NUMERO: 579

DATA: 17/07/2013

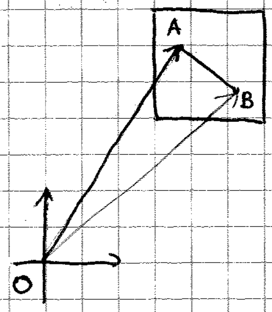
A P P U N T I

STUDENTE: Contadin

MATERIA: Meccanica delle Macchine
Prof. Jacazio

FORMULARIO MECCANICA DELLE MACCHINE

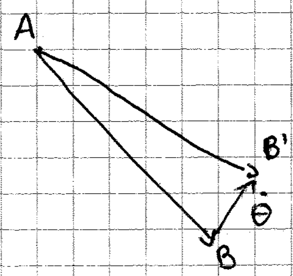
CINEMATICA DEI CORPI RIGIDI



$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

$$V_B = V_A + \underbrace{\frac{d(\overline{AB})}{dt}}_{= \vec{\omega} \wedge \overline{AB}}$$

$$\Rightarrow V_B = V_A + \vec{\omega} \wedge \overline{AB}$$



$$|\overline{BB'}| = |\overline{AB}|\, d\theta$$

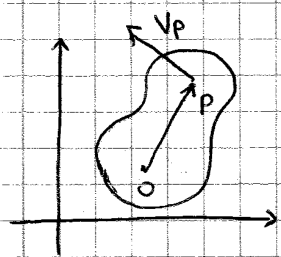
$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{K}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{AB} + \vec{\omega} \wedge \underbrace{\frac{d\overline{AB}}{dt}}_{= \vec{\omega} \wedge \overline{AB}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{AB} \underbrace{- \omega^2 AB}$$

$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$ dà un vettore opposto ad $\overline{AB}$

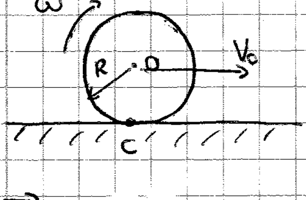
Se $\vec{\omega} = 0$ e $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$ → moto traslatorio



$$V_P = \omega \wedge \overline{OP}$$

In caso di moto piano si ha sempre un punto (interno od esterno al corpo) che non ha velocità, detto CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE. In questo caso è P.

$$a_P = \frac{d\omega}{dt} \wedge \overline{OP} \underbrace{- \omega^2 \overline{OP}}_{\text{accelerazione centripeta}}$$



Se la ruota rotola senza strisciare, il punto di volta in volta a contatto col terreno ha velocità nulla. ⇒ NO centro di istantanea rotazione fisso

$$\vec{V}_0 = \omega R \vec{i} = \vec{\omega} \wedge \overline{CO}$$

$$\vec{a}_0 = \vec{a}_C + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{CO} - \omega^2 \overline{CO}$$

$$\vec{a}_0 = \frac{d\vec{V}_0}{dt} = \dot{\omega} R \vec{i} + \underbrace{\omega \frac{d\vec{R}}{dt}\vec{i} + \omega R \frac{d\vec{i}}{dt}}_{\substack{R \text{ e } i \text{ costanti} \\ = 0}} = \dot{\omega} R \vec{i}$$

$$\vec{a}_C = \omega^2 R \vec{j}$$

MOLLE

$F = Kx$

Molle in parallelo: $F = F_1 + F_2 = x(K_1 + K_2)$

Molle in serie: $x = x_1 + x_2 = F\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)$

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

↳ cedevolezze

Se la molla è montata con un precarico: $F = Kx + F_0$
⇒ spostamento per $F > F_0$

Molla di torsione: $C = K_t \Theta$
↓
coppia di torsione

FORZE DI ATTRITO

Forza limite oltre la quale il corpo inizia a muoversi:

$$(F_T)_{lim} = f_a F_N$$

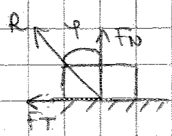
↓
coeff. di aderenza (coeff. di attrito statico)

Se il corpo è in movimento con una velocità V = cost:

$$T = f F_N$$

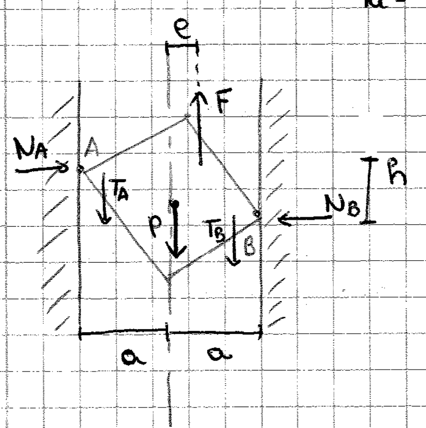
↳ coeff. di attrito dinamico

Le forze di aderenza e di attrito si oppongono al moto relativo tra i corpi e sono indipendenti dalla pressione di contatto. Sono invece dipendenti dalla temperatura e dalla velocità di strisciamento V_s.



$\frac{F_T}{F_N} = f = tg\,\varphi \Rightarrow \varphi = arctg(f)$ ANGOLO DI ATTRITO

$\varphi_a = arctg(f_a)$ ANGOLO DI ADERENZA



Forza F che devo applicare per sollevare il blocco?

Facendo l'equilibrio alla traslazione e di momento intorno a B otteniamo:

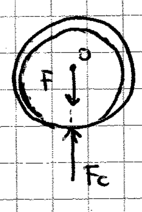
$$F = \frac{P}{1 - \frac{2 f_a e}{h}}$$

Se $f_a = \frac{h}{2e} \Rightarrow \frac{2 f_a e}{h} = 1 \Rightarrow F = \infty$

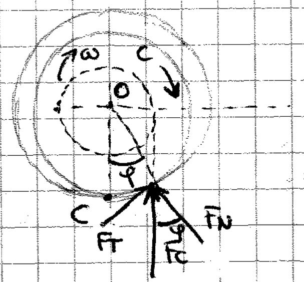
⇒ IMPUNTAMENTO: non riesco a muovere l'oggetto

Attrito nei perni:

Condizioni statiche:



Moto relativo tra perno e cuscinetto:

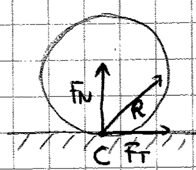


$$\frac{F_T}{F_N} = f = tg\varphi$$

In questo caso F_c non passa più per O ma è tangente al cerchio di attrito al perno $\rho_f = r\sin\varphi$

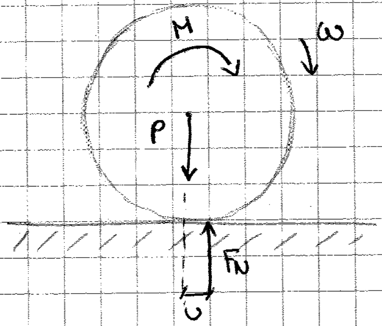
(Scelgo il lato che dia una rotazione opposta al moto)

Resistenza al rotolamento:



Se $\frac{F_T}{F_N} \leq f_a \rightarrow$ rotola senza strisciare

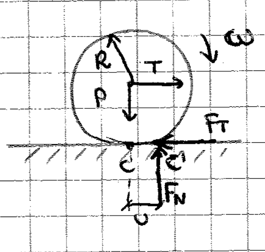
Se $\frac{F_T}{F_N} > f_a \rightarrow$ si ha slittamento $\Rightarrow \frac{F_T}{F_N} = f$



Per far avanzare il corpo in moto uniforme F_N deve essere spostato rispetto alla verticale di una quantità u detta PARAMETRO DI ATTRITO VOLVENTE

$$M_R = F_N \cdot u$$

$$f_v = \frac{u}{R}$$ COEFF. DI ATTRITO VOLVENTE



$F_T = T$

Dall'equilibrio di momento attorno a C' otteniamo:

$$T = P\frac{u}{R} = f_v P$$

la forza di trazione diminuisce al crescere del raggio

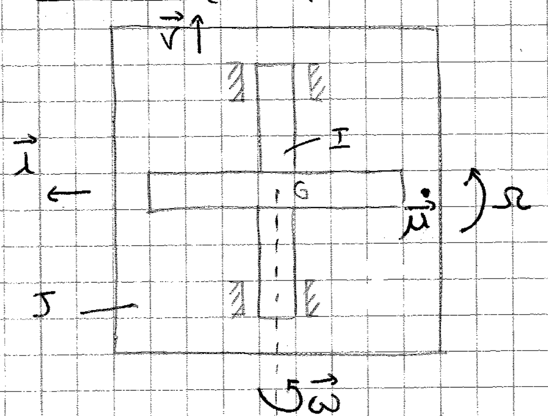
Applicando K' ad O:

$M'_O = I_O \dot{\omega}$ dove $I_O = \frac{ML^2}{3}$

↳ RIDUZIONE FORZE DI INERZIA RISPETTO ALL'ASSE DI ROTAZIONE

Dove $I_O = I_G + M \underbrace{b^2}_{\text{distanza tra O e G}}$

Fenomeni giroscopici:



$\vec{\omega}_{tot} = \omega\vec{v} + \Omega\vec{\mu}$

$\vec{H}_G = \cancel{J\Omega\vec{\mu}} + I\omega\vec{v}$ ↳ trascurabile in quanto $\omega \gg \Omega$

