



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 586

DATA: 17/07/2013

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Mancino

MATERIA: Fisica I + Eserc.

Prof. Penna

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

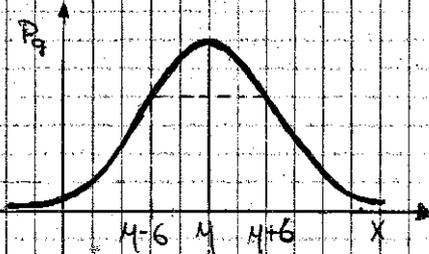
5-03-13

**DISTRIBUZIONE GAUSSIANA ANALISI STATISTICA DEI DATI**

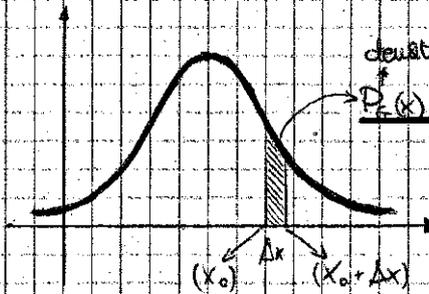
$$P_G(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

densità di probabilità

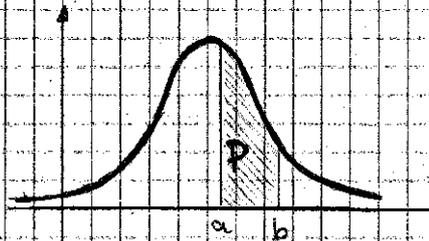
Funzione della distribuzione di probabilità (funzione di variabile continua)



$\mu$  = valore medio  
 $\sigma$  = deviazione standard (scarto quadratico medio = deviazione quadratica media)



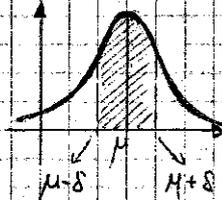
densità spostamento  
 $P_G(x) \cdot \Delta x =$  area sottostante l'intervallo  $\Delta x =$  probabilità che si osservi un valore di  $x$  nell'intervallo  $(x_0, x_0 + \Delta x)$



$$P(a,b) = \int_a^b P_G(x) dx$$

mo probabilità di rilevare  $x$  in quell'intervallo.

→  $\delta$  uguale a  $\sigma$



$$P(\mu-\sigma; \mu+\sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} P_G(x) dx = 0.691$$

Se prendo l'intervallo e lo integro è che al 70% le mie misure saranno incluse in quello spazio (sarà escluso solo il 30%).

$\delta$  = numero che mi permette di trovare il 70% della probabilità

$P(-\infty; +\infty) = 1$  (perché prendo tutto l'intervallo)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = 1$$

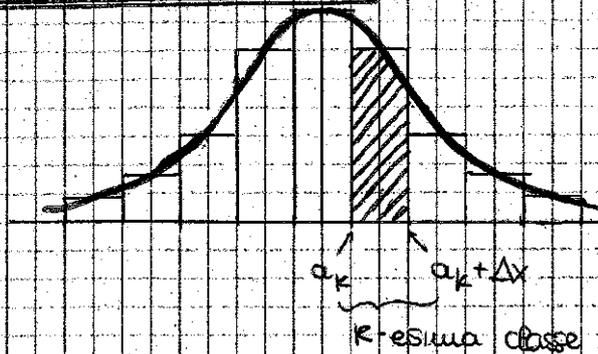
**MISURE**

Osservabili { misura diretta  
 { misura indiretta

★ Diretta { misura dell'altezza media delle persone in aula  
 { 100 persone ... in Roma e l'innalzamento del livello/il periodo di un round

lim  $f_k = f(x)$  teorica = probabilità di osservare  $x$  all'interno del  $k$ -esimo intervallo (osservare e misurare in quella classe)

**EFFE DEL GRANO NUMERI**



Istogramma molto simmetrico, regolarizzato

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_k = \int_{a_k}^{a_k + \Delta x} P_G(x) dx$$

all'aumentare il numero delle classi l'istogramma viene approssimato sempre di più alla curva gaussiana.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m x_i = \mu \text{ (valore medio)}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2$$

Il valore della frequenza  $f_k$  di ogni intervallo tende al suo valore teorico, cioè si modella su una distribuzione gaussiana

$$P_G(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P_G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [(x-\mu) + \mu] \cdot \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma \sqrt{2\pi}} dx$$

parago  $x-\mu = y$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (y + \mu) \cdot \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}{\sigma \sqrt{2\pi}} dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}{\sigma \sqrt{2\pi}} dy}_{\text{dispari} \cdot \text{pari} \Rightarrow \text{integrale} = 0} + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}{\sigma \sqrt{2\pi}} dy}_1 = \mu$$

dispari  $\Rightarrow$  integrale = 0

di  $\mu$  rispetto alla distribuzione di probabilità

$$\langle (x-\mu)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 P_G(x) dx = \dots = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} y^2 \frac{1}{\sigma} dy \cdot (-\sigma^2 \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}) dy = \dots = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} P_G(y) dy = \sigma^2$$

il quadrato tende a finire positiva (non si annulla e integrabile)

deviazione quadratica media

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \approx \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i \cdot \frac{N_i}{N} \right)$$

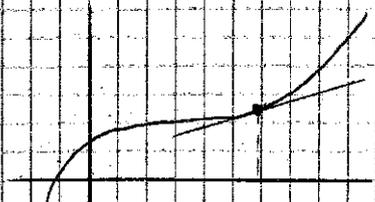
il valore  $\tilde{x}_i$  è capitate  $N_i$  volte sul totale  $N$ , con  $\frac{N_i}{N} = f_k$  (frequenze sperimentali)

⊗ si considera il quadrato perché così si sommano tutti gli scarti senza un numero (essendo i quadrati tutti positivi gli scarti non si annullano)

# PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

0-03-13

Esistono misurazioni dirette e indirette. es. pendolo, attraverso cui si ottiene  $g$   
 dati squadrati  $\bar{T}$  (periodo medio)  $\delta T$  (incertezza della misurazione)  
 Come da questi dati si può arrivare al valore di  $g$ .  
 Prendo una funzione: vicino ad un punto si può approssimare alla  
 retta tangente.



$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Analizziamo gli errori notizzando che sono piccoli (approssimabili ad una retta)

$$q(x) = q(\bar{x}) + \frac{dq}{dx} \Big|_{\bar{x}} \delta x$$

misura indiretta      misurare stesso      incertezza

Prendo una misura arbitraria, si discosta di poco dal vero medio ( $\pm \delta x$ ), e approssimabile con una serie di Taylor

$\delta x$  può avere segno + o - (dal punto di vista fisico si scrive  $q(x) - q(\bar{x}) \approx \left. \frac{dq}{dx} \right|_{\bar{x}} \delta x$ )  
 es.  $A = e^t$        $e = \bar{e} \pm \delta e$   
 $\bar{A} = \bar{e}^2$        $\delta A = 2\bar{e} \delta e$  (derivata nel punto x incremento)

tipicamente le grandezze coinvolte sono più di una

$$q(x, y) = q(\bar{x}, \bar{y}) \pm \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \delta x \pm \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \delta y$$

misura indiretta      derivata parziale

con  $x = \bar{x} \pm \delta x$       se posso dire che queste incertezze sono piccole considero  
 $y = \bar{y} \pm \delta y$       e se approssimabile al primo ordine

\*  $\frac{dy}{dx} = 0$        $\frac{dy}{dx} = 2x = 2t$        $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 = x^2 \end{cases}$  Moto accelerato  
 tutte le variabili vanno x sono considerate

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Posz particolare:  $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$        $\begin{cases} x = v \cdot t \\ y = v \cdot t \\ z = v \cdot t \end{cases}$       moto rettilineo  
 $\rightarrow x$  non dipende da  $y$  (mantengo)       $\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy}$       non considero solo la dipendenza  
 $\frac{dx}{dy} = 0$        $\neq$        $\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy}$        $\neq 0$       qualsiasi ma tutte le dipendenze.

Energia potenziale:  $U = mgh$        $F_x = -\frac{\partial}{\partial x} U = -mg$        $F_x = \frac{d}{dx} U$  sbagliata

Come si può migliorare la misura? Intervenga sull'aspetto che incide maggiormente sulla misura il tempo. Intervenga sull'aspetto costante. Cerco di rendere più leggero possibile l'errore percentuale. Posso aumentare il numero di osservazione → riduca l'errore sperimentale

$T_{10} = 20s$      $\bar{T} = 2s$

$\Delta T_{10} = 0,2s$

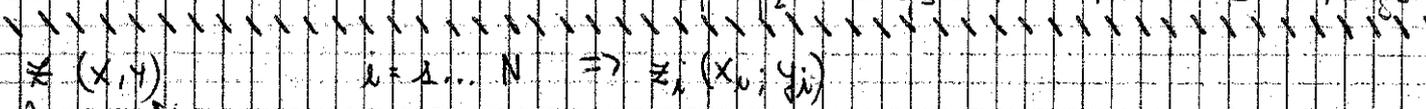
$\frac{\Delta T}{T_{10}} = 10^{-3}$  errore ridotto

$t_{10} = 20,1s$

$\Delta t_{10} = 0,2s$

$\frac{\Delta t_{10}}{t_{10}} = \frac{\Delta T}{10T}$      $g = 9,77 \pm 0,02 \text{ m/s}^2$

$\delta g = \frac{\Delta T^2}{T^2} \cdot 10^{-3} + \frac{\delta T^2}{T^2} \cdot 0,02 = 0,009 + 0,09 = 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$



misurata    diretta

$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$      $(x_i = \bar{x} \pm \delta x = \bar{x} + (x_i - \bar{x}))$

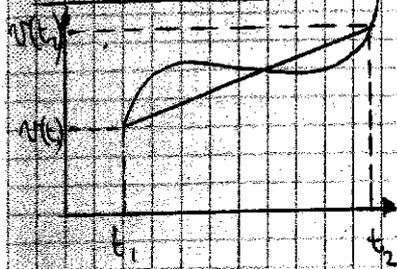
$= \frac{1}{N} \sum_i [z(x_i, y) + \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \delta x_i + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \delta y_i] = z(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x}) + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \frac{1}{N} \sum_i (y_i - \bar{y})$

varianza:  $S_z^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i (z_i - \bar{z})^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i \left( z(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \delta x_i + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \delta y_i - \bar{z} \right)^2 =$   
 $= \frac{1}{N-1} \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 \sum_i (x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{N-1} \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2 + \frac{2}{N-1} \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right) \sum_i (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$   
 $= \left( \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 S_x^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 S_y^2 + 2 \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right) S_{xy}$

termine di covarianza: trascurabile quando  $x$  e  $y$  sono indipendenti (o.e. quando  $\frac{dy}{dx} = 0$ )  
 non trascurabile quando sono legate.

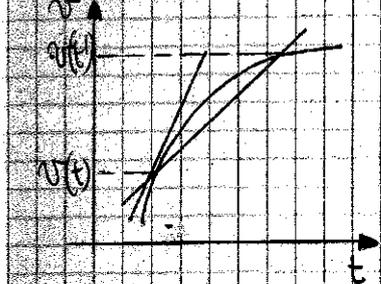
$S_z = \sqrt{\left( \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 S_x^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 S_y^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right) S_{xy}}$

**ACCELERAZIONE MEDIA**



$$a_m = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

**ACCELERAZIONE INSTANTANEA**



$$a(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{v(t') - v(t)}{t' - t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

**PROBLEMA INVERSO**

$a(t) = \frac{dv}{dt}$   
 Nota

da risolvere ma  $\int_{t_0}^t \frac{dv}{ds} ds = \int_{t_0}^t a(s) ds$

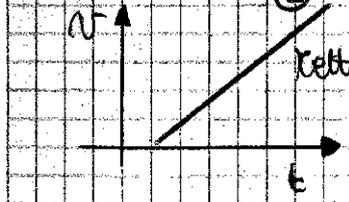
(2)  $v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t a(s) ds$   
 condizione iniziale

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(s) ds$$

**ES. MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO**

$a = \text{costante}$

applico (2)  $\Rightarrow v(t) = v(t_0) + a(t - t_0)$



è usò in (1)

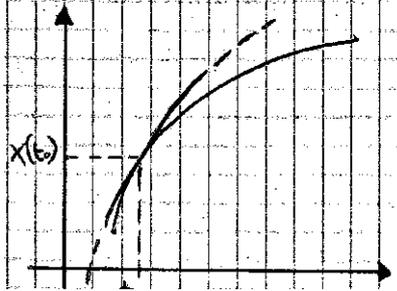
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t [v(t_0) + a(s - t_0)] ds = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t_0) ds + \int_{t_0}^t a(s - t_0) ds \Rightarrow$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$

ESSE CREAIA DALLA POSIZIONE nel moto unif. accelerato

es.  $x(t) = x(t_0 + (t - t_0) + t_0) = x(t_0) + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t_0} (t - t_0)^2 + \dots$   
 sufficientemente piccolo

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \frac{a(t_0)}{2}(t - t_0)^2$$

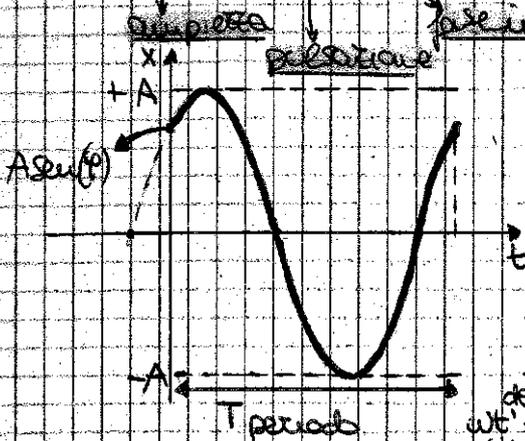


per quanto differire le curve sia, conoscendo  $v$  ed  $a$  posso approssimare la curva con una sviluppo di Taylor. una curva qualsiasi, sufficientemente curva, può essere approssimata con un arco di parabola

es.

①  $x(t) = A \cdot \text{sen}(wt + \varphi)$

destinato da una sinusoidale



nel grafico  $\varphi \neq 0$   $x(t)$  è periodica

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$x(t+T) = x(t)$$

verifica:  $A \text{sen}(\omega(t+T) + \varphi) = A \text{sen}(\omega t + \omega T + \varphi)$

se  $t' - t = T$  deve essere:  
 $\omega t' + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$   
 $\omega(t' - t) = 2\pi$   
 $= A \text{sen}(\omega t + \varphi)$

es.

1)  $A=1$   $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$x(t) = \text{sen}(wt + \frac{\pi}{2}) = \text{sen}(wt) \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \text{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \cos(wt) = \cos(wt)$$



2)  $A=1$   $\varphi=0$

$$x(t) = \text{sen } wt$$



→ Eq differenziale del moto armonico

$$x(t) = A \text{sen}(wt + \varphi)$$

②  $v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(wt + \varphi)$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \text{sen}(wt + \varphi) \Rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Eq differenziale del moto armonico

es. (come trovare  $A$  e  $\varphi$ )

note  $x(0) = A \text{sen}(\varphi)$   
 $v(0) = \omega A \cos(\varphi)$

divido membro a membro  $\frac{x(0)}{v(0)} = \frac{\text{sen} \varphi}{\omega \cos \varphi} \rightarrow$

$$\rightarrow \text{tg } \varphi = \frac{\omega x(0)}{v(0)}$$

$$\frac{v(0)}{\omega} = A \cos(\varphi)$$

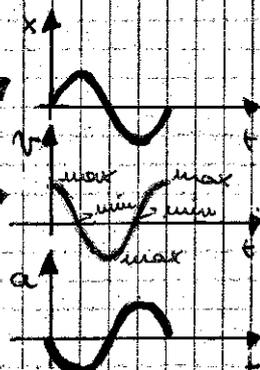
elevando al quadrato e ottiene  $x^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2} = A^2 \text{sen}^2 \varphi + A^2 \cos^2 \varphi = A^2 (\text{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = A^2$

④  $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$

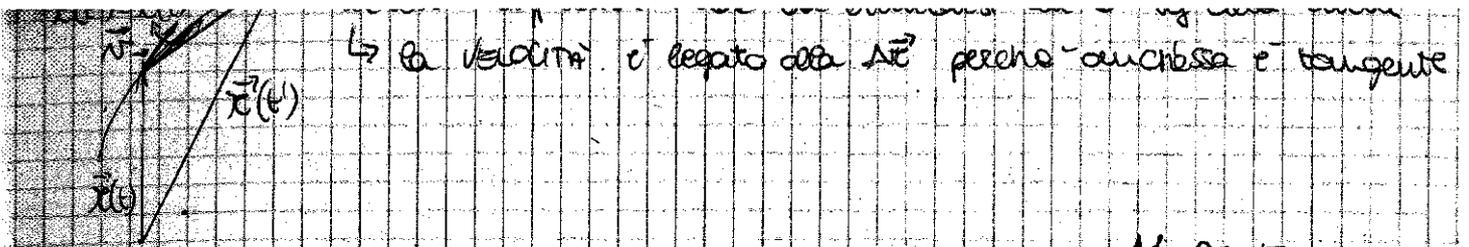
es.  $x(t) = A \text{sen}(wt)$

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t)$$

$$a = -\omega^2 x$$



Ma punti di massimo di  $x$  la  $v$  è minima perché ogni estremo dello spazio percorso è velocità 0 un'ora o quasi.



11-03-13

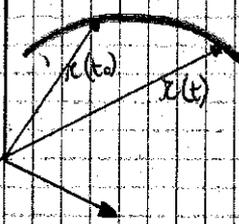
Problema inverso

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t)$  (cos'è  $\vec{r}(t)$ )

nota  $\int_{t_0}^t \frac{d\vec{r}}{ds} ds = \int_{t_0}^t \vec{v}(s) ds \rightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{v}(s) ds$

$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(s) ds$  (1)

APPROSSIMAZIONE DI TAYLOR (per punti di  $t$  vicini a curva parabolica e una buona approssimazione della curva per



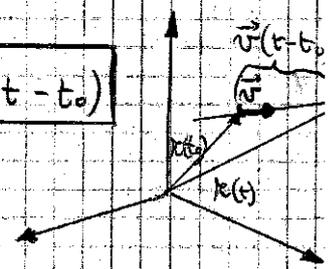
$t - t_0 \ll t$   
 $\vec{r}(t) \approx \vec{r}(t_0) + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)(t-t_0) \approx \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t-t_0)$

Ciclabero: MOVIMENTO UNIFORME  $\vec{v} = \text{costante} \forall t$

dalla (1) segue che  $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v} \int_{t_0}^t ds = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t-t_0)$

È una retta nello spazio.

$\vec{v} = \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t-t_0}$  velocità media = v. istantanea



ACCELERAZIONE MEDIA

$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$

ACCELERAZIONE ISTANTANEA

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$

In componenti:  $\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z = \frac{dv_x}{dt} \hat{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \hat{u}_y + \frac{dv_z}{dt} \hat{u}_z$

$a_x = \dot{v}_x = (\dot{x})' = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$   
 $a_y = \dot{v}_y = (\dot{y})' = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$   
 $a_z = \dot{v}_z = (\dot{z})' = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$

Problema inverso

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t)$  (nota)

cos'è  $d\vec{v}^2$ ?  $\int_{t_0}^t \frac{d\vec{v}}{ds} ds = \int_{t_0}^t \vec{a}(s) ds \rightarrow \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{a}(s) ds$

$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(s) ds$  (2)

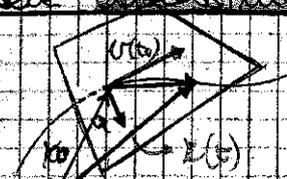
**APPUNTO DI FANTOF**

data una curva generica  $\vec{r}(t)$ , posso sempre approssimarla con lo sviluppo in serie

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t_0} (t-t_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{t_0} (t-t_0)^2 + \dots = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0 (t-t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}_0 (t-t_0)^2$$

Qualunque curva generica può essere sempre approssimata ad un moto uniformemente accelerato (= parabolico).

