NUMERO: 591

DATA: 17/07/2013

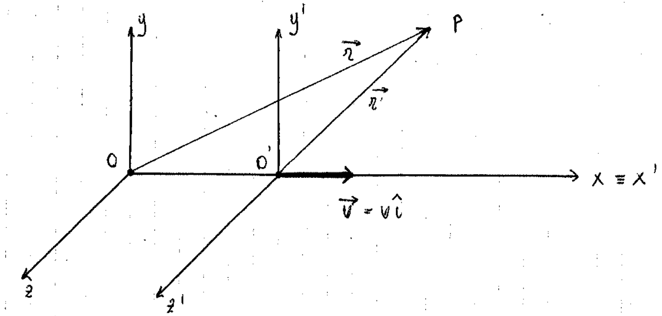
A P P U N T I

STUDENTE: Ramponi

MATERIA: Fondamenti di Ingegneria Nucleare
Prof. Ravette_Panella

FISICA NUCLEARE

RELATIVITÀ RISTRETTA ⟶ Analisi della cinematica di sistemi di riferimento inerziali in moto con velocità costante tra di loro



O ⟶ Primo osservatore

O' ⟶ Secondo osservatore in moto con velocità $\vec{v}$ rispetto O

Il punto P ha posizione relativa rispetto O ed O' e tra le coordinate esiste la relazione

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

la velocità del punto P sarà

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{per } O \qquad e \qquad \vec{v}'(t) = \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad \text{per } O'$$

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases}$$

l'accelerazione del punto P sarà

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad \text{per } O \qquad e \qquad \vec{a}'(t) = \frac{d\vec{v}'(t)}{dt} \quad \text{per } O'$$

$$\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \Longrightarrow \underline{\vec{a}(t) = \vec{a}'(t)}$$

I sistemi precedenti costituiscono le leggi di COMPOSIZIONE della POSIZIONE, VELOCITÀ e ACCELERAZIONE (per i due sistemi O e O') di Galileo, cioè le TRASFORMATE DI GALILEO

Con questo tipo di trasformate la velocità dei due sistemi è diversa, ma l'accelerazione è uguale

⟹ l'accelerazione non dipende dai sistemi di riferimento

⟹ la legge $\vec{F} = m\vec{a}$ è invariante per tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Però questo tipo di trasformate NON lasciano invariate le equazioni di Maxwell per i campi elettromagnetici.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 209

... per un ragionamento puramente matematico, mentre Einstein elaborò un modello fisico basato su 2 ipotesi

1) Tutte le leggi fisiche sono invarianti per tutti e in tutti i sistemi di riferimento inerziali

2) la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali ed è la massima velocità ammissibile

DIMOSTRAZIONE che c è UGUALE IN TUTTI I SISTEMI DI RIFERIMENTO)

$$c^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2$$

DIMOSTRAZIONE che c è la MASSIMA VELOCITÀ AMMISSIBILE)

Se $v = c \Longrightarrow u_x' = \dfrac{u_x - c}{1 - \frac{c u_x}{c^2}} = c\,\dfrac{u_x - c}{c - u_x} = -c$

$\Longrightarrow u_y' = 0$

$\Longrightarrow u_z' = 0$

— effetti fisici

(A) Si misura una lunghezza Δl nello stesso istante $(t_1 = t_2)$ nei due sistemi di riferimento.

$$\Delta l(0) = x_2' - x_1'$$

$$\Delta l(v) = x_2 - x_1 = \frac{x_2'}{\gamma} + v t_2 - \left(\frac{x_1'}{\gamma} + v t_1\right) = \frac{x_2' - x_1'}{\gamma}$$

Se $v < c \Longrightarrow \gamma > 1 \longrightarrow \Delta l(v) < \Delta l(0)$

$\Longrightarrow$ Si ha un'effetto di contrazione delle lunghezze per cui le lunghezze misurate nel sistema in movimento $\Delta l(v)$ sono più piccole di quelle misurate rispetto un sistema fisso

(B) Si misura un intervallo di tempo Δt a partire dalla stessa posizione $(x_1' = x_2')$ nei due sistemi di riferimento

$$\Delta t(0) = t_2' - t_1'$$

$$\Delta t(v) = t_2 - t_1 = \left(t_2' + \frac{v x_2'}{c^2}\right)\gamma(v) - \left(t_1' + \frac{v x_1'}{c^2}\right)\gamma(v)$$

$$= \gamma(v)\left(t_2' - t_1'\right)$$

Se $v < c \Longrightarrow \gamma > 1 \longrightarrow \Delta t(v) > \Delta t(0)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 209

DINAMICA RELATIVISTICA

Nella dinamica relativistica si usano le grandezze

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}\cdot\gamma(v)} \quad \text{quantità di moto}$$

$$\boxed{E = mc^2\gamma(v)} \quad \text{energia totale}$$

L'energia totale viene quindi a rappresentare una somma di due contributi: uno è l'energia cinetica che la particella possiede in virtù della sua velocità, mentre il secondo è l'energia a riposo che la particella possiede in virtù della sua massa $(E_0 = mc^2)$

$\Rightarrow$ l'energia cinetica k rappresenta tutta l'energia tranne quella associata alla massa a riposo

$$k = E(v) - E_0 = mc^2\gamma(v) - mc^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{k = mc^2\left[\gamma(v) - 1\right]}$$

N.B.) Nel caso non relativistico $\frac{v}{c} \to 0$

$$\Longrightarrow \lim_{v/c \to 0}(k) = \lim_{v/c \to 0}\left\{mc^2\left[\gamma(v) - 1\right]\right\} = \lim_{v/c \to 0} mc^2\left[\cancel{1} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \cancel{1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}mv^2$$

È utile scrivere k e quindi E come funzione di $\vec{p}$

$$\left(\begin{cases} p = \gamma m v \\ k = mc^2(\gamma - 1)\end{cases}\right)^2 = \begin{cases} p^2 = \gamma^2 m^2 v^2 \\ k^2 = m^2c^4\left(\gamma^2 - 2\gamma + 1\right)\end{cases}$$

Moltiplicando p^2 per c^2 ottengo un energia e posso sottrarre membro a membro

$$p^2c^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2$$

$$\Longrightarrow p^2c^2 - k^2 = m^2c^2\left(\underbrace{\gamma^2v^2 - \gamma^2c^2}_{\gamma^2(v^2 - c^2) = \frac{c^2}{c^2 - v^2}(v^2 - c^2) = -c^2} + 2\gamma c^2 - c^2\right)$$

$$\Longrightarrow p^2c^2 - k^2 = m^2c^2\left(-c^2 + 2\gamma c^2 - c^2\right) = m^2c^4 \cdot 2(\gamma - 1)$$

$$= 2mc^2 \cdot \underbrace{mc^2(\gamma - 1)}_{k(v)}$$

$$\Longrightarrow p^2c^2 - k^2 = 2mc^2 \cdot k$$

$$\Longrightarrow \boxed{k^2 + \left(2mc^2\right)k = p^2c^2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 209

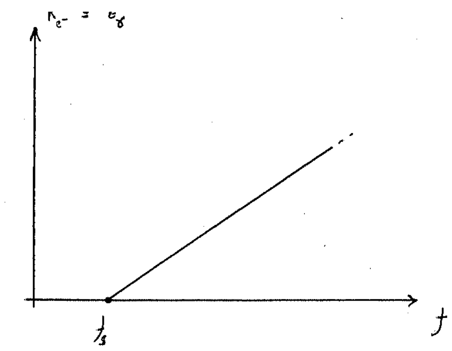
EFFETTO FOTOELETTRICO

Fenomeno per cui la luce con frequenza sufficientemente non troppo bassa (o superiore ad un valore detto soglia fotoelettrica) riesce a "strappare" gli elettroni più esterni degli atomi di una lastra di metallo generando una corrente di una certa intensità.

La spiegazione di questo fenomeno è che il fotone, nonostante abbia massa nulla, ha un urto con un elettrone. Nell'urto il fotone cede la propria energia cinetica all'elettrone sbalzandolo dalla sua posizione. In questo modo l'elettrone va ad alimentare il flusso di elettroni che poi costituisce l'intensità di corrente.

Si può misurare l'energia cinetica degli e⁻ sbalzati dalla luce inserendo una differenza di potenziale esterna che contrasti l'intensità di corrente generata dall'effetto fotoelettrico.
La ddp che annulla l'intensità di corrente (cioè che FERMA gli e^-) è detta POTENZIALE D'ARRESTO ed è una misura dell'energia cinetica stessa degli e^- e quindi anche dell'energia posseduta dal fotone e ceduta dal fotone all'elettrone $\Longrightarrow e\Delta V_{arr} = k_{e^-} = \varepsilon_\gamma$

Da misurazioni sperimentali si ottiene che l'energia cinetica acquistata nell'urto dagli e^- dipende dalla frequenza della luce



l'energia acquistata dagli e^- nell'urto, ovvero l'energia trasportata dai fotoni prima dell'urto aumenta proporzionalmente e linearmente con f
$\Longrightarrow$ Legge di Plank

$$\varepsilon_\gamma = hf \qquad \text{con} \qquad h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Js$$

$\Longrightarrow$ la luce è costituita da fotoni ognuno dei quali ha

$$\varepsilon_\gamma = hf \qquad e \qquad p_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

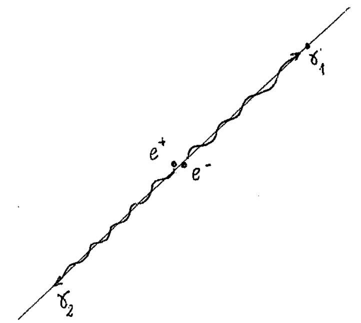
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 209

ANNICHILAZIONE ELETTRONE - POSITRONE

$$ {}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}X + e^{+} + \nu_e \quad \text{con} \quad \begin{cases} A = \text{protoni + neutroni} \\ Z = \text{neutroni} \\ \nu_e = \text{neutrino} \end{cases} $$

Quella precedente è la reazione di decadimento radioattivo responsabile della creazione dei positroni e^+ in cui un protone decade in un neutrino.
Non appena l'e^+ è creato incontra un e^- appartenente alla materia col quale si annichila liberando energia

$$ e^{+} + e^{-} \longrightarrow 2\gamma $$



CONSERVAZIONE ENERGIA)

$$ m_e c^2 + m_e c^2 = hf_1 + hf_2 $$

CONSERVAZIONE QDM)

$$ 0 = \vec{P}_{\gamma_1} + \vec{P}_{\gamma_2} \Longrightarrow \vec{P}_{\gamma_1} = -\vec{P}_{\gamma_2} $$

$\Longrightarrow$ I due fotoni hanno qdm uguale in modulo e direzione, ma con verso opposto

$$ |P_{\gamma_1}| = |P_{\gamma_2}| \Longrightarrow \frac{hf_1}{c} = \frac{hf_2}{c} \longrightarrow f_1 = f_2 = f $$

$$ \Longrightarrow 2m_e c^2 = 2hf $$

$\Longrightarrow$ I due fotoni hanno stessa frequenza f e stessa energia E

$$ f = \frac{mc^2}{h} $$

$$ E = hf = mc^2 \approx 0{,}5 \text{ MeV} $$

Esattamente come la luce ha duplice natura ondulatoria e corpuscolare, anche la materia può avere duplice natura corpuscolare e ondulatoria

⟹ TEORIA DI DE BROGLIE ⟶ Conoscendo quantità di moto e massa dell'elettrone posso calcolarne la lunghezza d'onda

$$p = \frac{h}{\lambda} \implies \lambda = \frac{h}{p}$$

Questa ipotesi teorica fu poi confermata sperimentalmente da Davison e Germer.
Essi mandarono degli elettroni accelerati su una lastra di cristallino ottenendo figure di diffrazione tipici dei fenomeni ondulatori ⟹ l'elettrone è assimilabile ad un onda

Questo capita quando la lunghezza d'onda associata alla particella è dello stesso ordine di grandezza degli ostacoli con cui interagisce per provocare fenomeni di diffrazione e interferenza. La lunghezza d'onda associata ad un e^- è dello stesso ordine di grandezza delle distanze interatomiche
Viceversa gli oggetti non atomici hanno λ troppo bassa e quindi non danno vita a quel tipo di fenomeni

PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE DI HEISENBERG

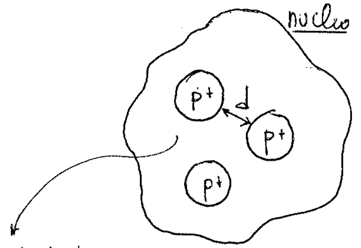
$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2}$$

⟹ Non posso conoscere contemporaneamente posizione e quantità di moto di una particella

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 209

più o meno distribuita

$\Longrightarrow$ Il nucleo non è una carica puntiforme ma un insieme di cariche distribuite nel nucleo stesso



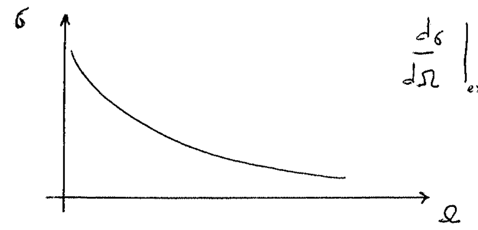
$\rho(r)$ = distribuzione radiale di probabilità di trovare un p^+ nel nucleo

Se $d \approx \lambda_{e^-}$

$\Downarrow$

<u>Nucleo si comporta come reticolo cristallino</u>

$\Longrightarrow$ SE NUCLEO è PUNTIFORME allora $\sigma(\Omega)$ sarebbe decrescente monotona



$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{exp} = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{Ruth}$$

Però nucleo non è sfera uniforme puntiforme poiché ci sono delle cariche distribuite in esso

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{exp} \neq \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{Ruth} = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{Ruth} \cdot |F^2|$$

$\Longrightarrow$ la sezione d'urto sperimentale non coincide con quella teorica di Rutherford che si avrebbe se il nucleo fosse uniformemente carico e il fattore F ne tiene conto ($\rightsquigarrow$ tiene conto del fatto che la carica è distribuita nel nucleo)

SCOPERTA DEL NEUTRONE

Mediante uno spettrometro di massa si può stabilire la massa atomica $M(A)$ di un atomo. Conoscendo il n° di e^- e quindi di p^+ (dato che la carica deve essere neutra), e la massa di protoni si dovrebbe risalire allo stesso valore misurato dallo spettrometro

$\Longrightarrow$ Dovrebbe valere $M(A) = Z\, M_p$

Invece vale $M(A) = \frac{Z}{2} M_p$

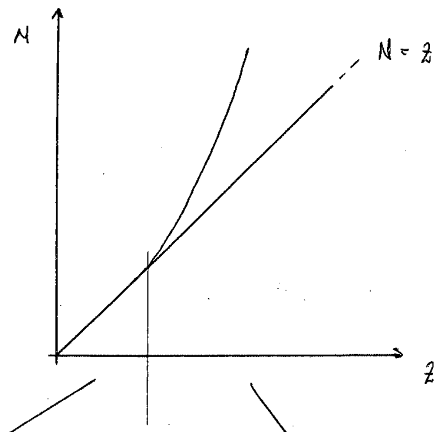
$\Longrightarrow$ Solo la metà della massa atomica è dovuta ai p^+ $\Longrightarrow$ l'altra metà della massa è dovuta ai neutroni

Nel '32 Chadwick scoprì il neutrone nella reazione

$$ {}^{4}_{2}\alpha + {}^{9}_{4}Be \rightarrow {}^{12}C + n $$

Il nucleo è formato da A nucleoni di cui Z sono protoni e $N = A - Z$ sono neutroni

STABILITÀ DEL NUCLEO



Nuclei leggeri

$N \approx Z$

$\Longrightarrow$ STABILI.

