(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x-12} = \frac{2x-4}{(x+2)(x-6)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-6} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-6}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{x}{2}+1}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\frac{x}{6}+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{6}\right)^n - - -$$

8/11/12

RICHIAMI SULLE FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

Una funzione di n variabili è una

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$f(x_1, x_2, ---, x_n)$

$n=2 \quad f(x,y)$

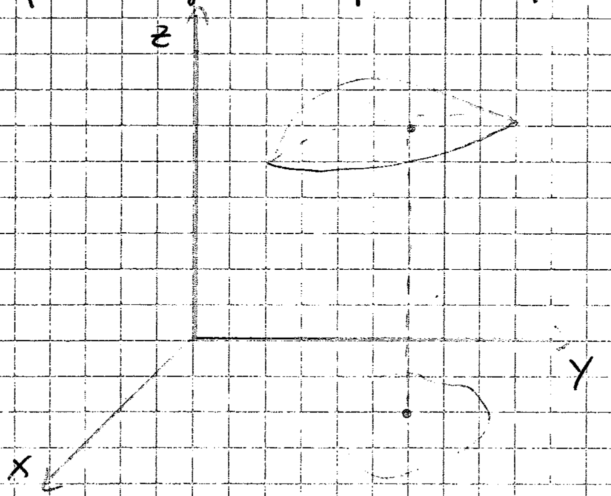
$n=3 \quad f(x,y,z)$

immagine di f $\mathrm{im} f: \{f(x) : x \in A\}$

grafico di f: $\{(x, f(x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A\}$

Per $n=2$ il grafico di $z = f(x,y)$ è

$$\{(x,y,f(x,y))\} \in \mathbb{R}^3 : \{(x,y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2\}$$



Una funzione di n variabili e valori vettoriali è

$$F: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$F(x) = (f_1(x), f_2(x), ---, f_m(x))$

ASI IMPORTANTI

Se $n=1$ una funzione

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$; $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

si chiama CURVA e si indica con

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$$

Si può anche parlare di curva parametrica con parametro t

Si dice curva continua se le funzioni sono continue

Si parla di curva anche intendendo l'immagine di $f(t)$ anche detta <u>sostegno della curva</u>

$n=2$ una curva parametrica è

$$\Gamma = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = f_1(t), y = f_2(t), t \in I \}$$

Altri modi di definire una curva:

· una <u>curva cartesiana</u>

$$\Gamma = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in I \} \text{ con } t = x$$

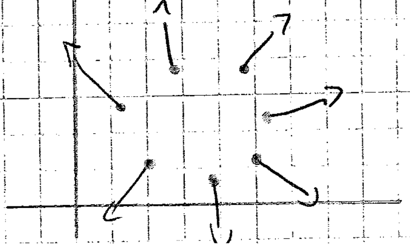
- una <u>curva in forma implicita</u>

$$f(x,y) = 0$$

2) Se $n = m$ si hanno due interpretazioni di una $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

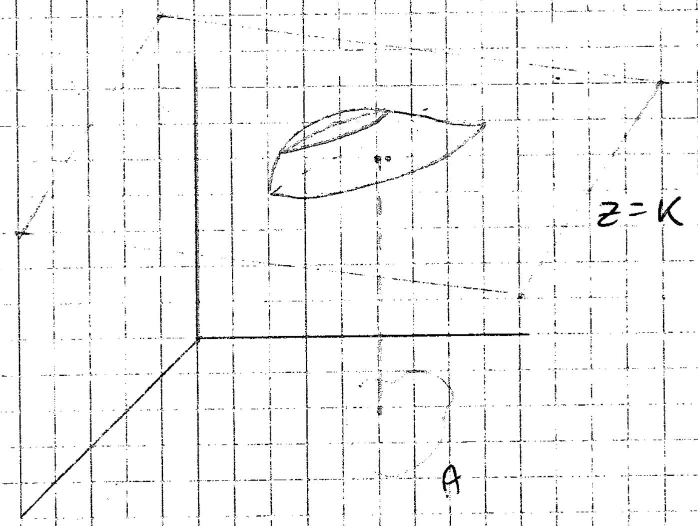
I° F definisce un campo vettoriale

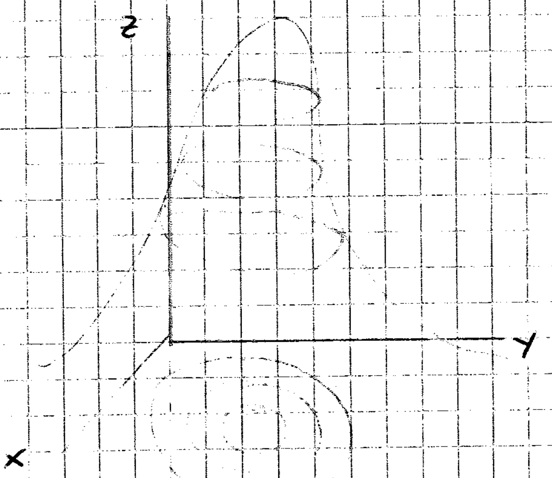
$$(x,y) \longrightarrow (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \bar{V}(x,y)$$