Qualunque curva tridimensionale (ad esempio del caso di  $\vec{a} \parallel \vec{v}$ ) può essere approssimata ad una curva sul piano se suo  $\vec{a} \parallel \vec{v}$  si crea un'elica.  
 la curva "sta" il piano.



**2) CANTIERA DI UN CANNONE (moto uniformemente "decelerato")**



$\vec{a} = \vec{g} = -g \hat{u}_y$  (con  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ )

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}}{2} t^2$  con  $t_0 = 0$

Lo metto in componenti:

$\vec{r} = 0$   
 $x = x_0 + v_{0x} t$   
 $y = y_0 + v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2$

$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$   
 $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$   
 $t = x / v_{0x}$   
 $y = v_{0y} \cdot \frac{x}{v_{0x}} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2$

al punto di massimo  $\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow v_{0y} - gt = 0$   
 $t = \frac{v_{0y}}{g}$

$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$

$0 = x \left( \tan \alpha - \frac{g x}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \right)$

$x = \frac{2 \tan \alpha v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \rightarrow x = \frac{2 v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{2 v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

**PROBLEMA SULLA MASSIMA**

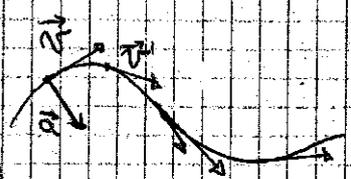
$\frac{dx}{d\alpha} = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos(2\alpha) = 0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$

**CIRCONFERENZA OSCULATRICE**

Una curva può anche essere approssimata localmente ad una circonferenza

**ACCELERAZIONE NORMALE E TANGENZIALE**

di un moto curvo (descrizione del moto in termini di velocità istantanea)



$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{v}(t) \Rightarrow \vec{v}'(t) = \vec{v}(t) + \vec{a}(t-t)$

con  $v = |\vec{v}|$

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + \frac{v^2}{R} \hat{u}_N$

**R** = raggio della CIRCONFERENZA OSCULATRICE in un dato punto.

curva stretta  $\Rightarrow$  raggio piccolo  
 curva ampia  $\Rightarrow$  raggio

14-03-19

2) **MOTO CIRCOLARE**:  $R = \text{costante}$  (doppio raggio circolare, oscillazione)

$a_N = \frac{v^2}{R}$   $S = R \cdot \theta \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = R \dot{\theta} = R \cdot \omega$  **VELOCITÀ ANGOLARE**  $\omega$

$a_N = \frac{R^2 \cdot \omega^2}{R} = R \cdot \omega^2$   $\vec{v} = \omega R \cdot \hat{u}_T$

3)  $a_T = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \dot{\omega} = R \cdot \alpha$  **accelerazione angolare**

$\vec{a}_T = \mu_T \cdot \frac{dv}{dt} = \mu_T \cdot R \cdot \frac{d\omega}{dt}$   $\vec{a}_N = \mu_N \cdot \frac{v^2}{R} = \mu_N \cdot R \cdot \omega^2$

► **formula generale**  $\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau$  (1)

• **Moto circolare uniforme**:  $\omega = \text{cost}$

$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t - t_0)$

►  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \omega(t) = \omega(t_0) + \int_{t_0}^t \alpha(\tau) dt$  (2) **formula generale**

• **Moto circolare uniformemente accelerato**:  $\alpha = \text{cost}$

$\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha(t - t_0)$

Da (1) trabo, se  $\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha(t - t_0)$

$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t [\omega(t_0) + \alpha(\tau - t_0)] d\tau = \theta(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{\alpha}{2}(t - t_0)^2$

3) **MOTO LINEARE**

$a_N = \frac{v^2}{R} = 0 \Rightarrow$  questo perché è raggio della circonferenza osculatrice della traiettoria  $\rightarrow$  infinito ( $R \rightarrow \infty$ )

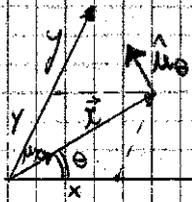
$a_T = \frac{dv}{dt} \Rightarrow$  se moto è 1-dimensionale

l'arco misurato lo spostamento, diversamente dalla coordinata  $x$  che delimita in assoluto la distanza dall'origine

**COORDINATE POLARI**

Moto piano in coordinate polari.

$\vec{r} = x \hat{u}_x + y \hat{u}_y = r \cdot \hat{u}_r$



$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = r \\ \tan \theta = y/x \end{cases}$

$\hat{u}_r$  ha identikitto cilindrico e' identikitto di  $\hat{u}_x$

$\vec{r} = r \cdot \hat{u}_r = r \cos \theta \cdot \hat{u}_x + r \sin \theta \cdot \hat{u}_y = r (\hat{u}_x \cos \theta + \hat{u}_y \sin \theta)$

$\hat{u}_r$  e' un vettore in funzione dell'angolo  $\theta$  (cambia in continuazione). In un moto, istante per istante variando  $r$  e  $\theta$ , esistono  $r(t)$  e  $\theta(t)$ .

Durante il moto:  $\begin{cases} r(t) = r \\ \theta(t) = \theta \end{cases} \quad \hat{u}_r = \hat{u}_x \wedge \hat{u}_\theta \quad \hat{u}_\theta = \hat{u}_y \wedge \hat{u}_x$

$\theta = \omega t \rightarrow \dot{\theta} = \omega$

$\vec{v} = r \dot{\theta} \hat{u}_\theta$

$\vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \hat{u}_r$

# DINAMICA

## MONDO FISICO CIRCOSTANTE: UNIVERSO

Sistema complesso di molti corpi in continua evoluzione per effetto delle interazioni presenti o passate tra i suoi costituenti, su tutte le scale spaziali "disponibili".

Raggio elettronico	$2,8 \cdot 10^{-15}$ m
Lucente	$1,4 \cdot 10^{-5}$ m
Atomo	$1 \text{ \AA} = 10^{-10}$ m
Mano	1 m
Terra	$6,37 \cdot 10^3$ km
Soe	$6,69 \cdot 10^5$ km
Sole-Plutonia	$5,9 \cdot 10^{12}$ m
Galassia	$5 \cdot 10^{20}$ m
Universo ?	$> 10^{26}$ m

Se ne occupa la meccanica quantistica (base: principio di indeterminazione  $\rightarrow$  costo  $\hbar$  cinematica) ~~Al di sotto di  $10^{-10}$  m~~

Se ne occupa la fisica classica (leggi di Newton) ~~Se la velocità di un sistema  $\rightarrow$  lo spettro di onde dopo cui tutte in gioco e relativista (spazio e tempo mescolati)~~

## PRINCIPI DELLA DINAMICA

### IL PRINCIPIO DELLA DINAMICA: LEGGE DI NEWTON

Una particella libera si muove con velocità costante (cioè con accelerazione nulla).

Libera = non soggetta ad interazioni con l'ambiente circostante di alcun tipo (concetto limite  $\rightarrow$  particella sufficientemente lontana da fonti di interazione).  
 Non significa che la particella deve essere ferma.

- SISTEMA INERZIALE: sistema Cartesiano che si muove con velocità costante spazio e tempo. Ma non siamo un sistema inerziale. La Terra non è un sistema inerziale (moto circolare  $\rightarrow$  accelerazione non nulla). Un treno che accelera non è un sistema inerziale. Anche il sistema solare a rotte non è utilizzabile come sistema inerziale.

Tuttavia il raggio di una galassia è talmente grande e i pianeti possono percorrere orbite che solo approssimazioni di rette (per decenni)  $\Rightarrow$  possono essere approssimati a sistemi inerziali. Un sistema ideale è costituito dalle cosiddette "stelle fisse" (che sono candidate tali dalle nostre capacità di osservazione).

Le soluzioni diventano le leggi scritte, date che sono le condizioni iniziali:  
 $x(t), y(t), z(t)$  PRINCIP. da direttore cost. come due postulati che non vanno nella fisica di  $\vec{e} \rightarrow$  dall'esperienza dopo averci si evince che questa legge  $\rightarrow$  LEGGE DI NEWTON SONO AL VEROCE DELLA SPERIMENTAZIONE

Se un corpo 1 esercita una forza  $\vec{F}_{1,2}$  su un corpo 2, allora il corpo 2 reagisce esercitando una forza  $\vec{F}_{2,1}$  su 1, tale che:

$$\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$$

Questo principio spiega perché l'universo esiste  $\rightarrow$  le forze interagiscono fra loro: nulla è capace di interagire dalle cose, dalle parti dell'universo; grazie ad esso tutto il  $\mathbb{R}^3$  possiamo dare una spiegazione dell'universo.

LABORATORIO: CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO NELL'INTERAZ. TRA DUE CORPI

**QUANTITÀ DI MOTO:**  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Il secondo principio diventa  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Leftrightarrow m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$   
cost.

**TEOREMA DELL'IMPULSO:** IMPULSO = variaz. quantità di moto

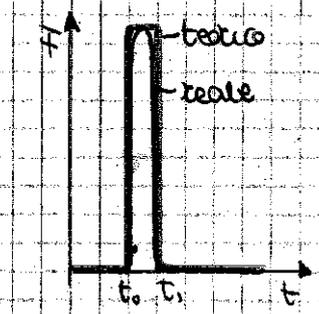
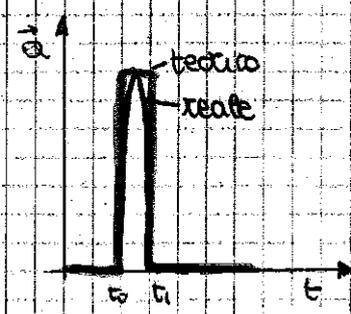
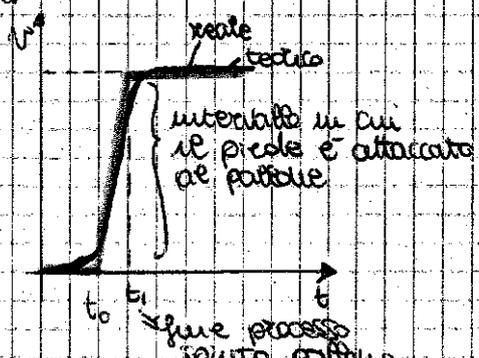
L'impulso di una forza applicata per un certo intervallo di tempo è la variazione di velocità di un corpo secondo la formula:

VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO  $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0) = m(\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0))$

Falso che la forza sia una funz. del tempo:  $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}[\vec{r}(t)] = \vec{F}(t)$ .  
 Nota  $\vec{r}(t)$  o scrivere  $\vec{F}$  istante per istante.

**INTERAZIONE IMPULSIVA:** interazione impulsiva in movimento rettilineo e in una fase di velocità tendente a zero che fa variaz. le condiz. di un corpo

Calcolare la forza media esercitata su una massa  $m$  nei fenomeni impulsivi (pallone calcistico).



non nota  $\vec{F}(t_m) = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{m(\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0))}{t_1 - t_0}$

TEOREMA DELLA MEDIA  $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt = \vec{F}(t_m) \cdot (t_1 - t_0)$  con  $t_m \in [t_0, t_1]$   
 FORZA MEDIA

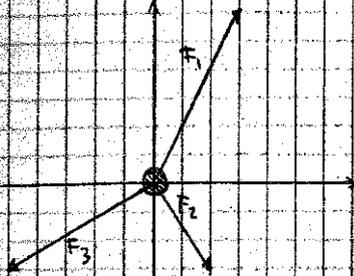
un corpo è in equilibrio statico se  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0 \rightarrow$   
 e la velocità è nulla

$$\begin{cases} R_x = \sum F_{x_i} = 0 \\ R_y = \sum F_{y_i} = 0 \\ R_z = \sum F_{z_i} = 0 \end{cases}$$

es  $\vec{F}_1 = 3\hat{i}_x + 0\hat{i}_y + 0 = (3, 0, 0)$   $\vec{F}_2 = 2\hat{i}_x - 3\hat{i}_y + 0 = (2, -3, 0)$   
 $\vec{F}_3 = (-5, -3, 0)$  una massa soggetta alle 3 forze  $\rightarrow$  qual è la risultante?

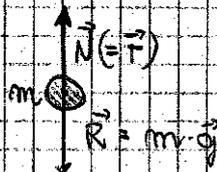
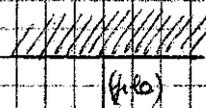
$$\begin{cases} \sum F_{x_i} = 0 \\ \sum F_{y_i} = 0 \\ \sum F_{z_i} = 0 \end{cases}$$

non necessariamente il corpo è fermo, può anche avere  $v = \text{costante}$  cioè accelerazione nulla



• FORZA DI REAZIONE se un corpo soggetto a una o più forze tali che  $\vec{R} \neq 0$  rimane immobile, allora esiste una reazione vincolare  $\vec{N}$  tale che:

$$\vec{R} + \vec{N} = 0$$

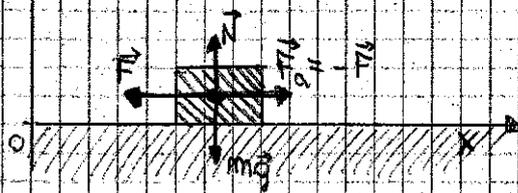


La forza vincolare può essere diretta o indiretta (a volte può essere diversa), manifesta una caratteristica dell'ambiente di lavoro: il valore di  $R$  che può variare caso per caso

• FORZA DI ATRITO STATICO Sia  $\vec{F}$  una forza applicata:

• ATRITO STATICO

$\mu_s$  = coefficiente di attrito statico



Se l'attrito è in grado di esplicitare una forza  $F_a$ , una forza vincente ed opposta a  $F$ ,  $F_a = -F \Rightarrow m$  rimane immobile. Si parla di ATRITO STATICO

Fino a che punto l'attrito è in grado di mantenere  $m$  immobile?

Per tutte le forze  $F$  tali che  $F < F_{a, \max} = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot m \cdot g$

$$F < F_{a, \max} = \mu_s \cdot N$$

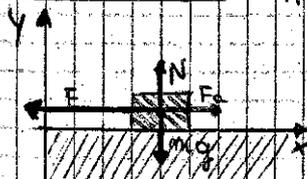
(1)  $N + mg = 0$

CONDIZ. DI EQUILIBRIO STATICO

(2)  $F_a + F = 0$

• ATRITO DINAMICO

Suppongo che  $F$  violi la condizione  $|F| = F_a \leq F_{a, \max}$  (con  $\vec{F}_a = F_a \cdot \hat{i}_x$  e  $\vec{F} = F \cdot \hat{i}_x$ )



$$F_a = \mu_d \cdot N = \mu_d \cdot m \cdot g$$

FORZA DI ATRITO DINAMICO

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_a + \vec{N} + m \cdot \vec{g}$$

vale durante il movimento

(1)  $m \cdot a_x = -F + F_a = \mu_d \cdot N$

(2)  $m \cdot a_y = N - mg = 0 \quad a_y = 0$

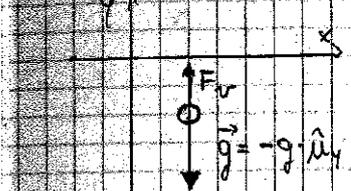
$kN = e^{-(k+Kv)}$   $\Rightarrow$   $v(t) = \frac{1}{k} \left[ \frac{F}{m} - \frac{e^{-kt}}{A} \cdot e^{-Kv} \right]$   
 $A = \frac{F}{m} - k v(0)$

$v(t) = \frac{F}{Km} - \left( \frac{F}{Km} - v_0 \right) e^{-kt}$   
 (definita una volta data  $v_0$  e valore di  $A$  derivata dalla conoscenza di  $v_0$ )

La formula usata vale per i corpi cadenti, mentre per quelli volanti la formula cambia:

$F_v = -\frac{1}{2} C_d \rho S \cdot v^2 = -k v^2$   
 (con coefficiente di resistenza, densità del fluido, sezione)

Dato un corpo di massa  $m$ , immerso nell' $H_2O$  ( $k = 10^{-2} s^{-1}$ ) e con  $\vec{v} = v_y \hat{u}_y$



$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - k m v_y$

Questa parte verrà positiva perché le  $v_y$  e intrinsecamente negativa.

$m \cdot a = -m k v - mg \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = -k v - g$

$\int \frac{dv}{(-k v - g)} = \int dt \rightarrow \frac{-\log(-k v - g)}{k} + C = t \rightarrow \log(-k v - g) = -k t - C \rightarrow -k v - g = e^{-k t - C}$

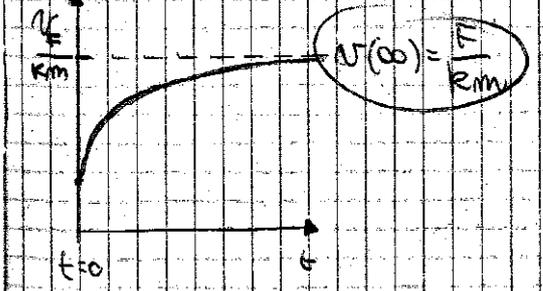
$\frac{-k v}{-k} = \frac{g}{-k} + \frac{e^{-k t}}{-k} \rightarrow v(t) = \frac{g}{k} - \frac{e^{-k t}}{k} \cdot A$

Se  $t=0$   $v_0 = \frac{g}{k} - \frac{e^0 \cdot A}{k} \rightarrow A = -v_0 k - g$

$v(t) = \frac{g}{k} - \frac{e^{-k t}}{k} \cdot (-v_0 k - g) = \frac{g}{k} + v_0 e^{-k t} + \frac{g}{k} e^{-k t} = \frac{g}{k} (1 + e^{-k t}) + v_0 e^{-k t}$

$x(t) = x_0 + \int \left( \frac{g}{k} (1 + e^{-k t}) + v_0 e^{-k t} \right) dt = x_0 + \frac{g}{k} t + \frac{v_0 \cdot e^{-k t}}{-k} + \frac{g}{k} \frac{e^{-k t}}{-k} =$   
 $= x_0 + \frac{g}{k} t - \frac{v_0}{k} e^{-k t} - \frac{g}{k^2} e^{-k t}$

Quando il tempo diventa molto grande: velocità stabile alla quale si instaura il corpo



$\frac{L}{m} \ddot{x} = \frac{Lk}{m} x \rightarrow$  eq. diff. di 2° grado con termine noto (vedi analisi)

$x(t) = x(t) + x_{sp}$   
 caso omogeneo  $\rightarrow$  soluz. particolare

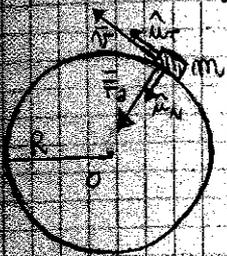
$x_{sp} = \text{costante} = C \Rightarrow C = L$

$L \neq 0 \Rightarrow x(t)_{\text{generale}} = L + A \cos(\omega t + \phi)$

soluz. eq. diff. non omogenea.