Nuclei pesanti

$N \neq Z$

$\Longrightarrow$ INSTABILI

I legami n-n, p-n, p-p sono simili ma n-p è più forte $\Longrightarrow$ Nuclei in cui $Z \approx N$ sono più stabili perché vi sono più legami p-n
$\Longrightarrow$ I nuclei leggeri sono simmetrici e quindi stabili. Viceversa per i nuclei pesanti

FORMULA EMPIRICA PER B.E.

Per definizione $|B.E.| = M(A)c^2 - [Z(m_p + m_e) + Nm_n]c^2$

Si può però pensare a $|B.E.|$ come somma di più contributi (quelli negativi aumentano B.E.)

* " $-a_V A$ " $\longrightarrow$ coefficiente che tiene conto dell'effetto del volume, ovvero che $|B.E.|$ è proporzionale ad A

* " $+a_S A$ " $\longrightarrow$ coefficiente che tiene conto degli effetti di superficie. I nuclei più piccoli hanno più nucleoni in superficie in percentuale. Tali nucleoni superficiali sono meno legati rispetto a quelli centrali, ovvero hanno un'energia media minore che va ad abbassare $|B.E.|$

* " $+\frac{(N-Z)^2}{A} \cdot a_{sim}$ " $\longrightarrow$ coefficiente che tiene conto degli effetti di simmetria. Abbassa $|B.E.|$ per $N > Z$, non lo alza per $N = Z$

* " $+a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ " $\longrightarrow$ tiene conto dell'energia potenziale elettrica dovuta alle cariche nei p^+

* $\Delta_{PAIRING} = \begin{cases} -|\delta| & \text{per } Z \text{ e } N \text{ pari} \\ 0 & \text{per } A \text{ dispari} \\ +|\delta| & \text{per } Z \text{ e } A \text{ dispari} \end{cases}$

$|\delta| = 11 \text{ MeV}$

Ad A fisso qual è il valore di Z che massimizza l'energia di legame e quindi la stabilità del nucleo stesso?

Più l'energia di legame è negativa più l'atomo è stabile e più la massa legata all'energia è grande e quindi la massa del nucleo è piccola in virtù di

$$M_N = \left[Z m_p + N m_n + Z m_e \right] - \frac{B.E.}{c^2}$$

$\Longrightarrow$ Il valore di Z per cui M_N è minimo è lo stesso per cui $|B.E.|$ è massimo.

$$\left.\frac{\partial M(A,Z)}{\partial Z}\right|_{A=\text{const}} = m_p + m_e - M_n - \frac{4 b_{simm}(A-2Z)}{A} + \frac{2 b_c Z}{A^{1/3}} = 0$$

$$\Rightarrow Z_{max} = \frac{M_n - m_p - m_e + 4 b_{simm}}{2 b_c A^{-1/3} + 8 b_{simm} A^{-1}}$$

$$\Longrightarrow Z_{max} = \frac{A}{2} \left[\frac{1}{1 + \frac{b_c}{b_{simm}} A^{2/3}} \right]$$

$$\Longrightarrow Z_{max} \begin{cases} \approx \frac{A}{2} & \text{per } A \text{ piccoli} \\ < \frac{A}{2} & \text{per } A \text{ grandi} \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 209

DECADIMENTO α

Reazione nucleare in cui un elemento x' trasmuta (decade) nell'elemento x liberando una particella α

$$ {}^{A}_{Z}X' \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X + \underbrace{{}^{4}_{2}He}_{\alpha} $$

CONS. EN.) $M_{x'} c^2 = M_x c^2 + k_x + M_\alpha c^2 + k_\alpha$

$$ (M_{x'} - M_x - M_\alpha) c^2 = k_x + k_\alpha $$

$$ Q = k_f - \underbrace{\cancel{k_i}}_{=0} = k_x + k_\alpha $$

CONS. QDM) $\vec{0} = \vec{P_x} + \vec{P_\alpha}$ $\begin{cases} \Longrightarrow \vec{P_x} = -\vec{P_\alpha} \\ \Longrightarrow |P_x| = |P_\alpha| \end{cases}$

Essendo $K = \dfrac{P^2}{2m}$ si ottiene

$$ Q = \frac{P_x^2}{2m_x} + \frac{P_\alpha^2}{2M_\alpha} = \underbrace{\frac{P_\alpha^2}{2m_\alpha}}_{k_\alpha} \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_x}\right) $$

$$ \Longrightarrow k_\alpha = \frac{Q}{1 + \frac{m_\alpha}{m_x}} $$

<u>l'energia cinetica della particella α è sempre la stessa fissata la reazione</u> e coincide con l'energia che produce l'effetto utile

Di solito $\frac{m_\alpha}{m_x} \ll 1 \longrightarrow k_\alpha \approx Q$

$\Longrightarrow$ Nel decadimento α, fissata la reazione (cioè X e X') l'energia estraibile k_α è sempre la stessa

$$ |BE|_{x'} = c^2 \left(M_{x'} - Z m_p - N m_n \right) $$

$$ |BE|_{x} = c^2 \left(M_x - (Z-2) m_p - (A - 4 - Z + 2) m_n \right) $$

$$ |BE|_{\alpha} = c^2 \left(m_\alpha - 2 m_p - 2 m_n \right) $$

$$ \Longrightarrow \underbrace{|BE|_{x'} - |BE|_x - |BE|_\alpha}_{\Delta |B.E.|} = c^2 \left(M_{x'} - M_x - M_\alpha \right) = Q $$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 209

DECADIMENTO β

Reazione nucleare in cui un nucleo pesante Y' decade in uno più leggero Y emettendo una particella β, cioè un e^- (β^-) o un positrone e^+ (β^+)

$$ {}^{A}_{Z}Y' \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + \beta $$

Il decadimento β più comune è

$$ n \longrightarrow p^+ + e^- + \nu $$

$$ \Longrightarrow \quad Q = (m_n - m_p - m_e)\,c^2 = k_p + k_e + k_\nu $$

Essendo $m_p \gg m_e \gg m_\nu$ il protone si comporta come un cannone mentre l'e^- e ν come proiettili $\Longrightarrow$ p^+ ha velocità trascurabile

$\Longrightarrow k_p \approx 0$

$\Longrightarrow$ l'energia che viene liberata k è spezzata tra l'elettrone e il neutrino $(Q \approx k_{e^-} + k_\nu)$ $\Longrightarrow$ Fissati i materiali reagenti k_α è diverso da reazione a reazione poiché dipende quanta parte di Q è assorbita dall'e^- sotto forma di k_e

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 209

(2) $\ {}^{238}Pu \longrightarrow {}^{234}U + {}^{4}He$

$k_\alpha = 5,593$ W

$t_{1/2} = 87,74\ y = 2,767\ 10^{9}\ s$

Tempo di viaggio $= 4\ y = 1,261 \cdot 10^{8}\ s = \Delta t$

$\eta = 0,05$

Potenza minima alla fine del viaggio $= 200$ W

<u>Quanto plutonio è necessario?</u>

$$P(t = 4y) = k_\alpha \cdot A(t = 4y) \cdot \eta \qquad \text{dove}$$

$$A(t = 4y) = \lambda \cdot N(t = 4y)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{P(t = 4y) = k_\alpha \cdot \lambda \cdot N(t = 4y) \cdot \eta}}$$

k_α: <u>noto</u>

$\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} = 2,5 \cdot 10^{-10}\ s^{-1}$

$N(t = 4y) = N_0\, e^{-\lambda(4y)}$

$$\Longrightarrow P = \left[k_\alpha \cdot \lambda \cdot N_0\, e^{-\lambda \Delta t}\right] \cdot \eta$$

$$k_\alpha = 5,593 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 8,9488 \cdot 10^{-19}\ J$$

$\Longrightarrow$ $k_\alpha, \lambda, \Delta t, \eta$ sono varianti indipendenti ... a noi serve calcolare la massa di partenza tale per cui al tempo Δt la potenza sia superiore ai 200 W $\Longrightarrow P > 200\ W = P^*$

$$P = \eta\, k_\alpha\, \lambda\, N_0\, e^{-\lambda \Delta t} > P^*$$

$$\Longrightarrow N_0 > \frac{P^*}{\eta\, k_\alpha\, \lambda\, e^{-\lambda \Delta t}} = 1,77 \cdot 10^{31} \text{ particelle}$$

$$N_g = \frac{N_A}{PM} \left[\frac{part}{mol}\right]\left[\frac{mol}{g}\right] = 2,53 \cdot 10^{21}\ \frac{part}{g}$$

$$\Longrightarrow m_{Pu} = \frac{N_0}{N_g} =$$

(1.a)

$$\underbrace{E = \gamma(v)\, mc^2 \quad ; \quad p = \gamma(v)\, mv}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{k = k(p) \quad ?}$$

REGIME CLASSICO

$$k = \frac{1}{2} mv^2$$

$$p = mv$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{p^2}{2m}$$

REGIME RELATIVISTICO

* Esprimo E come somma del contributo a riposo e di quello cinetico

$$E = mc^2 + k \implies k = E - mc^2 = mc^2 \left(\gamma(v) - 1\right)$$

$\implies$ k è tutta l'energia meno quella a riposo

$$* \left(\begin{cases} k = mc^2(\gamma - 1) \\ p = \gamma m v \end{cases} \right)^2 = \begin{cases} k^2 = m^2c^4 \left(\gamma^2 - 2\gamma + 1\right) \\ p^2 = \gamma^2 m^2 v^2 \end{cases}$$

$$p^2 \,[kg \cdot J] = \gamma\,[/]\; m^2\,[kg^2] \cdot v^2 \left[\frac{m^2}{s^2}\right] = [kg \cdot J]$$

$$\rightsquigarrow p^2 c^2 = [kg \cdot J]\left[\frac{m^2}{s^2}\right] = \left[kg \cdot \frac{m^2}{s^2}\right][J] = [J^2]$$

$\rightsquigarrow$ Moltiplicando p^2 per c^2 ottengo un energia al quadrato

$$\rightsquigarrow \begin{cases} p^2c^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2 & [J^2] \\ k^2 = m^2c^4\left(\gamma^2 - 2\gamma + 1\right) & [J^2] \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow p^2c^2 - k^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2 - m^2c^4\left(\gamma^2 - 2\gamma + 1\right)$$

$$= \gamma^2 m^2 v^2 c^2 - m^2c^4\gamma^2 + 2m^2c^4\gamma - m^2c^4$$

$$= m^2c^2\left(\underline{\gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2} + 2c^2\gamma - c^2\right)$$

$$\hookrightarrow \gamma^2(v^2 - c^2) = \frac{c^2}{c^2 - v^2}(v^2 - c^2) = -c^2$$

dalla definizione

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{c^2 - v^2}{c^2}\right)$$

(e^-) $\lambda_e = \dfrac{2\pi\hbar c}{\sqrt{k^2 + 2m_e c^2 k}}$

$k^2 \approx 2m_e c^2 k$ perché se $k = 10$ MeV l'e^- è relativistico

(n) NON è relativistico perché $M_N \gg m_e \Rightarrow k^2 \ll 2M_N c^2 K$

(1. c.) $p = \dfrac{P_{^{13}C}}{P_\gamma}$ $\longrightarrow$ q.d.m. ioni ^{13}C $(PM_{^{13}C} = 13\,u)$

$\longrightarrow$ q.d.m. o.e.m. con $E = 10$ MeV

$$P_{^{13}C} = \frac{\sqrt{k_{^{13}C}^2 + 2m_{^{13}C} \cdot c^2 k}}{c} \qquad \left(\text{da } p^2c^2 = k^2 + 2mc^2 k\right)$$

$$P_\gamma = \frac{h}{\lambda} = \frac{hf}{c} = \frac{E}{c} = \frac{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}}{c} = \frac{\cancel{c}\sqrt{p^2 + \cancel{m^2c^2}^{=0}}}{\cancel{c}} = p$$

$$\Longrightarrow \quad p = \frac{\sqrt{k_{^{13}C}^2 + 2m_{^{13}C}\, c^2 k}}{k_\gamma}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 209

