



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 576

DATA: 17/07/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Mazziotta

MATERIA: Meccanica Strutturale + Eserc.

Prof. Carrera

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Fondamenti di meccanica strutturale (A.A. 2012-2013)

Prof. E. Carrera

INDICE

Introduzione corpo deformabile, problema elastico, isostatico, iperstatico	1
Proprietà geomeccaniche delle strutture	5
Stato di tensione	10
Tensioni principali e invarianti	13
Esercitazione (proprietà geomeccaniche dei corpi).....	18
Equazioni indefinite di equilibrio	25
Funzioni di tensione.....	29
Tensore di deformazione	29
Relazioni geometriche	30
Deformazioni principali e invarianti	34
Equazioni di compatibilità o di congruenza	35
Relazioni non lineari	36
Esercitazione (Momenti di inerzia e vincoli nel piano).....	37
Relazione costitutiva o legge di Hooke	44
Principio dei lavori virtuali (parte 1)	46
Esercitazione (Vincoli e carichi distribuiti)	50
Principio dei lavori virtuali (parte 2)	52
Caratteristiche di sollecitazione	54
Principio dei lavori virtuali (parte 3)	56
Teoria delle strutture (metodi assiomatici e asintotici)	60
Esercitazione (strutture reticolari).....	63
Teoria di Reissner-Mindlin, Kirchhoff, Timoshenko, Eulero-Bernoulli.....	66

FONDAMENTI DI MECCANICA STRUTTURALE - LEZIONE 1

11

ESAME: 17/07/2013 (2° APPELLO), 27-28/06/13 (1° appello), 6/09/13 (3° app.)
(1° APPELLO) 1/7/13

TIPOLOGIA ESAME:

3 esercizi, 6 domande di teoria

-all' esame bisogna avere tutte le esercitazioni rigate.

VALUTAZIONE ESAME:

- Secca;
- Orale obbligatorio;
- Orale facoltativo.

LIBRO ESERCIZI FACOLTATIVO: CARRERA AUGELLO

Elementi fondamentali delle strutture:

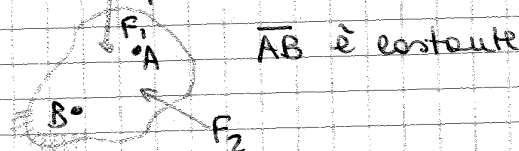
- Gusci;
- Piastre;
- Travi;
- Solidi.

EQUAZIONI FONDAMENTALI CONTINUI DEFORMABILI:

INTRODUZIONE CORPO DEFORMABILE:

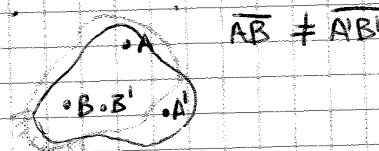
• RIGIDI: → indeformabile

Consideriamo un corpo di forma qualsiasi sul quale disegniamo due punti A e B. la distanza tra A e B è costante ma se sul corpo vi è un vincolo, quindi applico una forza, la distanza tra A e B resta comunque costante:



Un corpo è DEFORMABILE nel momento in cui, applicando una forza su di esso, esso cambia forma e ciò implica che la distanza tra due punti su di esso non è costante.

I punti sono quindi animati da uno spostamento.

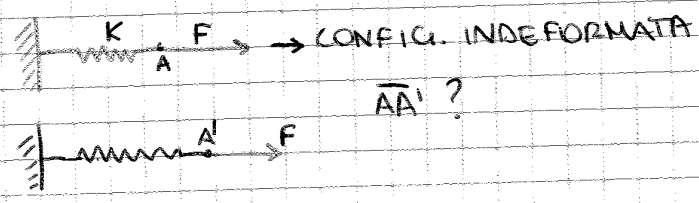


I corpi rigidi sono utili per risolvere molti problemi della meccanica ad esempio quando vi sono delle aste, esse vanno considerate di rigide. Però bisogna capire quando funziona l'ipotesi di corpo rigido.

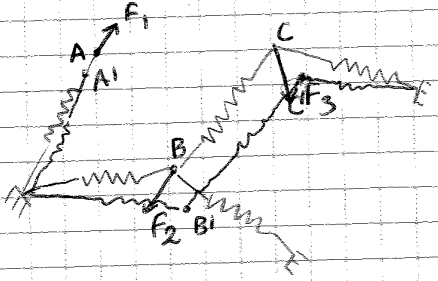
Rigide ⇒ $E \neq 0$



- MOLA: $k \cong E$



- Altro caso: più molle:



F_1, F_2, F_3

Per trovare le forze bisogna tener conto delle k (cost. elastiche).

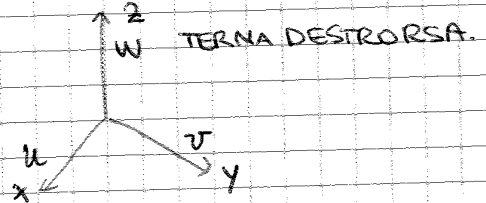
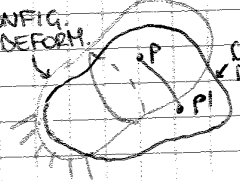
LEZIONE 2

Per analizzare la struttura di un corpo bisogna abbandonare l'idea di corpo rigido.

Per lo studio dei continui deformabili consideriamo 3 quantità:

- vettore $\vec{s} = \vec{PP}'$ → rappresenta lo spostamento dei punti del corpo durante la deformazione.

CONFIG. INDEFORM. $\vec{s}(x, y, z) = u(x, y, z)\vec{i} + v(x, y, z)\vec{j} + w(x, y, z)\vec{k}$



• $\hat{\sigma}$ = STATO DI TENSIONE

• $\hat{\epsilon}$ = STATO DI DEFORMAZIONE

} le equazioni fondamentali sono in funzione di tali parametri.

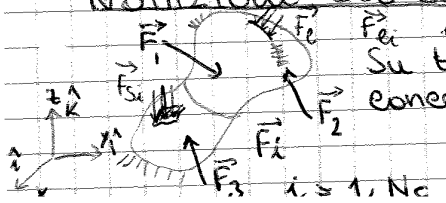
$\hat{\sigma}$ e $\hat{\epsilon}$ per essere definite hanno bisogno di 9 numeri. Tutte le quantità fisiche possono essere raccolte nella denominazione di TENSORE.