HO SOLO ATRITO STATICO PERCHÉ ESSENDO MOTO CIRCOLARE NON HO MOTO RADIALE, ED IL MOTO DELLE RUOTE È DI AIRD ROTOLAMENTO  $\Rightarrow$  ASSENZA DI ATRITO DINAMICO

senza di slitta



auto che percorre una curva a  $v = \text{cost}$  attrito statico  $\mu_s$ . Qual è il raggio R? (senza di slitta)

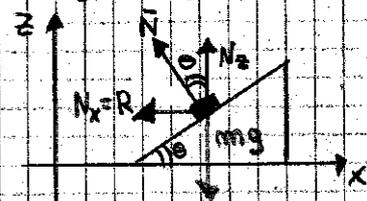
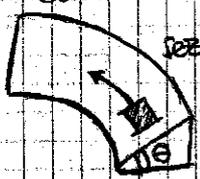
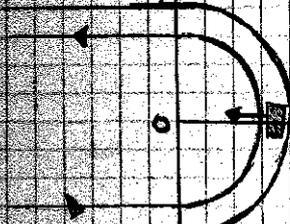
$m \vec{a} = \vec{T}_a \quad \vec{T}_a = F_a \cdot \hat{t}$   
 accelerazione tangenziale  $(\hat{t})$  nulla perché  $v = \text{costante}$   
 $F_a = m \cdot a_N \rightarrow F_a = m \frac{v^2}{R}$   
 $0 = m \cdot a_T \rightarrow 0 = m \cdot \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \text{costante}$

$N = m \cdot g \rightarrow F_a^{\text{max}} = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot m \cdot g$

travolge  $v_{\text{max}}$  superando  $F_a \leq F_a^{\text{max}}$

$m \frac{v^2}{R} = F_a \leq F_a^{\text{max}} = \mu_s \cdot m \cdot g \rightarrow v^2 \leq \mu_s R g \rightarrow v \leq \sqrt{\mu_s R g}$

Auto che percorre una curva su una strada con inclinazione. Qual è  $v_{\text{max}}$ ?



Ne sempre normale alla superficie

$m \vec{a} = \vec{R} \rightarrow m \cdot a_N \cdot \hat{u}_N + m \cdot a_T \cdot \hat{u}_T + m \cdot a_z \cdot \hat{u}_z = \vec{R}$

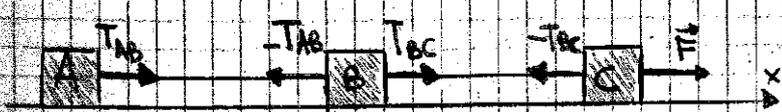
$\begin{cases} m \cdot a_T = 0 & v = \text{costante} \\ m \cdot a_z = 0 = -m \cdot g + N \cos \theta \\ m \cdot a_N = R = N \cdot \sin \theta \end{cases}$

decomposizione nelle 3 direzioni

$N = \frac{m \cdot g}{\cos \theta} \rightarrow m \cdot a_N = m \cdot g \cdot \tan \theta \quad m \frac{v^2}{R} = m \cdot g \cdot \tan \theta \quad v = \sqrt{R g \tan \theta}$

velocità a cui bisogna muoversi su una curva per non scivolare

Travolge le tracce dei fili che misurano  $m_1, m_2, m_3$  poste in un momento da una forza costante F (nata)

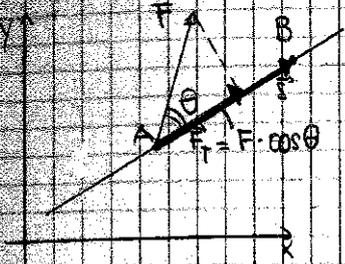


$a_A = a_B = a_C = a$

$\begin{cases} m_A \cdot a = T_{AB} \\ m_B \cdot a = T_{BC} - T_{AB} \end{cases}$   $\rightarrow (m_A + m_B + m_C) a = T_{AB} + T_{BC} - T_{AB} + F - T_{BC} = F$   
 $a = \frac{F}{m}$

DI LAVORO

CASO 1. FORZE COSTANTI (lungo una retta)



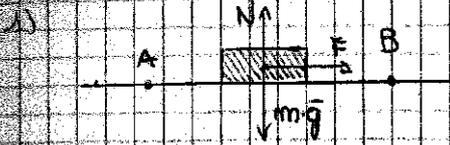
$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \theta = s \cdot \vec{F}_T$$

← prodotto scalare  
 ← la componente tangenziale della forza (compie  
 l'angolo)

• Se  $\theta = 0$   $W_{AB} = F \cdot s \cdot \underbrace{\cos 0}_1 = F \cdot s$

• Se  $\theta = \frac{\pi}{2}$   $W_{AB} = F \cdot s \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 = 0$

es. Molte forze agenti su corpi in moto fanno lavoro nullo (ma è ben presente e necessario)

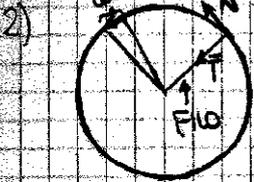


$W_{AB}(F) = F \cdot s$

$W_{AB}(N) = 0$

$W_{AB}(mg) = 0$

} non fanno lavoro ma sono essenziali nello schema delle forze

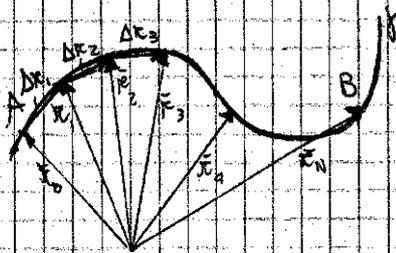


$d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$

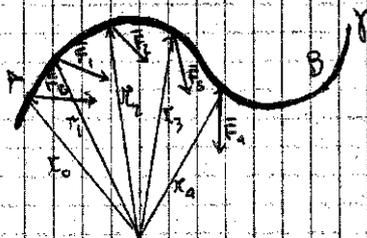
$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt$

← forza di vincolo che trattiene la v → e solo centripeta (necessaria)

CASO 2. LAVORO VARIABILE



$\Delta \vec{r}_j = \vec{r}_{j+1} - \vec{r}_j$



$\vec{F}_j = \vec{F}(\vec{r}_j)$

$\Delta \vec{r}_j$  tende a confondersi con l'arco corrispondente della curva per  $N \rightarrow \infty$  (aumento e più fitta la partizione, tanto più si confonde)

Se un tratto  $\Delta \vec{r}_{j+1}$  il lavoro è:

$\Delta W_j = \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_{j+1} = \vec{F}(\vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_{j+1} - \vec{r}_j)$

$W_{AB} = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}(\vec{r}_j) \cdot (\Delta \vec{r}_{j+1})$

Posso definire il lavoro come LAVORO VARIABILE

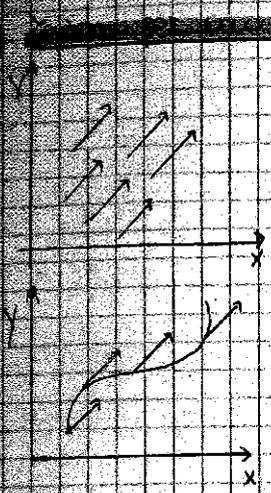
$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$   
← spostamento infinitesimo

$$E_{KB} - E_{KA} = W_{AB} = -(U(K_B) - U(K_A)) = -(U_B - U_A)$$

$$\boxed{E_{KB} + U_B = E_{KA} + U_A} \quad (\text{teorema di conservazione dell'energia})$$

Esistono molte quantità,  $E_K$  e  $U(K)$ , che permettono di sapere che in qualsiasi sistema  $A$  o  $B$  sempre in punti diversi e sempre  $B$  stesso.

$$\int_A^B \vec{u}_x dx = \hat{u}_x \int_A^B dx$$



$$W_{AB} = \int_{A_Y}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{A_Y}^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_A^B (\hat{u}_x dx + \hat{u}_y dy + \hat{u}_z dz) = \vec{F} \cdot [\hat{u}_x (x_B - x_A) + \hat{u}_y (y_B - y_A) + \hat{u}_z (z_B - z_A)] = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

$$\boxed{W_{AB} = \int_{A_Y}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{F} \cdot \vec{r}_B - \vec{F} \cdot \vec{r}_A) = -(U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A))}$$

con  $U(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \vec{r}$

Energia potenziale in un campo di forza costante (campo scalare)

Sono e lavoro in 3 dimensioni utilizzando le primitive di forza, che  $\vec{r}$  dipende dalle 3 variabili a valori reali e non più vettoriali.

$$\textcircled{W_{AB}} \begin{cases} E_{KB} - E_{KA} \\ -(U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A)) \end{cases} \Rightarrow \boxed{E_{KB} + U_B = E_{KA} + U_A}$$

è più estendere alla classe dei sistemi di campo di forze conservative

Definizione.

3) Campo di forze conservative

Definizione un campo di forze  $\vec{F}(\vec{r})$  è conservativo se esiste un campo scalare  $U(\vec{r})$ : energia potenziale tale che il lavoro tra un punto  $A$  e un punto  $B$  nello spazio è espresso da

$$W_{AB} = \int_{A_Y}^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -(E_p(\vec{r}_B) - E_p(\vec{r}_A)) = \underline{-(E_{pB} - E_{pA})}$$

È conservativo se esiste un qualcosa di analogo alle funzioni primitive. Analogia con il calcolo integrale 1 dimensionale (analogo del teo fondamentale del calcolo) con

$$\int_A^B F(x) dx = G(x_B) - G(x_A) \text{ ma } \frac{dG}{dx} = F \quad (\text{collegamento con Analisi})$$

→ Quando è conservativo?

- Dominio connesso
  - Differenziabile con continuità
- $$\Rightarrow F = \nabla G = -\nabla E_p$$

Il concetto di gradiente viene sfruttato per esprimere lo sviluppo in un punto generico del libro.

$$dV = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$$

$$dV = -(\vec{E}_p(\vec{r}_0 + d\vec{r}) - \vec{E}_p(\vec{r}_0))$$

$$E_p(x_0 + dx) = E_p(x_0) + \frac{dE_p}{dx} dx \quad \text{= sviluppo McLaurin}$$

$$\vec{E}_p(x_0 + dx, y_0 + dy) = E_p(x_0, y_0) + \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy \quad \text{generalizzazione a 2 dimensioni}$$

$$dV = -(\vec{E}_p(\vec{r}_0 + d\vec{r}) - \vec{E}_p(\vec{r}_0)) = -(\vec{E}_p(\vec{r}_0) + \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz - \vec{E}_p(\vec{r}_0)) =$$

$$-\left(\hat{u}_x \frac{\partial E_p}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial E_p}{\partial y} + \hat{u}_z \frac{\partial E_p}{\partial z}\right) d\vec{r} = -(\nabla E_p) \cdot d\vec{r}$$

gradiente

$$dV = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\nabla E_p \cdot d\vec{r}$$

per un generico spostamento di arbitrario  $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla E_p$

FORZE NON CONSERVATIVE, TEOREMA DEL LAVORO ENERGETICO

Premessa: Se tutte le forze sono conservative vale  $W_{AB} = E_{KB} - E_{KA} = -(E_{pB} - E_{pA})$

$$W_{AB} = \int_{A_r}^B (\vec{F} + \vec{F}_a) \cdot d\vec{r} = \int_{A_r}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{A_r}^B \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -(E_{pB} - E_{pA}) + \int_{A_r}^B \vec{F}_a \cdot d\vec{r}$$

$\vec{F} = -\nabla E_p$

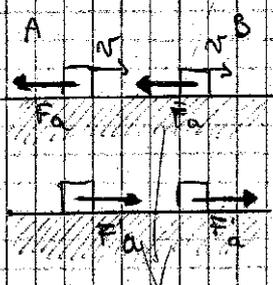
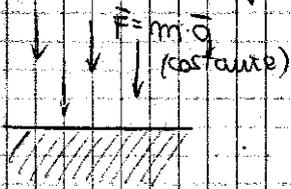
$E_p = -mgy$  no  $\vec{F} = -\nabla E_p = -\hat{u}_y \frac{\partial}{\partial y} (mgy) = -m \cdot g \cdot \hat{u}_y$

$$W_{AB} = \begin{cases} E_{KB} - E_{KA} \\ -(E_{pB} - E_{pA}) + W'_{AB} \end{cases}$$

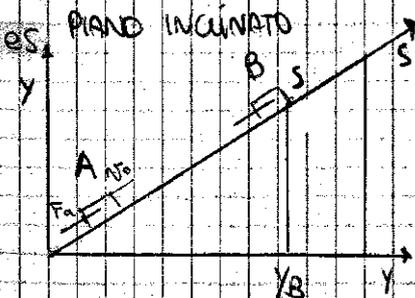
$$E_{KB} - E_{KB} = -(E_{pB} - E_{pA}) + W'_{AB}$$

non si riesce a trovare nella forma di una primitiva

es. Perché una forza di attrito non è conservativa?



Fa può andare a sx o a dx, a suo più meditata di definire il campo di Fa a seconda della situazione in cui mi trovo.



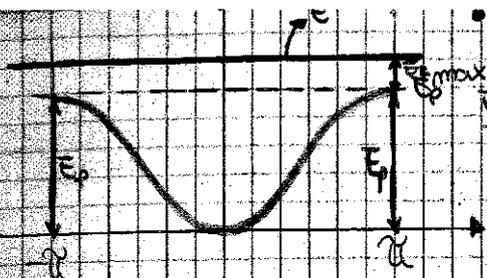
Quanta strada si percorre?

$$v_A = v_0 \quad v_B = 0$$

$$\frac{m}{2} v_B^2 - \frac{m}{2} v_A^2 = -(mgy_B - mgy_A) + \int_{A_r}^{B_r} \overbrace{(-\mu m g \cos \alpha)}^{F_a \text{ dinamico}} ds$$

$$-\frac{m}{2} v_0^2 = -mgy_B - \mu m g \cos \alpha (s_B - s_A) \quad y_B = s \cdot \sin \alpha$$

$$-\frac{m}{2} v_0^2 = -mgs \sin \alpha - \mu \cdot g \cdot m \cdot \cos \alpha \cdot s \quad s = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$$

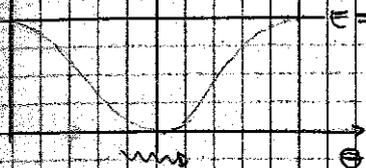


• Energia corrispondente ad un'oscillazione maggiore (linea)  
 mette in moto il pendolo  
 $E > E_{p\max} = E_p(\theta=0) = 2mglR$

nel punto  $\theta = -R$  c'è anche  $E_k$  (cinetica)  $\neq 0$

nel caso del pendolo c'è un sistema più ricco,

• caso speciale



il pendolo si ferma per  $\theta = \theta_m$

$\theta = 0$  :  $E_k = E$  ,  $E_p = 0$

$0 < \theta < \pi$  :  $E_k, E_p < E$  ,  $E = E_p + E_k$

$\theta = \theta_m = \pi$  :  $E = E_p + E_k$  ,  $E_k \neq 0$

**DEL PENDOLO**

$E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mglR(1 - \cos\theta)$

costante, si può derivare nel tempo

$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{mR^2}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} + \frac{d}{dt}(mglR(1 - \cos\theta)) \rightarrow \frac{mR^2}{2} 2\dot{\theta} \ddot{\theta} + mglR \sin\theta \cdot \dot{\theta} = 0$

$\rightarrow 0 = \frac{mR^2}{2} \cdot 2\dot{\theta} \ddot{\theta} + mglR \dot{\theta} \sin\theta \Rightarrow R\ddot{\theta}(R\dot{\theta} + gl \sin\theta) = 0$

→ so che  $\dot{\theta}$  mai è nullo, perciò  $\ddot{\theta}$  nullo è potentesi (ho tirato l'eq del pendolo):

$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin\theta = 0$

• caso limite delle piccole oscillazioni:  $\theta < \pi/2$

soluzione di Taylor:  $\sin\theta \approx \theta$

ho  $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0$

è la formula dell'oscillatore armonico: il pendolo si comporta come un oscillatore armonico se gli angoli sono molto piccoli.

$(m\ddot{x} + kx = 0) \cdot \frac{g}{R}$  gioca il ruolo di  $\omega^2 = \frac{g}{R}$

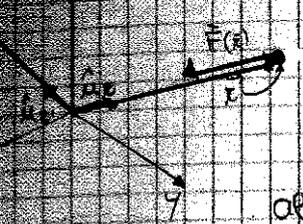
→ fase iniziale data dal contesto.

$\theta(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

"potenziale" (equivalente a potenziale):

$$E = E_p(\infty) + E_k \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

$F(x) \hat{u}_x$  con  $\hat{u}_x = \frac{x}{r}$  e  $F(x) = \frac{k}{x^2}$

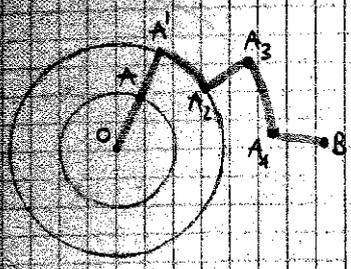


$\vec{F}(\vec{r})$  attrattiva (avvolta verso il centro O)

Si chiama campo di forza centrale perché c'è un centro ed è diretto verso di punta la forza

Nel disegno seguente, centri postamente da una superficie alla altra, corrispondono a masse radiali oppure masse a tempo costante

Ho scelto i due casi possibili:  $\hat{u}_x$  allineato al cammino oppure ortogonale ad esso



$$W_{AB} = \int_{A_1}^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{A_2}^{A_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{A_3}^{A_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{A_4}^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

so che  $\hat{u}_x \perp$  alle sfere del disegno

nel tratto  $A_1 A_2, d\vec{r}$  // sfera e  $\perp \hat{u}_x$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -k \frac{\hat{u}_x}{r^2} \cdot d\vec{r} \quad \hat{u}_x \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{su } \begin{cases} A_1 A_2 \\ A_3 A_4 \end{cases}$$

$$W_{AB} = \int_{A_1}^{A_2} -\frac{k}{r^2} \cdot \hat{u}_x \cdot (\hat{u}_x \cdot d\vec{r}) + \int_{A_2}^{A_3} -\frac{k}{r^2} \cdot \hat{u}_x \cdot (\hat{u}_x \cdot d\vec{r}) + \int_{A_3}^B -\frac{k}{r^2} \cdot \hat{u}_x \cdot (\hat{u}_x \cdot d\vec{r})$$

$d\vec{r} = dx \cdot \hat{u}_x$  (lungo i tratti radiali)

$$W_{AB} = \int_{r_{A_1}}^{r_{A_2}} -\frac{k}{r^2} dr + \int_{r_{A_2}}^{r_{A_3}} -\frac{k}{r^2} dr + \int_{r_{A_3}}^B -\frac{k}{r^2} dr$$

$r_{A_1} = r_{A_2} \quad r_{A_3} = r_{A_4} \Rightarrow W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{k}{r^2} dr = -\left(E_p(r_B) - E_p(r_A)\right)$

con  $E_p(r) = -\frac{k}{r} + C$

Da qui:  $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla E_p = -\frac{k}{r^2} \hat{u}_x$

o CALCOLO CONCRETO DEL GRADIENTE DI UN CAMPO SCALARE (CAMPO DI FORZA CENTRALE)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{|\vec{r}|}$$

$$\nabla \frac{1}{r} = \left( \hat{u}_x \cdot \partial_x + \hat{u}_y \cdot \partial_y + \hat{u}_z \cdot \partial_z \right) \frac{1}{r}$$

con  $\partial_x \frac{1}{r} = \frac{-1/2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (2x) = \frac{-x}{r^3}$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\hat{u}_x \cdot x + \hat{u}_y \cdot y + \hat{u}_z \cdot z}{r^3} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\partial_y \frac{1}{r} = \frac{-y}{r^3}$$

$$\nabla E_p = \nabla \left( -\frac{k}{r} \right) = -k \nabla \frac{1}{r} = -k \left( -\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{k}{r^2} \hat{u}_x$$

$$\partial_z \frac{1}{r} = \frac{-z}{r^3}$$

$$\vec{F} = -\nabla E_p = -k \hat{u}_x$$

Coppa che ruota attorno a  $\vec{z}$ .  $m$  è contenuta dal  $\vec{F}$

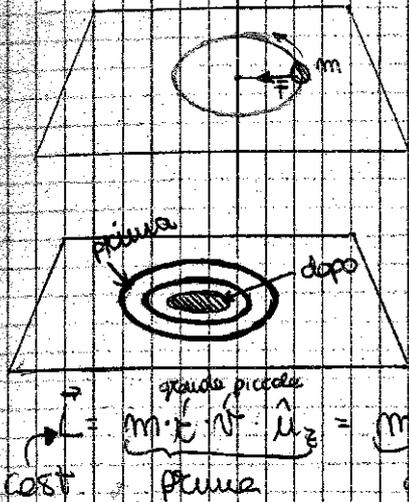
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{z} \wedge \vec{T} = 0$$

sono antiparalleli  $\Rightarrow L$  costante

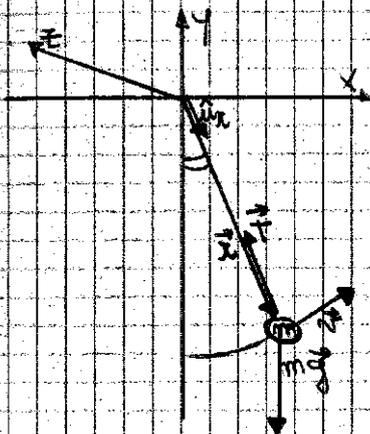
$$\vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m r v \hat{u}_z = m r^2 \omega \hat{u}_z$$

ortogonali ma  $\sin \theta = 1$

Tirer piano il filo per far restringere l'orbita: continua così ad agire solo  $\vec{r}$  del filo perché  $L$  continua ad essere costante  $\rightarrow$  il momento angolare si conserva di capire che di solo cose che vengono conservate.