(4) $M_N(A,Z) \neq Z M_p + N M_n$

$$M_N(A,Z) < Z M_p + N M_n$$

$$\Longrightarrow c^2 M_N(A,Z) < c^2 \left[Z M_p + N M_n \right]$$

$$\Longrightarrow c^2 M_N(A,Z) - c^2 \left[Z M_p + N M_n \right] = B.E. < 0$$

FORMULA SEMIEMPIRICA

$$B.E. = \underbrace{-a_v A}_{\text{volume}} + \underbrace{a_s A}_{\text{superficie}} + \underbrace{\frac{(N-Z)^2}{A} a_{simm}}_{\text{simmetria}} + \underbrace{a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{\Delta_p}_{\text{Pairing}}$$

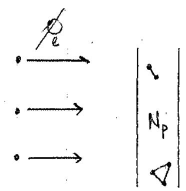
(1)

$$R_{^{208}Pb} = r_0 A^{1/3} = 1{,}12 \cdot 10^{-10} \cdot (208)^{1/3} = 6{,}63 \ fm$$

$$\Longrightarrow \lambda_e = R_{^{208}Pb} = 6{,}63 \ fm$$

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = 3 \cdot 10^{-15} \ J = 18\,750 = 0{,}018 \ MeV$$

(4)



$$R = \frac{dN}{dt} = \phi_e \, N_p \, \sigma \Longrightarrow \sigma \rightsquigarrow \ldots \qquad [m^2]$$

(1.e)

C.E.) $mc^2 + mc^2 = hf_1 + hf_2 = 2mc^2$

CQDM) $\vec{0} = \vec{p_1} + \vec{p_2} \Rightarrow |p_1| = |p_2| = \left|\frac{hf_1}{c}\right| = \left|\frac{hf_2}{c}\right|$

$\Rightarrow f_1 = f_2 = f$

$\Rightarrow \cancel{2}mc^2 = \cancel{2}hf$

$\Rightarrow f = \frac{mc^2}{h}$

$\Rightarrow E = hf = mc^2$

(3) $n \rightarrow p^+ + e^- + \nu$

$M_n = 1,00866 \ u$

$M_p = 1,00783 \ u$

$$m_n c^2 = m_e c^2 + k_e + m_p c^2 + k_p + k_\nu$$

$$\vec{0} = \vec{p_e} + \vec{p_r} \Longrightarrow \left| \frac{k_e}{2m_e} \right| = \left| \frac{k_p}{2m_p} \right|$$

$$\Longrightarrow k_p = k_e \frac{m_p}{m_e}$$

$$\Longrightarrow m_n c^2 - m_e c^2 - m_p c^2 = Q = k_e + k_p + k_\nu =$$

Di solito $k_p \ll k_e \ll k_\nu$ poichè $m_p \gg m_e \gg m_\nu$

ma noi vogliamo $k_{e,max} \Rightarrow$ il neutrino in questo caso non prende energia $\Rightarrow k_\nu \approx 0$

$$\Rightarrow k_e = Q - k_p = Q - k_e \frac{m_p}{m_e}$$

$$\Longrightarrow k_{e,max} = \frac{Q}{1 + \frac{m_p}{m_e}} \qquad \Longrightarrow k_{p,max} = \frac{m_p}{m_e} \frac{Q}{1 + \frac{m_p}{m_e}}$$

Analisi di una reazione nucleare

$$A + x \rightarrow B + y$$

C.E.) $m_a c^2 + m_x c^2 + k_a + k_x = m_b c^2 + m_y c^2 + k_b + k_y$

$$c^2\left[(m_a + m_x) - (m_b - m_y)\right] = (k_b + k_y) - (k_a + k_x)$$

$$c^2\left[m_i - m_f\right] = k_f - k_i = \Delta k$$

$$Q = \Delta k$$

Se $\Delta k > 0 \Longrightarrow Q > 0 \Longrightarrow m_i > m_f \Longrightarrow$ energia out

Se $\Delta k < 0 \Longrightarrow Q < 0 \Longrightarrow m_i < m_f \Longrightarrow$ energia in

Elementi di Fisica Nucleare (Ing. Energetica)

1. Quale deve essere l'energia cinetica di una particella α per avere una corrispondente lunghezza d'onda comparabile con le dimensioni del nucleo di ^{208}Pb?

2. Il decadimento α del ^{238}Pu (vita media: $\tau_{238} = 127$ y) in ^{234}U ($\tau = 3.5 \times 10^5$ y) rilascia un enegia cinetica pari a 5.59 MeV. Il calore prodotto può essere convertito in energia elettrica mediante generatore termoelettrico a radioisotopi (RTG). Sapendo che la sonda spaziale *Voyager 2* ha impiegato 4 anni per raggiungere Saturno, determinare quanti kg di ^{238}Pu siano necessari alla partenza della sonda per ottenere in prossimità di Saturno una potenza non inferiore a 395 W (si assuma una efficienza del RTG pari a 5.5%).

3. Sulla base della formula semiempirica delle masse, determinare il valore Z_m che realizza la condizione di massima stabilità per nuclei a fissato numero di massa A. In quali condizioni i nuclei stabili si discostano dalla condizione di nuclei simmetrici ($Z = N = A/2$)?

4. Definizione, significato fisico ed unità di misura della sezione d'urto in reazioni nucleari.

$N^2 - Z^2 -$

$(N-Z)^2 = (N-Z)(N-Z)$

$N^2 - 2ZN + Z^2$ $\quad N^2 - 2ZN + Z^2$

$-2N + 2Z$

$\boxed{c = \lambda f}$ $\quad m \cdot s^{-1}$

$c = \frac{\lambda}{f}$ $\quad \frac{m}{s}$ $\quad v =$

$-2(N+Z)$

$-2A$

$1\,J = 6{,}25 \cdot 10^{18}\ eV$ $\quad f = \frac{\lambda}{c}$ $\quad f = \frac{c}{\lambda}$

$1\,eV = \cancel{1{,}6 \cdot 10^{-19}}\ J$

$1\,MeV = 10^6\ eV = 10^6 \cdot 1{,}19 \cdot 10^{-19}\ J$

$1\,MeV = 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ J$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 209

1) RADIOATTIVITÀ

1.1) DECADIMENTO NATURALE

In natura esistono elementi NON STABILI, ovvero elementi con una certa probabilità di mutare la loro natura in seguito ad un evento interno al nucleo quale può essere l'emissione di una particella e/o di un fotone:

- PARTICELLA α $\longrightarrow$ α è un nucleo di ${}^{4}_{2}He$, quindi il nucleo di partenza perde 2 protoni e 2 neutroni
- PARTICELLA β $\longrightarrow$ β è un elettrone, quindi il nucleo di partenza cede un protone (per permettere la conservazione della carica), ma il numero di massa A rimane costante
- EMISSIONE γ $\longrightarrow$ γ è un fotone con una determinata energia

Sperimentalmente si osserva che la probabilità per unità di tempo che un nucleo radioattivo decada nel tempo è COSTANTE $\Longrightarrow$ È indipendente dall'età del nucleo stesso

Tale probabilità per unità di tempo di decadere si esprime attraverso una densità temporale di probabilità di decadere λ, misurata in s^{-1}

Quindi avremo:

* $\lambda\, dt$ è la probabilità che il decadimento avvenga tra t e $t + dt$
* $N(t)\, \lambda\, dt$ è il numero di decadimenti, quindi il numero di particelle emesse, nel tempo dt dati N nuclei radioattivi
* $N(t + dt)$ è il numero di particelle dopo l'emissione

$$\Longrightarrow N(t+dt) - N(t) = -dN(t) = N(t)\,\lambda\, dt$$

$$\Longrightarrow \frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda\, dt$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt$$

$$\Longrightarrow \boxed{N(t) = A e^{-\lambda t}}$$ SOLUZIONE GENERALE

$$\Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda t} \cdot \lambda\,dt = \underline{\text{probabilità di decadere tra } t_1 \text{ e } t_2}$$

<u>N.B.</u> $\int_0^{+\infty} p(t)\,dt = 1$ perché ogni nucleo decade prima o poi

1.2) DECADIMENTO IN UN SISTEMA CON SORGENTE

Si scrive un bilancio distinguendo i fenomeni che riducono il numero di nuclei (decadimento) e quelli che invece lo aumentano (sorgente di alimentazione)

$$N(t+dt) - N(t) = dN(t) = \underbrace{R(t)dt}_{\text{alimentazione}} - \underbrace{\lambda N(t)\,dt}_{\text{decadimento}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dN(t)}{dt} = R(t) - \lambda N(t)} \qquad \text{con } N(0) = N_0$$

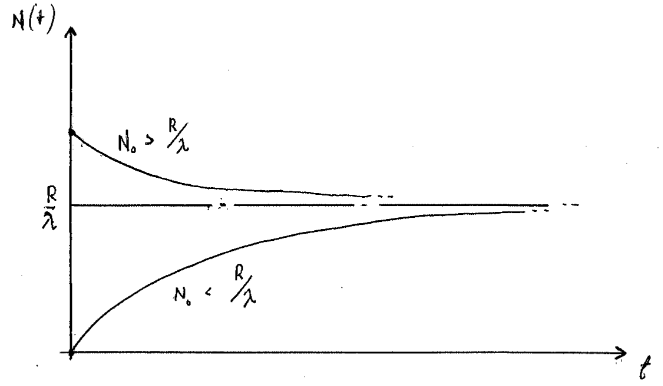
<u>la precedente è un equazione differenziale NON omogenea (a causa del termine $R(t)$) $\Longrightarrow$ la soluzione di questa equazione sarà quindi somma della soluzione dell'omogenea associata (in cui $R(t)=0$) che tiene conto dell'evoluzione naturale che avrebbe il sistema senza forzanti e di una soluzione particolare che tiene conto dell'effetto della forzante</u>

$\Longrightarrow$ SOLUZIONE OMOGENEA

$$N_h(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 209

$$\Longrightarrow \boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t} + \frac{R}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}$$



N.B. $\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} \underbrace{\cancel{N_0 e^{-\lambda t}}}_{=0} + \frac{R}{\lambda}\left(1 - \underbrace{\cancel{e^{-\lambda t}}}_{=0}\right) = \frac{R}{\lambda}$

$\Longrightarrow$ Sia che il numero di particelle iniziali N_0 sia minore o maggiore di R/λ dopo un transitorio iniziale il sistema si assesta sempre sulla stessa condizione stazionaria prodotta dalla sorgente, cioè $N(t\to\infty) = R/\lambda$

9 CASO B) <u>SORGENTE OSCILLANTE</u> $\Longrightarrow R(t) = S_0(1 - \cos\omega t)$ 10

$$\Longrightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t dt' \left[S_0\left(1 - \cos\omega t'\right)\right] e^{-\lambda(t-t')}$$

$$= N_0 e^{-\lambda t} + S_0 e^{-\lambda t} \int_0^t dt' \left(1 - \cos\omega t'\right) e^{\lambda t'}$$

$$= N_0 e^{-\lambda t} + S_0 e^{-\lambda t} \left\{ \int_0^t e^{\lambda t'} dt' - \int_0^t e^{\lambda t'} \cos(\omega t') dt' \right\}$$

$$= N_0 e^{-\lambda t} + S_0 e^{-\lambda t} \left\{ \left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) - \int_0^t e^{\lambda t'} \cos(\omega t') dt' \right\}$$

$\Longrightarrow$ Si tratta di risolvere l'integrale precedenti per parti

$$d(fg) = f'g + fg' \Longrightarrow f'g = d(fg) - fg'$$

$$\Longrightarrow \int f'g = fg - \int fg'$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 209

(1.3) Studio delle catene radiattive

NUCLIDE 1 (λ_1) decade in NUCLIDE 2 (λ_2) in presenza di sorgente $R_1(t) = \text{const}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) + R_1(t) \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = +\lambda_1 N_1(t) + \underbrace{R_2(t)}_{=0} - \lambda_2 N_2(t) \end{cases}$$

con $N_1(0) = N_2(0) = 0$

Siano $\vec{N} = \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{pmatrix}$; $\hat{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ +\lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$; $\vec{Q} = \begin{pmatrix} R_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \frac{d\vec{N}(t)}{dt} = \hat{A}\vec{N}(t) + \vec{Q}$$

Risolvo la I equazione

$$N_1(t) = \underbrace{N_1(0)}_{=0} e^{-\lambda_1 t} + \int_0^t dt' \, R(t) \, e^{-\lambda_1 (t-t')}$$

$$= \frac{R}{\lambda_1}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)$$

Risolvo 2 equazione

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = +\lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t)$$

$$= -\lambda_2 N_2(t) + \underbrace{\frac{R}{\cancel{\lambda_1}}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right) \cdot \cancel{\lambda_1}}_{k(t)}$$

$$= -\lambda_2 N_2(t) + k(t)$$

$$\Longrightarrow N_2(t) = \cancel{\underbrace{N_2(0)}_{=0} e^{-\lambda_2 t}} + \int_0^t dt' \, k(t) \, e^{-\lambda_2 (t-t')}$$

$$= e^{-\lambda_2 t} \int_0^t dt' \, k(t') \, e^{\lambda_2 t'}$$

$$= e^{-\lambda_2 t} \int_0^t dt' \, R \left(1 - e^{-\lambda_1 t'}\right) e^{\lambda_2 t'}$$

$$= R \, e^{-\lambda_2 t} \left[\int_0^t dt' \, e^{\lambda_2 t'} - \int_0^t e^{(\lambda_2 - \lambda_1) t'} dt' \right]$$

$$= R \, e^{-\lambda_2 t} \left\{ \left[\frac{e^{\lambda_2 t'}}{\lambda} \right]^t - \left[\frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1) t'}}{\lambda \ \lambda} \right]^t \right\}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 209