I tensori possono avere diversi ordini:

- Ordine 0 → unidimensionale;
- Ordine 1 → tridimensionale;
- Ordine 2 → nove dimensionali.

d^n = numero di componenti per descrivere una grandezza. (d = dimensione, n = ordine).

NOTAZIONI SUL CORPO C:



\vec{F}_i $i=1, 2, 3 \in [N, m]$.
Su tale corpo abbiamo un certo numero di forze concentrate (astrazione).

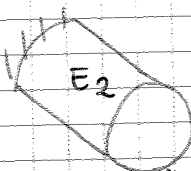
ESERCITAZIONE 1

TUTTI GLI ARGOMENTI:

- PROPRIETÀ GEOMECCANICHE DELLE STRUTTURE;
- CALCOLO REAZIONI VINCOLARI (TRAVATURE);
- CALCOLO DIAGRAMMI M, N, T (SOLLECITAZIONI);
- IPERSTATICHE;
- VERIFICA SEZIONI

PROPRIETÀ GEOMECCANICHE STRUTTURE.

Proprietà che dipendono dalla geometria del corpo e dalla struttura ovvero la distribuzione del materiale.



E = MODULO DI YOUNG

Se io vincolo due corpi con stesso materiale distribuito in modo diverso le loro prop. geomeccaniche sono diverse.

In tali proprietà entra in gioco il VOLUME:

$$V = \int dx dy dz;$$

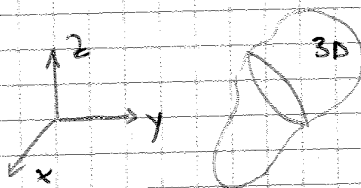
la MASSA:

$$M = \int \rho dx dy dz$$

→ $\int_{V_1} \rho_1 dV + \int_{V_2} \rho_2 dV$
 A parità di volume varia la densità e quindi varia anche la massa.

la TEORIA DELLE STRUTTURE è sinonimo di INTEGRARE le equazioni dei corpi (strutture).

- Se volessimo scrivere in maniera generale le proprietà dobbiamo considerare il corpo generico tridimensionale.



$3D = \int_V$ EQ. GENERALE CORPI 3D.

$$P_{3D} = \int_V G(x, y, z) f(x, y, z) g(x, y, z) dV$$

Un corpo tridimensionale si ha con 3 quantità della stessa ordine di grandezza.

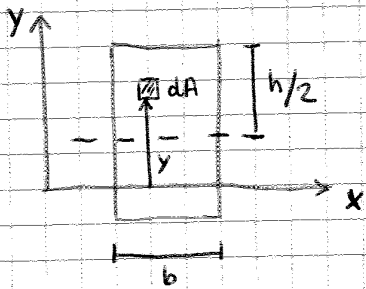
G = dipende dal materiale

f, g = dipendono dalla teoria delle strutture utilizzata.

Esempio:

$$\int x^2 dx dy dz \begin{cases} G=1 \\ f=x \text{ oppure } f=x^2 \\ g=x \text{ oppure } g=1 \end{cases}$$

Per $G=1, f=1, g=1 \Rightarrow P_{3D} = V = \text{Volume}$.



Vi è una posizione dell'asse (a $\frac{h}{2}$) in cui il mom. statico risulta nullo.

$$S_x = \int_A y \, dA$$

Si compensano le Aree positive con le negative.

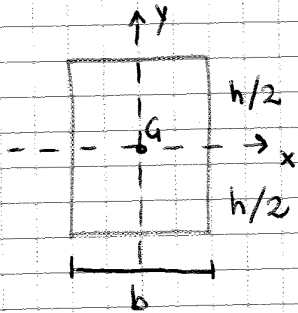
MOMENTI DEL 1° ORDINE f·g = LINEARE

$$S = \int_A (ax' + by') \, dA$$

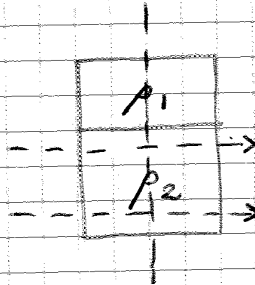
$$a, b \leq C$$

• Per $a, b = 1 \Rightarrow \begin{cases} S_x = \int_A y \, dA \\ S_y = \int_A x \, dA \end{cases} \Rightarrow$ MOMENTI STATICI.

POSIZ. BARICENTRO



MAT. OMOGENEO

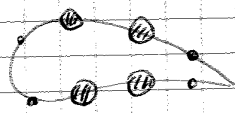
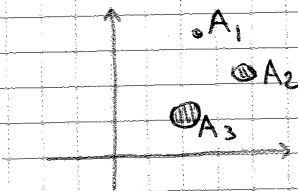


Asse verticale \rightarrow quello geom. e meccanico coincidono

Asse orizzontale \rightarrow non coincidono.

MAT. NON OMOGENEO.

Strutture aerospaziali \rightarrow strutture ad aree concentrate.



MOMENTI DEL 2° ORDINE :

$$I = \int_A (ax^2 + by^2 + cxy) \, dA$$

dove: $f = x+y$
 $g = x+y$

Esempi:

$$I_y = \int_A x^2 \, dA$$

$$I_x = \int_A y^2 \, dA$$

$$I_{xy} = \int xy \, dA \rightarrow$$
 MOM. CENTRIFUGO

$$I_p = \int (x^2 + y^2) \, dA \rightarrow$$
 MOMENTO POLARE

$$\det = \begin{vmatrix} I_x - \lambda & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Da risolvere:

$$(I_x - \lambda)(I_y - \lambda) - (I_{xy})^2 = 0$$

$$I_x I_y - I_x \lambda - I_y \lambda + \lambda^2 - I_{xy}^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(I_x + I_y) + I_x I_y - I_{xy}^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x + I_y)^2 - 4(I_x I_y - I_{xy}^2)}}{2} =$$

$$= \frac{(I_x + I_y) \pm \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 2I_x I_y - 4I_x I_y + 4I_{xy}^2}}{2} =$$

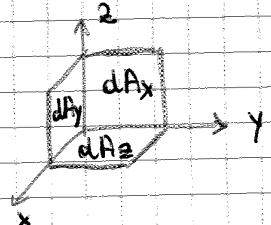
$$= \frac{(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}{2}$$

Il vettore di tensione ci indica quindi lo stato di tensione a patto però di fissare \vec{n} e quindi dA : \vec{T}_{dA}
 Quindi se definiamo un piano e le sue normali allora si può calcolare \vec{T}_{dA} e per ogni \vec{n} esiste un \vec{T}_{dA} diverso.