2) EQUAZIONE DEL PENDOLO (TERZO METODO)



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

parallela

COORDINATE POLARI

$$\vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m r \hat{u}_r \wedge (\dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\theta} \hat{u}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \hat{u}_r \wedge \hat{u}_\theta = m r^2 \dot{\theta} \hat{u}_z$$

$\hat{u}_z$  parallela a  $\vec{z}$

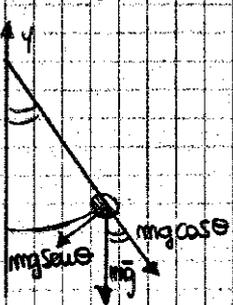
$$\vec{M} = \vec{z} \wedge (m \vec{g} + \vec{T}) = m \cdot \vec{z} \wedge \vec{g} = -m r g \sin \theta \hat{u}_z$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \rightarrow \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta} \hat{u}_z) = -m r g \sin \theta \hat{u}_z$$

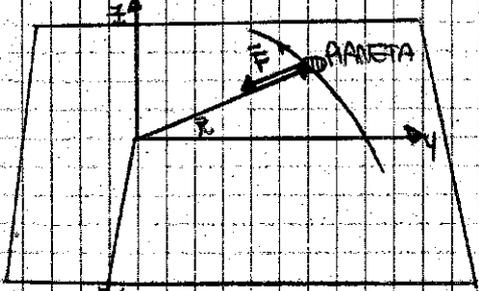
$$m r^2 \ddot{\theta} \hat{u}_z = -m r g \sin \theta \hat{u}_z$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r} \sin \theta = 0$$

$\odot$  L'angolo  $\theta$  è nel verso opposto rispetto all'asse verticale di  $\vec{M} \Rightarrow$  il momento è opposto a  $\hat{u}_z$  ( $-\hat{u}_z$ )



3) TEOR. DEL MOMENTO ANGIOLARE E FORZE CENTRALI: SECONDA LEGGE DI KEPLERO



$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \hat{u}_r = -\frac{k \vec{r}}{r^3} \quad \hat{u}_z = \frac{\vec{z}}{r}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \left(-\frac{k}{r^2}\right) \hat{u}_r = 0$$

$\vec{L}$  = costante

$$\vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = \dots = m r^2 \dot{\theta} \hat{u}_z$$

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot d\theta \cdot r = \frac{r^2}{2} d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{quante } dA \Rightarrow \left(\frac{dA}{dt}\right) dt = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot dt)$$

$$v^i = v_x^i \cdot \frac{dx^i}{dt} + v_y^i \cdot \frac{dy^i}{dt} + v_z^i \cdot \frac{dz^i}{dt} \quad \left. \begin{array}{l} \text{quando le secondi termini non restano} \\ \text{se stessi.} \end{array} \right\}$$

**TRASFORMAZIONI GALILEIANE**

Si definiscono trasformazioni galileiane quelle per cui i sistemi S ed S' sono soggetti ad un moto relativo uniforme  $\Rightarrow v_{S'} = \text{costante}$

$$a_{S'} = 0$$

$$\begin{cases} x^i = x'^i + \vec{R} \\ \vec{v}^i = \vec{v}'^i + \vec{v}_0 \\ \vec{a}^i = \vec{a}'^i \end{cases}$$

Sono le trasformazioni che collegano i cosiddetti sistemi inerziali.

In queste trasformazioni  $\vec{R}$  può essere funzione:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \vec{v}_0 \cdot t$$

**PRINCIPIO DI RELATIVITÀ CLASSICA**

"Le leggi fisiche sono le stesse per tutti gli osservatori che descrivono i fenomeni da sistemi di riferimento inerziali cioè da sistemi collegati da una trasformazione di Galileo. Le leggi della fisica sono INVARIANTI per trasformazioni galileiane"

1) LEGGE DI INERZIA: per un corpo libero  $\vec{v} = \text{cost}$

$$S \rightarrow S' : \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$$

Se per me un corpo è in condizione di quiete, lo è anche per un altro sistema

2) SECONDA LEGGE DI NEWTON:  $\vec{F} = m \cdot \vec{a} \leftarrow S$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}' \leftarrow S' \quad \text{con } a = a'$$

3) CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\text{se } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow p_1(t) + p_2(t) = \text{cost}$$

$$\vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \leftarrow S$$

$$S' \rightarrow m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_0) + m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_0) = \underbrace{(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)}_P - (m_1 + m_2) \vec{v}_0 \stackrel{\text{cost}}{=}$$

In entrambi i sistemi la somma delle quantità di moto sono costanti

**ACCELERAZIONI RELATIVE**

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$

$\vec{a} = \vec{a}_0 + \frac{d\vec{v}'}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}'$  notare  $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

$\vec{a} = \vec{a}_0 + \frac{d\vec{v}'}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$

Calcolando  $\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(v'_x \hat{u}'_x + v'_y \hat{u}'_y + v'_z \hat{u}'_z) = \frac{dv'_x}{dt} \hat{u}'_x + \frac{dv'_y}{dt} \hat{u}'_y + \frac{dv'_z}{dt} \hat{u}'_z$

$+ \vec{v}'_x \frac{d\hat{u}'_x}{dt} + \vec{v}'_y \frac{d\hat{u}'_y}{dt} + \vec{v}'_z \frac{d\hat{u}'_z}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$

ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO

ACCELERAZIONE DI CORIOLIS

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$

**SECONDA LEGGE DI NEWTON**

$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}' + m \left( \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' \right)$

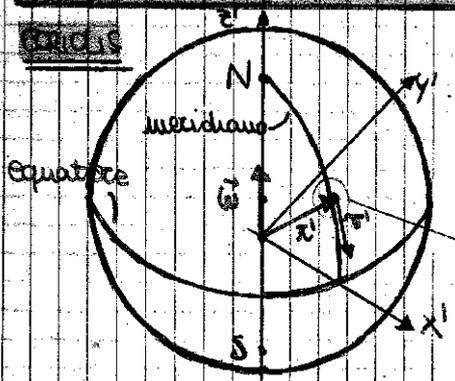
$\vec{F}$   
oggettiva

$\vec{F}_0 + \vec{F}_{Coriolis}$

apparenti: su un sistema rotante, se mettessi un'oca  $\vec{v}=0$  si muoverebbe tutta l'oca parte appaialemente, solo anche dalle fatiche (mai meteo)  $m\vec{g} + \vec{N}$

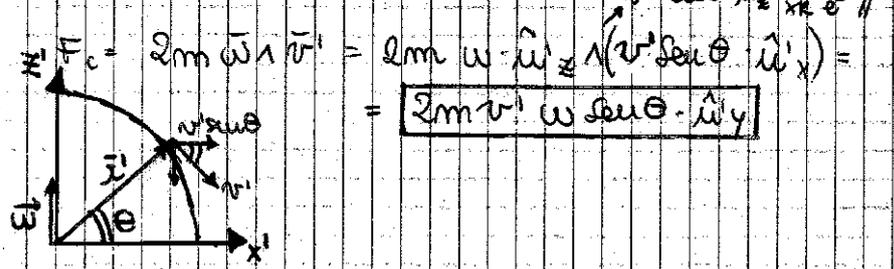
**FORZE FICTIZIE APPARENTI**

Coriolis



$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$

$\rightarrow a_0 = 0$  perché  $\theta = 0$



$F_c = 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = 2m\omega \cdot \hat{u}'_z \times (v' \sin \theta \cdot \hat{u}'_x) = 2m\omega v' \sin \theta \cdot \hat{u}'_y$

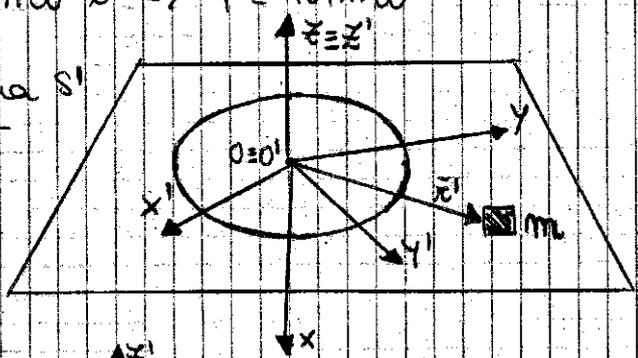
$m\vec{a}' = \vec{F} + \dots - 2m\omega v' \sin \theta \hat{u}'_y$

da nord a sud: girazione sul lato sinistro  
da sud a nord: girazione sul lato destro

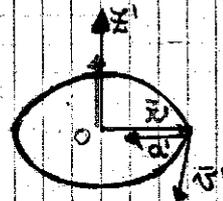
Così si trova l'effetto Coriolis perché avviene dalle due parti (cambia con la direzione del treno), mentre così i fiumi e i venti prevalenti

$\vec{a} = \vec{T} + m\omega^2 \vec{e}'$ , con  $\vec{e}' = R \hat{u}'_y$   
 Il sistema  $S'$  è fatto ruotare (il sistema è rotante, ma detto di lui nulla  
 mobile)  $\rightarrow (m \cdot \vec{a}') = 0 \Rightarrow \vec{T} = -m\omega^2 \vec{e}' \Rightarrow T = R m \omega^2$

Cosa è l'accelerazione di un sistema  $S'$   
 di movimento rispetto ad una  
 massa  $m$  fissa.

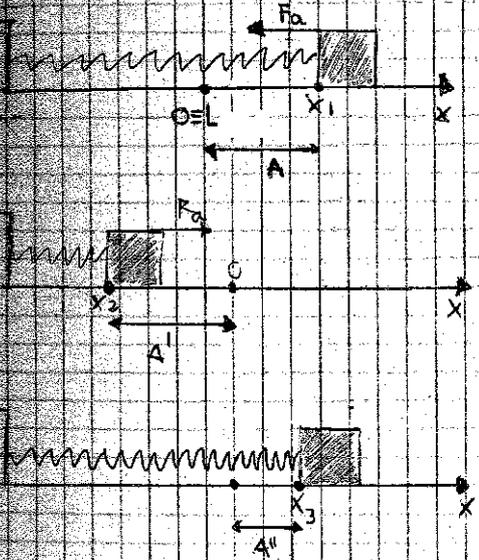


In  $S$ :  $\vec{v} = \vec{v}' - \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$  ( $v_{0'} = 0$ )  
 $\vec{v}' = -\vec{\omega} \wedge \vec{r}'$



$\vec{a} = \frac{d\vec{v}'}{dt} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') = -2\vec{\omega} \wedge (-\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$   
 $\vec{a} = 2\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') = -\omega^2 \vec{e}'$

**OSCILLATORE ARMONICO SPORZATO DA UNA FORZA DI ATRITO COSTANTE (moto pseudo periodico)**



$F(x) = -kx$   
 $x_3 < x_1$   
 $A > A' > A''$   
 Trovare  $\Delta A = A - A''$

SCHEMA RISOLUTIVO: EQU. DI NEWTON  
 da  $x_1$  a  $x_2$ :  $m \cdot a = -kx + F_a$  (con  $F_a = \mu_d \cdot m \cdot g$ )  
 $x(t) = A \tilde{e}^{i(\omega t + \varphi)} + \frac{F_a}{k}$   
 da  $x_2$  a  $x_3$ :  $m \cdot a = -kx - F_a$   
 $x(t) = A \tilde{e}^{i(\omega t + \tilde{\varphi})} - \frac{F_a}{k}$   
 dove  $\tilde{\varphi}$  è la fase iniziale (per verificare si trova uguale a  $\varphi$ )

SCHEMA RISOLUTIVO  
 1)  $E_k^2 - E_k^1 = -(E_p^2 - E_p^1) + \int_{x_1}^{x_2} F_a dx \rightarrow$  da  $x_1$  a  $x_2$  (altamente cambi a segno)  
 $+x_1 = x_2$ ;  $x_i = x_1$   
 $E_k^2 - E_k^1 = -(E_p^2 - E_p^1) + \int_{x_1}^{x_2} F_a dx \rightarrow 0 = -(\frac{k}{2}x_2^2 - \frac{k}{2}x_1^2) + F_a(x_2 - x_1)$

soluzione:  $x = A \cdot e^{\alpha_1 t} + B \cdot e^{\alpha_2 t}$   
 prendo  $x = e^{\alpha t}$  e sostituisco:  $(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2) \cdot e^{\alpha t} = 0$   
 POLINOMIO CARATTERISTICO DA RISOLVERE

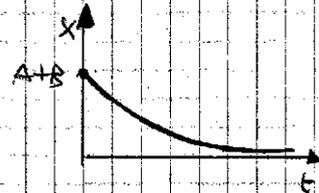
$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm R$$

① **REGIME PERMANENTE PERMANENTE**:  $\gamma^2 > \omega_0^2 \Rightarrow R$  reale

NEGATIVA MEDIANA

$$x(t) = A e^{t(-\gamma+R)} + B e^{t(-\gamma-R)}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A \cdot e^{t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} + B \cdot e^{-t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}})$$



② **REGIME PERMANENTE CRITICO**:  $\gamma^2 = \omega_0^2$

per  $\gamma \rightarrow \omega_0$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (at + b)$$

• prova: derivo la prima espressione (sviluppo di MacLaurin)

$$A e^{+\gamma t} + B e^{-\gamma t} \approx A(1 + \gamma t + \dots) + B(1 - \gamma t + \dots) =$$

$\gamma \rightarrow 0$  (posso sviluppare con MacLaurin)

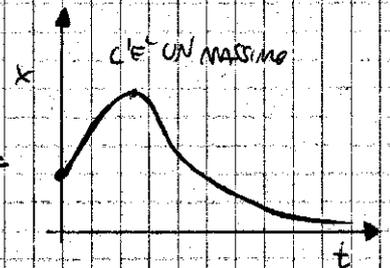
$$= (A+B) + \gamma(A-B)t + \dots = b + t \cdot a$$

A e B arbitrarie:

$$A+B = b$$

$$R(A-B)a \xrightarrow{\text{con } R \rightarrow 0} \Rightarrow A-B = \frac{a}{R}$$

A e B sono quantità reali.



③ **REGIME PERMANENTE OSCILLANTE**:  $\gamma < \omega_0$

Sotto la radice c'è un numero negativo, la radice quindi è un numero complesso.

$$\alpha_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\omega$$

$$\alpha_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\omega$$

$$x(t) = A \cdot e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t} = A \cdot e^{-\gamma t + i\omega t} + B e^{-\gamma t - i\omega t} =$$

$$= e^{-\gamma t} (A \cdot e^{+i\omega t} + B e^{-i\omega t}) \quad \text{con } A, B \in \mathbb{C}$$

Prendo  $B = A^*$  (complesso coniugato)

Solo ipoteticamente  $\omega$  è reale ( $\in \mathbb{R}$ )  $\rightarrow$  è un caso fisico, non posso avere soluzioni complesse.

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A \cdot e^{+i\omega t} + A^* \cdot e^{-i\omega t})$$

Prendo  $A = \frac{1}{2} A_0 \cdot e^{i\phi}$  con  $\phi$  un certo angolo

$$\rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} \left( \frac{A_0}{2} \cdot e^{i\phi} \cdot e^{i\omega t} + \frac{A_0}{2} \cdot e^{-i\phi} \cdot e^{-i\omega t} \right) =$$

$$= \frac{A_0}{2} \cdot e^{-\gamma t} (e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}) =$$

uso la formula  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$= A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

con  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  e  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$

es Prendo  $\phi = -\pi/2$

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$



Si R e  $\varphi$ , trova A.

data (3)

$$m((\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\gamma \omega \sin \varphi) = \frac{F_0}{m}$$

estrainendo:

$$A \left[ (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{R} - 2\gamma \omega \frac{(-2\gamma \omega)}{R} \right] = \frac{F_0}{m}$$

$$A \frac{1}{R} \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2 \right] = \frac{F_0}{m}$$

$$A \cdot R = \frac{F_0}{m} \rightarrow A = \frac{F_0}{mR} = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$X(t) = x(t) + x_p \approx A \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow$  ~~ignora la soluzione generale~~

1)  $\omega \ll \omega_0$

↓  
 fase del motore ↑  
 ↑  
 ampiezza dell'oscillatore

$\rightarrow \gg T_0$

Il motore dovrebbe imporre l'oscillazione molto maggiore di quella della molla

2)  $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow T \ll T_0$

Il motore dovrebbe imporre al sistema (che ha un periodo molto lungo) un'oscillazione molto veloce

3)  $\omega = \omega_0 \Rightarrow T = T_0$

①  $\omega \ll \omega_0$

$$\begin{cases} \tan \varphi = -\frac{2\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \approx 0 \Rightarrow \varphi = 0 & (\text{perché } \omega_0^2 - \omega^2 \text{ è positivo}) \\ A \approx \frac{F_0}{m \omega_0^2} & \text{determina sotto radice } \omega_0^2 \text{ si mangia anche } \omega^2 \end{cases}$$

il cos  $\varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{R}$  deve essere positivo non può essere 0.

$$X(t) = A \sin(\omega t)$$

Si dice che le oscillazioni sono IN FASE con la forza esterna

②  $\omega \gg \omega_0$

$$\begin{cases} \tan \varphi \approx +\frac{2\gamma}{\omega} \approx 0 \Rightarrow \varphi = \pi & (R \cos \varphi \text{ deve essere quantità negativa}) \\ A \approx \frac{F_0}{m \omega^2} \end{cases}$$

$\cos \pi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{R} = -1$   
 $\omega \gg \omega_0$

$$X(t) = A \sin(\omega t + \pi) = -A \sin(\omega t)$$

L'oscillazione è in OPPOSIZIONE DI FASE con la forza esterna.

③  $\omega = \omega_0$

$$\begin{cases} \tan \varphi = \pm \infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \\ A = \frac{F_0}{2m\gamma \omega} \end{cases}$$

$$X(t) = A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = A \cos(\omega t)$$

L'oscillazione è in QUADRATURA DI FASE con la forza.

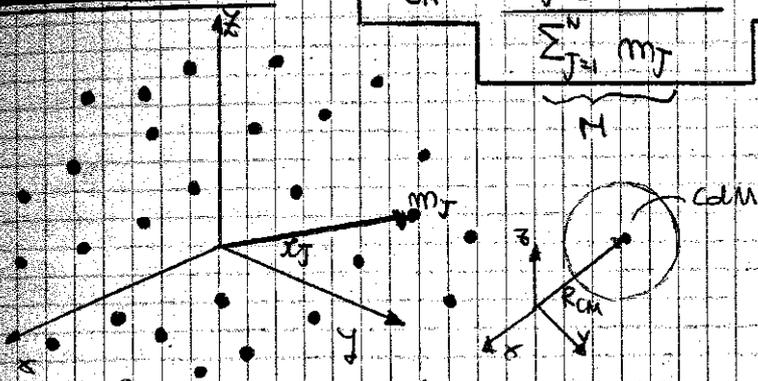
la  $\omega$  max per  $\omega = \omega_0$   
 i condizioni per una prestazione in un sistema di questo tipo:  
 mettere il lucido alla freq naturale dell'oscillatore, se le pulzazioni combinate  
 danno il massimo rendimento del sistema.