Fissato $K \in \mathbb{R}$, la curva di livello K

$$\Gamma_K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = K\}$$





L'addensarsi delle curve indica un grafico ripido

$E_K = \emptyset$ se $K \in im(f)$

$im(f) = \{K \in \mathbb{R} : \Gamma_K \neq \emptyset\}$

Topologia di $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$) dei limiti

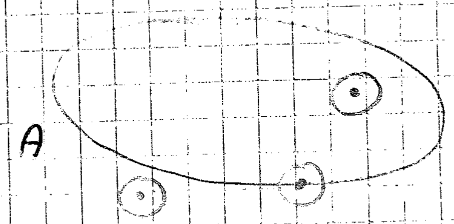
$P(x,y)$ la <u>norma</u> di P è

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = d(P,O)$$

$$d(P,Q) = \|P-Q\| = \sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}$$

dice punto di frontiera di A se P_0 non è né interno né esterno, cioè se

$\forall r > 0$ vale che $B_r(P_0) \cap A \neq \emptyset$ e $B_r(P_0) \cap \mathcal{C}(A) \neq \emptyset$



∂A = frontiera di A

A si dice aperto se ogni suo punto è interno,
A si dice chiuso se A contiene tutti i punti della sua frontiera cioè se $\partial A \subseteq A$

Per definizione $\mathbb{R}^2$, $\emptyset$ sono sia aperti che chiusi
Segue dalla definizione di aperto che A è aperto
$\Rightarrow$ A non contiene alcun punto della frontiera
cioè se $A \cap \partial A = \emptyset$

Vale:

A è aperto $\Longleftrightarrow \mathcal{C}(A)$ è chiuso
A è chiuso $\Longleftrightarrow \mathcal{C}(A)$ è aperto

Segue subito da $\partial A = \partial \mathcal{C}(A)$
Ogni punto $\{P\}$ è chiuso

ESEMPIO

$- A = \mathbb{Z}^2 = \{(n,m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$

A è chiuso e $A = \partial A$

:omo che $l \in \mathbb{R}$ è il limite di f per (x,y) che
.de a (x_0, y_0)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \iff$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in A$ con $(x,y) \neq (x_0,y_0)$
.ale che se
$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ allora $|f(x,y) - l| < \varepsilon$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ se $P \in A$, $P \neq P_0$
e se $0 < d(P, P_0) < \delta \Rightarrow d(f(P), l) < \varepsilon$

.ù in generale si può definire

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

.lo stesso modo se P_0 è un <u>punto di accumulazione</u>
: A cioè se $\forall r > 0$

$$(B_r(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}) \cap A \neq \emptyset$$

.aloghe definizioni si danno per

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$ oppure $-\infty$

$K > 0 \quad \exists \delta > 0$

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow f(x,y) > K$$

$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K > 0 : \forall (x,y) \in A$ con $\|(x,y)\| > K \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$

Questo dice che SE il limite esiste allora vale 0. Quindi il limite o è 0 o $\nexists$

Se prendo però la retta $y=x$

$f(x,x) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \neq 0$ $\nexists$ il limite

Più in generale $y = Kx$

$f(x, Kx) = \frac{K^2 \cancel{x^4}}{\cancel{x^4}(1+K^4)} \longrightarrow \frac{K^2}{1+K^4}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$

lungo gli assi $f(x,y)$ vale 0 e quindi $\to 0$

$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = \lim_{x\to 0} 0 \longrightarrow 0$

$f(0,y) = \frac{0}{y^2} \longrightarrow 0$

Se $y=x$, $f(x,x) = \frac{x^3}{x^4+x^2} = \frac{x}{1+x^2} \longrightarrow 0$

$y = Kx$, $f(x,Kx) = \frac{Kx^3}{x^4+K^2x^2} = \frac{Kx}{x^2+K^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \forall K \neq 0$

Sempre che $\exists$ limite, però se prendo $y=x^2$

$f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \nexists \lim$

) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^4}{x+y^2}$

asse x, y e $y=\sqrt{x}$