Ma allora quanti \vec{T}_{dA} dovrà calcolare per definire lo stato di tensione totale?

Ora dimostreremo che ne bastano solamente 3, servono 3 componenti chiamati COMPONENTI SPECIALI DI TENSIONE:

Possiamo definirle in un riferimento qualsiasi noi scegliamo un sistema OXY centrato in P:



Scego 3 piccole aree che corrispondono agli assi, in ognuna di esse posso trovare un df e di conseguenza un vettore tensione:

$$\begin{aligned} \vec{T}_{dAx} &= t_x dA_x \vec{i} + t_y dA_x \vec{j} + t_z dA_x \vec{k} = \\ &= \sigma_{xx} \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k} = \\ &= \sigma_{xx} \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k} \end{aligned}$$

ADDESSO RELATIVO ALL'AREA

COMPONENTI TANGENZIALI

t_x = componente di x che tira lungo x

Allo stesso modo posso scrivere le \vec{T} relative alle altre aree:

$$\begin{aligned} \vec{T}_{dAy} &= \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k} = \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k} \\ \vec{T}_{dAz} &= \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k} = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k} \end{aligned}$$

COMPONENTI SPECIALI DI TENSIONE:

Li raggruppiamo in una matrice:

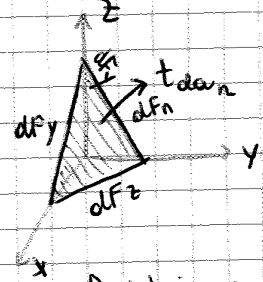
$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Questa matrice definisce in totale lo STATO DI TENSIONE ed esso varia da punto a punto.

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE:

Dimostriamo che queste sono condizioni NECESSARIE E SUFFICIENTI per descrivere \vec{T}_{dA} in P.
 È possibile, dato una normale \vec{n} qualsiasi, trovare \vec{T}_{dA} ?



Data una normale \vec{n} posso trovare \vec{T}_{dA} considerando il solido che si viene a formare dall'intersezioni dei piani relativi agli assi con il piano perpendicolare ad \vec{n} .

Le forze presenti devono essere in equilibrio, deve essere quindi verificate le eq. della statica.

Dobbiamo quindi introdurre una CONVENZIONE DI SEGNO. Stabiliamo che la forza è negativa se entra nel solido, positiva se esce.

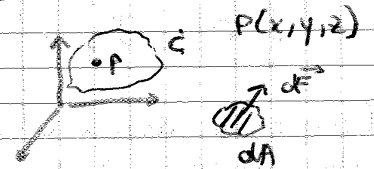
LEZIONE 4.

Il tensore $\hat{\sigma}$, che abbiamo detto essere costituito da 9 componenti, determina lo stato di tensione del corpo.

Dato un corpo e un punto $P(x, y, z)$ bisogna individuare su tale punto una normale \vec{n} che caratterizza una piccola area dA nel quale agisce una forza dF .

Trovare lo stato di tensione vuol dire trovare questa forza generica dF . Per trovarla è utile trovare il vettore tensione:

$$\vec{T}_{dA} = \frac{d\vec{F}}{dA} \parallel$$

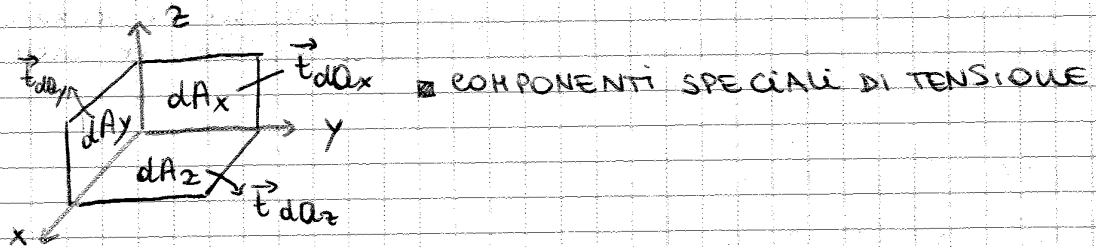


Tale vettore ha genericamente 3 componenti:

$$\vec{T}_{dA} = t_x \vec{i} + t_y \vec{j} + t_z \vec{k} \parallel$$

Con tali informazioni riusciamo a caratterizzare la sezione dA del corpo che ci interessa.

Nel piano relativo ad ogni asse, abbiamo detto, vi è una piccola area dove agiranno tre vettori distinti di tensione che verranno poi inseriti nella matrice relativa allo stato di tensione ($\hat{\sigma}$).



$$\vec{T}_{dA} = t_x \vec{i} + t_y \vec{j} + t_z \vec{k}$$

Poi abbiamo introdotto una notazione a doppio indice:

$$\vec{T}_{dAy} = \sigma_{yx} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \sigma_{yz} \vec{k} \parallel$$

Lo stesso vale per \vec{T}_{dAx} , \vec{T}_{dAz} .

Quindi la matrice dello stato di tensione diventa:

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{- Elementi di allungam. o compressione} \\ \text{- Elementi di taglio} \end{array}$$

È una matrice simmetrica e quindi la sua TRASPOSTA è uguale a essa.

$$\hat{\sigma}^T = \hat{\sigma} \parallel$$

I vettori di tensione possono anche essere scritti così:

$$\{t_x, t_y, t_z\} = \{n_x, n_y, n_z\} \hat{\sigma} \parallel$$

$$\{t\} = \hat{\sigma}^T \{n\} \parallel$$

Tale formula mi dà il vettore di tensione per qualunque giacitura del corpo.

Da cosa sono rappresentate le DIREZIONI?

Dagli AUTOVALORI ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$)

Solo nelle DIREZ. PRINCIPALI \rightarrow trazione e compressione;

In tutte le altre \rightarrow anche taglio.