$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = \vec{\omega}_{tot} \wedge \vec{H}_G = (\omega\vec{v} + \Omega\vec{\mu}) \wedge I\omega\vec{v} =$

$= I\omega\Omega\vec{\lambda}$ $\left(\frac{d(\vec{AB})}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{AB}\right)$

$M'_G = -\frac{d\vec{H}_G}{dt} = -I_G\Omega\omega\vec{\lambda}$ COPPIA GIROSCOPICA

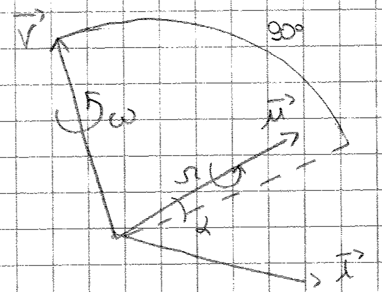
μ = ASSE DI PRECESSIONE

Ω = VELOCITÀ ANGOLARE DI PRECESSIONE

Se gli assi di ω e Ω non sono ⊥ tra loro:

$M'_G = -I_G\Omega\omega\lambda\cos\alpha$

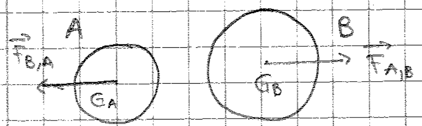
oppure ↳ $(+I_{tot}\Omega\omega\lambda\operatorname{sen}\alpha)$



Urti:

Se le forze passano per i baricentri → URTO CENTRALE

" " " non passano per i baricentri → URTO ECCENTRICO



(A) $\vec{F}_{B,A} = \frac{d\vec{Q}_A}{dt}$ (trascurabili le forze di inerzia)

(B) $\vec{F}_{A,B} = \frac{d\vec{Q}_B}{dt}$

$\frac{d\vec{Q}_A}{dt} + \frac{d\vec{Q}_B}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{Q}_A + \vec{Q}_B = \text{costante}$

$m_A\vec{V}_A^- + m_B\vec{V}_B^- = m_A\vec{V}_A^+ + m_B\vec{V}_B^+$

$(\vec{H}_A)_O^- + (\vec{H}_B)_O^- = (\vec{H}_A)_O^+ + (\vec{H}_B)_O^+$ → conservazione momento della q.tà di moto

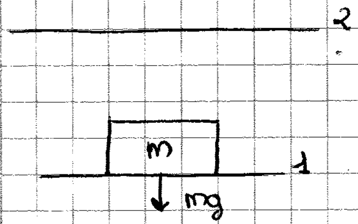
coeff. di restituzione: $e = -\frac{V_A^+ - V_B^+}{V_A^- - V_B^-}$ Varia tra 0 (urto complet. anelastico) e 1 (urto complet. elastico).

Se una forza (coppia) compie lavoro POSITIVO $\Rightarrow$ MOTRICE
Viceversa $\Rightarrow$ RESISTENTE

Potenza: $W = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{s}}{dt} = Fv$

$$W = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{C}\cdot d\vec{\theta}}{dt} = C\omega$$

<u>Lavoro forza peso:</u>



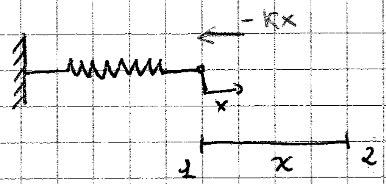
$L_{1,2} = U_1 - U_2 \rightarrow$ la differenza dell'energia potenziale ci dà il lavoro necessario per andare dalla posizione 1 iniziale a quella 2 finale

L'en. potenziale è una funzione delle coordinate parziali

$L_{1,2} = -mgh \qquad \Delta U = U_2 - U_1 = mgh$

La forza peso è una forza <u>conservativa</u>, il suo lavoro non dipende dal percorso scelto

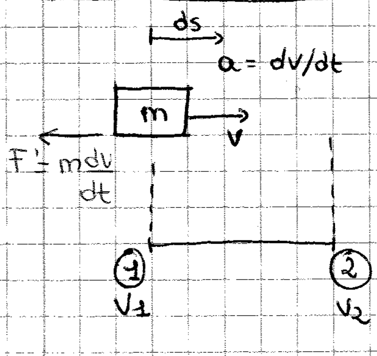
<u>Lavoro forza elastica:</u>



$$L_{1,2} = \int_0^x -Kx\,dx = -K\frac{x^2}{2}$$

$$\Delta U = \frac{Kx^2}{2}$$

<u>Lavoro forze di inerzia:</u>



$$L_{1,2} = \int_1^2 -m\frac{dv}{dt}ds = \int_{v_1}^{v_2} -mv\,dv = \left[-\frac{mv^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2}$$

$$\Rightarrow L_{1,2} = -\frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2}$$

$$L_{1,2} = -\left(\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}\right) = -(E_2 - E_1) = E_1 - E_2$$

$E = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow$ la variazione di en. cinetica è pari all'opposto del lavoro delle forze d'inerzia

$p = \vec{\omega}\cdot\vec{\lambda} \quad (\xi)$
$q = \vec{\omega}\cdot\vec{\mu} \quad (\eta)$
$r = \vec{\omega}\cdot\vec{\nu} \quad (\zeta)$

$$\Rightarrow E = \underbrace{\frac{1}{2}mv_G^2}_{\text{en. cinetica di traslazione}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(I_\xi p^2 + I_\eta q^2 + I_\zeta r^2\right)}_{\text{en. cinetica di rotazione}}$$

$\Rightarrow$ ENERGIA CINETICA DI UN CORPO RIGIDO

TRASMISSIONE DEL MOTO

Accoppiamento motore - utilizzatore:

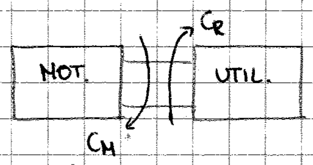
- Se $W_M > |W_R|$ → en. cinetica aumenta
- Se $W_M < |W_R|$ → " " diminuisce

} condizioni di TRANSITORIO

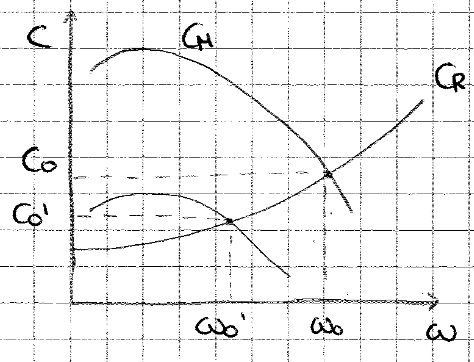
- Se $W_M = |W_R|$ → en. cinetica costante → funzionamento a REGIME

In un argano di sollevamento:
- carico RESISTIVO se la massa viene sollevata (lavoro positivo)
- carico TRASCINANTE se la massa viene abbassata (lavoro resistente)

Accoppiamento diretto motore-utilizzatore:



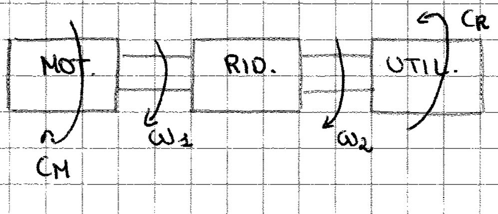
Albero motore e albero utilizzatore ruotano alla stessa ω



Condizione a regime → punto di incontro tra C_M e C_R
⇒ velocità angolare di regime ω_0
⇒ coppia C_0

Per diminuire la velocità angolare → diminuisco coppia motrice → nuovo punto di incontro → $\omega_0' < \omega_0$ → C_0'

Riduttori di velocità:



Motore e utilizzatore ruotano a velocità angolari diverse ($\omega_1 > \omega_2$)

Rapporto di trasmissione: $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} < 1$ (caso ideale → non forze dissipative nel riduttore)

$$C_1\omega_1 dt - C_2\omega_2 dt = \Delta E = 0$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{\tau} \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{\tau^2}$$

$I_U^* = I_U \tau^2$ → momento di inerzia dell'utilizzatore ridotto all'asse del motore

$I_M = I_U \tau^2$

Rendimento:

$$\eta = \frac{|W_u|}{|W_i|} < 1$$

W_u = potenza uscente
W_i = potenza entrante

$W_i = C_i \omega_i \quad (W_i = F_i v_i)$

$W_u = -C_u \omega_u \quad (W_u = -F_u v_u)$

Se sono presenti forze dissipative:

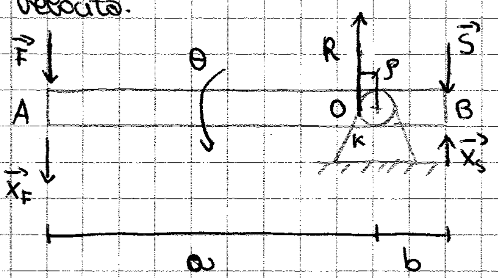
$W_i + W_d + W_u = 0$

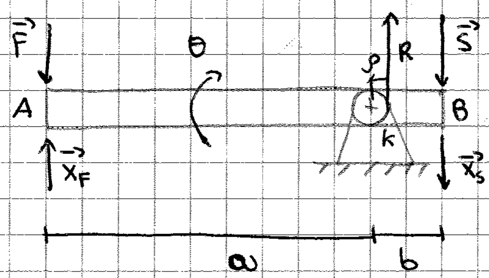
W_d → potenza sviluppata dalle forze dissipative → sempre negativa

$W_u = -(W_i + W_d)$ in modulo $|W_u| = |W_i| - |W_d|$

$$\Rightarrow \eta = \frac{|W_u|}{|W_i|} = \frac{|W_i| - |W_d|}{|W_i|}$$

A parità di tutte le altre condizioni il rendimento è migliore se il sistema opera come riduttore di velocità invece che come moltiplicatore di velocità.