Supponendo $P(t) = \text{const}$ si ottiene

$$A(t) = P\int_0^t e^{\lambda_2 t'}\,dt' = \frac{P}{\lambda_2}\left(e^{\lambda_2 t} - 1\right)$$

$$\Longrightarrow N_2(t) = e^{-\lambda_2 t}\left\{ R\left[\frac{1}{\lambda_2}\left(e^{\lambda_2 t} - 1\right) - \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} - 1\right)\right] - \frac{P}{\lambda_2}\left(e^{\lambda_2 t} - 1\right)\right\}$$

$$= \frac{R}{\lambda_2}\left[e^{\overbrace{(\lambda_2-\lambda_2)t}^{=0}} - e^{-\lambda_2 t}\right] - \frac{R}{\lambda_2-\lambda_1}\left[e^{(\lambda_2-\lambda_1-\cancel{\lambda_2})t} - e^{-\lambda_2 t}\right]$$

$$- \frac{P}{\lambda_2}\left(e^{\overbrace{(\lambda_2-\lambda_2)t}^{=0}} - e^{-\lambda_2 t}\right)$$

$$\Longrightarrow N_2(t) = \frac{R}{\lambda_2}\left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right) - \frac{R}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) - \frac{P}{\lambda_2}\left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right)$$

$$\Longrightarrow N_2(t\to\infty) = \frac{R}{\lambda_2} - \frac{P}{\lambda_2} = \frac{R-P}{\lambda_2}$$

Con $N_1(0) = N_2(0) = 0$, $R_1(t) = R$, $R_2(t) = 0$ e $P_2(t) = P$ il sistema si assesta su una soluzione asintotica

$$N_1(t\to\infty) = \frac{R}{\lambda_1} \qquad N_2(t\to\infty) = \frac{R-P}{\lambda_2}$$

Qual'è l'evoluzione libera del sistema se a questo punto si spengono $R_1(t)$ e $P_2(t)$?

$$N_1(0) = \frac{R}{\lambda_1} \qquad N_2(0) = \frac{R-P}{\lambda_2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1 \\[2ex] \dfrac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow N_1(t) = N_1(0)\,e^{-\lambda_1 t} = \frac{R}{\lambda_1}\,e^{-\lambda_1 t}$$

$$\Longrightarrow \frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \underbrace{R\,e^{-\lambda_1 t}}_{F(t)}$$

$$\Longrightarrow \left(P - R + \frac{R\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) e^{-\lambda_2 t^*} = \frac{R\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t^*}$$

$$\Longrightarrow e^{-\lambda_1 t^*} = e^{-\lambda_2 t^*} \underbrace{\left(\frac{P - R + \frac{R\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}}{\frac{R\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \right)}_{M}$$

$$\Longrightarrow \ln\left(e^{-\lambda_1 t^*}\right) = \ln\left(M e^{-\lambda_2 t^*}\right)$$

$$\Longrightarrow -\lambda_1 t^* = \ln(M) - \lambda_2 t^*$$

$$\Longrightarrow t^* = \frac{\ln(M)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

t^* può essere > 0 $\Longrightarrow$ E' possibile che dopo lo spegnimento N_2 aumenti per un certo lasso di tempo raggiungendo in t^* il suo valore massimo

$\Longrightarrow$ che vale

$$N_{2,max} = \frac{R-P}{\lambda_2} e^{-\lambda_2\left(\frac{\ln M}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)} + \frac{R}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda\left(\frac{\ln M}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)} - e^{-\lambda_2\left(\frac{\ln M}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)} \right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 209

(2) REAZIONI NUCLEARI

le reazioni nucleari possono essere naturali (cioè indotte dal decadimento radioattivo naturale proprio di ogni nucleo) oppure artificiali (cioè indotte da urti neutronici opportunamente provocate. Si usano i neutroni per bersagliare i nuclei e far avvenire delle reazioni in quanto i neutroni non sono carichi e non risentono delle forze Coulombiane prodotte dalla carica del nucleo)

Esistono due tipi principali di interazione nucleo - neutrone:

(A) TRASMUTAZIONI NUCLEARI

Tra le trasmutazioni nucleari si distinguono:

* SCATTERING ELASTICO DI POTENZIALE: il neutrone non riesce a penetrare nel nucleo poiché non ha abbastanza energia, bensì rimbalzerà contro esso variando la propria energia (di solito il neutrone cede energia al nucleo che va a colpire e quindi dopo l'urto il neutrone risulta essere meno energetico e quindi più lento)

N.B. Nello scattering elastico di potenziale più il nucleo è piccolo, maggiore è l'energia ceduta dal neutrone al nucleo stesso

* SCATTERING ELASTICO DI RISONANZA: il neutrone interagisce col nucleo scambiando energia con esso e provocando la riemissione di un

Durante l'interazione l'energia globale del sistema neutrone più nucleo si conserva

* SCATTERING ANELASTICO In questo caso l'interazione tra nucleo e neutrone provoca un eccitazione del nucleo stesso il quale inizierà quindi ad emettere radiazione.
Durante tale interazione l'energia meccanica non si conserva poiché l'energia cinetica del neutrone si trasforma in energia termica trasportata dalla radiazione. Invece l'energia globale ovviamente si conserva

* CATTURA DEL NEUTRONE In questo caso l'urto provoca l'assorbimento del neutrone da parte del nucleo, il quale diventa un isotopo del nucleo di partenza; tale interazione lascia il nucleo in uno stato eccitato in virtù del quale il nucleo emette radiazioni.

* SPALLAZIONE Quando i neutroni o le particelle incidenti hanno energie molto alte, l'urto può provocare l'evaporazione del nucleo.

le trasmutazioni sono quelle reazioni che costituiscono le catene di decadimento in cui un nucleo (appunto) si trasmuta in continuazione cedendo o assorbendo neutroni ed emettendo γ o β.

Materiali in grado di dare fissione

$$U^{235} + n \longrightarrow U^{236}$$

U^{236} ha un energia di separazione $\varepsilon_{sep} = 5,3$ MeV (rappresenta l'energia necessaria a strappare un nucleone dal nucleo) e ha un energia di legame pari a $\varepsilon_{leg} = 6,4$ MeV (rappresenta l'energia media posseduta da ogni nucleone in virtù delle forze nucleari)

$\Longrightarrow \varepsilon_{leg} > \varepsilon_{sep}$

$\Longrightarrow$ Anche un neutrone con energia cinetica nulla è in grado di dare fissione

$\Longrightarrow$ U^{235} è FISSILE

$$U^{238} + n \longrightarrow U^{239}$$

U^{239} ha $\varepsilon_{sep} = 5,5$ MeV e $\varepsilon_{leg} = 4,9$ MeV

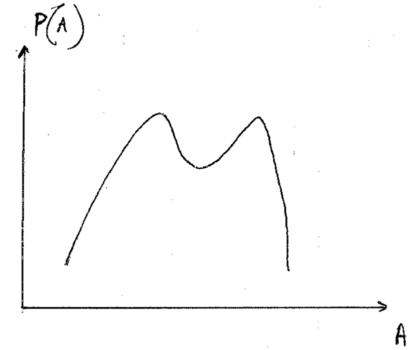
$\Longrightarrow \varepsilon_{sep} > \varepsilon_{leg} \Longrightarrow$ Il neutrone non produce fissione fintantochè la sua energia non sarà abbastanza grande da rendere $\varepsilon_{leg} \geq \varepsilon_{sep}$

$\Longrightarrow$ Il neutrone deve avere almeno energia $\varepsilon = \varepsilon_{sep} - \varepsilon_{leg} = 0,6$ MeV per produrre fissione

$\Longrightarrow$ U^{238} è FISSIONABILE

Inoltre un nucleo è detto fertile se dopo aver subito una serie di trasmutazioni (cioè una catena di decadimenti in cui il nucleo cede/acquista e^-/n) da vita a un nucleo fissile.

La fissione non è simmetrica



P = probabilità di ottenere come prodotto un nucleo di massa A

$\Longrightarrow$ È più probabile avere due nuclei con massa diverse (uno leggero e uno pesante) piuttosto che due nuclei uguali

I prodotti di fissione sono quasi tutti radiattivi e danno luogo a complesse catene di decadimento caratterizzate da trasmutazioni

$\Longrightarrow$ Tra le interazione nucleo - particella distinguiamo la fissione in cui il nucleo si spacca e le trasmutazioni in cui il nucleo cede/assorbe particelle modificando lievemente la propria configurazione

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 209

$\Longrightarrow$ per conoscere Σ devo prima conoscere N e σ

* N si calcola a partire da ρ, PM e N_A

$$N = N_A \cdot \frac{\rho}{PM} \quad \left[\frac{\text{nuclei}}{cm^2} \right]$$

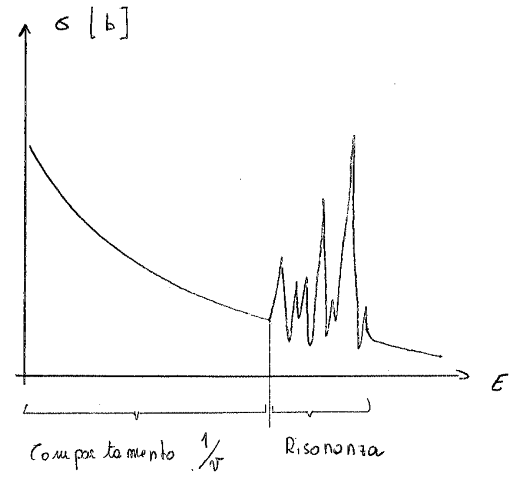
* σ è l'area occupata dal nucleo, da un punto di vista classico. Da un punto di vista quantistico invece l'area percepita dall'ostacolo può variare bruscamente $\Longrightarrow$ <u>σ si ottiene da misure sperimentali</u>

<u>Sperimentalmente si rileva che σ dipende dall'energia del neutrone incidente sull'ostacolo</u>

$\Longrightarrow$ $\sigma = \sigma(E)$

Tipicamente l'andamento di $\sigma(E)$ è un iperbole perché σ aumenta col diminuire della velocità del neutrone incidente e quindi della sua energia: si dice che σ va come $1/v$

<u>Esistono poi dei comportamenti di risonanza: per alcuni materiali in alcuni intervalli energetici la sezione d'urto schizza a valori altissimi</u>. La risonanza fa variare σ di diversi ordini di grandezza al variare di E di solo pochi eV.



Ad esempio per l'U^{235} la sezione d'urto di fissione diventa altissima quando i neutroni sono termici, ovvero quando hanno energia comparabile alla energia di vibrazione termica dei materiali con cui interagiscono

$\Longrightarrow$ Un neutrone termico ha un'elevata probabilità di fissionare l'U^{235} perché σ_F è altissima per energie di vibrazione termica

σ esprime una probabilità di interazione tra nucleo e neutrone $\Longrightarrow$ ogni tipo di interazione nucleo-neutrone (fissione, scattering, cattura, ecc) avrà una determinata σ associata che ne descrive la probabilità di avvenire

Avremo quindi

- $\sigma_p(E)$ sezione d'urto potenziale
- $\sigma_R(E)$ sezione d'urto di risonanza

$$\Longrightarrow \quad -dI(x) = \Sigma \, dx \, I(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dI(x)}{I(x)} = -\Sigma \, dx$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{I_0}^{I(x)} \frac{dI(x')}{I(x')} = -\int_0^x \Sigma \, dx'$$

$$\Longrightarrow \quad \ln\left[\frac{I(x)}{I_0}\right] = -\Sigma x$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{I(x) = I_0 e^{-\Sigma x}}$$

Questa legge è del tutto analoga a quella che descrive il decadimento radiattivo nel tempo, solo che in questo caso non abbiamo decadimento nel tempo, bensì collisioni nello spazio

$$\Longrightarrow \quad I(d) = \frac{\cancel{I_0}}{1000} = \cancel{I_0} e^{-\Sigma d} \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{\ln(1000)}{\Sigma}$$

In analogo al caso radioattivo si possono definire delle probabilità

* la probabilità che il neutrone arrivi in x senza aver colliso è data dal rapporto tra la corrente in x e quella iniziale

$$P_1 = \frac{I(x)}{I_0} = e^{-\Sigma x}$$

* la probabilità che il neutrone collida nell'intervallo compreso tra x e $x + dx$ è

$$P_2 = \Sigma \, dx$$

$\Longrightarrow$ la probabilità che il neutrone ha di arrivare in x senza collisioni e collidere nel tratto dx è

$$P = P_1 \cdot P_2 = \Sigma e^{-\Sigma x} dx$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 209

$\Longrightarrow$ A sua volta la quantità

$$\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)\, d\vec{r}\, dE\, d\vec{\Omega}\, dt$$

viene a rappresentare il percorso fatto dalle particelle in $d\vec{r}$, dE, $d\vec{\Omega}$ e dt.