- Se $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33} \neq 0 \Rightarrow$ STATO TRIDIMENSIONALE;

- se $\begin{cases} \sigma_{11} = 0, \sigma_{22}, \sigma_{33} \neq 0 \\ \sigma_{22} = 0, \sigma_{11}, \sigma_{33} \neq 0 \\ \sigma_{33} = 0, \sigma_{11}, \sigma_{22} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow //$ BIDIMENSIONALE

\downarrow
DIMENSIONE TENSORE = 2

perché:
es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

- Se due tensori sono pari a 0 e uno no $\Rightarrow //$ MONODIMENSIONALE

\downarrow
DIM = 1 perché: es:

$$\begin{aligned} \sigma &= [\sigma_{xx}]_0 \\ \sigma &= [\sigma_{yy}]_0 \\ \sigma &= [\sigma_{zz}]_0 \end{aligned}$$

• Abbiamo anche detto che quando il momento centrifugo è 0 si creano momenti di inerzia max e min e tensori max e min quindi in sostanza si ottengono delle QUANTITÀ ESTREME.
Quindi grazie al RIF. PRINCIPALE si ottengono valori di tensori e mom. di inerzia principali che risultano MAX o MIN.

E. F. C. D. (Eq. FONDAM. CORPI DEFORMABILI) si scrivono sulle seguenti funzioni:

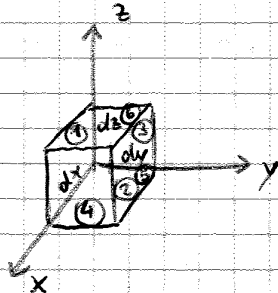
$\vec{r} \rightarrow$ 3 dimensionali

$\sigma \rightarrow$ 9 dimensionali \rightarrow in realtà si scrivono solo 6 eq perché 3 sono state già scritte per lo spostamento.

Delle eq. fondamentali sono:

LE EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO:

Equazioni che coinvolgono $\vec{\sigma}$ e valgono nel generico punto $P(x, y, z)$:



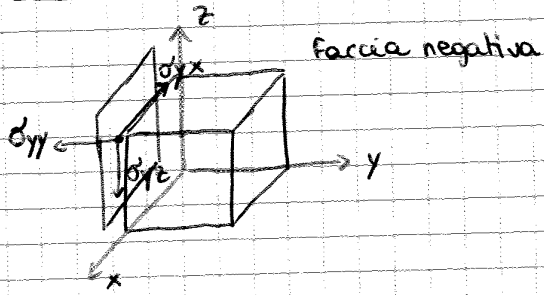
Per scrivere le eq. di equilibrio devo considerare un cubetto elementare di materiale:

Per realizzare tale cubetto si vuole creare 6 piani di taglio, ciò vuol dire che su ogni faccia vi è un vettore di tensione \vec{T} .
All'interno del cubetto agiscono delle forze di VOLUME.

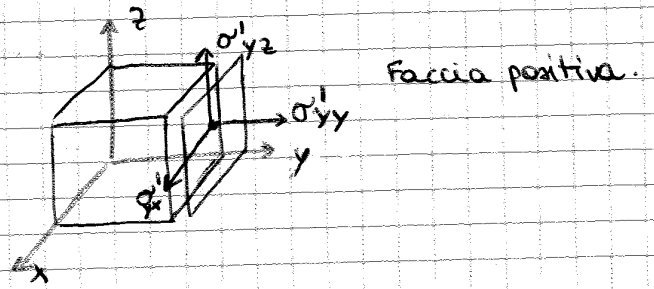
Ogni punto del cubetto è in equilibrio, ciò vuol dire che i vettori di tensione vengono compensati dalle eventuali forze di volume.

Se conosco σ in P conosco 3 vettori di tensione agenti sulle 6 facce principali.

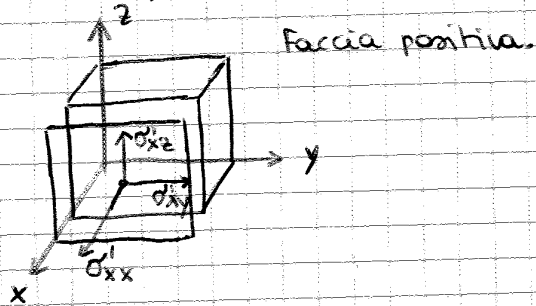
* FACCIA 1 : xz



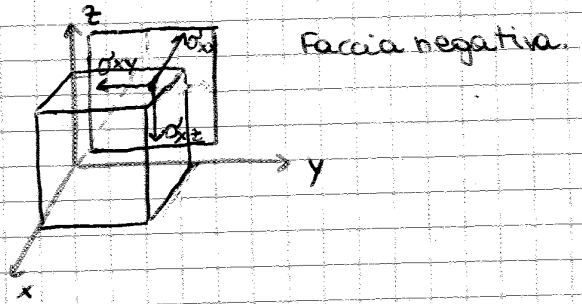
FACCIA 2 : $xz+dy$



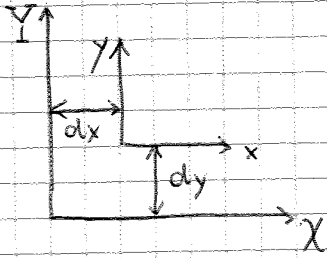
FACCIA 4 : $zy+dx$



FACCIA 3 : zy



Suppongo ora di voler calcolare i momenti statici rispetto un altro riferimento:



$$\begin{aligned} X &= x + dx \\ Y &= y + dy \\ S_x &= S_x + dyA \\ S_y &= S_y + dxA \end{aligned}$$

Se x, y sono baricentrici:

$$S_x = dyA ; S_y = dxA$$

MOMENTI DEL 2° ORDINE:

Sempre considerando una sezione continua:

$$I = \int_A (ax^2 + by^2 + cxy) dx dy \quad a, b, c = \text{prop. sezione}$$

- Se $a = c = 0, b = 1$:

$$I_x = \int_A y^2 dx dy \rightarrow \text{MOM. DI INERZIA RISP. } x;$$

- Se $b = c = 0, a = 1$:

$$I_y = \int_A x^2 dx dy \rightarrow \text{MOM. DI INERZIA RISP. } y;$$

- Se $a = b = 0, c = 1$:

$$I_{xy} = \int_A xy dx dy \Rightarrow \text{MOM. CENTRIFUGO};$$

- Se $a = b = 1, c = 0$:

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) dx dy = I_x + I_y \Rightarrow \text{MOM. POLARE}$$

Quando in tal caso neppure si vuole effettuare un cambio di coordinate da (x, y) a (X, Y) :

$$I_x = I_x + dy^2 A + 2 S_x dy$$

$$I_y = I_y + dx^2 A + 2 S_y dx$$

$$I_{xy} = I_{xy} + dx dy A + S_x \cdot dx + S_y \cdot dy$$

RICORDARE:

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta ;$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta .$$

Se il riferimento è BARICENTRICO i momenti statici sono NULLI e si ha:

$$I_x = I_x + dy^2 A ;$$

$$I_y = I_y + dx^2 A ;$$

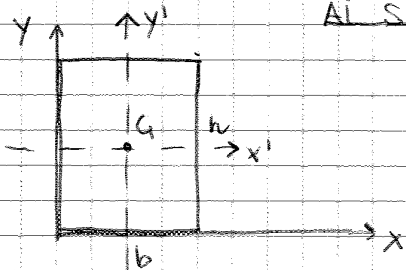
$$I_{xy} = I_{xy} + dx dy \cdot A$$

RIFERIMENTO CENTRALE DI INERZIA

È l'insieme del riferimento principale e quello baricentrico. Quindi i momenti di inerzia risultano max e min.