Riduttore

$$\eta = \frac{Sb\theta}{Fa\theta} = \frac{Sb}{Fa}$$

In condizioni di regime:

$K \circlearrowright \quad F(a-\rho) - S(b+\rho) = 0$

$$\eta = \frac{1 - \rho/a}{1 + \rho/b}$$

Moltiplicatore

$$\eta' = \frac{Fa}{Sb}$$

$K \circlearrowright \quad F(a+\rho) - S(b-\rho) = 0$

$$\eta' = \frac{1 - \rho/b}{1 + \rho/a}$$

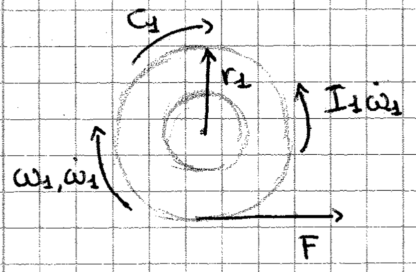
A parità di valori ρ, a, b il rendimento η' è minore di η
Il rendimento di un riduttore diminuisce col diminuire del rapporto delle velocità angolari; quello di un moltiplicatore diminuisce all'aumentare del rapporto tra le velocità angolari.

Se $b = \rho$

$$\eta = \frac{1 - \rho/a}{1 + \rho/b} = \frac{1 - \rho/a}{1 + 1} = \frac{1 - \rho/a}{2}$$

$$\eta' = \frac{1 - \rho/b}{1 + \rho/a} = \frac{1 - 1}{1 + \rho/a} = 0$$ ⇒ IMPUNTAMENTO ⇒ SISTEMA IRREVERSIBILE

(3) Motore + ruota 1



(3) $C_1 - Fr_1 - I_1\dot{\omega}_1 = 0$

$$C_1 - \tau\left[C_2 + mg\frac{D}{2} + \left(I_2 + m\frac{D^2}{4}\right)\tau\dot{\omega}_1\right] - I_1\dot{\omega}_1 = 0$$

↳ sostituisco F trovata nell' eq. (2)

$$\Rightarrow \dot{\omega}_1 = \frac{C_1 - \tau C_2 - \tau mg\,D/2}{I_1 + I_2\tau^2 + \frac{mD^2\tau^2}{4}} \quad \begin{matrix} a) \\ b) \end{matrix}$$

a) Σ di forze e coppie come se fossero tutte ridotte all' asse del motore

b) Momento di inerzia equivalente I_e come se tutte le masse ruotassero sul primo albero (I_2 è ridotto all' asse del motore).
Σ di inerzie moltiplicate per il quadrato di un rapporto di velocità

$$\ddot{z} = \frac{D}{2}\dot{\omega}_2 = \frac{D}{2}\tau\dot{\omega}_1 \quad \rightarrow \text{sostituendo } \dot{\omega}_1 \text{ trovata ottengo } \ddot{z}$$

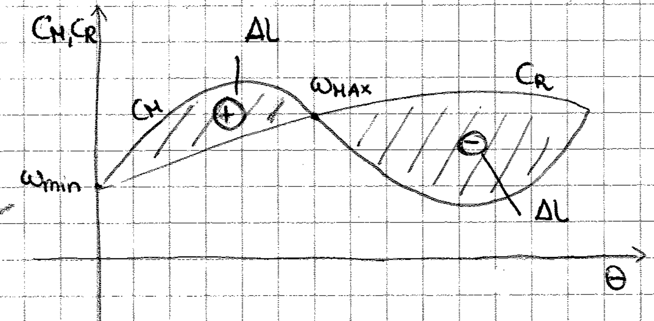
$$E = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$

$$E = \frac{1}{2}I_e\,\omega_1^2$$

Le due energie cinetiche devono essere uguali

$$\Rightarrow I_e = I_1 + I_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m\left(\frac{\dot{z}}{\omega_1}\right)^2$$

Irregolarità periodiche nei sistemi rotanti:



$$\varepsilon = \frac{\omega_{MAX} - \omega_{min}}{\omega} \rightarrow \text{irregolarità periodica}$$

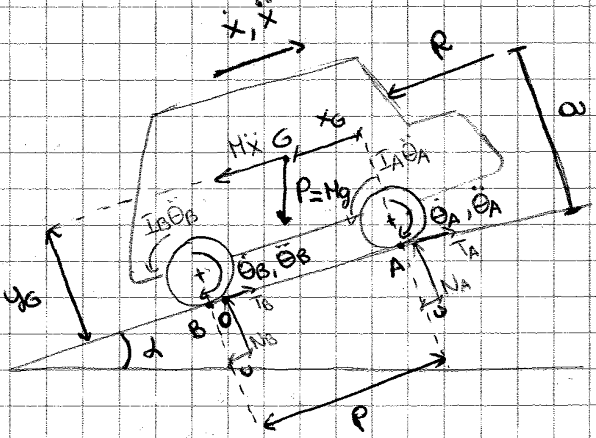
$$\omega = \frac{\omega_{MAX} + \omega_{min}}{2} \rightarrow \text{velocità angolare media}$$

$$\underset{\downarrow\ \text{eccesso di lavoro}}{\Delta L} = \frac{1}{2}I\left(\omega_{MAX}^2 - \omega_{min}^2\right) = \frac{1}{2}I\underbrace{(\omega_{MAX} - \omega_{min})}_{\omega\varepsilon}\underbrace{(\omega_{MAX} + \omega_{min})}_{\omega} = I\omega^2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta L}{I\omega^2} \qquad \Delta L = L_{ass}\frac{360° - \theta^*}{360°} \rightarrow \text{eccesso di lavoro motore su lavoro resistente}$$

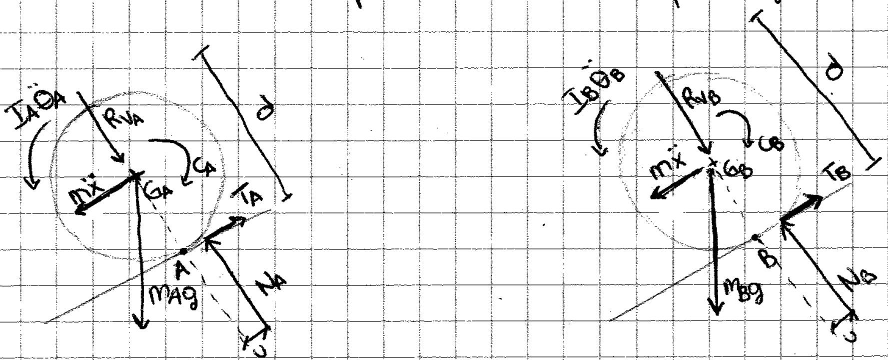
Dinamica dei veicoli con ruote:

- Equazioni generali:

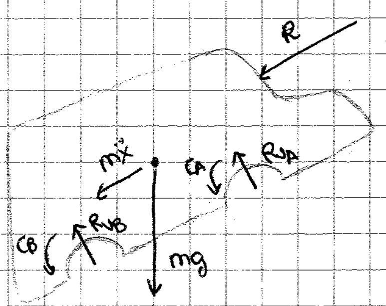


- Se ruota senza strisciare $\ddot{\theta}_A$ e $\ddot{\theta}_B$ sono uguali
- Mg → peso complessivo di telaio + ruote applicato nel baricentro globale del veicolo

Considero ruote e telaio separatamente con le rispettive forze:



- C_A, C_B coppie motrici o frenanti
- Se le ruote sono motrici T_A (T_B) sarà diretta nel verso del moto, se freno e quindi applico una coppia resistente sarà diretta nel verso opposto
- N_A (N_B) è spostata perché ho attrito volvente
- R_{VA}, R_{VB} risultanti delle forze che il telaio imprime sulla ruota
- Ci sarebbe anche una coppia areodinamica ma è trascurabile

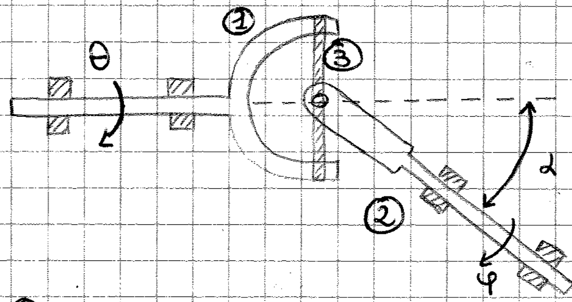


R → forza areodinamica dovuta alla resistenza dell'aria

Guardando il veicolo nel suo complesso le forze interne non vengono considerate nell'equilibrio dinamico e rimangono R, N_A, T_A, N_B, T_B, le coppie di inerzia e le forze peso.