Moltiplicando tale grandezza per Σ_x ottengo il numero di eventi "x" che avvengono a causa delle particelle che stanno in $d\vec{r}$, dE e $d\vec{\Omega}$ nel tempo dt

$$(\Sigma_x)(\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)\, d\vec{r}\, dE\, d\vec{\Omega}\, dt)$$

Integrando in $d\vec{r}$, dE e $d\vec{\Omega}$ ottengo il numero di eventi "x" che avvengono a causa di tutte le particelle che stanno nel volume V del sistema, di qualsiasi energia e per qualsiasi direzione nel tempo dt

$$\int_\Omega \int_V \int_E \Sigma_x\, \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)\, d\vec{r}\, dE\, d\vec{\Omega}\, dt$$

Moltiplicando questa grandezza per l'energia rilasciata da ogni evento "x", $\mathcal{E}_x$, si ottiene l'energia totale prodotta da tutte le particelle del sistema, con ogni energia e ogni direzione nel tempo dt

$$\Longrightarrow E_{TOT} = \mathcal{E}_x \int_\Omega \int_V \int_E \Sigma_x\, \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)\, d\vec{r}\, dE\, d\vec{\Omega}\, dt$$

$\Longrightarrow$ la potenza producibile dal sistema sarà dunque

$$P_{TOT} = \frac{E_{TOT}}{dt} = \mathcal{E}_x \int_\Omega \int_V \int_E \Sigma_x\, \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)\, d\vec{r}\, dE\, d\vec{\Omega}$$

Questa è la quantità di potenza emessa per unità di volume

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 209

A questo punto l'obbiettivo è costruire un'equazione di bilancio di particelle semplificata che mi da il legame tra ϕ e J

IPOTESI SEMPLIFICATIVE

* Supponiamo tutte le particelle della stessa energia
* Supponiamo che le particelle siano isotropiche cioè che abbiano la stessa probabilità di andare in una direzione piuttosto che in un altra

$$\Longrightarrow \quad \phi = \phi(\vec{r}, t) \quad e \quad \vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t)$$

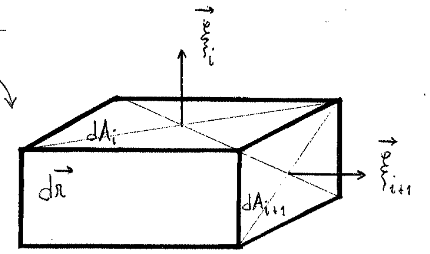
$\Longrightarrow$ $\phi(\vec{r}, t)$ $\left[\frac{neutr}{cm^2 \cdot s}\right]$ viene a rappresentare il percorso per unità di volume e tempo

Si consideri un volume $d\vec{r}$ al tempo t e al tempo $t + dt$. La differenza di particelle in $d\vec{r}$ tra t e $t + dt$ sarà quindi

$$\left[\, n(\vec{r}, t + dt) - n(\vec{r}, t)\right] d\vec{r} = \Delta n$$

Il numero di particelle in $d\vec{r}$ varia perchè alcune particelle entrano ed altre escono, alcune sono assorbite e altre generate da sorgenti

N_T è il numero totale di facce



$\Longrightarrow$ Analizziamo i contributi di ogni fattore che influisce sulla variazione del numero di particelle Δn. Avremo

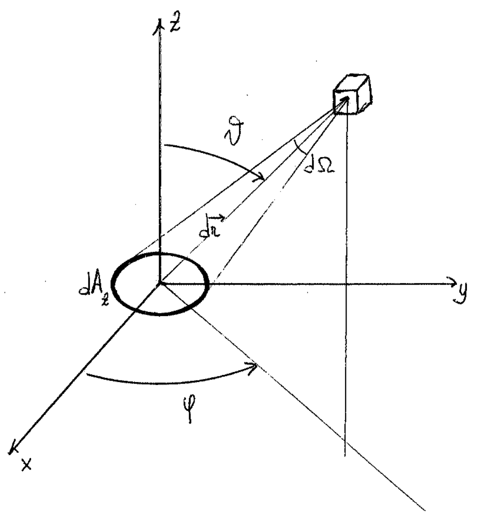
* Contributo delle correnti di particelle, che provocano ingressi e fughe di particelle nel volume di controllo

$$- \sum_{i=1}^{N_T} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot (dA\, \vec{\xi}_i)\, dt$$

* Contributo delle interazioni di assorbimento, che vanno a diminuire la popolazione di particelle. Quante sono le particelle assorbite?

$$- \underbrace{\Sigma_a}_{\text{probabilità di essere assorbiti}} \cdot \underbrace{\phi(\vec{r}, t)\, d\vec{r}\, dt}_{n^\circ \text{ di particelle}}$$

Ora devo trovare relazione tra J e ϕ



$J_z^-(0,t)$ = particelle che da semispazio $z > 0$ vanno in semipiano $z < 0$ $(\downarrow)$

$J_z^+(0,t)$ = particelle che da semispazio $z < 0$ vanno in semipiano $z > 0$ $(\uparrow)$

$$\Longrightarrow \quad J_z(0,t) = J_z^+(0,t) + J_z^-(0,t)$$

Per calcolare ognuna delle componenti si deve considerare:

- particelle nascono solo per scattering e sorgenti esterne
- particelle muoiono solo per scattering (non consideriamo le fissioni)

$\Longrightarrow$ Calcolo nascite in $d\vec{r}$ per sorgenti e scattering poi considero solo le particelle con giusta direzione e che riescono a sfuggire allo scattering e a raggiungere dA_z

* NASCITE IN $d\vec{r}$

$$\Upsilon(r,t) = S(\vec{r},t) + \Sigma_s \phi(\vec{r},t)$$

densità di emissione $\left[\frac{\text{neutr}}{s}\right]$

* PARTICELLE CON GIUSTA DIREZIONE

Suppongo le particelle isotrope $\Longrightarrow \frac{d\Omega}{4\pi}$

$$\Longrightarrow \quad d\Omega = \left(dA_z \cdot \cos\vartheta\right)\frac{1}{r^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \left[\Upsilon(\vec{r},t)\, d\vec{r}\right]\left(\frac{\cos\vartheta \cdot dA_z}{4\pi r^2}\right)$$

è la quantità di particelle giustamente orientate

* $\left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial x}\right)_{x=0}$ è un numero ed esce dall' integrale

* $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$

$$\mathrm{II} = \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\pi/2} d\vartheta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \; r\cos\varphi}_{\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \, = \, [\sin\varphi]_0^{2\pi} \, = \, 0} \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial x}\right)_{x=0} e^{-\varepsilon r} \frac{\cos\vartheta \sin^2\vartheta}{4\pi}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{II} = 0$$

$$\mathrm{III} = \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \; y \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial y}\right)_{y=0} e^{-\varepsilon r} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta}{4\pi}$$

* $\left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial y}\right)_{y=0}$ è un numero ed esce dall' integrale

* $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$

$$\mathrm{III} = \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\pi/2} d\vartheta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \; r \sin\varphi}_{\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi \, = \, -[\cos\varphi]_0^{2\pi} \, = \, 0} \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial y}\right)_{y=0} e^{-\varepsilon r} \frac{\cos\vartheta \sin^2\vartheta}{4\pi}$$

$$\mathrm{IV} = \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \; z \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}\right)_{z=0} e^{-\varepsilon r} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta}{4\pi}$$

Calcolo I e IV

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{I} = \Upsilon(0,0,0,t) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} dr \, e^{-\varepsilon r} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta}{4\pi} d\vartheta$$

$$= \frac{1}{4\pi} \Upsilon(0,0,0,t) [2\pi] \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \underbrace{e^{-\varepsilon(\infty)}}_{=0}\right)\right] \left[\frac{1}{2} \sin^2\vartheta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4} \Upsilon(0,0,0,t) \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 209

$$\Longrightarrow \vec{J}(0,t) = -\frac{1}{3\Sigma^2} \cdot \nabla(\Sigma_s \phi)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{J}(\vec{r},t) = -\left(\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2}\right)\vec{\nabla}\left[\phi(\vec{r},t)\right]}$$

$$\Longrightarrow \vec{J}(\vec{r},t) = -D\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)$$

N.B. $D = \frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} \Longrightarrow$ Essendo $\Sigma_s \approx \Sigma$ si ha

$$D = \frac{1}{3\Sigma} \quad [cm]$$

∂t $\Longrightarrow$ l' equazione di bilancio diventa

$$\boxed{\frac{1}{v}\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t} = \nabla^2 D\,\phi(\vec{r},t) - \Sigma_a\phi(\vec{r},t) + S(\vec{r},t)}$$

Noi studieremo sempre sistemi stazionari $\left(\partial/\partial t = 0\right)$ e omogenei $\left(\Sigma_a(\vec{r},t) = \text{const} \text{ e } D(\vec{r},t) = \text{const}\right)$ quindi l' equazione si riduce a

$$\boxed{D\nabla^2\phi(\vec{r}) - \Sigma_a\phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0}$$

<u>l' equazione della diffusione così ottenuta verrà risolta in alcuni casi notevoli</u>

N.B. ϕ $[1/cm^2 \cdot s]$ rappresenta il flusso neutronico ovvero i neutroni che transitano per unità di tempo e area. Se moltiplichiamo tale grandezza per la probabilità per unità di lunghezza di un neutrone di dare un interazione i, Σ_i otteniamo le particelle per unità tempo e volume che hanno dato quell' interazione i

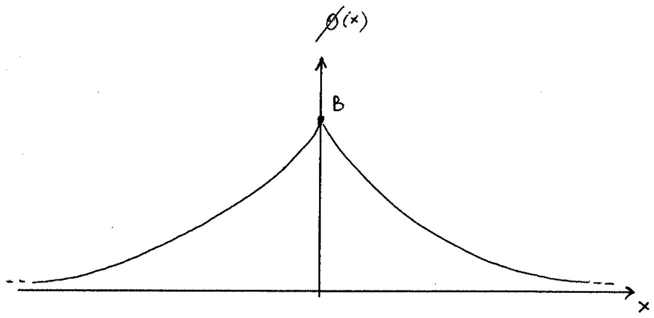
$$\phi\,\Sigma_i \quad \left[\frac{i}{cm^3 \cdot s}\right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 209

$$\Longrightarrow J(x) = \frac{DB}{L} e^{-\frac{x}{L}}$$

$$\Longrightarrow J(x \to 0^+) = \frac{S_0}{2} = \frac{DB}{L} \longrightarrow B = \frac{S_0 L}{2D}$$

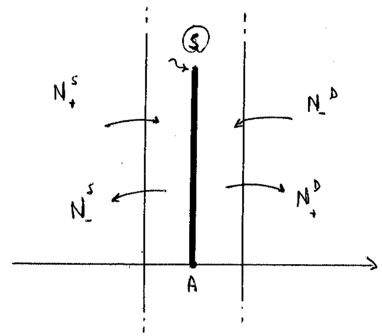
$$\Longrightarrow \boxed{\phi(x) = \frac{S_0 L}{2D} e^{-\frac{x}{L}}}$$



N.B. Quando ho una δ di Dirac, il processo risolutivo è sempre lo stesso: mi metto dove $\delta(x) = 0$ e risolvo l'omogenea associata. L'effetto della sorgente sarà tenuto in conto dalle condizioni al contorno.

N.B. Condizioni al contorno

* CONDIZIONE DI SORGENTE



Impongo un bilancio tra particelle entranti e uscenti

$$N_+^S + N_-^D + S = N_{IN} = N_{OUT} = N_+^D + N_-^S$$

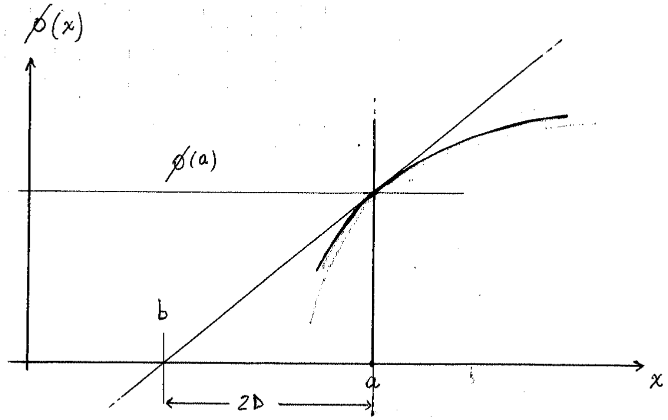
$$\Longrightarrow S = \left(N_+^D - N_-^D\right) - \left(N_+^S - N_-^S\right)$$

$$\Longrightarrow S = J_D(A) - J_S(A)$$

$$\Longrightarrow S = J(A^+) - J(A^-)$$

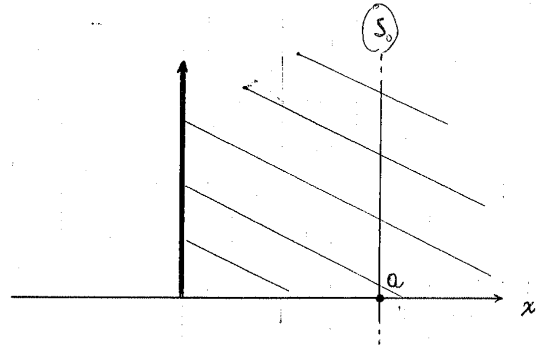
$\Longrightarrow$ Dove c'è una sorgente, la corrente ha una discontinuità il cui valore è proprio la sorgente stessa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 209



$b - a = 2D$

(1.2) GEOMETRIA PIANA, MEZZO SEMI-INFINITO, SORG. LOCALIZZATA



l' equazione da risolvere è

$$D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \Sigma_a \phi(x) + S_0 \delta(x-a) = 0$$

$\Longrightarrow$ Mi metto in un punto in cui la δ di Dirac è nulla cioè in $\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}$ e l' equazione si riduce a

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \phi(x) = 0$$

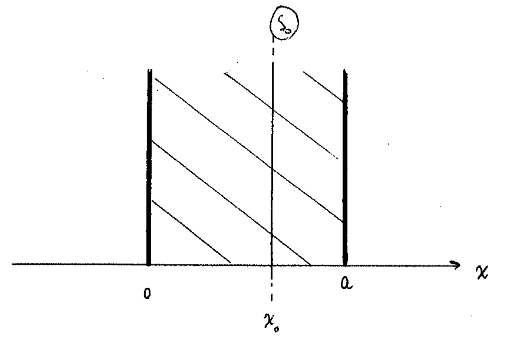
Tale equazione ha soluzione

$$\phi(x) = Ae^{\frac{x}{L}} + Be^{-\frac{x}{L}} \quad \text{per} \quad 0 \le x < a$$

$$\phi(x) = Ce^{\frac{x}{L}} + Ee^{-\frac{x}{L}} \quad \text{per} \quad a < x < +\infty$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 209

(1.3) GEOMETRIA PIANA, MEZZO FINITO, SORG. LOCALIZZATA



l' equazione da risolvere è

$$D \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \Sigma_a \phi(x) + S_0 \delta(x - x_0) = 0$$