Il rif. centrale ha per origine il BARICENTRO cioè vuol dire che il mom centrifugo è NULLO e i mom. di inerzia sono MAX e MIN ASSOLUTI.

ESERCIZIO 1 → MOmenti DI INERZIA DI UNA SEZ. RETTANGOLARE RISPETTO AI SUOI ASSI BARICENTRICI.



$$x_G = \frac{b}{2};$$

$$y_G = \frac{h}{2}$$

(x', y') , oltre essere gli assi di simmetria, rappresentano gli ASSI BARICENTRICI della sezione considerata:

$$I_{x'} = \int_A (y')^2 dx dy = \int_{-h/2}^{h/2} (y')^2 \cdot \left(\int_{-b/2}^{b/2} dx \right) dy = \left(\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right) b = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{y'} = \int_A (x')^2 dx dy = \int_{-b/2}^{b/2} (x')^2 \cdot \left(\int_{-h/2}^{h/2} dy \right) dx = \left(\frac{b^3}{24} + \frac{b^3}{24} \right) h = \frac{b^3h}{12}$$

Se volessimo calcolare i momenti di inerzia rispetto al riferimento (x, y) generico, si ha:

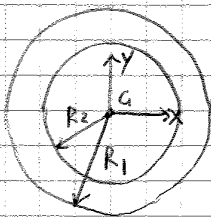
$$I_x = I_{x'} + d^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2} \right)^2 b \cdot h$$

$$I_y = I_{y'} + d^2 A = \frac{b^3h}{12} + \left(\frac{b}{2} \right)^2 b \cdot h$$

- I momenti di inerzia calcolati rispetto agli assi sono SEMPRE POSITIVI;

- momento centrifugo → positivo o negativo.

ESERCIZIO 2:



$I_x ? I_y ? I_{xy} ? I_p ?$

Considerare che:

$$\int_D f dx dy = \int_{D_1} f dx dy - \int_{D_2} f dx dy$$

$$I_{1x} = \int_{A_1} y^2 dx dy = \int_{A_1} (r \sin \theta)^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} r^3 \sin^2 \theta dr d\theta = \left(\frac{r^4}{4} \right)_0^{R_1} \cdot \frac{1}{2} (\theta - \frac{\sin 2\theta}{2})_0^{2\pi} = \frac{R_1^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} R_1^4$$

$$I_{1y} = \int_{A_1} x^2 dx dy = \int_{A_1} (r \cos \theta)^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = \left(\frac{r^4}{4} \right)_0^{R_1} \cdot \frac{1}{2} (\theta + \frac{\sin 2\theta}{2})_0^{2\pi} = \frac{R_1^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\pi) = \frac{\pi}{4} R_1^4$$

$$I_{1xy} = \int_{A_1} xy dx dy = \int_{A_1} r^3 \cos \theta \sin \theta d\theta dr = \int_0^{R_1} \int_0^{2\pi} r^3 \cos \theta \sin \theta d\theta dr =$$

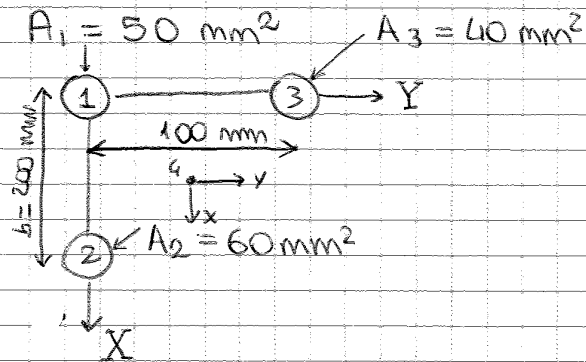
$$\operatorname{tg} 2\tilde{\theta} = \frac{-2I_{xy}}{(I_x - I_y)} \Rightarrow \theta = 11^\circ 57'$$

12

$$I_f = \frac{1}{2} (I_x + I_y) \overset{\text{perché } I_x > I_y}{+} \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = 829,02 \text{ cm}^4$$

$$I_\eta = 58,981 \text{ cm}^4$$

ESERCIZIO 4.



	X_i	Y_i	A_i	$X_i A_i$	$Y_i A_i$
1	0	0	50 mm^2	0	0
2	200 mm	0	60 mm^2	12000 mm^3	0
3	0	100 mm	40 mm^2	0	4000 mm^3

$$X_c = \frac{12000 \text{ mm}^3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{12000 \text{ mm}^3}{150 \text{ mm}^2} = 80 \text{ mm} = 8 \text{ cm}$$

$$Y_c = \frac{4000 \text{ mm}^3}{150 \text{ mm}^2} = 26,67 \text{ mm} = 2,667 \text{ cm}$$

$$I_x = \sum_{i=1}^3 A_i (Y_i - Y_c)^2 = 2,9333 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \sum_{i=1}^3 A_i (X_i - X_c)^2 = 1,44 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

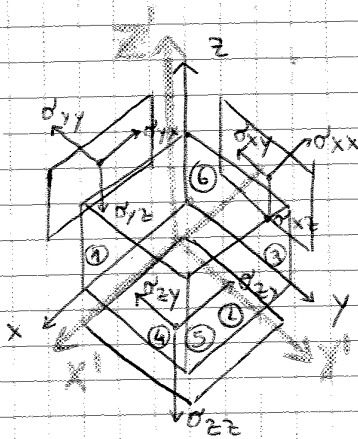
$$I_{xy} = \sum_{i=1}^3 A_i (X_i - X_c)(Y_i - Y_c) = -3,2 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_\xi = \frac{1}{2} (I_x + I_y) \overset{I_x < I_y}{-} \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = 2,1007 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_\eta = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} \sqrt{\dots} = 1,5233 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

LEZIONE 5

125



Tagliando un corpo con dei piani trasversali si ottengono sei facce in cui in ognuna agisce un vettore di tensione.