COMPONENTI DI TRASMISSIONE MECCANICA

- Giunto di Cardano: dispositivo antisismico di collegamento

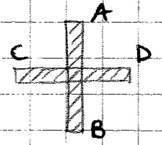


(2) Seconda forcella incastrata al secondo perno il cui albero è ruotato di 90° rispetto al primo con un asse inclinato di α.

θ e φ -> angoli che spazzano ruotando

(1)-(2) forcelle

(3) crociera



Il giunto di Cardano trasmette il moto rotatorio tra due assi complanari inclinati di un angolo α

- Se $\theta = 0, \pi, \dots n\pi \Rightarrow \varphi = \theta$
- Se $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots \Rightarrow \varphi = \theta$
- Se $\theta \simeq \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \dots \Rightarrow$ max differenza $|\varphi - \theta| \Rightarrow$ è tanto maggiore quanto è maggiore α

$|\varphi - \theta| \Rightarrow$ differenza tra le posizioni angolari dell'albero condotto e dell'albero motore in un giunto di Cardano

$$\text{tg}\,\theta = \text{tg}\,\varphi \cos\alpha \Rightarrow \text{tg}\,\varphi = \frac{\text{tg}\,\theta}{\cos\alpha}$$

$$\tau = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_{medio} = 1 \longrightarrow \begin{cases} \tau_{max} = \dfrac{1}{\cos\alpha} \\ \tau_{min} = \cos\alpha \end{cases}$$

All'aumentare di α aumenta l'IRREGOLARITÀ PERIODICA:

$$\varepsilon = \tau_{max} - \tau_{min} = \frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha = \sin\alpha\,\text{tg}\,\alpha$$

Se $\omega_2 = \omega_1 =$ costante (ω)

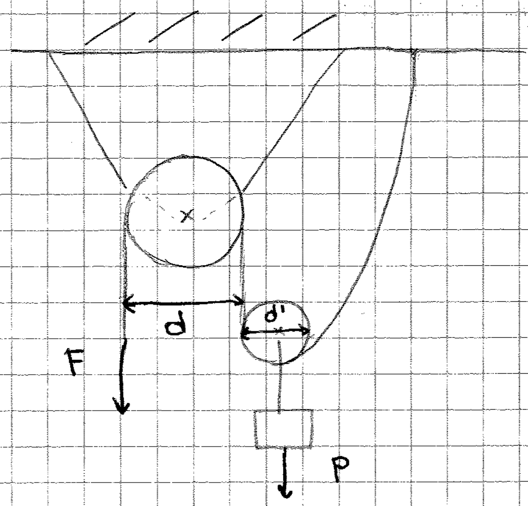
$$\omega_{2max} = \frac{\omega}{\cos\alpha} \qquad \omega_{2min} = \omega\cos\alpha$$

$$\Delta\omega = \omega_{2max} - \omega_{2min} = \omega \sin\alpha\,\text{tg}\,\alpha$$

$\Delta\omega \simeq \omega\alpha^2$ quando α è piccolo

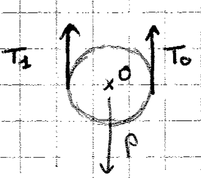
Trasmissione del moto mediante elementi flessibili

- Argano di sollevamento



2 pulegge: una fissa ed una mobile

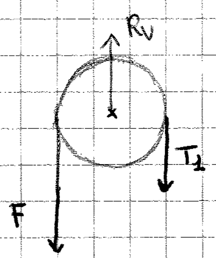
2ª puleggia:



$\uparrow)\ T_1 + T_0 = P \Rightarrow T_1 = T_0 = \frac{P}{2}$

$O\curvearrowright)\ T_0 \frac{d}{2} - T_1 \frac{d}{2} = 0 \Rightarrow T_1 = T_0$

1ª puleggia:

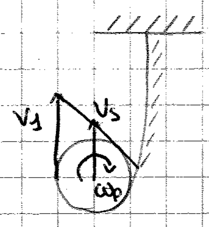


$R_V = F + T_1 = P$

$F = \frac{P}{2}$

Diagramma velocità:

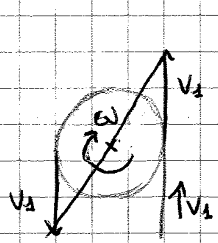
2ª puleggia:



$V_S = \frac{\omega_p d}{2} \qquad V_1 = 2V_S = \omega_p d$

Rotola senza strisciare lungo la retta ideale costituita dal filo fissato

1ª puleggia:

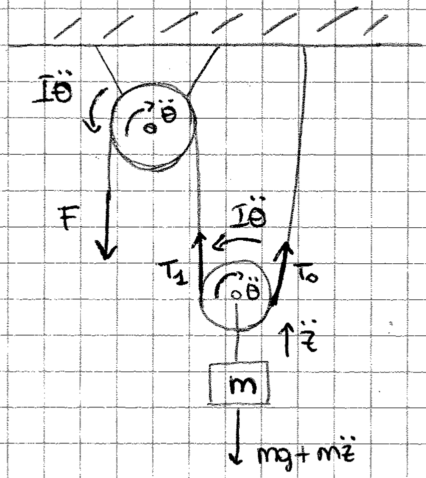


$V_1 = \frac{\omega d}{2} \Rightarrow \omega_p \cancel{d'} = \omega \frac{\cancel{d'}}{2} \Rightarrow \omega_p = \frac{\omega}{2}$

$FV_1 = PV_S$ (caso ideale)

$\frac{P}{2} V_1 = PV_S \Rightarrow V_S = \frac{V_1}{2}$

Se vogliamo calcolare l'accelerazione verticale della massa m:



- Se i momenti di inerzia sono trascurabili:

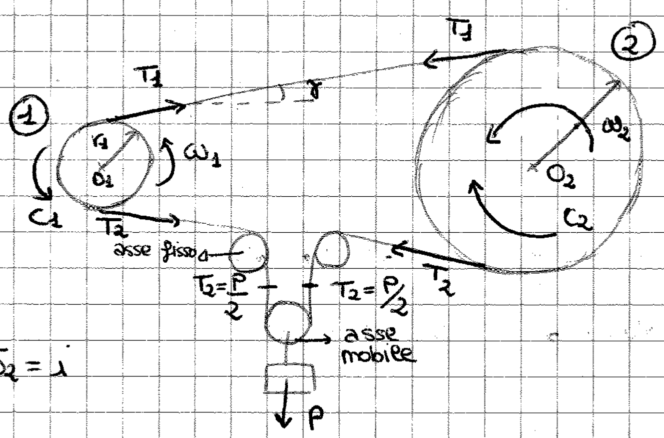
$$P = mg + m\ddot{z} \rightarrow \text{poi uso le relazioni precedenti}$$

- Se i momenti di inerzia non sono trascurabili:

$$T_1 \frac{d}{2} - T_0 \frac{d}{2} = I\ddot{\theta}$$

$$\ddot{z} = \ddot{\theta} \frac{d}{2}$$

- <u>Trasmissione della potenza tramite cinghie:</u>



① puleggia motrice
② puleggia condotta

Affinché la cinghia trasmetta potenza meccanica deve essere messa in tensione

$\overline{O_1O_2} = i$

$$\sin\gamma = \frac{d_2 - d_1}{2i}$$

- Se $C_1 = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$
- Se $C_1 > 0 \Rightarrow T_1 r_1 - T_2 r_1 - C_1 = 0$ puleggia motrice $\left(T_1 = T_2 + \frac{C_1}{r_1}\right)$

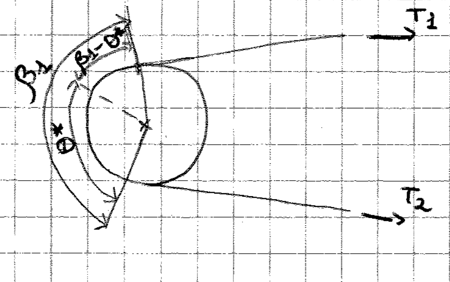
$T_1 r_2 - T_2 r_2 - C_2 = 0$ puleggia condotta

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

Se $\eta = 1$ $\quad W_1 = W_2$

$C_1\omega_1 = C_2\omega_1$

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2}$$



θ^* angolo di scorrimento
$\beta_1 - \theta^*$ angolo di aderenza

angolo di avvolgimento: $\beta_1 = \pi - 2\gamma$

$\beta_2 = \pi + 2\gamma$

Sulla puleggia condotta avviene l'inverso, la tensione e quindi l'allungamento aumentano, la cinghia anticipa la puleggia trasmettendo potenza.