$\Longrightarrow$ Mi metto in un punto in cui $\delta(x - x_0) = 0$ cioè in $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$. l' equazione si riduce a

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\phi(x) = 0$$

che ha soluzioni

$$\phi(x) = Ae^{\frac{x}{L}} + Be^{-\frac{x}{L}} \qquad \text{per } 0 \leq x < x_0$$

$$\phi(x) = Ce^{\frac{x}{L}} + Ee^{-\frac{x}{L}} \qquad \text{per } x_0 < x \leq a$$

* Condizione di contorno col vuoto

$$\phi(x=0) = 0 \Longrightarrow A + B = 0 \Longrightarrow A = -B$$

$$\Longrightarrow \phi(x) = M \sinh\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\phi(x=a) = 0 \Longrightarrow \phi(x) = N \sinh\left(\frac{a-x}{L}\right)$$

N.B. le condizioni di annullamento del flusso che si hanno nel contorno col vuoto portano sempre ad una soluzione fatta come un seno iperbolico

* Condizione di continuità del flusso in $x = x_0$

$$\phi(x_0^-) = \phi(x_0^+) \Longrightarrow M \sinh\left(\frac{x_0}{L}\right) = N \sinh\left(\frac{a-x_0}{L}\right)$$

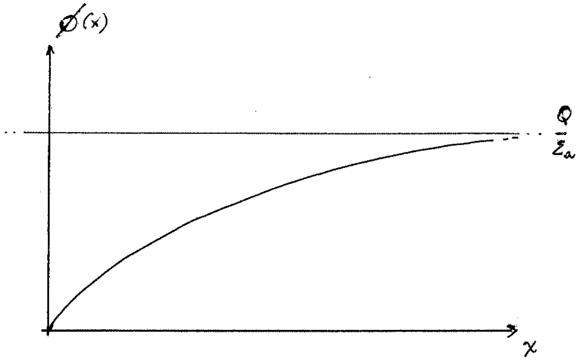
* Condizione di discontinuità della corrente in $x = x_0$

$$J(x_0^+) - J(x_0^-) = S_0 \qquad \text{con}$$

$$J(x_0^+) = -D \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x=x_0^+} = -DM\left(-\frac{1}{L}\right)\cosh\left(\frac{a-x_0}{L}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 209

$$\Longrightarrow \quad \phi(x) = \frac{Q}{\Sigma_a}\left(1 - e^{-\frac{x}{L}}\right)$$



(2.1) GEOMETRIA SFERICA, MEZZO INFINITO, SORG. LOCALIZZATA

Devo risolvere l'equazione in coordinate sferiche

$$D \cdot \nabla^2_{\vec{r}} \phi(r) - \Sigma_a \phi(r) + S_0 \delta_{\vec{r}}(r) = 0 \qquad \text{dove}$$

- $\nabla^2_{\vec{r}} f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 [r \cdot f]}{\partial r^2}$

- $\delta_{\vec{r}}(r) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \quad \Longrightarrow \quad \int \delta_{\vec{r}}(r)\, dr_{\vec{r}} = \int \frac{\delta(r)}{\cancel{4\pi r^2}} \cdot \cancel{4\pi r^2}\, dr = 1$

$\Longrightarrow$ l'equazione da risolvere diventa

$$D \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial^2 [r \cdot \phi(r)]}{\partial r^2} - \Sigma_a \phi(r) + S_0 \delta(r) = 0$$

Mi metto in un punto in cui la δ di Dirac si annulli, cioè in qualsiasi r che non sia $r = 0$. L'equazione diventa l'omogenea associata, che è più facilmente risolvibile

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 209

(2.2) GEOMETRIA SFERICA, MEZZO SEMI-INFINITO, SORG. LOCALIZZ.

l'equazione da risolvere è lo stesso del caso precedente

$$D \cdot \nabla^2_{\not{r}} \phi(r) - \Sigma_a \phi(r) + S_0 \delta_{\not{r}}(r) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{D}{r} \frac{\partial^2 [r\phi(r)]}{\partial r^2} - \Sigma_a \phi(r) + S_0 \delta_{\not{r}}(r) = 0$$

$\Longrightarrow$ <u>Mi metto in $\forall r \neq 0$ in modo che $\delta_{\not{r}} = 0$. l'equazione si riduce a</u>

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} - \frac{1}{L^2} R(r) = 0 \qquad \text{con} \quad R(r) = r\phi(r)$$

<u>la cui soluzione è</u>

$$\phi(r) = \frac{1}{r}\left[A e^{\frac{x}{L}} + B e^{-\frac{x}{L}} \right]$$

* <u>Condizione di annullamento nel contorno col vuoto</u>

$$\phi(R) = \frac{1}{R}\left[A e^{\frac{R}{L}} + B e^{-\frac{R}{L}} \right] = 0$$

$$\Longrightarrow A e^{\frac{R}{L}} + B e^{-\frac{R}{L}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = -B e^{-\frac{2R}{L}}$$

$$\Longrightarrow \phi(r) = \frac{1}{r}\left[-B e^{-\frac{2R}{L}} e^{\frac{r}{L}} + B e^{-\frac{r}{L}} \right]$$

$$= \frac{B}{r}\left[e^{-\frac{r}{L}} - e^{\frac{r-2R}{L}} \right]$$

* <u>Condizione di sorgente per $r \to 0$</u>

$$S_0 = \lim_{r \to 0} A(r) \cdot J(r) \qquad \text{dove}$$

$$A(r) = 4\pi r^2$$

$$J(r) = -D \frac{d\phi}{dr} = -D \left\{ -\frac{B}{r^2}\left(e^{-\frac{r}{L}} - e^{\frac{r-2R}{L}} \right) - \frac{B}{rL}\left(e^{-\frac{r}{L}} + e^{\frac{r-2R}{L}} \right) \right\}$$

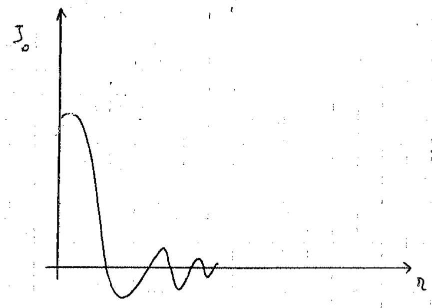
$$\Longrightarrow J(r) = DB \left[\frac{1}{r^2}\left(e^{-\frac{r}{L}} - e^{\frac{r-2R}{L}} \right) - \frac{1}{rL}\left(e^{-\frac{r}{L}} - e^{\frac{r-2R}{L}} \right) \right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 209

la precedente è un'equazione differenziale di Bessel la cui soluzione è

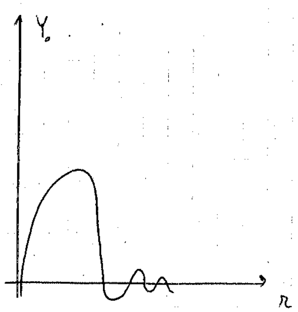
$$\phi(x) = A\, J_0\left(\frac{r}{L}\right) + B\, Y_0\left(\frac{r}{L}\right)$$

dove J_0 va come



J_0 è detta funzione di Bessel di 1° ordine. I suoi zeri sono detti j_0

e Y_0 va come



Y_0 è detta funzione di Bessel di 2° ordine e ha una singolarità per $r = 0$

4 METODO RISOLUTIVO DELLA FUNZIONE DI GREEN

Il metodo risolutivo di Green permette di trovare la soluzione $\phi(\vec{r})$ senza risolvere l'equazione della diffusione, conoscendo la funzione di Green del problema. Tale funzione di Green è la funzione che descrive il flusso in $\vec{r}$ se in $\vec{r}\,'$ è posta una sorgente unitaria $S_0 = 1\ \text{neutr}/s$. Nel caso piano, ad esempio avremo

$$\phi(x) = \frac{S_0 L}{2D}\, e^{-x/L} \implies G(x' \to x) = (1)\,\frac{L}{2D}\, e^{-\frac{|x-x'|}{L}}$$

Vediamo come la funz. di Green ci aiuta nel determinare $\phi(x)$.
Sia $S(x')$ una sorgente generica che emette la potenza neutronica $S(x')dx'$ tra x' e $x'+dx'$ $\implies$ $dx'\,S(x')\,G(x'\to x)$ sarà il flusso provocato in x dalla sorgente in dx' $\implies$ Integrando in dx' ottengo il flusso provocato in x dalla sorgente $S(x')$ intera, qualunque sia la sua forma, ovvero $\phi(x)$

$$\implies \phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x')\, G(x' \to x)\, dx'$$

$\implies$ Si può pensare a $G(x \to x')$ come un flusso "modificato" che porta tutte quelle informazioni sul problema che non riguardano la sorgente, ovvero L, D e la geometria del problema. Accoppiando tali info con quelle sulla sorgente si ottiene $\phi(x)$

Vogliamo calcolare la funzione di Green nella sua forma generale per lo spazio tridimensionale. Si ricava a partire dall'espressione del flusso in geometria sferica la quale va traslato di un fattore $\vec{r}$ e diviso per S_0.

$$\Longrightarrow \quad \phi(\vec{r}) = \int_D dz'\, dy' \; \frac{1}{4\pi D} \; \frac{e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{L}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Essendo $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ si ottiene

$$\phi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \; \frac{1}{4\pi D} \; \frac{e^{-\frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}{L}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

A sua volta, essendo $\vec{r} = (x, 0, 0)$ si ha che $y = z = 0$ e quindi si ottiene

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi D} \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \; \frac{e^{-\frac{\sqrt{(x-x')^2 + y'^2 + z'^2}}{L}}}{\sqrt{(x-x')^2 + y'^2 + z'^2}}$$

Per risolvere l'integrale passo a coordinate polari

$$\begin{cases} y'^2 + z'^2 = \rho^2 \\ dy'\, dz' = \rho\, d\rho\, d\varphi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi(r) = \frac{1}{4\pi D} \int_D \rho\, d\rho\, d\varphi \; \frac{e^{-\frac{\sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}}{L}}}{\sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi(r) = \frac{1}{4\pi D} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho\, d\rho \; \frac{e^{-\frac{\sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}}{L}}}{\sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi(r) = \frac{1}{2D} \int_0^{\infty} \rho\, d\rho \; \frac{e^{-\frac{\sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}}{L}}}{\sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}}$$

A questo punto mi accorgo che

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}}{L}\right) = \frac{1}{L} \cdot \frac{\cancel{2}\rho}{\cancel{2}\sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}}$$

$\Longrightarrow$ Se nell'integrale moltiplico e divido per $(-L)$ ottengo

$$\phi(r) = -\frac{L}{2D} \int_0^{\infty} \frac{-\rho}{L\sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}} \; e^{-\frac{\sqrt{(x-x')^2 + \rho^2}}{L}} \, d\rho$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 209

* Per $x > b \Longrightarrow x > x' \Longrightarrow x - x' > 0 \Longrightarrow |x - x'| = x - x'$

$$\Longrightarrow G(x' \to x) = \frac{L}{2D} e^{\frac{x'-x}{L}}$$

In questi domini il flusso risulta essere

$$\phi(x) = \int_a^b dx' S(x') \frac{L}{2D} e^{\frac{x'-x}{L}} = \frac{S_0 L}{2D} e^{-\frac{x}{L}} \int_a^b dx' e^{\frac{x'}{L}}$$

$$= \frac{S_0 L}{2D} e^{-\frac{x}{L}} \left[L \left(e^{\frac{b}{L}} - e^{\frac{a}{L}} \right) \right] = \frac{S_0 L^2}{2D} e^{-\frac{x}{L}} \left(e^{\frac{b}{L}} - e^{\frac{a}{L}} \right)$$

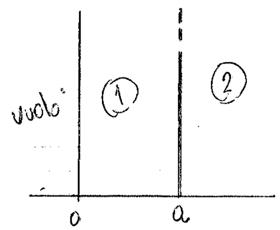
* Per $a < x < b$ bisogna considerare i due contributi del modulo

$$\Longrightarrow G(x' \to x) = \frac{L}{2D} \left[e^{-\frac{x-x'}{L}} + e^{\frac{x-x'}{L}} \right]$$

$$\Longrightarrow \phi(x) = \frac{S_0 L}{2D} \left[\int_a^x dx' e^{-\frac{x-x'}{L}} + \int_x^b dx' e^{\frac{x-x'}{L}} \right]$$

⑤ ASSORBIMENTO E INCERTEZZA

Siamo in mezzo semi-infiniti con sorg. localizzata. In questi casi la soluzione $\phi(x)$ del problema vale



① $\phi(x) = M \sinh\left(\frac{x}{L}\right)$

② $\phi(x) = E e^{-\frac{x}{L}}$

$\Longrightarrow$ Il numero di assorbimenti sarà dato da

$$A = \int_0^a dx\, \phi(x) \cdot \Sigma_a = M \cdot \Sigma_a \int_0^a \sinh\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$= L \cdot M \cdot \Sigma_a \left[- \left(\sinh\left(\frac{a}{L}\right) - \underbrace{\sinh(0)}_{=0} \right) \right]$$

$$= L \cdot M \cdot \Sigma_a \cdot \sinh\left(\frac{a}{L}\right)$$

Per valutare l'errore sperimentale so che

Rilevatore 1 $(R_1) \longrightarrow$ Misura $J(0)$

Rilevatore 2 $(R_2) \longrightarrow$ Misura $J\left(\frac{a}{2}\right)$ $\Longrightarrow Q = \frac{R_1}{R_2}$