18-01-2013

## DINAMICA DEI SISTEMI MULTIPARTICELLARI

### CENTRO DI MASSA

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j}{\sum_{j=1}^N m_j} = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{r}_j$$



$\vec{r}_j$  in funzione del tempo

Se  $m_j = m \forall j$  (caso particolare!)

$$R_{CM} = \frac{1}{M} \sum_j m \vec{r}_j = \frac{m}{M} \sum_j \vec{r}_j = \frac{1}{N} \sum_j \vec{r}_j$$

con  $M = N \cdot m$

è una sorta di media ponderata delle posizioni delle particelle dove il peso è proporzionale alla massa di ciascuna particella che contribuisce alla media.  
 è una sorta di media ponderata delle posizioni delle particelle dove il peso è proporzionale alla massa di ciascuna particella che contribuisce alla media.

### VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA

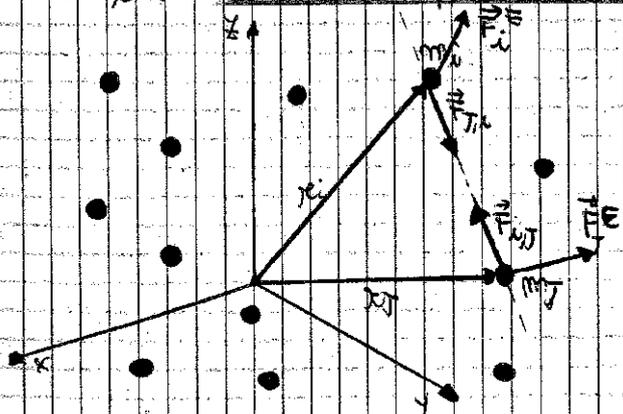
$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_j m_j \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{v}_j = \frac{\vec{P}}{M}$$

NB questa è la quantità di moto comune alle particelle:  $\vec{P}_{tot}$

$$\vec{P} = M \cdot \vec{V}_{CM}$$

### TEORIA DEL CENTRO DI MASSA

Per un sistema di particelle non isolate



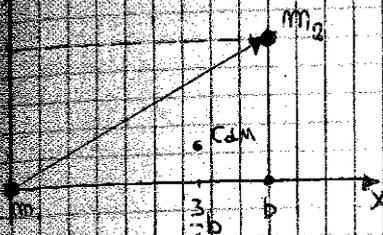
$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

La somma delle forze di interazione tra le particelle è uguale allo zero.

$$A_{CM} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{v}_j = \frac{1}{M} \sum_j m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{a}_j$$

trovare il centro di massa per 3 masse  $m_1, m_2, m_3$  poste ai vertici di un triangolo rettangolo di cateti  $a, b$ .



$$\begin{aligned}
 m_1: \vec{r}_1 &= 0 \\
 m_2: \vec{r}_2 &= b \hat{u}_x + a \hat{u}_y \\
 m_3: \vec{r}_3 &= b \hat{u}_x
 \end{aligned}$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{r}_j = X_{CM} \hat{u}_x + Y_{CM} \hat{u}_y = \hat{u}_x \frac{1}{M} \sum_j m_j x_j + \hat{u}_y \frac{1}{M} \sum_j m_j y_j$$

$$\begin{aligned}
 X_{CM} &= \frac{1}{M} \sum_j m_j x_j \\
 Y_{CM} &= \frac{1}{M} \sum_j m_j y_j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{R}_{CM} &= \hat{u}_x \frac{1}{M} (m_2 b + m_3 b) + \hat{u}_y \frac{1}{M} (m_2 a) = \\
 &= \frac{1}{M} [(m_2 + m_3) b \hat{u}_x + m_2 a \hat{u}_y]
 \end{aligned}$$

• Caso 1: Se  $m_3 = 2m_1, m_1 = m_2 \Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{4m_1} (3m_1 \cdot b \hat{u}_x + m_1 \cdot a \hat{u}_y) = \frac{3b \hat{u}_x + a \hat{u}_y}{4}$   
 il CM è dentro all'oggetto.

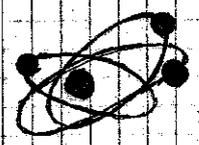
• Caso 2: Se  $m_3 = 10^{-6} m_1, m_2 = 10^{-3} m_1$   

$$\vec{R}_{CM} = \frac{(10^{-3} + 10^{-6}) m_1 b \hat{u}_x + 10^{-3} m_1 a \hat{u}_y}{m_1 + 10^{-6} m_1 + 10^{-3} m_1} = \frac{(10^{-3} + 10^{-6}) \hat{u}_x + 10^{-3} a \hat{u}_y}{1 + 10^{-3} + 10^{-6} \approx 1}$$
 (numeratore trascurabile)  

$$= 10^{-3} (b \hat{u}_x + a \hat{u}_y) \Rightarrow \text{SNO DENTRO L'ORIGINE} \Rightarrow \text{il centro di massa coincide con l'origine O, cioè delle masse e più grande.}$$

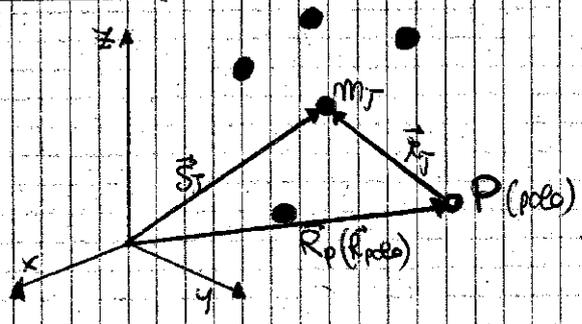
NEL SISTEMA SOLARE

$$\begin{aligned}
 \vec{R}_{CM} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + \dots + m_N} \quad \text{dove } m_1 = \text{sole} \Rightarrow m_1 \gg m_k \\
 &= \frac{m_1 (\vec{r}_1) + \frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2 + \dots + \frac{m_N}{m_1} \vec{r}_N}{m_1 (1 + \frac{m_2}{m_1} + \dots + \frac{m_N}{m_1})} \approx \vec{r}_1
 \end{aligned}$$



TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE (di un sistema di N parti celte)

$$m_i: \begin{cases} \vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i \\ \vec{M}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \end{cases}$$

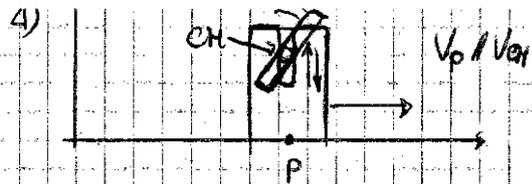
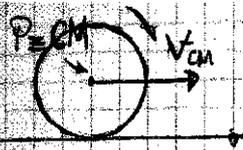


$r_j$  è la posizione rispetto a P

$$\vec{s}_j = \vec{R}_j + \vec{r}_j$$

derivando

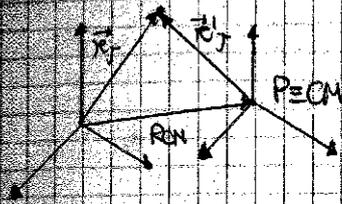
$$\vec{v}_j = \frac{d\vec{s}_j}{dt} = \frac{d\vec{R}_j}{dt} + \frac{d\vec{r}_j}{dt}$$



Preparazione (FACOLTATIVO)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{E}$$

$$\begin{cases} \vec{L} = \sum_J m_J \vec{r}_{J'} \wedge \vec{v}_{J'} \\ \vec{N} = \sum_J \vec{r}_{J'} \wedge \vec{F}_{J'} \end{cases}$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{E}$$

prova

$$\vec{L}' = \sum_J m_J \vec{r}_{J'} \wedge \vec{v}_{J'} \xrightarrow{\text{Vista dal centro di massa}}$$

$$\vec{N}' = \sum_J \vec{r}_{J'} \wedge \vec{F}_{J'}$$

$$\vec{L} = \sum_J m_J \vec{r}_{J'} \wedge \vec{v}_{J'} = \sum_J m_J \vec{r}_{J'} \wedge (\vec{v}_{J'} + \vec{V}_{CM}) =$$

$$= \sum_J m_J \vec{r}_{J'} \wedge \vec{v}_{J'} + \sum_J m_J \vec{r}_{J'} \wedge \vec{V}_{CM} = \vec{L}'$$

$$\left( \sum_J m_J \vec{r}_{J'} \right) \wedge \vec{V}_{CM} = 0$$

$$\vec{N}' = \sum_J \vec{r}_{J'} \wedge \vec{F}_{J'} = \sum_J \vec{r}_{J'} \wedge \left( \vec{F}_{J'}^E + \vec{F}_{J'}^I - m_J \vec{a}_{CM} \right) = \sum_J \vec{r}_{J'} \wedge \vec{F}_{J'}^E + \sum_J \vec{r}_{J'} \wedge \vec{F}_{J'}^I -$$

$$- \sum_J \vec{r}_{J'} \wedge m_J \vec{a}_{CM} = \vec{N}'^E$$

perché  $\left( \sum_J m_J \vec{r}_{J'} \right) \wedge \vec{a}_{CM} = 0$

23-04-13

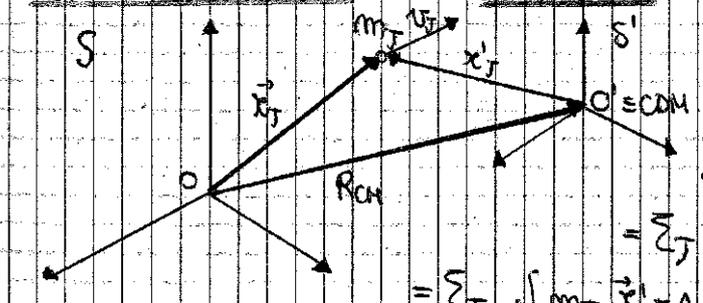
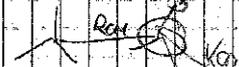
**PRIMO TEOREMA DI KÖNIG**

$$\vec{L} = M \vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM} + \vec{L}'$$

momento angolare rispetto all'origine del sistema inerziale S

momento angolare rispetto al polo che coincide con il centro di massa

nel caso del corpo che ruota attorno ad un asse z'



$$\vec{r}_{J'} = \vec{r}_J + \vec{R}_{CM}$$

$$\vec{v}_{J'} = \vec{v}_J + \vec{V}_{CM}$$

decom

$$\vec{L} = \sum_J m_J \vec{r}_{J'} \wedge \vec{v}_{J'} = \sum_J m_J (\vec{r}_J + \vec{R}_{CM}) \wedge (\vec{v}_J + \vec{V}_{CM}) =$$

$$M = \sum_J [m_J \vec{r}_J \wedge \vec{v}_J + m_J \vec{R}_{CM} \wedge \vec{v}_J + m_J \vec{r}_J \wedge \vec{V}_{CM} + \vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM}]$$

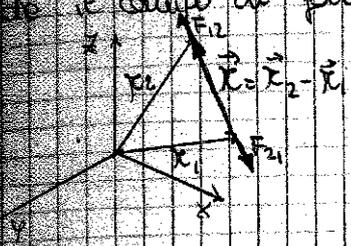
$$= \underbrace{\sum_J m_J \vec{r}_J \wedge \vec{v}_J}_{\vec{L}'} + \underbrace{\left( \sum_J m_J \right) \vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM}}_{\text{per le masse dipendono dal}} + \sum_J m_J \vec{r}_J \wedge \vec{V}_{CM} + \underbrace{\vec{R}_{CM} \wedge \left( \sum_J m_J \vec{v}_J \right)}_{\text{cancela nelle sommatorie le quantità che dipendono da J}} =$$

$$= \vec{L}' + M \vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM} + \left( \sum_J m_J \vec{r}_J \right) \wedge \vec{V}_{CM} + \vec{R}_{CM} \wedge \left( \sum_J m_J \vec{v}_J \right) \Rightarrow$$

TERMINI LOCALI/INTERNI      TERMINI ORBITALI/GLOBALI

$$\int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{x}_2 + \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot d\vec{x}_1 = \int_A^B (\vec{F}_{12} \cdot d\vec{x}_2 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{x}_1)$$

Il campo di forze centriche si scrive così:  $\vec{F}(\vec{x}) = \frac{K\vec{x}}{x^3}$



Quindi:  $\vec{F}_{12}(\vec{x}_2) = -K \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}$

perché  $F_{12}$  fa da sorgente ed  $F_{21}$  è quello che si muove verso

$$F_{21}(\vec{x}_1) = +K \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} = +K \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} = -F_{12}$$

$$F_{21} = -F_{12}$$

Forze uguali ed opposte rispetto ad un unico coordinato  $\vec{x}$ : posso scrivere il doppio integrale come un integrale unico.

scalo:  $U_{12}(\vec{x}) = \frac{K}{x} + C$

$$\int_A^B (\vec{F}_{12} \cdot d\vec{x}_2 - \vec{F}_{12} \cdot d\vec{x}_1) = \int_A^B \vec{F}_{12} (d\vec{x}_2 - d\vec{x}_1) = \int_A^B \vec{F}_{12} d(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \int_A^B \frac{K(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} d(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \int_A^B \frac{K\vec{x}}{x^3} d\vec{x} = [-U_{12}(\vec{x})]_A^B$$

$$\int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{x}_2 + \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot d\vec{x}_1 = - [U_{12}(\vec{x}_{2B} - \vec{x}_{1B}) - U_{12}(\vec{x}_{2A} - \vec{x}_{1A})]$$

l'energia potenziale della coppia viene dal doppio integrale come valore dello coppia

• Conclusione:  $W_{AB} = - (U_B^{(E)} - U_A^{(E)}) - (U_{12}(\vec{x}_B) - U_{12}(\vec{x}_A)) = - [ (U_B^{(E)} + U_{12}(\vec{x}_B)) - (U_A^{(E)} + U_{12}(\vec{x}_A)) ]$

$$E_{KB} - E_{KA} = - [ (U_B^{(E)} + U_{12}(\vec{x}_B)) - (U_A^{(E)} + U_{12}(\vec{x}_A)) ] \Rightarrow E_{KB} - E_{KA} = E_p^B - E_p^A$$

con  $E_{KB} = \frac{1}{2} \sum_T m_T v_T^2$   $E_A = \frac{1}{2} \sum_T m_T v_T^2$

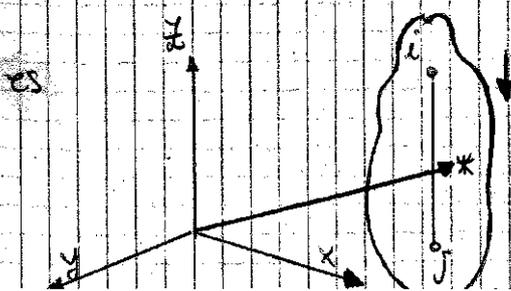
$$E_p^B = U_B^{(E)} + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} U_{ij} (x_j - x_i)_B$$

$$E_p^A = U_A^{(E)} + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} U_{ij} (x_j - x_i)_A$$

su tutte le coppie:  $\frac{1}{2}$  è messo per non contare i doppiami.

$$E_{meccanica} = E = E_K + E_p = \frac{1}{2} \sum_T m_T v_T^2 + \sum_T U_T^{(E)} + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} U_{ij} (\vec{x}_j - \vec{x}_i) = \text{COSTANTE}$$

dipendo dalla distanza delle masse della coppia

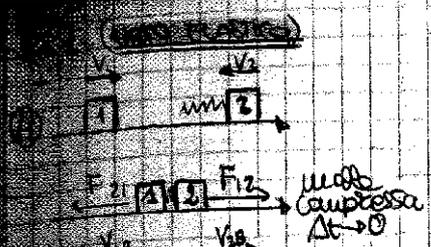


Corpo rigido:  $\forall (i,j) |\vec{x}_i - \vec{x}_j| = \text{costante}$

$$E = \frac{1}{2} \sum_T m_T v_T^2 + \sum_T m_T \vec{x}_T \cdot \vec{g} + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} U_{ij} = \dots$$

con  $U_{ij}^E = -m_{ij} \vec{x}_{ij} \cdot \vec{g} = m_{ij} \vec{x}_{ij} \cdot \vec{g}$

cost. meccanica perché



Durante la fase di contatto (tra A e B) :  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{k}{2} (x_2 - x_1 - L)^2 = E$$

$E = \text{costante}$ ,  $\forall t$ , durante il contatto

$$F_{12} = - \frac{\partial U_{12}}{\partial x_2} = -k (x_2 - x_1 - L) \quad \left. \begin{array}{l} \text{quantità positiva} \\ \text{negativo} \end{array} \right\} \text{si annullano}$$

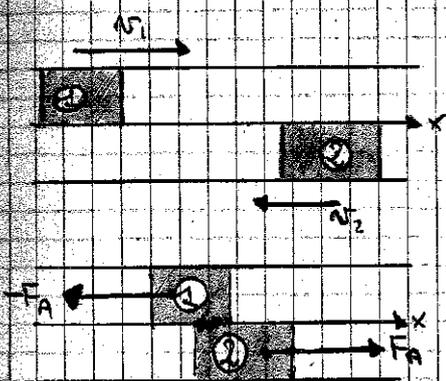
$$F_{21} = - \frac{\partial U_{12}}{\partial x_1} = k (x_2 - x_1 - L) \quad \left. \begin{array}{l} \text{quantità negativa} \\ \text{negativo} \end{array} \right\}$$

prima  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} m_1 v_{1A}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2A}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2B}^2 \\ m_1 v_{1A} + m_2 v_{2A} = m_1 v_{1B} + m_2 v_{2B} \end{array} \right.$  due eq in due incognite

Es 2 (LAVORO DI UNO SOSTANZA)

$p_1 + p_2 = P \rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}$

non vale la conservazione di energia a causa delle forze interne non conservative



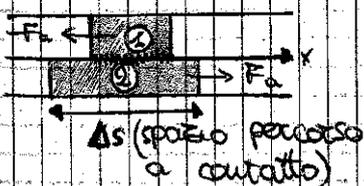
Spostiamo l'una con l'altra, alla fine invece una sola delle due masse viaggeranno con un'unica velocità diversa dalle due iniziali

eq di Newton  $\left\{ \begin{array}{l} m_1 a_1 = -F_a \\ m_2 a_2 = +F_a \end{array} \right.$  Forze interne dissipative (attrito costante)

①  $\int_t^{t'} (-F_a) dt = J_{21} = -F_a \cdot \Delta t$

②  $\int_t^{t'} (+F_a) dt = J_{12} = +F_a \cdot \Delta t$

Ora calcolo i lavori



$W_1' = -F_a \cdot \Delta s$   
 $W_2' = F_a \cdot (-\Delta s)$

$W_{tot} = -2F_a \cdot \Delta s \neq 0$   
 NON SI CONSERVA  $E_k$  CHE È STATA ASSORBITA DAL LAVORO.

$$\frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} + v_2 - v_1 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1 + m_1 v_2 - m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} =$$

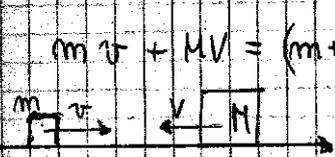
$$\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_2 v_2 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

è la stessa eq di  $v_1'$  ma con gli indici scambiati (perché gli indici delle eq sono simmetrici)

ALTRI NOTEVOLI

- 1)  $m_1 \gg m_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1' \approx \frac{m_1 v_1}{m_1} = v_1 \\ v_2' \approx 2v_1 - v_2 \end{cases}$  simulazione una pallina contro un muro
- 2)  $m_1 = m_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1' = v_2 \\ v_2' = v_1 \end{cases}$  se le masse sono uguali, si scambiano le v.
- 3)  $m_2 \gg m_1 \Rightarrow \begin{cases} v_1' \approx 2v_2 - v_1 \\ v_2' \approx v_2 \end{cases}$

es. Quanta energia va perduta sotto forma di calore in un urto completamente anelastico? (es 4.12)



$$m v + M V = (m + M) v' \quad V = \frac{m v + M V}{m + M}$$

$$\Delta E_k = E_k - E_k' > 0$$

iniziale      finale

$$\Delta E_k = \frac{m v^2}{2} + \frac{M V^2}{2} - \frac{(m + M) v'^2}{2} = \text{e' maggiore di zero (sostituisci v' nell'eq)}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ m v^2 + M V^2 - \frac{(m v + M V)^2}{m + M} \right] = \frac{1}{2(m + M)} \left[ m^2 v^2 + M^2 V^2 + 2 m M v V - (m^2 v^2 + M^2 V^2 + 2 m M v V) \right]$$

$$= \frac{m M}{2(m + M)} (v^2 + V^2 - 2 v V)$$

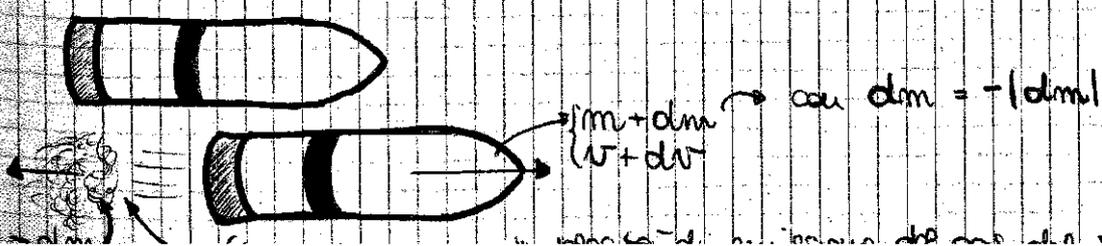
$(V - v)^2 > 0$

La perdita finale è positiva: l' $E_k$  iniziale è stata ridotta: conferma della natura dissipativa

es. In generale

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(m(t) \cdot v)}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$$

La massa può essere variabile (si pensi ad un razzo che continua a bruciare).