[VEDI DISEGNI PAG. 17]

EQ. INDEFINITE DI EQUILIBRIO E TEOR. DI RECIPROCA'

Su tali facce possono agire delle forze esterne quali **FORZE DI VOLUME**.

Deve essere soddisfatto l'equilibrio di traslazione rispetto alle x, y, z e quello di rotazione rispetto a tali assi.

⚠ non va scelto a caso ma deve soddisfare le eq. di equilibrio.

Bisogna scegliere delle eq. indipendenti tra loro, per farlo devo considerare 3 direzioni **NON PARALLELE** tra loro. Per gli assi ovviamente tale condiz. è sempre soddisfatta (angolo $\pi/2$ tra loro).

• lungo la direzione \vec{x} quali forze agiscono? :

\vec{x} : FACCIA ① : $-\sigma_{yx} \cdot dx \cdot dz$

FACCIA ② : $\sigma'_{yx} \cdot dx \cdot dz$

FACCIA ③ : $-\sigma_{xx} \cdot dy \cdot dz$

FACCIA ④ : $\sigma'_{xx} \cdot dy \cdot dz$

FACCIA ⑤ : $-\sigma'_{zx} \cdot dy \cdot dx$

FACCIA ⑥ : $\sigma''_{zx} \cdot dy \cdot dx$

Sommandoli tutti si ottiene la forza risultante = 0

- FARE DIREZ. \vec{y}, \vec{z} (ESERCIZIO)

Ora scriviamo un'equazione per la rotazione, per farlo considero un ass. parallelo x' passante per il baricentro: (FARE PER DIREZ. \vec{y}', \vec{z}') (E PER x, y, z)

• lungo la direzione \vec{x}' si ha: $(\vec{x}' // \vec{x})$

\vec{x}' : FACCIA ① : $\sigma_{yz} \cdot dx \cdot dz \cdot \left(\frac{dy}{2}\right)$ braccio

FACCIA ② : $\sigma'_{yz} \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2}$

FACCIA ③ : 0

FACCIA ④ : 0

FACCIA ⑤ : $-\sigma'_{zy} \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{2}$

FACCIA ⑥ : $-\sigma''_{zy} \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{2}$

$(\sigma_{yz} + \sigma'_{yz}) = (\sigma'_{zy} + \sigma''_{zy})$ EQ. DI EQUILIBRIO ROTAZIONE.

(Sommo le prime due eq. dell'equilibrio di traslazione)

$$-\sigma'_{yx} dx dz + \sigma'_{yz} dx dz =$$

$$= -\sigma'_{yx} dx dz + \left(\sigma'_{yx} + \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

EQUAZ. DI EQUILIBRIO
DEVE FORZE.

↓
in assenza di
forze esterne

$$\frac{\partial \sigma'_{ii}}{\partial i} \text{ DIREZ.}$$

$$\sigma'_{ii,i} = 0$$

• Se ci sono delle forze di VOLUME cioè $\frac{N}{m^3}$ queste avranno componenti:

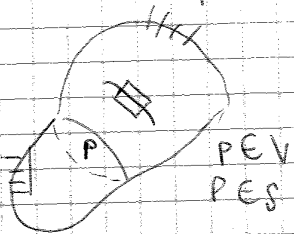
$$\vec{f} = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k} \quad \frac{N}{m^3}$$

↓
Le eq. di equilibrio delle forze diventano:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zx}}{\partial z} = g_x \\ \phantom{\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zx}}{\partial z}} = g_y \\ \phantom{\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zx}}{\partial z}} = g_z \end{cases} \Rightarrow \sigma'_{ii,i} = g_i$$

Equaz. indefinite → In un generico punto P
CONDIZIONI DI EQUILIBRIO SUL CONTORNO O AI LIMITI

Dato un corpo G; quali sono le equaz. di equilibrio sul contorno del corpo?



Su un punto del contorno individuando una piccola area su cui passarei un vettore \vec{F}_{da} :

$$\vec{F}_{da} = t_x \vec{i} + t_y \vec{j} + t_z \vec{k}$$

• Se sul contorno non ci sono forze applicate allora affinché ci sia equilibrio si ha:

$$\vec{F}_{da} : \begin{cases} t_x = 0 \\ t_y = 0 \\ t_z = 0 \end{cases} \parallel \text{CONDIZ. OMOGENEA}$$

• Se sul contorno agisce una forza allora si ha:

$$t_{da} : \begin{cases} t_x = f_x \\ t_y = f_y \\ t_z = f_z \end{cases} \parallel \text{CONDIZ. NON OMOGENEA}$$

← funzioni o derivate di funzioni

Un altro concetto importante nuovo: (legato allo STATO BIDIM.)

LE FUNZIONI DI TENSIONE:

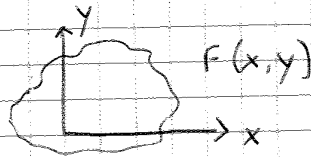
Riguardano il piano:

$F(x, y) \rightarrow$ scalare

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$\sigma_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$



Questo avviene se non ci sono forze est. e inziali

la funzione di tensione sostituita nell'eq. di equilibrio dello stato bidimensionale fornisce un'IDENTITÀ: $0=0$.
 Invece di avere 3 incognite ne abbiamo solo 1 ovvero F quindi viene semplificato il calcolo, l'unico problema è che sono eq. indefinite di equilibrio quindi valgono per UN PUNTO quindi trovare una F che soddisfi anche le condizioni al contorno è difficile!

$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} = 0 \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Riprendiamo il concetto di TENSORI PRINCIPALI:

Queste hanno la prop. di essere max o min e di essere TENSORI NORMALI.

Possiamo chiederci se esistono anche TENSORI TANGENZIALI che siano max o min:

$$\begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \rightarrow & \text{TENSORI PRINCIPALI NORMALI} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & & \end{matrix}$$

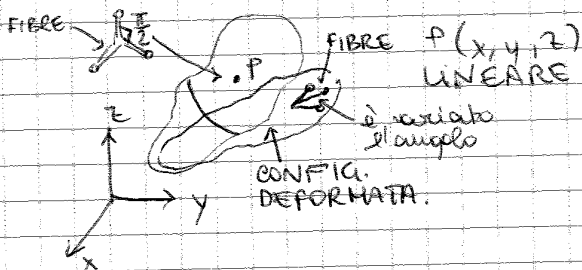
Le equaz. di equilibrio implicano la presenza delle tens. tg. sditen. quelle tangenziali max e min stanno ad un angolo pari a $\pm 45^\circ$ rispetto alle normali.