Voglio calcolare $D = QL \sinh\left(\frac{a}{2L}\right)$ e l'incertezza su D

<u>Il peso con cui una grandezza e il relativo errore incidono sull'incertezza della soluz. finale è la derivata della soluz. rispetto alla grandezza</u> $\longrightarrow$ Peso di L su D è $\partial D / \partial L$

$$\partial D = \left|\frac{\partial D}{\partial L}\right| \partial L + \left|\frac{\partial D}{\partial R_1}\right| R_1 + \left|\frac{\partial D}{\partial R_2}\right| \partial R_2 = \left|\frac{\partial D}{\partial L}\right| \frac{\partial L}{L} L + \left|\frac{\partial D}{\partial R_1}\right| \frac{\partial R_1}{R_1} R_1 + \left|\frac{\partial D}{\partial R_2}\right| \frac{\partial R_2}{R_2} R_2$$

$$\frac{\partial D}{D} = D \left[\left|\frac{\partial D}{\partial L}\right| \frac{\partial L}{L} L + \frac{\partial D}{\partial R_1} \frac{\partial R_1}{R_1} R_1 + \left|\frac{\partial D}{\partial R_2}\right| \frac{\partial R_2}{R_2} R_2 \right]$$

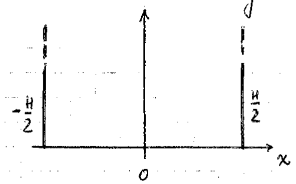
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 209

$\Longrightarrow \phi(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$ con $\alpha^2 = \dfrac{\frac{k_\infty}{k} - 1}{L^2}$

A questo punto impongo le 2 condizioni al contorno

1) $\phi(x)$ deve essere PARI $\Longrightarrow B = 0$

2) Imponiamo l'annullamento del flusso col contorno col vuoto ipotizzando di avere un mezzo di lunghezza H con l'origine nel suo centro



$\Longrightarrow \phi\left(\frac{H}{2}\right) = 0 \Longrightarrow A\cos\left(\alpha\frac{H}{2}\right) = 0$

Dato che A non può essere nullo dovrà annullarsi il coseno, il cui argomento deve quindi soddisfare alla legge

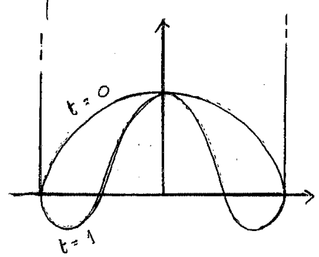
$$\alpha\frac{H}{2} = \frac{\pi}{2} + t\pi$$

$\Longrightarrow$ Posso avere ∞ valori di α e quindi ∞ valori di k

$\Longrightarrow$ la soluzione finale sarà

$$\boxed{\phi(x) = A\cos(\alpha x)}$$

L'unica soluzione FISICAMENTE INTERESSANTE è quella per $t = 0$ detta funzione fondamentale



se $t = 1 \Longrightarrow \alpha = \pi/H$

se $t = 2 \Longrightarrow \alpha = 3\pi/H$

$\Longrightarrow$ Man mano che t aumenta il coseno compie sempre più oscillazioni nello stesso spazio

5.3) CASO TRANSITORIO IN MEZZO OMOGENEO

In questo caso l'equazione rimane

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t} = D\nabla^2\phi(\vec{r},t) - \Sigma_a\phi(\vec{r},t) + \nu\Sigma_f\phi(\vec{r},t) + S(\vec{r},t)$$

La precedente è un'equazione differenziale di 2° grado alle derivate parziali. Per risolverla scrivo la soluzione $\phi(\vec{r},t)$ come SERIE DI FUNZIONI SPAZIO-TEMPORALI

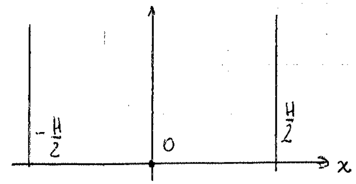
$$\phi(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\varphi_n(\vec{r})$$

$\Longrightarrow$ Il problema si sposta sulla determinazione delle funzioni $\varphi(\vec{r})$ in modo che sia facile trovare gli $A_n(t)$. Tali funzioni esistono e compongono lo spazio orto-normale delle autofunzioni soluzione del problema di Helmoltz

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = -B^2\varphi(\vec{r}) \longrightarrow \begin{cases} \varphi(\vec{r}) \text{ sono le autofunzioni} \\ -B^2 \text{ sono gli autovalori} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Risolvendo il problema di Helmoltz trovo φ_n tali per cui sostituendo $\phi = \sum A_n(t)\varphi_n(t)$ nell'equazione della diffusione si ricava una semplice espressione per $A_n(t)$. A questo punto, noti $A_n(t)$ e $\varphi_n(t)$ si può immediato calcolarsi $\phi(\vec{r},t)$

(A) HELMOLTZ IN GEOMETRIA PIANA MONODIMENSIONALE



$\Longrightarrow$ l'equazione da risolvere è

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + B\varphi(x) = 0$$

$\Longrightarrow$ Dato che $B > 0$ la soluzione di questa equazione è una comb. di funz. trigonometriche

$$\Longrightarrow \phi(x) = A\cos(Bx) + C\sin(Bx)$$

Applicando le condizioni al contorno $\varphi\left(\frac{H}{2}\right) = 0$ e $\varphi\left(-\frac{H}{2}\right) = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} A\cos\left(B\frac{H}{2}\right) + C\sin\left(B\frac{H}{2}\right) = 0 \\ A\cos\left(-B\frac{H}{2}\right) + C\sin\left(-B\frac{H}{2}\right) = A\cos\left(B\frac{H}{2}\right) - C\sin\left(B\frac{H}{2}\right) \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 209

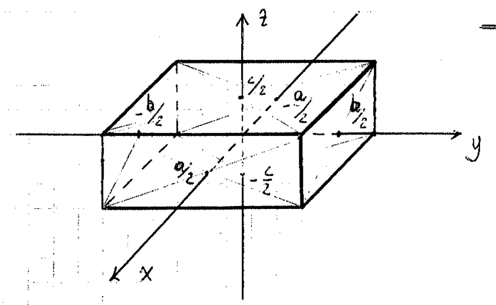
* <u>NORMALIZZAZIONE</u> ⟶ Devo imporre che se $\alpha = \beta$ l'integrale

$$\int_{\mathcal{D}} dx\, \varphi_\alpha(x)\, \varphi_\beta(x) = \int_{-H/2}^{H/2} A^2 \cos^2\left(\frac{2\alpha-1}{H}\pi x\right) dx$$

dia come risultato 1. Risolvendo l'integrale trovo il valore di A che verifica tale imposizione $A = \sqrt{\frac{2}{H}}$

⟹ <u>L'insieme delle funzioni di Helmholtz è un insieme di autofunzioni ortogonali e normalizzate. Tale insieme è inoltre COMPLETO, ovvero qualunque funzione due volte derivabile può essere rappresentata come serie di queste due autofunzioni</u>

3) <u>PROBLEMA DI HELMOLTZ IN GEOMETRIA PIANA TRIDIMENSIONALE</u>



⟹ l'eq. di Helmholtz è

$$\nabla^2 \varphi(x,y,z) = -B^2 \varphi(x,y,z)$$

con le condizioni al contorno

- $\varphi\left(\frac{a}{2}, y, z\right) = \varphi\left(-\frac{a}{2}, y, z\right) = 0$
- $\varphi\left(x, \frac{b}{2}, z\right) = \varphi\left(x, -\frac{b}{2}, z\right) = 0$
- $\varphi\left(x, y, \frac{c}{2}\right) = \varphi\left(x, y, -\frac{c}{2}\right) = 0$

<u>$\varphi(x,y,z)$ sarà una funzione del tipo $\varphi(x,y,z) = f(x)\,g(y)\,h(z)$.</u>
<u>Sostituendo tale espressione nell'equazione di partenza</u>, che è

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -B^2 \varphi$$

<u>si ottiene</u>

$$gh \frac{d^2 f}{dx^2} + fh \frac{d^2 g}{dy^2} + fg \frac{d^2 h}{dz^2} = -B^2 fgh$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2}} + \underbrace{\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}} + \underbrace{\frac{1}{h}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}} = -B^2$$

la somma di queste tre funzioni differenziali deve essere una costante $(-B^2)$
⟹ Tutte e 3 le funzioni devono essere costanti

$$\begin{cases} \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial^2 f}{dx^2} = -B_x^2 \quad ; \quad \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial^2 g}{dy^2} = -B_y^2 \quad ; \quad \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -B_z^2 \\ B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = B^2 \end{cases}$$

⟹ In questo caso devo cercare 3 soluzioni, una per ogni equazione (soluz. sarà comb. funt. trigonometriche poiché sia B_x, sia B_y sia B_z sono positivi

$$f(x) = A_x \cos(B_x x) + C_x \sin(B_x x)$$

$$g(x) = A_y \cos(B_y y) + C_y \sin(B_y y)$$

$$h(z) = A_z \cos(B_z z) + C_z \sin(B_z z)$$

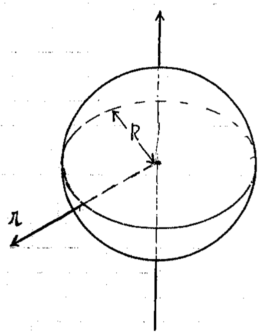
Imponendo annullamento del seno ottengo

$$B_x^{(n)} = \frac{2n-1}{a}\pi \quad ; \quad B_y^{(m)} = \frac{2m-1}{b}\pi \quad ; \quad B_z^{(q)} = \frac{2q-1}{c}\pi$$

$$\Longrightarrow \varphi(x,y,z) = f \cdot g \cdot h = A_x A_y A_z \cos\left(\frac{2n-1}{a}\right)\cos\left(\frac{2m-1}{b}\right)\cos\left(\frac{2q-1}{c}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 209

(D) RISOLUZIONE HELMOLTZ IN GEOMETRIA SFERICA



l'equazione da risolvere è

$$\nabla^2 \varphi(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[\varphi(r)\, r\right] = -B^2 \varphi(r)$$

In questo caso φ dipende solo da r
$\Longrightarrow$ Posso alla risoluzione diretta

$$\frac{d^2}{dr^2}(\varphi r) = -B^2 r \varphi \Longrightarrow \frac{d^2}{dr^2}\left[f(r)\right] = -B^2 f(r)$$

$$\Longrightarrow f(r) = A \sin(Br) + C\cos(Br)$$

$$\Longrightarrow \varphi(r) = A\frac{\sin(Br)}{r} + C\frac{\cos(Br)}{r}$$

Impongo condizioni al contorno

* Impongo regolarità in $r = 0 \Longrightarrow (1/r)\cos(Br)$ diverge per $r \to 0$
$\Longrightarrow C = 0$

* Impongo annullamento autofunzione sul contorno $\Longrightarrow \varphi(R) = 0$

$$\Longrightarrow \varphi(R) = A\frac{\sin(BR)}{R} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} A = 0 & (NO) \\ \sin(BR) = 0 \Longrightarrow BR = n\pi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow B_n = \frac{n\pi}{R}$$

$$\Longrightarrow \varphi_n(r) = A \sin(B_n r)\cdot\frac{1}{r}$$

* Verifico ortogonalità Definizione di ortogonalità è

$$\int_{\Phi} \varphi_n(\vec{r})\varphi_m(\vec{r})\, d\vec{r} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ X & \text{se } n = m \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \text{Deve valere } \int_0^R 4\pi r^2 dr\, \varphi_n(r)\varphi_m(r) = 0$$

* Effettuo normalizzazione Definizione di normalità

$$\int_{\Phi} \varphi_n(\vec{r})\varphi_m(\vec{r})\, d\vec{r} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 1 & \text{se } n = m \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \text{Deve valere } \int_0^R 4\pi r^2 dr\, \varphi_n^2(\vec{r}) = 1$$

$$\Longrightarrow 1 = \int_0^R 4\pi r^2 dr \left[A\frac{\sin(B_n r)}{r}\right]^2 = 4\pi A^2 \int_0^R dr \sin^2(B_n r)$$

$$\Longrightarrow A = \frac{1}{4\pi\int_0^R \sin^2(B_n r)\, dr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi R n}}$$

$\Longrightarrow$ α_n dipende da due fattori

A) $$\frac{k_\infty}{1+l^2B_n^2} = k_\infty \left[\frac{1}{1+l^2B_n^2} \right]$$

Si dimostra che questa quantità equivale alla PROBABILITÀ DI NON FUGA P_{NL} $\Longrightarrow$ Supponiamo di non avere sorgente, essere in reg. stazionario con distribuzione pari a $\varphi_1(\vec{r})$

$\Rightarrow$ P_L = Probabilità di fuga = $\dfrac{\text{particelle fuggite}}{\text{particelle fuggite più assorbite}}$

$$= \frac{\int_{\mathscr{D}} J(\vec{r}_s)\, dA(\vec{r}_s)\, \xi(\vec{r}_s)\, d\vec{r}}{\int_{\mathscr{D}} J(\vec{r}_s)\, dA(\vec{r}_s)\, \xi(\vec{r}_s)\, d\vec{r} + \int_{\mathscr{D}} d\vec{r}\, \Sigma_a \phi(\vec{r},t)} = \frac{\int_{\mathscr{D}} \nabla \vec{J}(\vec{r})\, d\vec{r}}{\int_{\mathscr{D}} \nabla\vec{J}(\vec{r})\, d\vec{r} + \int_{\mathscr{D}} d\vec{r}\, \Sigma_a \phi(\vec{r})}$$

$$= \frac{-D\int_{\mathscr{D}} \nabla^2\phi(\vec{r})\, d\vec{r}}{-D\int_{\mathscr{D}} \nabla^2\phi(\vec{r})\, d\vec{r} + \Sigma_a \int_{\mathscr{D}} \phi(\vec{r})\, d\vec{r}} = \frac{-D\int_{\mathscr{D}} \nabla^2\varphi_1(\vec{r})\, d\vec{r}}{-D\int_{\mathscr{D}} \nabla^2\varphi_1(\vec{r})\, d\vec{r} + \Sigma_a \int_{\mathscr{D}} \varphi_1(\vec{r})\, d\vec{r}}$$

$$= \frac{D\int_{\mathscr{D}} B_1^2\, \varphi_1(\vec{r})\, d\vec{r}}{D\int_{\mathscr{D}} B_1^2\, \varphi_1(\vec{r})\, d\vec{r} + \Sigma_a \int_{\mathscr{D}} B_1^2 \varphi_1(\vec{r})\, d\vec{r}} = \frac{DB_1^2}{DB_1^2 + \Sigma_a} = \frac{l^2B_1^2}{l^2B_1^2+1}$$

$$\Longrightarrow P_{NL} = 1 - P_L = 1 - \frac{l^2B_1^2}{l^2B_1^2+1} = \frac{1}{1+l^2B_1^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_\infty \cdot \left(\frac{1}{1+l^2B_1^2}\right) = k_\infty \cdot P_{NL} = k_{eff}}$$