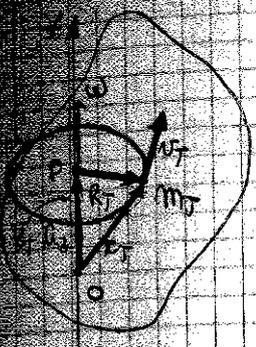


$$m_j \vec{r}_j$$

$$\vec{\omega}$$

MOMENTO D'INERZIA rispetto all'asse z

per un corpo di forma qualsiasi



$$\vec{r}_j = z_j \hat{u}_z + \vec{R}_j$$

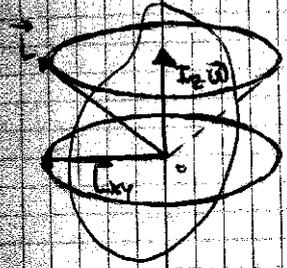
$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_j m_j \vec{r}_j \wedge \vec{v}_j = \sum_j m_j (z_j \hat{u}_z + \vec{R}_j) \wedge \vec{v}_j = \\ &= \sum_j m_j (z_j \hat{u}_z \wedge \vec{v}_j + \vec{R}_j \wedge \vec{v}_j) = \sum_j m_j z_j \hat{u}_z \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}_j) + \\ &+ \sum_j m_j \vec{R}_j \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}_j) = I_z \cdot \vec{\omega} + \sum_j m_j z_j [\vec{\omega} (\hat{u}_z \cdot \vec{R}_j) - \\ &- \vec{R}_j (\hat{u}_z \cdot \vec{\omega})] = \end{aligned}$$

$$\vec{\omega} = |\vec{\omega}| \hat{u}_z$$

$$I_z \cdot \vec{\omega} - \sum_j m_j z_j \vec{R}_j \cdot \vec{\omega} = \boxed{I_z \cdot \vec{\omega} - \vec{L}_{xy} = \vec{L}}$$

MOMENTO ANGOLARE ASSIALE

gradiente su xy: e' la sommatoria dei momenti di tutte le masse del corpo.



$L_{xy}$  descrive una circonferenza nello spazio, mentre  $L$  descrive un cono nello spazio.

Processo del momento angolare: L disaccoppiato a causa della precessione può andare fuori asse.

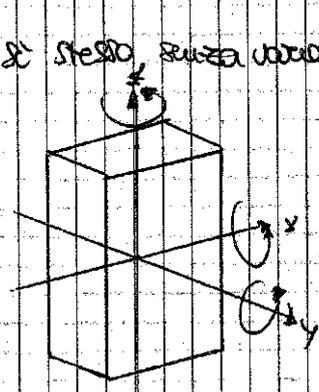
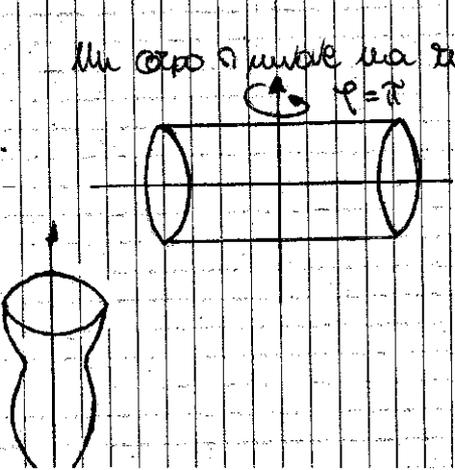
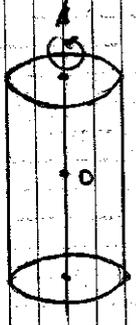
Mentre  $I_z \omega$  non dipende dalla scelta del polo, per il secondo termine incide la scelta del polo.

ASSI PRINCIPALI DI INERZIA

si può dimostrare che per ogni punto di un corpo generico esistono 3 assi ortogonali (assi principali d'inerzia), tali che se l'asse di rotazione coincide con uno di essi, allora  $\vec{L} = I \vec{\omega}$  e  $L_{xy} = 0$  - poiché il responsabile dell'effetto di precessione nel centro di massa questi assi sono gli assi centrali di inerzia.

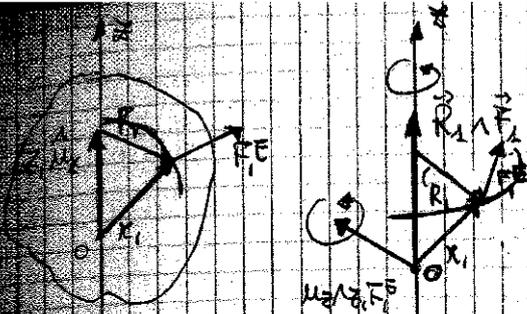
ASSI CENTRALI D'INERZIA

con assi di simmetria = coincidono con gli assi principali di inerzia

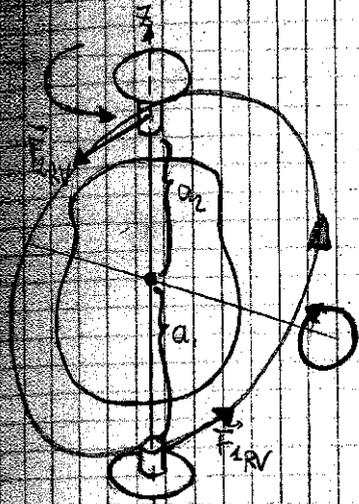


3 assi di simmetria

Un corpo simmetrico ruotando su se stesso, senza variazioni nell'aspetto



Questa componente cerca di instaurare un moto di rotazione degli assi non allineato con i corredi (ruote)



I due pesi determinano un momento uguale ed opposto

$$\hat{u}_z \wedge r_1 \vec{F}_1 + (\omega_2 \hat{u}_z \wedge r_2 \vec{F}_2 + a_1 \hat{u}_z \wedge F_{1RV}) = 0$$

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega} + L_{xy}$$

$$\frac{dL}{dt} = \vec{M}^E \rightarrow I_z \dot{\omega} + \frac{dL_{xy}}{dt} = \vec{M}^E$$

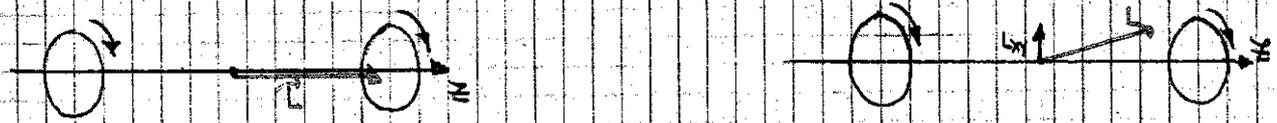
$$\frac{dL_{xy}}{dt} = \frac{d}{dt} (-\omega \sum_j m_j z_j \vec{R}_j) = -\frac{d\omega}{dt} \sum_j m_j z_j \vec{R}_j - \omega \sum_j m_j z_j \frac{d\vec{R}_j}{dt} = -\frac{d\omega}{dt} \sum_j \frac{I}{\omega} (\omega m_j z_j \vec{R}_j) - \omega \sum_j (\omega m_j z_j \vec{R}_j) L_{xy}$$

*si tratta di un vettore; ha lunghezza fissa ma ruota nel piano.*

$$I_z \dot{\omega} + \frac{d\omega}{dt} \frac{1}{\omega} L_{xy} + \vec{\omega} \wedge L_{xy} = \vec{M}^E = \vec{M}_{app}^E - \vec{M}_{rot}$$

$I_z \dot{\omega} = \vec{M}_{app}^E$  moltiplico e divido per  $\omega$  per ottenere  $L_{xy}$  nella formula

Le ruote della macchina con assi  $R_{1V}$  e non

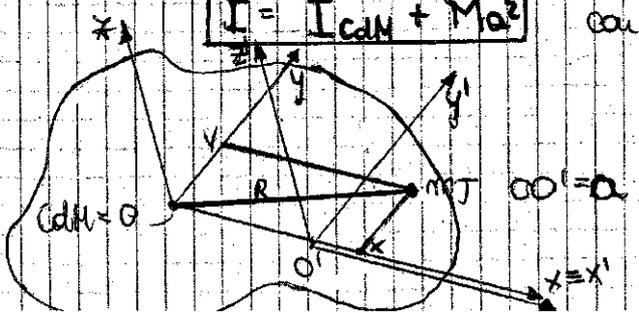


**TEOREMA DI STEINER**

Se un'asse di rotazione è parallelo ad uno assente per il Centro di Massa:

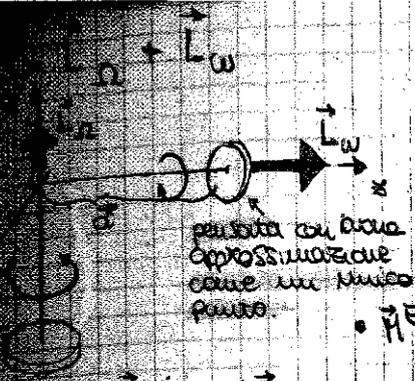
$$I = I_{cm} + Ma^2$$

con  $a$  = distanza tra i due assi  
 $M$  = massa totale



$$I_{cm} = I_z = \sum_j m_j (x_j^2 + y_j^2)^2$$

$$\begin{cases} x'_j = x_j - a \\ y'_j = y_j \end{cases} \text{ calcolo } I = I_{z'}$$



pendolo con disco approssimabile come un punto

$\vec{L}_\Omega = m \cdot \vec{d} \wedge \vec{v} = m d^2 \Omega \cdot \hat{u}_x$  (tangenziale)  
 $\vec{L}_\omega = I_z \vec{\omega}$   
 $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{d} \wedge m \vec{g} = -\hat{u}_y m d g$  (momento della forza di gravità)

$\frac{d\vec{L}}{dt} + \frac{d\vec{L}_\omega}{dt} = \frac{d}{dt} (I_x \cdot \omega \hat{u}_x(t)) = I_x \dot{\omega} \hat{u}_x \wedge \hat{u}_x(t) = -I_x \dot{\omega} (-\hat{u}_y)$

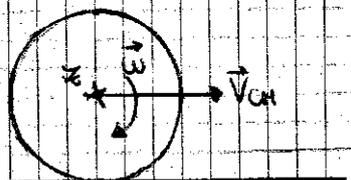
l'asse e sul punto di contatto cambia solo fase.

$\Omega I_x \dot{\omega} (-\hat{u}_y) = (-\hat{u}_y) \cdot m d \cdot g$   
 $\Omega I_x \dot{\omega} = m d g$

$\omega = \frac{m d g}{I_x \Omega} \quad \text{or} \quad \Omega = \frac{m d g}{I_x \omega}$

velocità angolare con cui ruota = precessione precessione che bilancia il momento di gravità

**MOTO DI RUOLO ROTOLAMENTO**



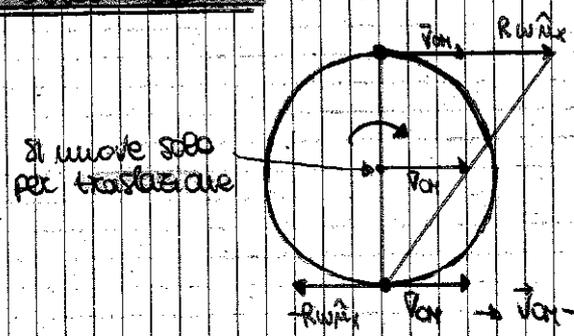
$s = -R \cdot \phi$

L'arco e' pari alla distanza percorsa.

$\frac{ds}{dt} = \vec{V}_{CM} = -R \omega$

(=> derivando entrambi i membri) so che  $\vec{v} = R \cdot \dot{\omega}$  (moto rotolare)

**TRIANGOLO DELLE VELOCITÀ**



si muove solo per traslazione

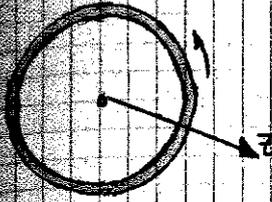
somma degli effetti delle velocità nel punto si muove per traslazione e rotazione

$\vec{v}_{CM} - R \omega_x = 0 \Rightarrow$  assenza di slittamento nel punto di contatto.

**MOTO DI RUOLO TRAMITE IL PUNTO DI CONTATTO: LA VELOCITÀ STANTINEAMENTE NULLA:**

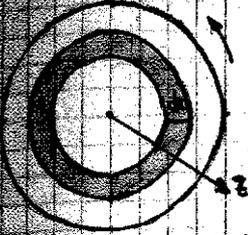
per questo fenomeno e' necessaria la presenza di una forza d'attrito (per non farlo scivolare) -> la forza d'attrito e' statica, quindi deve essere  $\leq \mu_s N$  (attrito statico massimo) altrimenti diventa un moto di rotolamento + slittamento

**MOMENTO D'INERZIA DI UN ANELLO (ROTANTE ATTORNO AD UN ASSE PASSANTE PER IL SUO CENTRO)**



$$I_z = \sum_j m_j R_j^2 = N m_j R^2 = M R^2$$

**MOMENTO D'INERZIA DI UN DISCO OMogeneo**



$$I_z = \frac{1}{2} M R^2 \rightarrow I_z = \sum_j m_j R_j^2 = \int_0^R dI dr$$

• Penso al disco come ad un sistema di tanti anelli:

• massa di una corda circolare:  $dm = 2\pi r \cdot dr \cdot \rho$   
circumferenza spessore densità

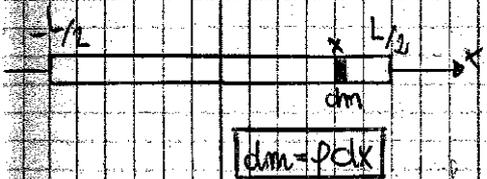
• per un anello:  $dI = r^2 \cdot dm = r^2 \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot \rho$  con  $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$

quindi per l'intero disco:

$$\int_0^R \rho x^3 2\pi dx = 2\pi \rho \left( \frac{x^4}{4} \right)_0^R = 2\pi \rho \frac{R^4}{4} = 2\pi \cdot \frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$$

↓ valido anche per il cilindro (somma di tanti dischi).

**MOMENTO D'INERZIA DI UNA BASTONCINO**



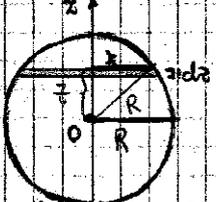
decompongo la massa in elementi infinitesimi dm

$$I_z = \sum_j m_j R_j^2$$

$$I_z = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho dx = \rho \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{\rho}{3} x^3 \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$\frac{\rho}{3} \left( \frac{L^3}{8} - \left( -\frac{L^3}{8} \right) \right) = \frac{1}{12} \rho L^3 = \frac{M}{12} L^2 = I_z$$

**MOMENTO D'INERZIA DI UNA SFERA PIENA**



$$r^2(z) = (R^2 - z^2)$$

$I_z = \int dI$  dei dischi infinitesimi

Disco di spessore infinitesimo:  $dI = \frac{1}{2} dm r^2$

densità base altezza

$$dm = \rho \cdot \pi r^2 dz$$

come cilindro schiacciato

$$dI = \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dz$$

$$I_z = \int dI = \int_{-R}^R \frac{\rho}{2} \pi r^4 dz = \int_{-R}^R \frac{\rho}{2} \pi (R^2 - z^2)^2 dz =$$

funzione pari

$$= 2 \int_0^R \frac{\rho \pi}{2} (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz = \pi \rho \left[ R^4 z - \frac{2}{3} R^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right]_0^R = \pi \rho \left( R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 \right) =$$

$$\pi \rho \cdot \frac{15 - 10 + 3}{15} R^5 = \frac{8\pi}{15} \rho R^5$$

ma che  $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow$  sostituendo  $I_z = \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{2}{5} M R^2$

energia potenziale di un corpo in un campo di forze  $F(\vec{r})$

di cui sono presenti e  $G$  somma delle energie potenziali associate al campo di forze sorgente (principio di additività dei potenziali)

in generale:

$$E_p(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

$$F(\vec{r}) = - \nabla E_p(\vec{r}) = - \nabla \left( \sum_{j=1}^N E_{p_j}(\vec{r}) \right) = - \sum_{j=1}^N \nabla E_{p_j}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j = \vec{F}_T(\vec{r}) = \text{gradiente di } E_p \text{ calcolato in } \vec{r} \text{ e riferito alle forze sorgenti}$$

$$E_p(\vec{r}) = m \cdot G(\vec{r}) = m \sum_{j=1}^N G_j(\vec{r})$$

$$F(\vec{r}) = - \nabla E_p(\vec{r})$$

$$\vec{G}(\vec{r}) = - \nabla \left( \frac{1}{m} E_p(\vec{r}) \right)$$

$\frac{F}{m} = \frac{m G(\vec{r})}{- \nabla E_p}$ 
 $G(\vec{r}) = - \frac{\nabla E_p}{m}$

dove membro a membro

potenziale associato al campo  $G(\vec{r})$

$$V(\vec{r}) = \frac{E_p(\vec{r})}{m} = - \gamma \frac{m_T r}{|\vec{r} - \vec{r}_T|}$$

conseguenza:  $\vec{G}(\vec{r}) = - \nabla V$

dal dato  $G = g = m/s^2$ ?