⟹ trasmissione della forza mediante ATTRITO

$$\left.\begin{aligned} T_{1max} &= T_2 e^{f\beta_1} \\ C_{1max} &= (T_{1max} - T_2) r_1 = T_2 (e^{f\beta_1} - 1) r_1 \end{aligned}\right\} \text{situazione di scorrimento globale}$$

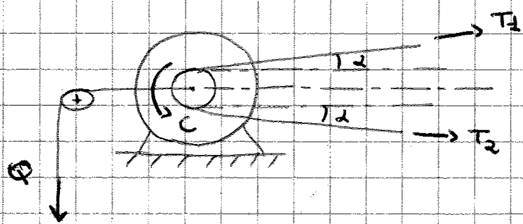
$V_1 = \omega_1 r_1$ $\quad V_2 = \omega_2 r_2$ $\quad$ con $V_2 < V_1$

$\omega_2 r_2 < \omega_1 r_1 \Rightarrow \tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} < \dfrac{r_1}{r_2}$ a causa dei microscorrimenti della cinghia
Non si ha perfetto sincronismo tra gli alberi

Forzamento della cinghia:

Si può ottenere mediante un braccio collegato ad una puleggia, il braccio ha un peso sopra che fa flettere la cinghia aderente alla puleggia.
Lo stesso effetto si può ottenere collegando la puleggia ad una molla che permette la flessione della cinghia, oppure mediante un sistema a BASE MOBILE

2 casi:

1) 

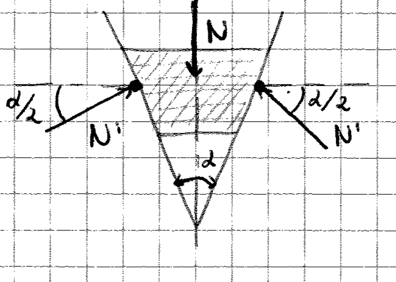
La tensione media Q rimane costante

$Q = (T_1 + T_2)\cos\alpha$
$C_1 = (T_1 - T_2) r_1$

2) Lo stesso risultato si ottiene spostando la puleggia lungo il supporto e fissandola per mantenere tale posizione anche durante il funzionamento. In questo modo si conferisce alla cinghia una tensione di forzamento iniziale T_0.

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Cinghia a sezione trapezoidale:



$$\begin{cases} N = 2N' \sin\frac{\alpha}{2} \\ T = 2fN' \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{f}{\sin\frac{\alpha}{2}} N$$

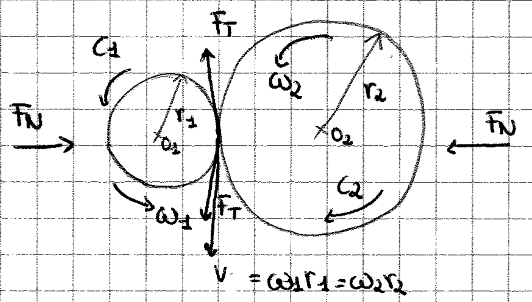
$$f' \; \frac{T}{N} = \frac{f}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

f coeff. di attrito tra cinghia e puleggia

f' coeff. di attrito equivalente

- Trasmissione del moto tramite ruote dentate

C'è sincronismo tra gli alberi



$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$ ⟶ rimane rigorosamente costante fino a quanto $\frac{F_T}{F_N} < f_a$

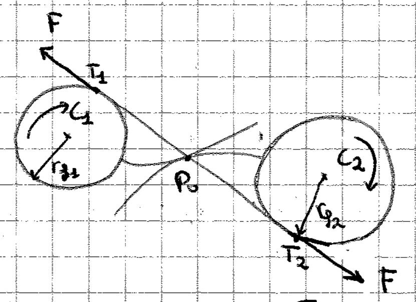
Profili dei denti:

· Costituiti da profili ad evolvente di circonf.

L'evolvente è generata a partire da una circonf. fondamentale di raggio r_f ed in ogni suo punto P la normale all'evolvente è tangente alla circonf. dalla quale è stata generata.

Ingranamento tra ruote dentate

Devo fare in modo che le due evolventi coincidano

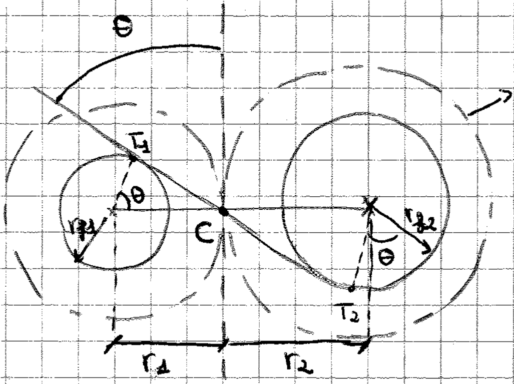


La tg e la normale in P_0 è comune ai due profili evolventi

La normale comune coincide con la tg comune alle due circonf. fondamentali.

$C_1 = F r_{f1}$ $\quad C_2 = F r_{f2}$

$\frac{C_2}{C_1} = \frac{r_{f2}}{r_{f1}} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ $\quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_{f1}}{r_{f2}}$



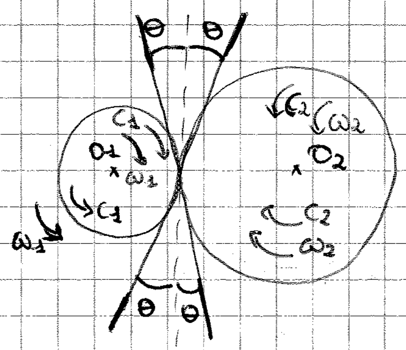
circonf. fondamentali del moto (primitive nominali)

$r_1 = \frac{r_{f1}}{\cos\theta}$ $\quad r_2 = \frac{r_{f2}}{\cos\theta}$

RETTA DI PRESSIONE: retta tg alle due circonf. fondamentali

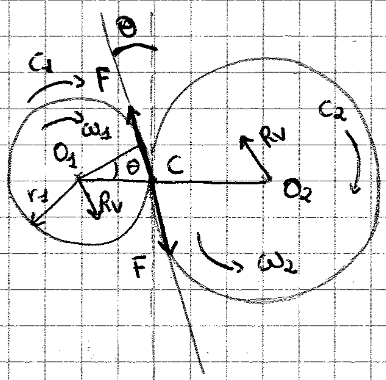
ANGOLO DI PRESSIONE: angolo tra la retta di pressione e la verticale (20°)

C = centro di pressione



A seconda di quale sia la ruota motrice e del verso di ω ho una o l'altra retta di pressione

Trasmissione della potenza

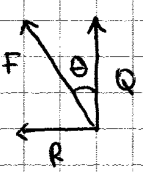


F non è tangente alle ruote

Considero la ruota ①: $C_1 = F r_1 \cos\theta$ => eq. di momento

F: forza da ② a ①

$$F = \frac{C_1}{r_1 \cos\theta}$$



$$Q = F\cos\theta = \frac{C_1}{r_1} \quad *$$

$$R = F\sin\theta = \frac{C_1}{r_1}\,tg\theta \quad *$$

Considero la ruota ②: $C_2 = F r_2 \cos\theta$ (formule analoghe)

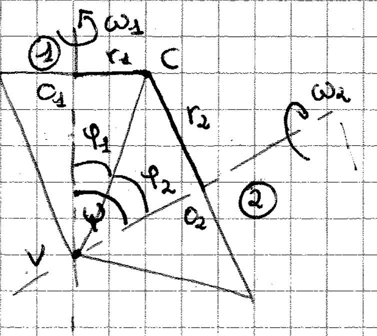
F: da ① a ②

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

Ruote interne: con denti che sporgono verso l'interno

$r_{t_2} = r_2 - a d_2$

Ruote dentate ad assi incidenti



$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$

$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\text{sen}\,\varphi_1}{\text{sen}\,\varphi_2}$$

$r_1 = VC\,\text{sen}\,\varphi_1$

$r_2 = VC\,\text{sen}\,\varphi_2$

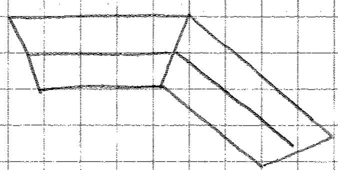
$\tau\,\text{sen}\,\varphi_2 = \text{sen}\,\varphi_1$

$\tau\,\text{sen}(\varphi - \varphi_1) = \text{sen}\,\varphi_1$

$\tau\,(\text{sen}\,\varphi\cos\varphi_1 - \text{sen}\,\varphi_1\cos\varphi) = \text{sen}\,\varphi_1$

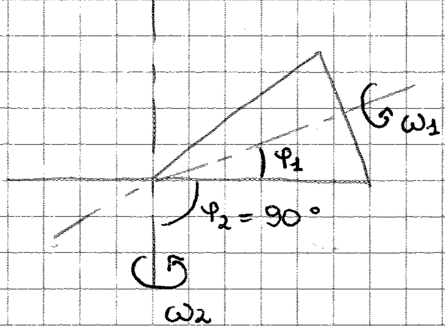
$\tau\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi_1 = \text{sen}\,\varphi_1\,(1 + \tau\cos\varphi)$

$$\Rightarrow \boxed{\text{tg}\,\varphi_1 = \frac{\tau\,\text{sen}\,\varphi}{1 + \tau\cos\varphi}}$$



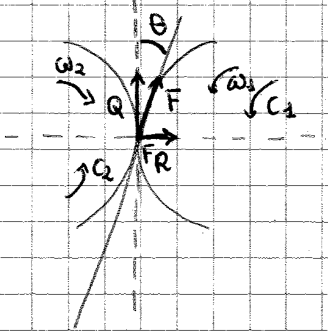
Il modulo è quello relativo alla posizione media lungo l'asse