B) $$\frac{1}{v\Sigma_a\left(1+l^2B_n^2\right)}$$ $\rightsquigarrow$ Si dimostra come questa quantità equivale alla vita media effettiva l_n

Ogni particella percorre $1/\Sigma_a$ prima di essere assorbita. Dividendo tale distanza per la velocità si ottiene la vita media $\left(\frac{1}{\Sigma_a}\right)\left(\frac{1}{v}\right)$ ideale che non tiene conto delle fughe. Moltiplicando per P_{NL} si ottiene la vita media effettiva l_n

$$l_n = \frac{1}{\cdot}\cdot\frac{1}{\cdot}\cdot P_{NL} = \frac{1}{\cdots}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha_n = \frac{\dfrac{k_\infty}{1+l^2B_n^2} - 1}{v\Sigma_a\left(1+l^2B_n^2\right)} = \frac{k_n - 1}{l_n}}$$

$\Longrightarrow$
$$\begin{cases} \text{Se } \alpha_1 > 0 \Longrightarrow k_1 > 1 \Longrightarrow \text{SIST. SOVRACRITICO (Diverge)} \\ \text{Se } \alpha_1 < 0 \Longrightarrow k_1 < 1 \Longrightarrow \text{SIST. SOTTOCRITICO (Spegne)} \\ \text{Se } \alpha_1 = 0 \Longrightarrow k_1 = 1 \Longrightarrow \text{SIST. CRITICO (Stazionario)} \end{cases}$$

Vediamo ora alcuni casi particolari

Ⓐ SORGENTE COSTANTE FATTA COME $\varphi_1(\vec{r})$ $\Longrightarrow$ $S(\vec{r},t) = S_0 \cdot \varphi_1(\vec{r})$

l'equazione da risolvere è

$$\phi(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n(0)e^{\alpha_n t} + v\int_0^t S_n(t')e^{\alpha_n(t-t')}dt' \right\} \varphi_n(\vec{r}) \left(= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\varphi_n(\vec{r})\right)$$

Noi sappiamo che all'inizio il flusso è nullo $\Longrightarrow \phi(\vec{r},0) = 0$ e prima abbiamo visto che

$$\int_{\mathscr{D}} \phi(\vec{r},0)\, \varphi_m(\vec{r})\, d\vec{r} = A_n(0)$$

Da cui segue che se $\phi(\vec{r},0) = 0 \Longrightarrow A_n(0) = 0$

$$\Longrightarrow \phi(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[v\int_0^t S_n(t')e^{\alpha_n(t-t')}dt' \right] \varphi_n(\vec{r})$$

A questo punto devo esplicitare $S_n(t)$

$$S_n(t) = \int_{\mathscr{D}} S(\vec{r},t)\varphi_n(\vec{r})\, d\vec{r} = \int_{\mathscr{D}} S_0\, \varphi_1(\vec{r})\, \varphi_n(\vec{r})\, d\vec{r} = \begin{cases} S_0 \cdot 0 & \text{se } n \neq 1 \\ S_0 \cdot 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $S_n(t)$ è nulla per $\forall n \neq 1$ mentre vale S_0 se $n = 1$

$\Longrightarrow$ L'unico contributo che si salva è quello per $n = 1$ ed esso vale S_0 $\Longrightarrow$ la serie si taglie!

$$\Longrightarrow \phi(\vec{r},t) = v\int_0^t S_0\, e^{\alpha_1(t-t')}dt'\, \varphi_1(\vec{r})$$

$$\Longrightarrow \phi(\vec{r},t) = v S_0 \varphi_1(\vec{r}) e^{\alpha_1 t} \cdot 1 \cdot \int_0^t \delta(0)\, dt'$$

$=1$ per definizione δ

$$\Longrightarrow \boxed{\phi(\vec{r},t) = v S_0 \varphi_1(\vec{r}) e^{\alpha_1 t}}$$

* Se $\alpha_1 > 0 \Longrightarrow k_1 > 1 \Longrightarrow$ SIST. SOVRACRITICO (Diverge come e^{t})
* Se $\alpha_1 < 0 \Longrightarrow k_1 < 1 \Longrightarrow$ SIST SOTTOCRITICO (Si spegne come e^{t})
* Se $\alpha_1 = 1 \Longrightarrow k_1 = 1 \Longrightarrow$ SIST CRITICO (Si stabilizza dopo aver prodotto un segnale)

(c) <u>SORGENTE OSCILLANTE FATTA COME $\varphi_1(\vec{r})$</u> $\Longrightarrow S(\vec{r},t) = S_0 \varphi_1(\vec{r})(1-\cos\omega t)$

L'equazione da risolvere è

$$\phi(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\varphi_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\underbrace{A_n(0)}_{=0} e^{\alpha_1 t} + v\int_0^t dt'\, S_n(t') e^{\alpha_1(t-t')}\right]\varphi_n(\vec{r})$$

dove $S_n(t) = \int_D S(\vec{r},t)\varphi_n(\vec{r})\,d\vec{r} = S_0(1-\cos\omega t)\int_D \varphi_1(\vec{r})\varphi_n(\vec{r})\,d\vec{r}$

Anche qui l'unico contributo che rimane è quello per $n=1$, il cui valore è $S_1(t) = S_0(1-\cos\omega t)\underbrace{\int_D \varphi_1(\vec{r})\varphi_n(\vec{r})d\vec{r}}_{=1}$ e quindi la serie si riduce ad 1 singolo termine.

$$\Longrightarrow \phi(\vec{r},t) = v\int_0^t dt'\, S_0(1-\cos\omega t) e^{\alpha_1(t-t')}\varphi_1(\vec{r})$$

$$= v S_0 \varphi_1(\vec{r}) e^{\alpha_1 t}\int_0^t dt'(1-\cos\omega t') e^{-\alpha_1 t'}$$

$$= v S_0 \varphi_1(\vec{r}) e^{\alpha_1 t}\left[\int_0^t dt' e^{-\alpha_1 t'} - \int_0^t \cos(\omega t') e^{-\alpha_1 t'} dt'\right]$$

$$\int_0^t dt' e^{-\alpha_1 t'} = \frac{1}{\alpha_1}\left(e^{-\alpha_1 t} - 1\right)$$

$$\int_0^t dt' e^{-\alpha_1 t'}\cos(\omega t') = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)\left[e^{\alpha_1 t} - \cos\omega t\right] + \frac{\omega}{\alpha_1^2}\sin\omega t}{1 + \frac{\omega^2}{\alpha_1^2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\phi(\vec{r},t) = v S_0 \varphi_1(\vec{r}) \left[\frac{1}{\alpha_1}\left(e^{\alpha_1 t} - 1\right) - \frac{\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(e^{\alpha_1 t} - \cos\omega t\right) + \frac{\omega}{\alpha_1^2}\sin\omega t}{1 + \frac{\omega^2}{\alpha_1^2}}\right]}$$

Consideriamo il sistema SOTTOCRITICO $\Longrightarrow \alpha_1 < 0$ e calcoliamo ϕ_{AS}

$$\phi_{AS} = \lim_{t\to\infty}\phi(\vec{r},t) = \lim_{t\to+\infty} v S_0 \varphi_1(\vec{r})\left[\frac{1}{\alpha_1}\left(\cancel{e^{\alpha_1 t}}_{\to 0} - 1\right) - \frac{\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(\cancel{e^{\alpha_1 t}}_{\to 0} - \cos\omega t\right) + \frac{\omega}{\alpha_1^2}\sin\omega t}{1 + \frac{\omega^2}{\alpha_1^2}}\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{\phi_{AS} = v S_0 \varphi_1(\vec{r})\left[\underbrace{-\frac{1}{\alpha_1}}_{\text{Risposta COSTANTE alla parte costante dell'eccitazione}} + \underbrace{\frac{\frac{1}{\alpha_1}\cos\omega t - \frac{\omega}{\alpha_1^2}\sin\omega t}{1 + \frac{\omega^2}{\alpha_1^2}}}_{\text{Risposta oscillante alla parte oscillante dell'eccitazione}}\right]}$$

Il valore medio attorno al quale oscilla ϕ_{AS} si trova annullando la risposta oscillante

$$\Longrightarrow \boxed{\langle \phi_{AS} \rangle = -v S_0 \varphi_1(\vec{r})\frac{1}{\alpha_1}}$$

Si vuole esprimere ϕ_{AS} nella forma $\phi_{AS} = C + A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\frac{\frac{1}{\alpha_1}\cos\omega t - \frac{\omega}{\alpha_1^2}\sin\omega t}{1 + \frac{\omega^2}{\alpha_1^2}} \underset{\substack{\text{molt. e} \\ \text{divido} \\ \text{per } \alpha_1^2}}{=} \frac{\alpha_1\cos\omega t - \omega\sin\omega t}{\alpha_1^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\ldots}}\left[\frac{\alpha_1}{\sqrt{\ldots}}\cos\omega t - \frac{\omega}{\sqrt{\ldots}}\sin\omega t\right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 209

(E) SORGENTE IMPULSATA NON FATTA COME $\varphi_1(\vec{r}) \Longrightarrow S(\vec{r},t) = S_0\,\delta(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}^*)$

l'equazione da risolvere è

$$\phi(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} v \int_0^t dt'\, S_n(t')\, e^{\alpha_n(t-t')}\, \varphi_n(\vec{r}) \qquad \text{dove}$$

$$S_n(t) = \int_D S(\vec{r},t)\,\varphi_n(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_D S_0\,\delta(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}^*)\,\varphi_n(\vec{r})\,d\vec{r}$$

$$= S_0\,\delta(t)\int_D \delta(\vec{r}-\vec{r}^*)\,\varphi_n(\vec{r})\,d\vec{r} = S_0\,\delta(t)\,\varphi_n(\vec{r}^*)$$

Anche in questo caso la δ di Dirac spaziale elimina tutti i contributi per $r \neq r^*$ $\Longrightarrow$ Da $\varphi_n(\vec{r})$ mi rimane solo più $\varphi_n(\vec{r}^*)$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} v\,\varphi_n(\vec{r}^*)\,\varphi_n(\vec{r})\,S_0 \int_0^t dt'\,\delta(t')\,e^{\alpha_n(t-t')}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} v\,S_0\,\varphi_n(\vec{r}^*)\,\varphi_n(\vec{r})\,e^{\alpha_n t}\int_0^t dt'\,\delta(t')\,e^{-\alpha_n t'}$$

A questo punto considero che l'unico punto in cui $\delta(t') \neq 0$ è $t' = 0$ $\Longrightarrow$ Nell'integrale vado ad eliminare tutti i contributi per $t' \neq 0$ e ottengo

$$\phi(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} v\,S_0\,\varphi_1(\vec{r}^*)\,\varphi_n(\vec{r})\,e^{\alpha_n t}\underbrace{\int_0^t \delta(0)\,\underbrace{\cancel{e^{-\alpha_n(0)}}}_{1}\,dt'}_{=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} v\,S_0\,\varphi_n(\vec{r}^*)\,\varphi_n(\vec{r})\,e^{\alpha_n t}}$$

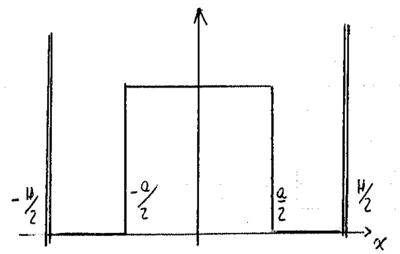
- Se $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_n < 0 \Longrightarrow$ SIST. SOTTOCRITICO. Il sistema si comporta come un filtro: man mano le armoniche successive si spengono e rimane solo quella fondamentale
- Se $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_n < 0 \Longrightarrow$ SIST. CRITICO

$$\phi(\vec{r},t) = v\,S_0\,\underbrace{\cancel{e^{\alpha_1 t}}}_{1}\,\varphi_1(\vec{r}^*)\,\varphi_1(\vec{r}) + \sum_{n=2}^{\infty} v\,S_0\,\varphi_n(\vec{r}^*)\,\varphi_n(\vec{r})\,e^{\alpha_n t}$$

Questo fattore tende a spegnersi per $t \to \infty$ poiché $\alpha_n < 0 \Longrightarrow$ le armoniche non più manca sono destinate a spegnersi

$$\Longrightarrow \boxed{\phi_{As} = v\,S_0\,\varphi_1(\vec{r}^*)\,\varphi_1(\vec{r})} \longrightarrow$$ Per $t \to \infty$ l'unica armonica che rimane è quella fondamentale

(F) SORGENTE PARI, NON FATTA COME $\varphi_1(\vec{r})$ (Sorg. costante tra $-a/2$ e $a/2$)



$$S(x,t) = S_0\,f(x)\,g(t)$$

$$\Longrightarrow S_n(t) = \int_D S(x,t)\,\varphi_n(x)\,dx$$

$$= S_0\,g(t)\int_{-H/2}^{H/2} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$$

$f(x)$ è una funzione pari $\Longrightarrow$ Per ogni $\varphi_n(x)$ dispari il risultato dell'integrale è nullo $\Longrightarrow$ Restano solo le $\varphi_n(x)$ pari cioè i COSENI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 209