TENSORE DI DEFORMAZIONE O STATO DI DEFORMAZIONE \hat{E} :

Anche \hat{E} è costituito da 9 componenti.

Come è possibile trovarlo?

Consideriamo un corpo qualunque ad un suo punto interno P:



Considero una fibra di materiale nel punto P io voglio vedere di quanto si deforma il materiale in tale punto.
 Considero tre fibre ortogonali (direz. (x, y, z)) cosa è successo alle fibre nella config. deformata?

Sapendo che: $\vec{s} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ si ha che:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

↓

$$\epsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \textcircled{1} \Rightarrow \text{DEF. LUNGHO X DEL PUNTO.}$$

Negli altri assi si ha:

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \textcircled{2}; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \textcircled{3}$$

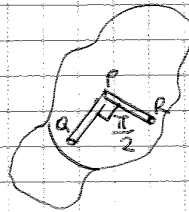
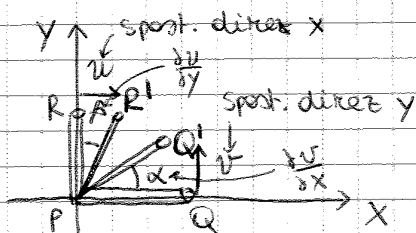
$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} =$ RELAZIONI GEOMETRICHE TRA $\hat{\epsilon}$ e \vec{s} .
 si trovano le DEFORMAZ. LINEARI

Inoltre si ha:

$$\sigma = E \epsilon \quad \Rightarrow \text{LEGGI CHE LEGA TENS E DEFORMAZ.}$$

Troviamo le COMP. ANGOLARI:

• Ora considero una fibra // asse x e una // asse y:



Vi è una variazione angolare nel momento della deformazione.
 Si ha che:

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

↓

$$\alpha: \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad ||$$

$$\beta: \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad ||$$

$$\epsilon_{xy} = (\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \textcircled{*}$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

RELAZ. TRA DEFORMAZIONE E SPOST. ANGOLARE

SIGNIFICATO FISICO:

Tali funzioni risultano CONTINUE se verificano la COMPATIBILITÀ
 accumulata prima, SOLO in tal caso si verifica anche
 l'EQUILIBRIO.

LEZIONE 7

STATO DI DEFORMAZIONE

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ & & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Simmetria

Componenti taglianti della deformazione

ϵ_{ij} = COMPONENTI SPECIALI DI DEFORMAZIONE

servono per scrivere le equaz dei continui deformabili le quali seguono lo spostamento allo stato di deformazione:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} ; \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

le proprietà di rotazione degli indici sono tipiche dei corpi tridimensionali.

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) ; \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

SPORRIMENTO ANGOLARE:

$$\gamma_{ij} = 2 \epsilon_{ij}$$

lo stato di deformazione si può anche scrivere:

$$\{\epsilon\}^T = \{ \epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \overset{2\epsilon_{xz}}{\gamma_{xz}}, \overset{2\epsilon_{yz}}{\gamma_{yz}}, \overset{2\epsilon_{xy}}{\gamma_{xy}} \}$$

$$\{\sigma\}^T = \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \overset{\tau_{xz}}{\sigma_{xz}}, \overset{\tau_{yz}}{\sigma_{yz}}, \overset{\tau_{xy}}{\sigma_{xy}} \}$$

ESERCIZI DA FARE:

$$2 \{ \epsilon \} = \begin{bmatrix} \partial^2 & & \\ & \partial^2 & \\ & & \partial^2 \end{bmatrix} \{ \sigma \} \quad \{ \sigma \}^T = \{ u, v, w \}$$

6 righe } Matrice differenziale
3 colonne }

le matrici che
scriviamo risulteranno
una la trasposta
dell'altra.
(l'ultima = trasposta delle 1^{re})

3. Scrivere le eq. indefinite di equilibrio

$$[?] \{ \sigma \} = \{ 0 \}$$

3 righe } Matrice differenziale
6 colonne }

1. Derivare ϵ_{yy} , ϵ_{zz} come è stato fatto per ϵ_{xx} . (vedi pg 31)

EQUAZIONI DI COMPATIBILITÀ O DI CONGRUENZA

Sono quelle che soddisfano i vari teoremi (ad es. teorema di reciprocità). Tali eq. in qualche modo ci dicono quali sono le condiz. per calcolare gli spostamenti note le deformazioni.

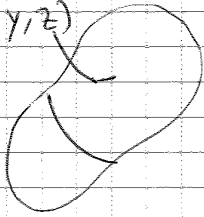
$H_p: \hat{\epsilon}$

Calcolo \vec{s}

Le equazioni sono condizioni di integraz. degli spostamenti per ottenere funz. continue. Possiamo riscrivere anche in un altro modo:

Supponiamo che un corpo venga diviso in tanti cubetti:

$\hat{\epsilon}(x, y, z)$



Possiamo scegliere se considerare $\hat{\epsilon}$ nel corpo continuo o nei cubettini. Quando applico la $\hat{\epsilon}$ nei cubetti, ogni cubetto si deforma quindi nel momento in cui voglio rimetterli assieme per rifare il pezzo, non devono esserci vuoti tra loro e devono essere complementari.

A tal fine servono proprio tali equazioni sono:

le equazioni di congruenza.