Ruote dentate PIANO CONICHE → quando il cono si trasforma in piano aumentando φ fino a 90°



$$\tau = \frac{\text{sen}\,\varphi_1}{\text{sen}\,\varphi_2} = \text{sen}\,\varphi_1$$

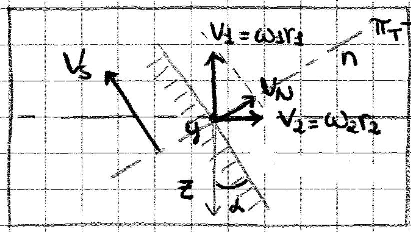
La ruota dentata piana ruota attorno al suo asse senza traslare



$$Q = F\cos\theta = \frac{C_1}{r_1}$$
(F_T)

$F_R = F\,\text{sen}\,\theta$
(F^*)

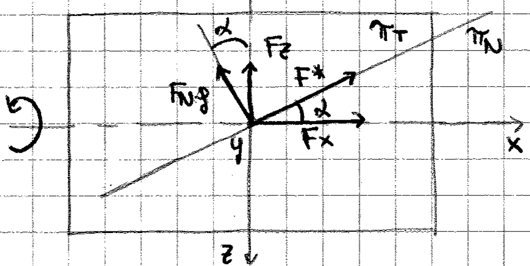
$$\tau = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 tg\alpha}{r_2}$$



$\pi_T \rightarrow$ piano tg ai cilindri medi della vite e della ruota

$$V_S = \omega_1 r_1 \cos\alpha + \omega_2 r_2 \sin\alpha$$
$$V_N = V_1 \sin\alpha = V_2 \cos\alpha = \omega_1 r_1 \sin\alpha = \omega_2 r_2 \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} tg\alpha$$



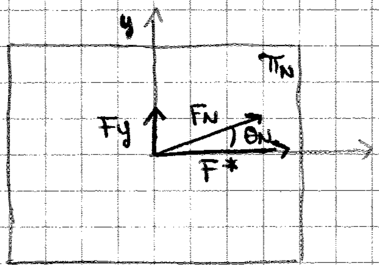
$F_x = F_N \cos\theta_N \cos\alpha - f F_N \sin\alpha = F_N \cos\alpha (\cos\theta_N - f tg\alpha) \rightarrow$ forza che la vite esercita sulla ruota

$F_z = F^* \sin\alpha + f F_N \cos\alpha = F_N \cos\theta_N \sin\alpha + f F_N \cos\alpha$

$C_2 = F_x r_2 = F_N r_2 \cos\alpha (\cos\theta_N - f tg\alpha) \rightarrow$ coppia che equilibra la forza, applicata all'asse della ruota

$F_z = - F_N \sin\alpha (\cos\theta_N + f/tg\alpha) \rightarrow$ forza che la ruota esercita sulla vite

$C_1 = F_N r_1 \sin\alpha (\cos\theta_N + f/tg\alpha) \rightarrow$ coppia applicata all'asse della vite



$$F_y = F_N \sin\theta_N$$
$$F^* = F_N \cos\theta_N$$

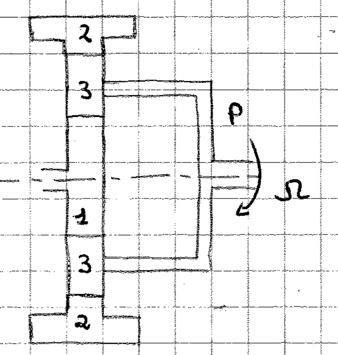
$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{r_2}{r_1 tg\alpha} \frac{(\cos\theta_N - f\, tg\alpha)}{(\cos\theta_N + f/tg\alpha)} = \frac{z_2}{z_1} \boxed{\frac{(\cos\theta_N - f tg\alpha)}{(\cos\theta_N + f/tg\alpha)}} \rightarrow \eta$$

$z_1 \rightarrow$ n° principi vite

$\frac{C_2}{C_1} \rightarrow$ vale se la vite è l'elemento motore e la ruota quello condotto

Epicicloidali:

1)

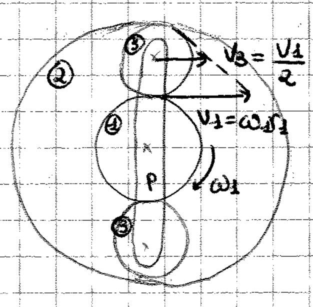


Ruote dentate solari: (1,2) ruotano attorno allo stesso asse geometrico. Non ingranano direttamente tra loro ma attraverso l'interposizione di ruote planetarie

Ruote dentate planetarie: hanno assi mobili solidali a quello della ruota 1.

Portatreno: "P", collega le ruote planetarie e ruota anch'esso

Solitamente si tiene fissa una ruota dentata solare (es. ②); $\omega_2 = 0$



$$r_2 = r_1 + 2r_3$$
$$z_2 = z_1 + 2z_3$$

$$V_3 = \frac{\omega_1 r_1}{2} = \Omega(r_1 + r_3)$$

$$\frac{\Omega}{\omega_1} = \frac{r_1}{2r_1 + 2r_3} = \frac{z_1}{2z_1 + 2z_3} = \frac{z_1}{z_1 + z_2}$$

Velocità angolari relative al portatreno: $\omega_1 - \Omega$
$\omega_2 - \Omega$

$$\boxed{\tau_\omega = \frac{\omega_2 - \Omega}{\omega_1 - \Omega}} = \underbrace{\left(-\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_3}{z_2}\right)}_{\text{rapporti di trasmissione col proprio segno}} = -\frac{z_1}{z_2} \Rightarrow$$ rapporto di trasmissione come se il rotismo fosse ad assi fissi

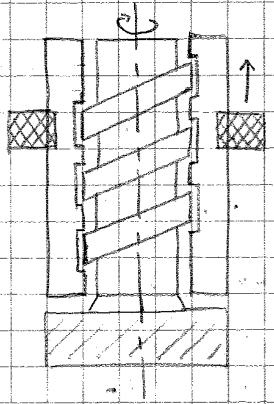
FORMULA DI WILLIS

$$\omega_2 - \Omega = \tau\omega_1 - \tau\Omega \Rightarrow \Omega(\tau - 1) = \tau\omega_1 - \omega_2 \quad \text{(formula di Willis)}$$

Per $\omega_2 = 0$ $$\frac{\Omega}{\omega_1} = \frac{-\frac{z_1}{z_2}}{-\frac{z_1}{z_2} - 1} = \frac{z_1}{z_1 + z_2}$$

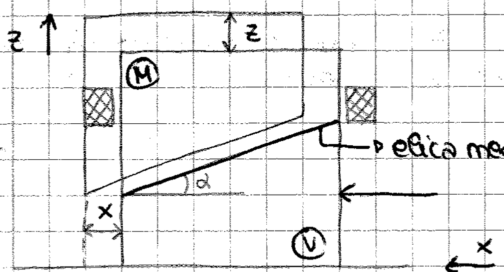
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 54

- Trasmissione vite-madrevite



Tra vite e madrevite ho un moto relativo elicoidale

Vincolando circonferenzialmente la madrevite e assialmente la vite ottengo un moto rotatorio nella vite che si trasforma in moto traslatorio nella madrevite



$x = r\theta$

$z = x\,tg\alpha = r\,tg\alpha\cdot\theta$

$p_e = 2\pi r\,tg\alpha \Rightarrow tg\alpha = \dfrac{p_e}{2\pi r}$

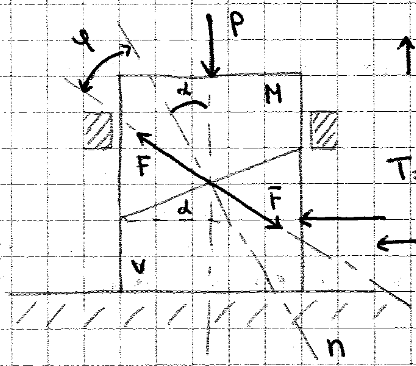
$\Rightarrow z = \theta\,\dfrac{p_e}{2\pi}$

$\dot{z} = \omega\,\dfrac{p_e}{2\pi} = \omega r\,tg\alpha$

Vite ruota, madrevite trasla verticalmente

Le stesse relazioni si hanno con vite che trasla e madrevite che ruota

Supponiamo di avere l'elemento che ruota collegato al motore e quello che trasla all'utilizzatore



$T = \dfrac{C}{r}$

Se non ci fosse attrito la trasmissione avverrebbe lungo la normale comune n. Essendoci attrito la retta di trasmissione è inclinata di un angolo φ (angolo di attrito) rispetto ad n.