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \gamma \frac{m m_T}{|\vec{r} - \vec{r}_T|^2} (\vec{r} - \vec{r}_T) = \text{della forza}$$

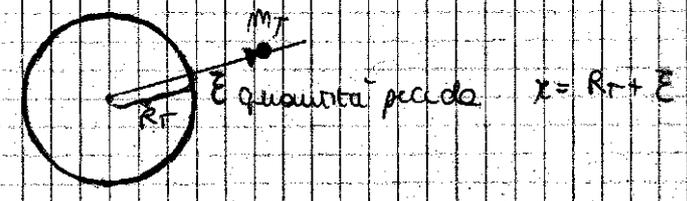
$$\text{da } r_T = 0 = \text{origine}$$

$$= - \gamma \frac{m m_T}{r^2} \hat{u}_r$$

in modulo:

$$F = m G = m \frac{\gamma m_T}{r^2}$$

$$\vec{G}(R_T + \epsilon) = \frac{\gamma m_T}{(R_T + \epsilon)^2} =$$



$$= \frac{\gamma m_T}{R_T^2 (1 + \epsilon/R_T)^2} \approx \frac{\gamma m_T}{R_T^2} \left( 1 - 2 \frac{\epsilon}{R_T} + \dots \right)$$

(development in series)

$$E_p(\vec{r}) = m V(\vec{r})$$

$$\rightarrow V(R_T + \epsilon) = - \frac{\gamma m_T}{R_T + \epsilon} \approx - \frac{\gamma m_T}{R_T} \left( 1 - \frac{\epsilon}{R_T} + \dots \right) = - g R_T + g \epsilon$$

$$= - g R_T + g \cdot \epsilon$$

$$E_p(R_T + \epsilon) = - \underbrace{m g R_T}_{\text{costante}} + m g \epsilon$$

specie di massa gravitazionale e potenziale associato

PROBLEMA nel sistema del CdM

$$\frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{1}{2} \left[ m_1 \cdot \frac{m_2^2}{M^2} v^2 + m_2 \frac{m_1^2}{M^2} v^2 \right] = \frac{m_1 m_2}{2} \frac{1}{M} (m_2 + m_1) v^2$$

$$\frac{m_1 m_2}{M} v^2 = \frac{\mu}{2} v^2 \quad \text{con} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M} \quad \text{MASSA RIDOTTA}$$

un problema di un unico corpo con la massa  $\mu$  (più piccola di quella

IN STAGIONE

$$m_1 \vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2 = m_1 \left( \frac{m_2}{M} \vec{r} \right) \wedge \left( \frac{m_2}{M} \vec{v} \right) + m_2 \left( \frac{m_1}{M} \vec{r} \right) \wedge \left( \frac{m_1}{M} \vec{v} \right) = \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \wedge \vec{v} + \frac{m_2 m_1}{M} \vec{r} \wedge \vec{v}$$

$$\frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \wedge \vec{v} = \mu \cdot \vec{r} \wedge \vec{v}$$

in un caso rispetto ad un unico corpo.

2) assumiamo  $m_1 \rightarrow \infty$ , ne segue:

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = m_2 \quad \bullet \vec{r}_1 = - \frac{m_2}{M} \vec{r} = 0 \quad (\text{sole e CdM coincidenti}) \quad \bullet \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} = \vec{r}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} = \vec{v} \quad \bullet \vec{v}_1 = - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} = 0 \quad (\text{il sole è fermo})$$

$\vec{v} = \frac{m_2}{2} \vec{v}_2^2$   
 riguardante solo la massa 2

LEGGI DI KEPLERO

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}_{12} = 0 \quad \text{perché } \vec{F}_{12} \text{ è una forza centrale (} \parallel \vec{r} \text{)}$$

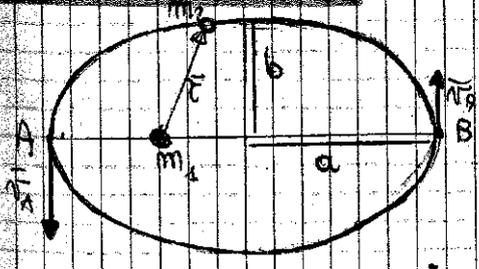
forza gravitazionale  $\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$

CONSERVATIVA  $\Rightarrow$  CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA  
 CENTRALE  $\Rightarrow$  CONSERVAZIONE MOMENTUM ANGOLARE

$\vec{L}$  è costante:  $\vec{L} = \mu \vec{r} \wedge \vec{v} = \mu r^2 \dot{\theta} \hat{u}_z$

oppure da  $\vec{v}$  circolare  $A = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L_z}{2\mu}$  costante

LEGGI DI KEPLERO



② distanza minima dal sole  $r_p$   
 ③ distanza massima dal sole  $r_a$

- VELOCITÀ ANGOLARE
- $A = \frac{\pi a b}{T} = \frac{L_z}{2\mu}$  (area dell'ellisse)
  - in A e B  $\vec{v}$  sono  $\perp$  a  $\vec{r}$  (sen  $\varphi_2 = 1$ )  
 $L_z = \text{cost} = \mu \vec{r}_A \wedge \vec{v}_A = \mu \vec{r}_B \wedge \vec{v}_B$  (prodotto costante nel tempo)

Ricorda che  $\begin{cases} r_A + r_B = 2a \\ r_A \cdot r_B = b^2 \end{cases}$  formule generali in ogni punto dell'orbita.

$$\textcircled{3} E = E_k + E_p = \frac{\mu}{2} v^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} = \frac{\mu}{2} v_A^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_A}$$

$$= \frac{\mu}{2} v_B^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_B}$$

perché  $L_z = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cost}$

$$\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\mu}{2} r^2 \frac{L_z^2}{\mu^2 r^4} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r}$$

← è importante perché in essa compare il solo problema unidimensionale RADIALE

FORMINE DEL NUOVO PROBLEMA

$$E_{eff}(r) = \frac{L_z^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

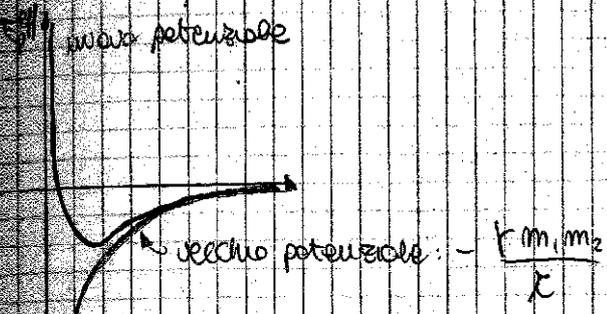
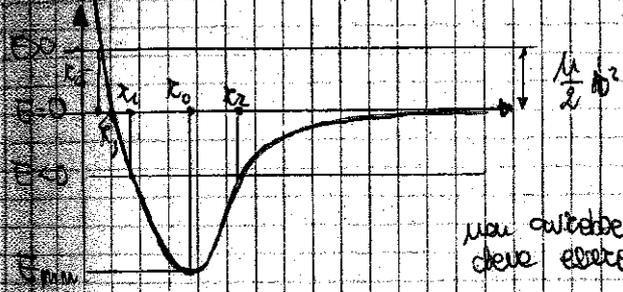


GRAFICO DELL'ENERGIA POTENZIALE

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + E_{eff}(r)$$



non avrebbe senso pretendere  $E < 0$  perché l'energia cinetica deve essere sempre  $> 0$ .

1)  $E = E_{min}$  c'è un solo raggio costante: orbita circolare

$$E = E_{min} \quad r = r_0 \rightarrow \text{orbita circolare}$$

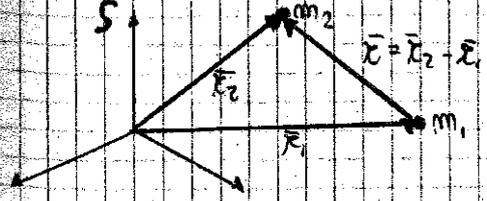
2)  $E < 0$   $r_1 \leq r \leq r_2$  → orbita chiusa (dal punto di vista radiale, orbita al massimo della distanza in cui  $E_{eff} = 0$ , per terra indietrod).  $r_1, r_2$  punti di inversione.

3)  $E = 0$  un cammino per il massimo avvicinamento ad un asteroide di massa parabolica.

4)  $E > 0$  caso dell'iperbole

COME SI SCRIVE L'EQ. DEL MOTTO PER IL PROBLEMA AD UN SOLO CORPO (descritto da  $r$ )

vettore posizione relativa)



non solo nel centro di massa

2 eq di Newton:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} \end{cases}$$

Mechanica le cose in forma esplicita:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$$

← invertendo le formule →

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} - \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} + \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{cases}$$

4-05-2013

# LA FORZA DI COULOMB

Cariche; misurate in Coulomb (S.I)

1C e<sup>-</sup> ha carica trasportata in un secondo da una corrente di un Ampere  
 La carica fondamentale (elementare) e quella dell'elettrone:

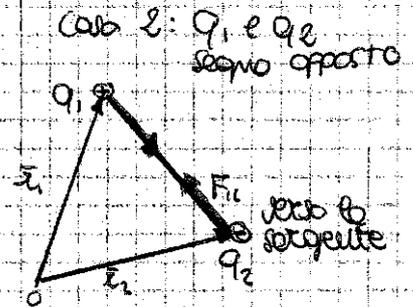
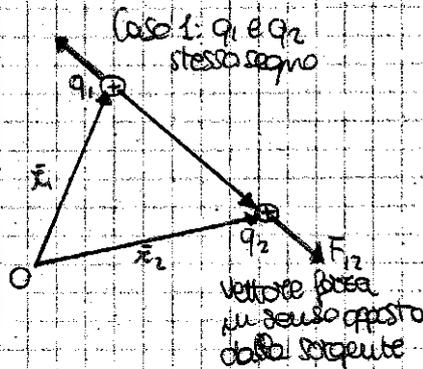
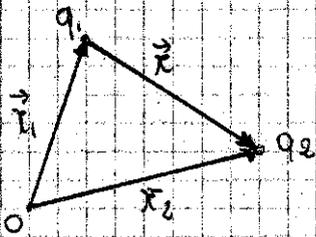
$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad \text{con} \quad 1\text{C} = 6,24 \cdot 10^{18} \text{ elettroni}$$

## LEGE DI COULOMB

La forza tra due cariche  $q_1, q_2$  è direttamente proporzionale al prodotto  $q_1 q_2$  ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le cariche

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 (|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3)}$$



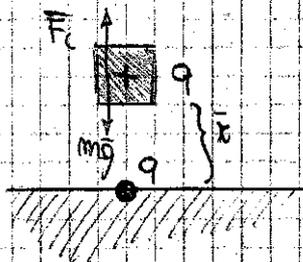
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$\epsilon_0 =$  COSTANTE DI ELETTRICITÀ DEL VUOTO  
 $8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$

• NELLA MATERIA:  $\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}_2$

La forza di Coulomb è molto più grande di quella gravitazionale, ma questa non è trascurabile perché bisogna tenere conto delle sole cariche (molte siano circondati da materia neutra).

es. Tensione in un corpo con  $m=1\text{kg}$  ( $l=1\text{m}$ )



Per avere equilibrio della carica

$$mg = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,98 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

$$\frac{9,8\text{N}}{mg} = 1\text{kg} \cdot 9,8\text{m}^2 = 8,98 \cdot 10^9 \frac{q^2}{1}$$

$$q = \sqrt{\frac{9,8}{89,9 \cdot 10^9}} = 9,33 \cdot 10^{-4} \text{ C} \approx 10^{15} \text{ ELETTRONI}$$

es. Atomo di idrogeno: comparazione tra forza gravitazionale e forza di Coulomb.

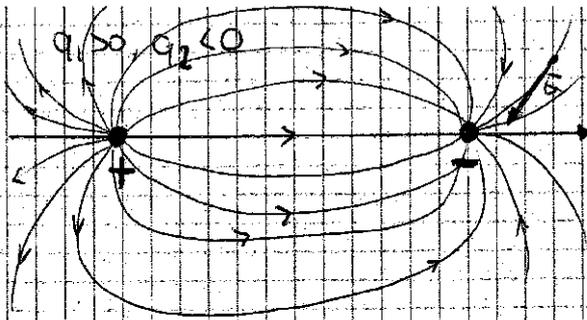
→ forza gravitazionale

$$\begin{cases} r = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\ m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ m_p = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \approx m_m \end{cases}$$

$$F = 667 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9,11 \cdot 1,672 \cdot 10^{-38}}{(0,53)^2 \cdot 10^{-20}} = 3,61 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

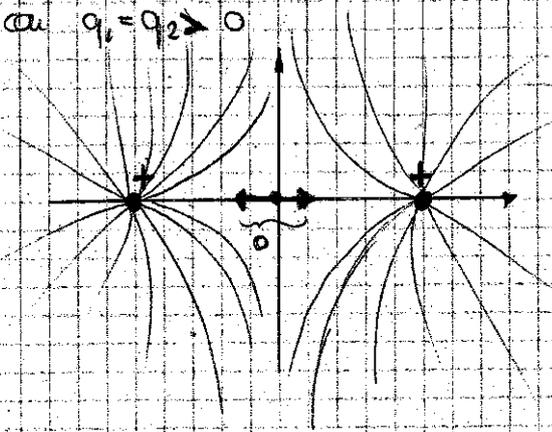
e una forza molto piccola, trascurabile.

• Dipolo elettrico



obtiene le curve delle cariche a cui lo sono più vicina.

• Dipolo elettrico con  $q_1 = q_2 > 0$



repres que delle linee di campo

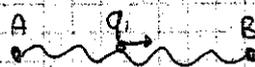
► ENERGIA POTENZIALE DI UN SISTEMA DI CARICHE (che è conservativa!)

$$\vec{F}_{j0} = \frac{q_0 q_j (\vec{x} - \vec{x}_j)}{4\pi\epsilon_0 (|\vec{x} - \vec{x}_j|^3)} = -\nabla E_p^{(j)}(\vec{x})$$

$$\text{con } E_p^{(j)}(\vec{x}) = \frac{q_0 q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}_j|}$$

Generalizzando:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{j0}(\vec{x}) = -\sum_{j=1}^N \nabla E_p^{(j)}(\vec{x}) = -\nabla \left( \sum_{j=1}^N E_p^{(j)}(\vec{x}) \right)$$

• Lavoro: 

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{c} = - (E_p(\vec{x}_B) - E_p(\vec{x}_A))$$

► POTENZIALE E CAMPO ELETTRICO

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j q_0 (\vec{x} - \vec{x}_j)}{4\pi\epsilon_0 (|\vec{x} - \vec{x}_j|^3)}$$

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= \frac{E_p(\vec{x})}{q_0} = \frac{1}{q_0} \sum_{j=1}^N E_p^{(j)}(\vec{x}) = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 (|\vec{x} - \vec{x}_i|)} \end{aligned}$$

carica di prova

Applicazione elementare:  $f = \text{costante}$

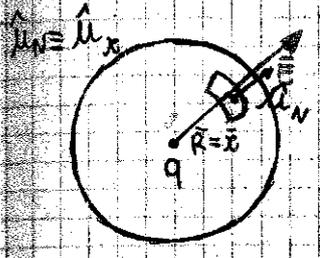
$$\iint_S f \, ds = f \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = f R^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = 2\pi f R^2 [-\cos\theta]_0^\pi = 2\pi f R^2 (1 - (-1)) = 4\pi f R^2$$

$\frac{4\pi R^2}{\text{specie della sfera}} \cdot f$

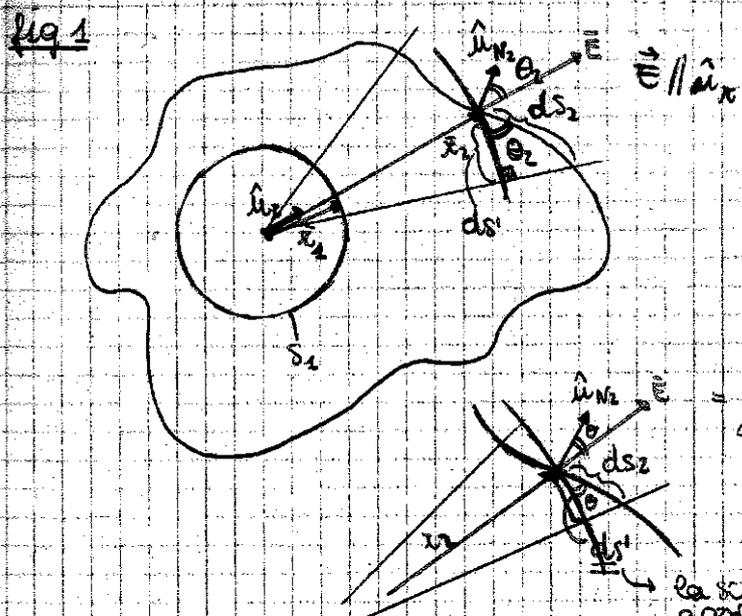
① FLUSSO DI UNA CARICA PUNTIFORME ATTRAVERSO UNA SFERA (superficie equipotenziale)

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{u}_N \, ds = \iint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_x \cdot \hat{u}_N \, ds = \iint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \, ds$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{q}{\epsilon_0} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = \frac{q}{\epsilon_0} [-\cos\theta]_0^\pi = \frac{q}{\epsilon_0} (1 - (-1)) = \frac{2q}{\epsilon_0}$$



② FLUSSO DI UNA CARICA PUNTIFORME ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE QUALSIASI



$$d\Phi_2 = \vec{E} \cdot \hat{u}_{N2} \, ds_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_3^2} \cos\theta_2 \, ds_2 = |\vec{E}| \cos\theta_2 \, ds_2 = |\vec{E}| \, dS'$$

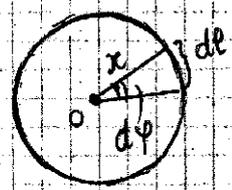
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \cdot r_2^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

(ANGOLO SOLIDO)

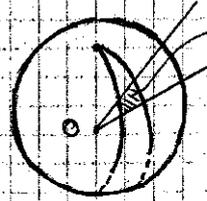
La scrittura  $\cos\theta_2 \, ds_2$  rappresenta la parte della superficie di una piccola sfera, raggio  $r_2$ :  $ds' = r_2^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

ANGOLO SOLIDO

• un cerchio se che  $d\varphi = \frac{dr}{r}$



• In una SFERA:



$$\frac{ds}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

elemento di superficie fatto distanza al quadrato

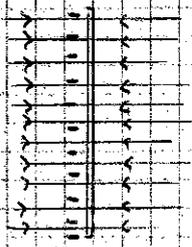
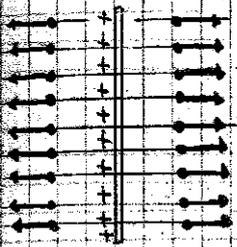
Ripetiamo il flusso  $d\Phi_1$  per un elemento di superficie  $ds_1$ , staccato dallo stesso caso su  $S_1$  (fig. 1)

$$d\Phi_1 = \vec{E} \cdot \hat{u}_{N1} \, ds_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \underbrace{\hat{u}_x \cdot \hat{u}_N}_{\cos\theta} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Tutti gli elementi di flusso attraverso una sfera qualsiasi, sono gli stessi

$$\frac{1}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

con  $\rho$  densità di carica  
 ed es. piastra caricata positivamente e negativamente;

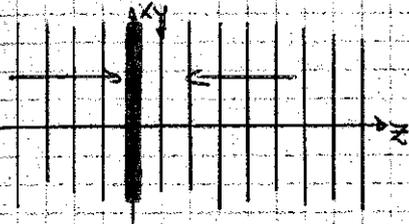


$$E = -\nabla \frac{\phi}{\rho} = -\nabla V$$

Le potenziali  $\phi$   $V(\vec{x}) = \begin{cases} -E \cdot z, & z > 0 \\ +E \cdot z, & z < 0 \end{cases}$

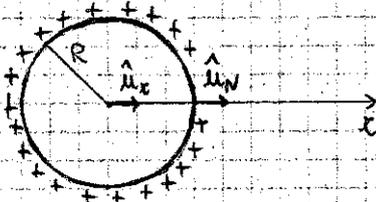
$$\vec{E} = -\nabla V = \begin{cases} E \cdot \hat{u}_z \\ -E \cdot \hat{u}_z \end{cases}$$

Le superfici equipotenziali sono



$$V(z) = E \cdot z \quad V(z) = -E \cdot z$$

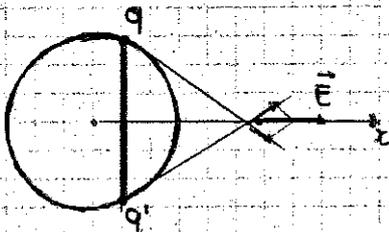
2) CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN GUSCIO SFERICO CARICO