$P = F\cos(\alpha+\varphi)$ $\qquad \dfrac{C}{r} = F\sin(\alpha+\varphi)$

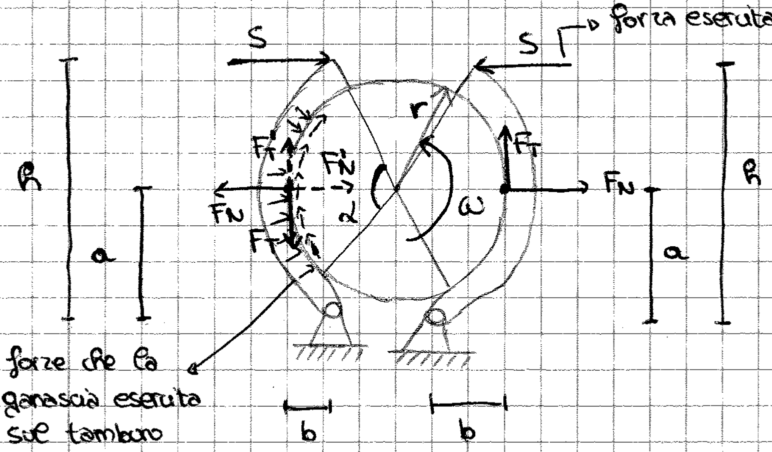
$\dfrac{C}{Pr} = tg(\alpha+\varphi) \Rightarrow C = Pr\,tg(\alpha+\varphi)$ → coppia che dobbiamo applicare per sollevare P

$\eta = \dfrac{P\dot{z}}{C\omega} = \dfrac{\cancel{r}\,tg\alpha}{\cancel{r}\,tg(\alpha+\varphi)}$ $\qquad \dot{z} = \omega r\,tg\alpha$

FRENI E FRIZIONI

Freni ad attrito

- Freni a tamburo o a ganasce



$F'_T, F'_N \Rightarrow$ forze che il ceppo esercita sul tamburo

Considero le forze che il tamburo esercita sul ceppo, opposte a queste

Se $\alpha = 60° - 70°$ la risultante ~~delle~~ forze passa per il punto medio di contatto.

$$M_F = F_T r = f F_N r$$

- Eq. di momento rispetto alla cerniera sx:

$$SR - F_N a - F_T b = 0 \quad \Rightarrow F_N = \frac{SR}{a + fb}$$

$$SR = F_N a + f F_N b$$

$$M_{F_{sx}} = f F_N r = \frac{f r S R}{a + fb}$$

- Eq. di momento rispetto alla cerniera dx:

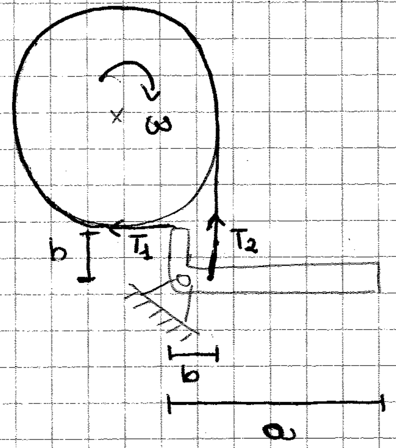
$$SR - F_N a + F_T b = 0$$

$$SR = F_N (a - fb) \quad \Rightarrow F_N = \frac{SR}{a - fb}$$

$$M_{F_{dx}} = \frac{f S R r}{a - fb}$$

Situazione invertita se il tamburo ruota in verso opposto

$$p_{max} = \frac{2 M_f}{f b D^2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\beta}$$



$T_1 b + T_2 b = Sa$

$(T_1 + T_2) = \frac{Sa}{b}$

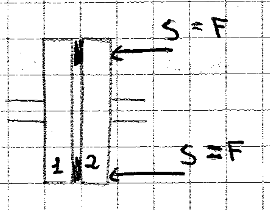
Se inverto il senso di ω ho lo stesso braccio per T_1 e T_2 → l'azione frenante non cambia

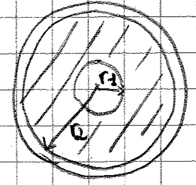
Configurazione efficace in ogni senso di rotazione

$M_F = \frac{F a d (e^{f\beta} - 1)}{2b(e^{f\beta} + 1)}$ dove $d = 2r$

Frizione

Serve ad adattare le velocità angolari (tra veicolo ed albero motore)





Il materiale di attrito è distribuito uniformemente nella corona circolare perché il baricentro deve essere sull'asse di rotazione

$M_F = F r_m f \cdot (i)$ → n° superfici di contatto $F = p r 2\pi (r_e - r_i)$

Una volta che le velocità angolari si sono eguagliate, cessa la fase di slittamento ⟹ M_F è la coppia massima applicabile ma non è detto sia quella applicata

$\omega_f = \frac{I_1 \omega_{10} + I_2 \omega_{20}}{I_1 + I_2}$ → velocità finale

dove ω_{10}, ω_{20} → velocità angolari iniziali dei due elementi di frizione

I_1, I_2 → momenti di inerzia

$C^* = C_M - I_M \dot{\omega} = C_R + I_U \dot{\omega}$ → coppia frenante dopo la fine della fase di slittamento

$\dot{\omega} = \frac{C_M - C_R}{I_M + I_U}$ acc. angolare dopo la frizione (riduttore)

- Se $\xi = 0$ $(c=0)$ $\quad y = y_0 \sin \sigma_n t \rightarrow$ oscillazione propria del sistema che dipende dai suoi parametri fisici

$\sigma = \sigma_n \sqrt{1-\xi^2} \qquad T = \dfrac{2\pi}{\sigma_n\sqrt{1-\xi^2}} \rightarrow$ pulsazione e periodo propri del sistema smorzato

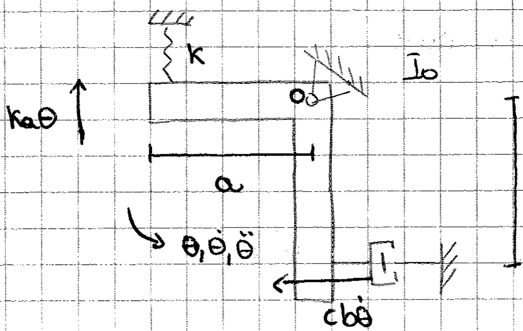
$$\frac{y_0(n+1)}{y_0(n)} = \frac{y_0 e^{-\xi\sigma_n(t_n+T)}}{y_0 e^{-\xi\sigma_n t_n}} = e^{-\xi\sigma_n T} = e^{-\xi\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

rapporto tra due successive creste

Con fattori di smorzamento molto piccoli: $\sigma \simeq \sigma_n$

$$\therefore \frac{y_0(n+1)}{y_0(n)} = e^{-\xi 2\pi}$$

I parametri caratteristici variano da caso a caso:



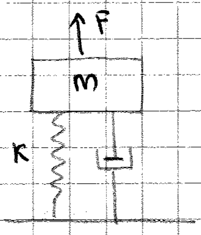
$\circlearrowleft^{*})\ ka^2\theta + cb^2\dot\theta + I_0\ddot\theta = 0$

dividendo per ka^2:

$$\frac{I_0}{ka^2}\ddot\theta + \frac{cb^2\dot\theta}{ka^2} + \theta = 0$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{ka^2}{I_0}} \qquad \frac{2\xi}{\sigma_n} = \frac{cb^2}{ka^2}$$

- Vibrazioni forzate



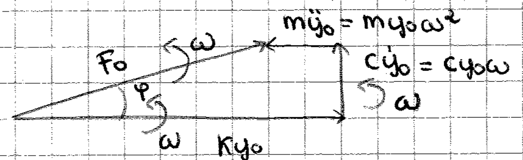
$$\underset{\text{inerzia}}{m\ddot y} + \underset{\text{smorz.}}{c\dot y} + \underset{\text{elastica}}{ky} = F$$

$F = F_0 \sin\omega t$

$y = y_0 \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow$ dopo il transitorio oscillerà con una pulsazione pari a quella della forza ma con uno sfasamento φ

$$\therefore \quad y = \underbrace{y}_{\text{soluz. generale}} + \underbrace{y^*}_{\text{soluz. particolare}}$$

Rappresentiamo le forze tramite vettori: (per trovare lo sfasamento φ)

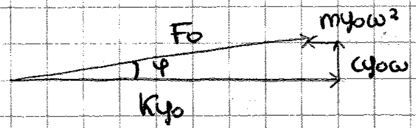


La forza F_0 risulterà in anticipo rispetto allo spostamento

$$F_0 = \sqrt{(ky_0 - m y_0\omega^2)^2 + c^2 y_0^2\omega^2} = ky_0\sqrt{\left(1 - \underbrace{\frac{m}{k}}_{\frac{1}{\sigma_n^2}}\omega^2\right)^2 + \underbrace{\frac{c^2}{k^2}}_{\left(\frac{2\xi}{\sigma_n}\right)^2}\omega^2}$$

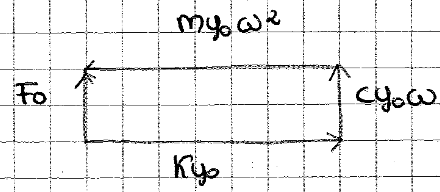
$$= \boxed{ky_0\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\sigma_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\sigma_n}\right)^2\omega^2}}$$

Per $\omega \ll \omega_n$



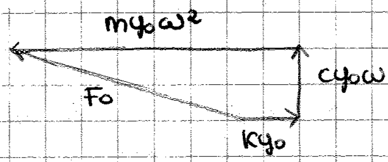
Forza eccitatrice equilibrata quasi unicamente dalla forza elastica

Per $\omega = \omega_n$

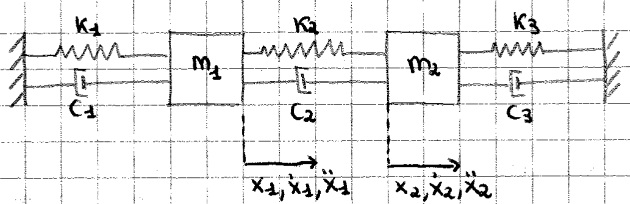


Forza eccitatrice unicamente equilibrata dalla forza di smorzamento

Per $\omega \gg \omega_n$

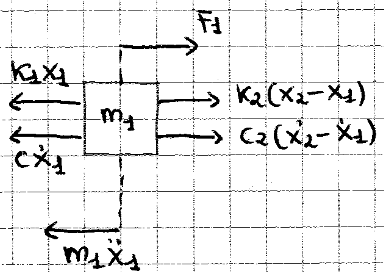


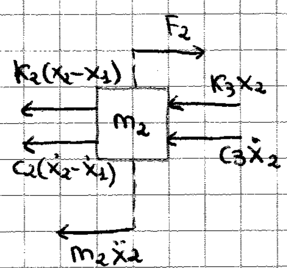
Forza eccitatrice equilibrata quasi unicamente dalla forza di inerzia



SISTEMA A 2 GRADI DI LIBERTÀ

→ posizioni delle due masse rispetto a quella di equilibrio





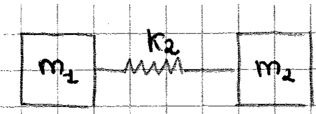
Se $x_2 > x_1$ m_2 si è allontanata da m_1 e tira quest'ultima

$$\begin{cases} -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - m_1 \ddot{x}_1 + F_1 = 0 \\ -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_3 x_2 - m_2 \ddot{x}_2 + F_2 - c_3 \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Porto a secondo membro F, moltiplico per -1 e raccolgo x_1 e x_2:

$$\begin{cases} x_1(k_1 + k_2) + \dot{x}_1(c_1 + c_2) + m_1 \ddot{x}_1 - k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_2 = F_1 \\ -k_2 x_1 - c_2 \dot{x}_1 + x_2(k_2 + k_3) + \dot{x}_2(c_2 + c_3) + m \ddot{x}_2 = F_2 \end{cases}$$

equazioni di equilibrio dinamico per le due masse

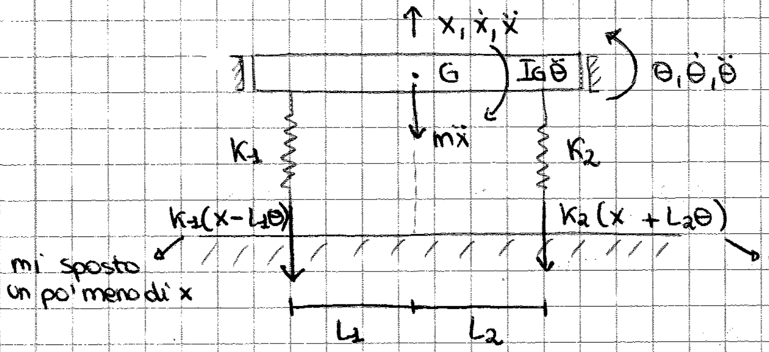


no parete fissa $\rightarrow k_1, k_3 = 0$

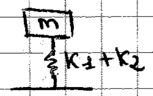
$\sigma_I = 0 \rightarrow$ modo RIGIDO di oscillazione
$\sigma_{II} \neq 0$

Sistema a due gradi di libertà ma con un'unica freq. di oscillazione

Sistema a due gradi di libertà con una sola massa $\rightarrow$ può traslare e ruotare



Se gli impedisco di traslare (‖) =



Se tolgo il vincolo ho due gradi di libertà ma non sullo stesso asse. (ho rotazione)

$$\begin{cases} -k_1(x - L_1\theta) - k_2(x + L_2\theta) - m\ddot{x} = 0 \\ k_1(x - L_1\theta)L_1 - k_2(x + L_2\theta)L_2 - I_G\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ equilibrio di momento rispetto al baricentro

Raccogliendo x:
$$\begin{cases} -(k_1 + k_2)x - (k_2L_2 - k_1L_1)\theta - m\ddot{x} = 0 \\ x(k_1L_1 - k_2L_2) - \theta(k_1L_1^2 + k_2L_2^2) - I_G\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Moltiplico per -1:
$$\begin{cases} (k_1 + k_2)x + (k_2L_2 - k_1L_1)\theta + m\ddot{x} = 0 \\ -x(k_1L_1 - k_2L_2) + \theta(k_1L_1^2 + k_2L_2^2) + I_G\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$-k_1L_1 + k_2L_2$

$x = x_0 \sin\sigma t \qquad \ddot{x} = -x_0\sigma^2 \sin\sigma t$
$\theta = \theta_0 \sin\sigma t \qquad \ddot{\theta} = -\theta_0\sigma^2 \sin\sigma t$

Sostituendo e dividendo per $\sin\sigma t$:

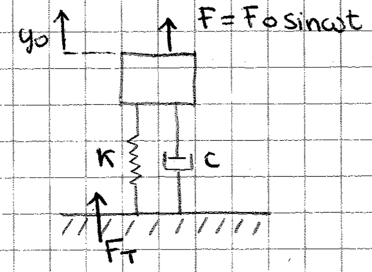
$$\begin{cases} (k_1 + k_2)x_0 - m\sigma^2 x_0 + (k_2L_2 - k_1L_1)\theta_0 = 0 \\ (-k_1L_1 + k_2L_2)x_0 + \theta_0(k_1L_1^2 + k_2L_2^2) - I_G\sigma^2\theta_0 = 0 \end{cases}$$

Ponendo il det. dei coeff. = 0 trovo le due freq. proprie e i due modi di oscillazione, ma con una traslazione e un' oscillazione

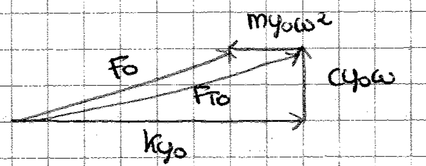
Se $k_2L_2 = k_1L_1 \rightarrow$ i coeff. di x_0 e θ_0 diventano 0
$\Rightarrow$ nella prima eq. ho solo traslazione e nella seconda solo rotazione
$\Rightarrow$ modi di oscillazione DISACCOPPIATI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 54

Trasmissibilità



Calcolo la trasmissibilità → forza che agisce sul supporto



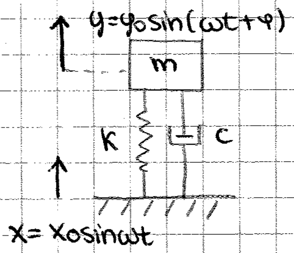
$$F_{T0} = \sqrt{k^2 y_0^2 + c^2 y_0^2 \omega^2}$$

$$= k y_0 \sqrt{1 + \frac{4\xi^2}{\sigma_n^2}\omega^2}$$

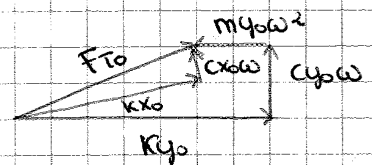
$$F_0 = k y_0 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\sigma_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2 \omega^2}{\sigma_n^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{F_{T0}}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4\xi^2}{\sigma_n^2}\omega^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\sigma_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2}{\sigma_n^2}\omega^2}}}$$

(grafico)

Ragionamenti analoghi valgono per la trasmissibilità di spostamento.



Impongo delle vibrazioni al terreno



F_{T0} = forza trasmessa dal terreno alla massa

$$K(y - x) + c(\dot{y} - \dot{x}) + m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = c\dot{x} + Kx$$

$$F_{T0} = y_0 K \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\sigma_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2}{\sigma_n^2}\omega^2} = \sqrt{K^2 x_0^2 + c^2 \omega^2 x_0^2}$$

$$\rightarrow = x_0 K \sqrt{1 + \frac{4\xi^2}{\sigma_n^2}\omega^2}$$

$$\boxed{\frac{y_0}{x_0} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4\xi^2}{\sigma_n^2}\omega^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\sigma_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2}{\sigma_n^2}\omega^2}}}$$

Ogni ottava corrisponde ad un raddoppio di frequenza, per ogni raddoppio ho un aumento di 4dB.

Nel nostro caso:

→ con le potenze ho 10, con altre quantità 20

$$4\,dB/\text{ottava} \Rightarrow \begin{cases} 10\log\dfrac{W_2}{W} = 4 \\ \text{con } \dfrac{f_2}{f} = 2 \end{cases}$$

$$\log\frac{W_2}{W} = \frac{4}{10} \quad \Rightarrow \boxed{b = \frac{\log\left(\frac{W_2}{W}\right)}{\log\left(\frac{f_2}{f}\right)}} = \frac{\frac{4}{10}}{\log 2} = 1{,}328$$

$$\boxed{\frac{W}{W_1} = \left(\frac{f}{f_1}\right)^b}$$