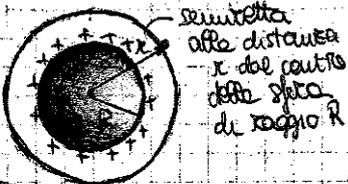
$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad \hat{u}_r = \hat{u}_\rho$$

La densità deve essere costante

$$\vec{E}(\vec{x}) = E(x) \cdot \hat{u}_r$$



Stanno in quelle 4 alle simmetria  $\vec{E}$ , per questo le cariche simmetriche rispetto alla simmetria: tutti i contributi danno solo simmetria uscite dalla sfera (qualunque quello scelto) dipende dalla distanza dalla simmetria  $\vec{E}$  dal centro della sfera.



$$\oint (\vec{E}) = \iint_S \vec{E}(\vec{x}) \cdot \hat{u}_n dS = \iint_S E(x) \hat{u}_r \cdot \hat{u}_n dS =$$

$$= \int E(x) x^2 \sin\theta d\theta d\phi = x^2 E(x) \Delta\Omega \Rightarrow \frac{q_{tot}}{\epsilon_0} = x^2 E(x) \Delta\Omega \Rightarrow 4\pi E(x) x^2 = \frac{4\pi R^3 \sigma}{\epsilon_0}$$

perché integro rispetto a  $\theta$  e  $\phi$

$$E(x) = \frac{R^3 \sigma}{\epsilon_0 x^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 x^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 x^2} \cdot \hat{u}_r} \quad \text{con } x \geq R$$

$$E(r) \int_{\Sigma} ds = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) \underbrace{2\pi r h}_{\text{superficie laterale}} = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

campo elettrico che ha come  $\frac{1}{r}$  caratteristica del filo

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{u}_r$$

$$V(r) = - \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \cdot \log\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

$$\vec{E} = -\nabla V = - \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \nabla (\log(x) - \log(r_0))$$

con  $x = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\nabla \log x = \frac{d \log(x)}{dx} \nabla x = \frac{1}{x} \left( \frac{\hat{u}_x x}{x} + \frac{\hat{u}_y y}{x} \right) = \frac{\vec{x}}{x^2}$   

$$\vec{E} = + \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \frac{\vec{x}}{x^2}$$

## MODELLI DEI FLUIDI

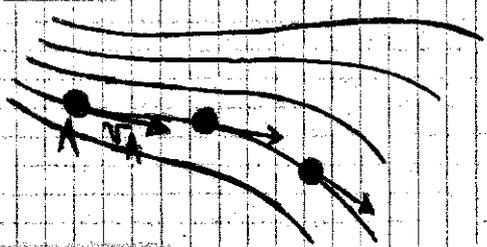
### solidi

Hanno forma propria: le particelle costituenti sono tali che  $|x_i - x_j| = \text{cost}$   
 La "rigidità" espone un volume microscopico grazie a cui i costituenti sono immobilizzati

### fluidi

- Non hanno forma propria: assumono quello dei contenitori
- I costituenti (atomi o molecole) possono muoversi conservando il numero medio di costituenti per unità di volume (ma varia la densità); la distanza media è costante (ciò non significa che ci sia rigidità); è dovuta meno a forze di coesione tipica dei solidi.
- ↳ modo ordine mesoscopico (a livello atomico i moti sono randomizzati ma per una quantità relativamente grande ci sono mantenimenti di una certa identità → quozienti su punto di vista intermedio, non macro né micro)

Immagino un fluido come un fascio di LINEE DI CORRENTE del campo di velocità



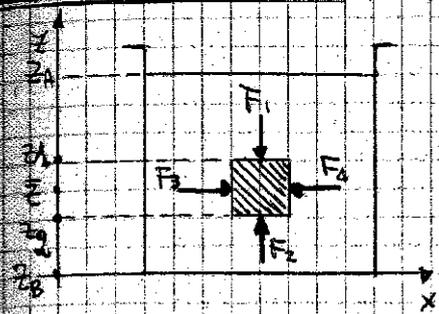
(la velocità è tangente in ogni punto)

FLUIDO STAZIONARIO (linee di corrente inalterate nel tempo)

- LINEE DI CORRENTE: curva di forma stabile lungo cui si muovono le particelle del fluido
- Il campo di velocità  $\vec{v}(\vec{r})$  è l'insieme dei vettori velocità definiti ad ogni punto del mezzo e tangenti alle linee di campo (o linee di corrente)
- Iltra ... zetta ... modo di ... avere ... del punto (Punto di corrente)

Utile del liquido in una colonna (mercurio) possa essere in mmHg  
 760 mmHg ( $\rho_{Hg} = 13,595 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ )

FORZA DI ARCHIMEDE



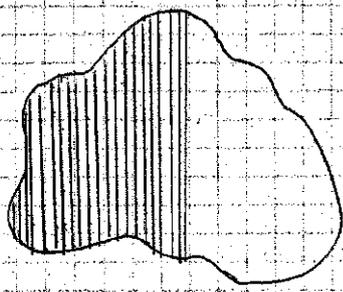
•  $R_x = F_3 - F_4 = 0$   
 $F_3 = P(z) \cdot \Delta S$  e  $F_4 = P(z) \cdot \Delta S$  (equilibrio su lungo x che lungo y) → stessa profondità.

• le cose cambiano tra lato superiore e inferiore.  
 $R_z = F_2 - F_1 = P_2 \Delta S - P_1 \Delta S =$   
 $[P_A + \rho g (z_A - z_2)] \Delta S - [P_A + \rho g (z_A - z_1)] \Delta S =$   
 $\rho g \Delta S \cdot (z_A - z_2 - z_A + z_1) = \rho g (z_1 - z_2) \Delta S$

$R_z = \rho g (z_1 - z_2) \Delta S$   
 ΔVolume (del corpo)

⇒  $F_{AR} = R_z = \rho g \Delta V_c = M_{LQ} g$   
 forza di spinta applicata nel centro di massa  
 ↓  
 massa del liquido spostato

► Caso del corpo sferico immerso nell'acqua



Seziona il corpo in tanti parallelepipedi, ritaglia su di essi come prima. Conta le pressioni nelle teste e sulla coda.

(La fronte è la stessa)

$m \cdot a_z = -mg + \rho_l g \cdot \Delta V_c = -\rho_c \Delta V_c \cdot g + \rho_l g \Delta V_c =$   
 $= (\rho_l - \rho_c) g \Delta V_c$

- densità più bassa dell'acqua: galleggiamento
- densità più alta: sprofondamento
- stessa densità: equilibrio a metà

21

► EQUILIBRIO DI UN FLUIDO

$\vec{f}$  = campo che descrive le forze di volume (= forze per unità di massa)

es. Il campo gravitazionale  $\vec{G}(\vec{r})$  è un campo di questo tipo.

$\nabla p = \rho \cdot \vec{f}$

Quali sono le forze che cooperano in un fluido? Quando garantiscano l'equilibrio se parti del corpo sono soggette a forze di pressione → PROPORZIONALI A  $dS$  (superficie)

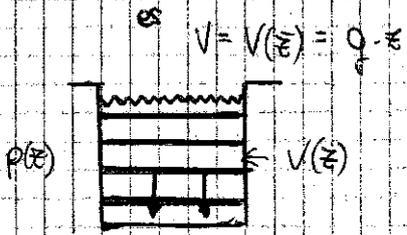
Sono inoltre presenti le forze di volume → PROPORZIONALI A  $dV$  (infatti  $dm = \rho \cdot dV$ )

l'elemento  $dm$  si ha  $d\vec{F} = dm \cdot \vec{f}$

campo che descrive le forze di volume.

Ad esempio il campo gravitazionale è di questo tipo, perché  $\vec{F}(\vec{r}) = m \cdot \vec{G}(\vec{r}) =$

Le superficie equipotenziali coincidono con le superfici su cui  $P(x)$  è costante



es  $V = V(z) = g \cdot z$  con  $E_p(z) = mgz$   
 IL GRADIENTE DELLA PRESSIONE HA LA STESSA DIREZIONE E VERSO OPPOSTO A QUELLO DEL POTENZIALE; superficie equipotenziali coincidono con le superficie isobare.

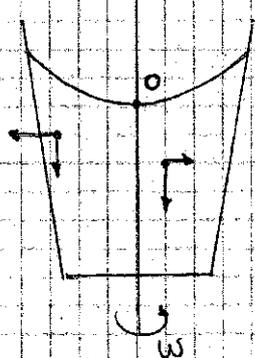
Ancora:

$\nabla P = -\rho \nabla V \rightarrow \nabla P + \rho \nabla V = 0 \rightarrow \nabla(P + \rho V) = 0 \Rightarrow \boxed{P(x) + \rho V(x) = \text{cost}}$

Integrale  $\boxed{P(x) = C - \rho V(x)}$

es. (facoltativo)

Caso del secchiello pieno di acqua che viene messo in rotazione.



Si forma una superficie con aspetto parabolico per ogni particella:

$\vec{F} = -mg \hat{u}_z + m\omega^2 x \hat{u}_x = -\nabla E_p = -\nabla(mgz - \frac{m}{2}\omega^2 x^2)$

con  $\nabla r^2 = \nabla \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\vec{r}}{r}$

$\nabla r^2 = \nabla(x^2 + y^2) = 2x \hat{u}_x + 2y \hat{u}_y$

Altera  $\vec{f} = \frac{\vec{F}}{m} = -g \hat{u}_z + \omega^2 x \hat{u}_x = -\nabla V = -\nabla(gz - \frac{1}{2}\omega^2 x^2)$

Se dire:  $P + \rho V = \text{cost}$ , sostituendo:

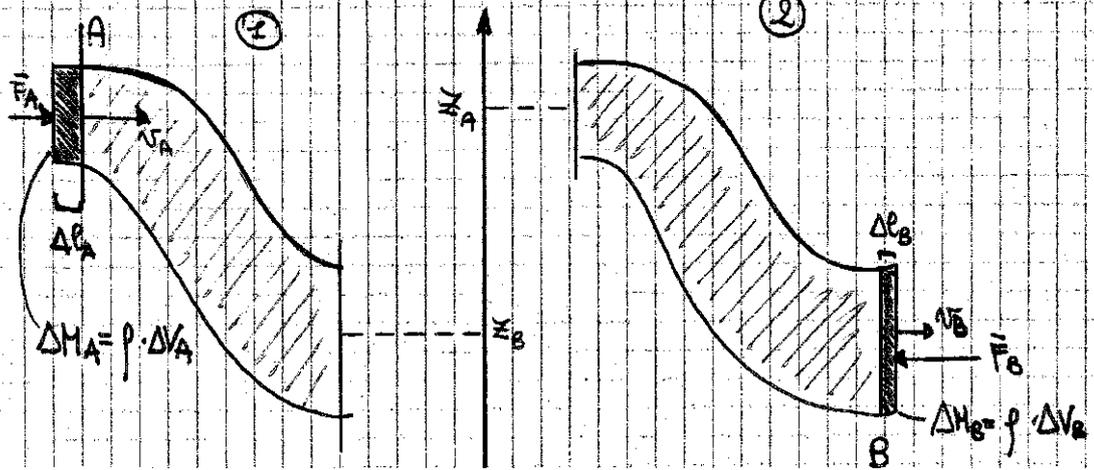
$P(x, z) = C - \rho(gz - \frac{\omega^2}{2} x^2)$

in  $x=0, z=0 \Rightarrow P = C = P_{atmosfera}$

$P(x, z) = P_A - \rho g z + \frac{\omega^2}{2} \rho x^2 \rightarrow \rho g z = P_A - P + \frac{\rho}{2} \omega^2 x^2$

$z = \frac{P_A - P}{\rho g} + \frac{\omega^2}{2g} x^2$

TEOREMA DI BERNOULLI



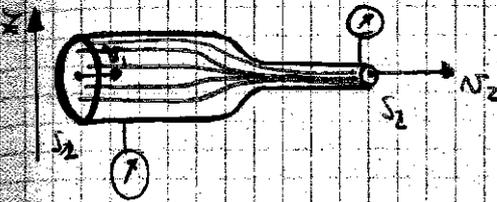
$\Delta V_A = \Delta V_B = \Delta V$   
 stessa massa che entra ed esce in un intervallo di tempo infinitesimo

espresso un effluvio laminare a questo da un corpo che corre in una sonda lungo un piano inclinato (la  $N$  dipende dal dislivello  $\Rightarrow$  conta la variazione di  $E_p$ )

Per arrivare al risultato si poteva usare la legge della portata:

$$N_A S_A = N_B S_B \Rightarrow N_A = N_B \frac{S_B}{S_A} \quad \text{con } \frac{S_B}{S_A} \approx 0$$

APPLICAZIONE: Tubo di Venturi



Inserisco due manometri per misurare le pressioni nel tubo

$$\frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g z_1 + P_1 = \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g z_2 + P_2$$

$$z_1 \approx z_2; \quad N_1 S_1 = N_2 S_2 \rightarrow v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1}$$

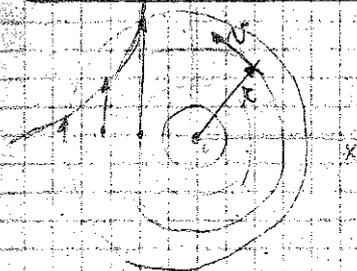
$$\rightarrow \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = P_1 - P_2 \rightarrow \frac{\rho}{2} v_2^2 \left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) = P_1 - P_2 \rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(1 - S_2^2/S_1^2)}}$$

Uscio a conoscere le velocità con cui il fluido si muove nel tubo.

VORTICE, CAMPO DI VELOCITÀ  $v$

(facoltativo)  
 $v(\vec{r}) = \frac{k}{r}$

$k = \text{vorticità}$



Si ogni curva del vortice

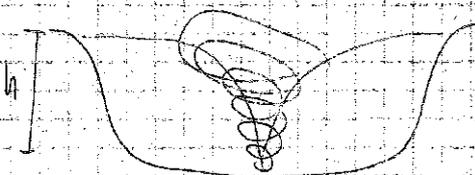
$$L_z = m \cdot r \cdot v = \text{(costante alla distanza del centro)}$$

$$= m \cdot \frac{L_z}{r} = m k$$

Nota  $\rightarrow$  forze non conservative (vorticosità non nulla)

$\rightarrow$  Si ogni linea di corrente il momento angolare è costante.

$$v(r) = \frac{L_z}{m \cdot r}$$



l'ortociclonicità in sezione con vortice

Applico Bernoulli

$$\rho g z + P + \frac{\rho}{2} v^2 = C$$

Linea di corrente che taglia la superficie accade:

$$z + \frac{v^2}{2g} = \frac{C - P}{\rho g} = h \Rightarrow z = h - \frac{v^2}{2g}$$

$$z = h - \frac{L_z^2}{2m^2 g} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Costanti

$z$  va come  $\frac{1}{r^2}$

63-05-13

# TERMODINAMICA

N. particelle: 10 equazioni del moto per ogni particella  $\Rightarrow$  Nequazioni accoppiate da risolvere; diventa traboccante N. particelle (comp. datare);  $\vec{r}_j(t)$  e  $\vec{v}_j(t)$

$$m_j \cdot \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} = \vec{F}_j(t) + \sum_{k \neq j} \vec{F}_{jk}$$

con così tanti oggetti non è più possibile studiare sistemi più complessi

## Approccio statistico

Invece di calcolare  $\vec{r}_j, \vec{v}_j^2$  (per qualunque massa) si calcola  $\langle v_j^2 \rangle$  velocità quadratica media; invece delle  $\vec{F}_j$  di ogni massa, si vede pareri di un contenitore, si calcola  $p \langle \vec{F}_j \rangle$  (valori medi delle forze sulle pareti).  
Si recupera il collegamento con le equazioni microscopiche.

## CONCETTI e DEFINIZIONI

1. UNIVERSO TERMODINAMICO = sistema + ambiente circostante
2. SISTEMA APERTO = sistema che scambia energia (calore o lavoro) e materia con l'ambiente
3. SISTEMA CHIUSO = sistema che scambia solo energia con l'ambiente (non materia)
4. SISTEMA ISOLATO = non scambia energia o materia con l'ambiente
5. VARIABILI TERMODINAMICHE = variabile descrittiva proprietà macroscopiche del sistema

### GLOBALI (ESTENSIVE o ADDITIVE)

- massa (M)
- volume (V)
- Energia (E)

### LOCALI (INTENSIVE o NON ADDITIVE)

- Pressione (P)
  - Temperatura (t)
  - densità (ρ)
- (Proprietà effettive su site locali in un sistema)

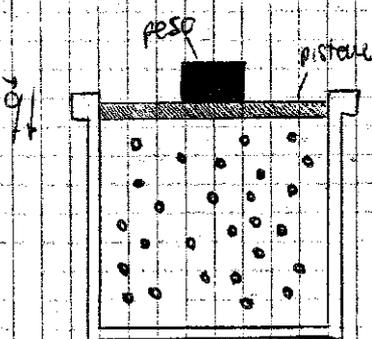
6. Quando un sistema (gas) è in equilibrio, P, T sono le stesse ovunque; queste sono le condizioni a cui si opera.

Per i gas la Terna (T, P, V) definisce lo STATO TERMODINAMICO del sistema (condizioni generali).

Sperimentalmente si prova che se il sistema è isolato P, T, V non cambiano

7. EQUILIBRIO TERMODINAMICO: questo realizza di fatto 3 condizioni:

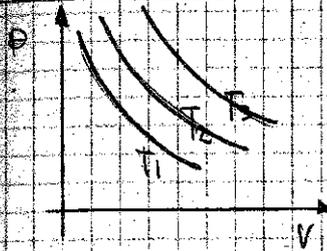
- equilibrio meccanico;
- equilibrio termico;
- equilibrio chimico.



non si può comprimere (= P e V)  
non si può cambiare la temperatura

per reale, sufficientemente diluiti (non è così facile da poter considerare le interazioni  
 man a man, interazioni elettrostatiche come non dei volti); non lo interpedano  
 molecole

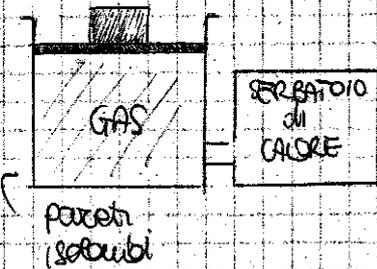
**LEGE BOYLE (BOYLE MARRIOTT)**



fascio di Iperboli

$$P \cdot V = Cost$$

costante funzione della temperatura

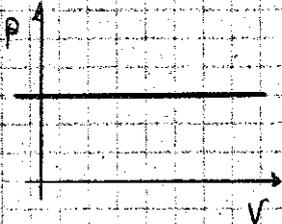


attraverso il serbatoio si fa cambiare la temperatura per si chiude il collegamento per unire T e P.

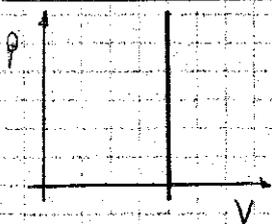
**LEGE SOLETA (VOLE-GAY-LUSSAC)**

P = costante

$$V = V_0 (1 + \alpha t)$$



**LEGE SOLETA (VOLE-GAY-LUSSAC)**



$$P = P_0 (1 + \alpha t)$$

Le tre leggi sperimentali vengono riassunte da un'unica formula (legge):  
 e' l'equazione del GAS PERFETTO (ideale):

$$PV = CT$$

con  $T = \frac{1}{\alpha} + t$

•  $P = P_0 \cdot \alpha \cdot T$  (rate fuori n)

•  $V = V_0 \cdot \alpha \cdot T$

•  $PV = Cost$

Riassumendole analiticamente in una sola si ottiene l'eq di stato