$R_{xx}: \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$

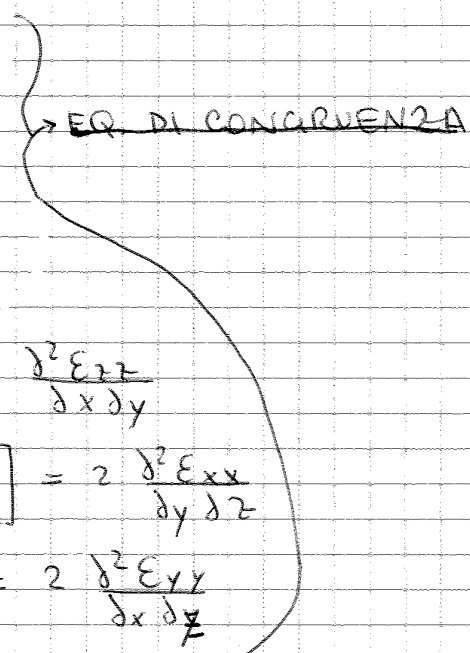
$R_{yy}: \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$

$R_{zz}: \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$

$R_{xy}: \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y}$

$R_{yz}: \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z}$

$R_{xz}: \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x \partial z}$



- Se $R_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$

Le eq. di congruenza possono essere raggruppate in una sorta di matrice:

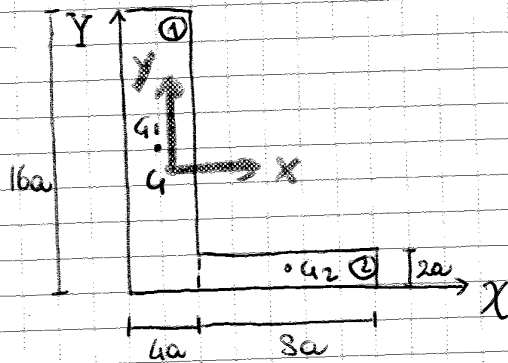
$\hat{R} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ & R_{yy} & R_{yz} \\ & & R_{zz} \end{bmatrix}$
 $\{R\}^T = \{R_{xx}, R_{yy}, R_{zz}, R_{xz}, R_{yz}, R_{xy}\}$

Simm.

ESERCIZIO (DA FARE)
 Verificare che per tali componenti valgono delle equazioni simili alle equazioni indipendenti di equilibrio e che questi sono 3.° equaz. indipendenti.

ESERCITAZIONE ③

ESERCIZIO ①



Trovare: G, I_x, I_y, I_{xy}

$$x_G = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{128a^3 + 1280a^3}{80a^2} = 3,2a$$

$$y_G = \frac{512a^3 + 16a^3}{80a^2} = 6,6a$$

Calcolo i momenti di inerzia rispetto al riferimento generico:

$$\begin{aligned} I_x &= (I_{x_1} + d y_1^2 A_1) + (I_{x_2} + d y_2^2 A_2) = \\ &= \left(\frac{1}{12} 4a (16)^3 a^3 + 1,96 a^2 64 a^2 \right) + \left(\frac{1}{12} 8a \cdot 8a^3 + 31,36 a^2 \cdot 16 a^2 \right) = \\ &= 1998 a^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= (I_{y_1} + d x_1^2 A_1) + (I_{y_2} + d x_2^2 A_2) = \\ &= \left(\frac{1}{12} 16a \cdot 64 a^3 + (1,2)^2 a^2 \cdot 64 a^2 \right) + \left(\frac{1}{12} \cdot 2a \cdot 512 a^3 + (4,8)^2 a^2 \cdot 16 a^2 \right) = \\ &= 631,5 a^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{y x_1} + I_{x y_2} + d x_1 d y_1 A_1 + d x_2 d y_2 A_2 = \\ &= 0 + 0 + (-1,2)a \cdot 1,4a \cdot 64 a^2 + (-5,6)a \cdot 4,8a^2 \cdot 16 a^2 = \\ &= -537,6 a^4 \end{aligned}$$

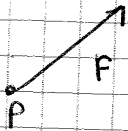
Momenti di inerzia tali per cui il riferimento sia principale:

$$I_{\xi} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2} = 1314,75 a^4 + 869,4 a^4 = 2184 a^4$$

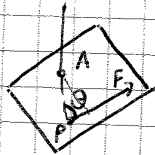
$$I_{\eta} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2} = 1314,75 a^4 - 869,4 a^4 = 445,35 a^4$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \left(- \frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y} \right) = 19,1^\circ$$

FORZA



MOMENTO:

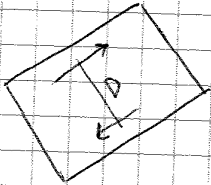


$$\vec{M}^P = \vec{F} \wedge \vec{AP}$$

$$M = F \cdot AP \sin \theta$$

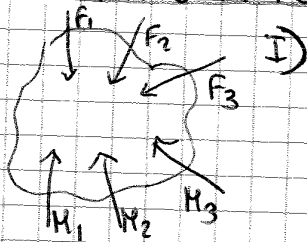
CONCETTI TEORICI:

COPPIA



$C = F \cdot D \rightarrow$ il modulo della coppia è costante qualunque sia l'asse di riferim. stesso.

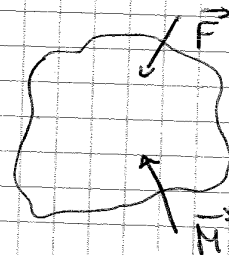
RISULTANTE DI FORZA:



$$\sum \vec{F}_i^I = \sum \vec{F}_i^I$$

$$\sum \vec{M}_i^I = \sum \vec{M}_i^I$$

II



\Leftrightarrow
EQUIVALENTI.

• Se: $\left. \begin{matrix} \sum \vec{F}_i = 0 \\ \sum \vec{M}_i = 0 \end{matrix} \right\}$ EQUILIBRIO

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA:

$$\left. \begin{matrix} \sum F_{ix} = 0 \text{ (1)} \\ \sum F_{iy} = 0 \text{ (2)} \\ \sum F_{iz} = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \sum M_{ix} = 0 \\ \sum M_{iy} = 0 \\ \sum M_{iz} = 0 \text{ (3)} \end{matrix}$$

Se siamo nel piano considero solo:
(1)(2)(3)

• Se il corpo è rigido e privo di inerzia \Rightarrow condiz. necessarie e sufficienti;

• Se il corpo è in movimento \Rightarrow Non sufficienti;

• eq. devono essere 6 e devono essere linearmente INDIPENDENTI.

SURAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:

$$V_1 = V_1^a + V_2^b$$

$$V_2 = V_1^a + V_2^b$$

GRADO DI IPERSTATICITÀ:

42

$$h = l - m$$

↑
numero di vincoli applicati

↙
gradi di libertà della struttura

• Se $h = 0 \Rightarrow$ ISOSTATICA;

• Se $h > 0 \Rightarrow$ IPERSTATICA.

Esempio:

$i =$ incastri $= 3$

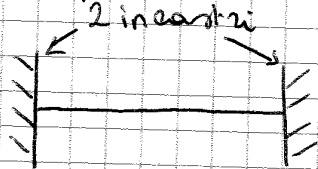
$C =$ carrelli $= 1$

$g =$ cerniere $= 2$

$l = 3i + 1c + 2g$ numero corpi

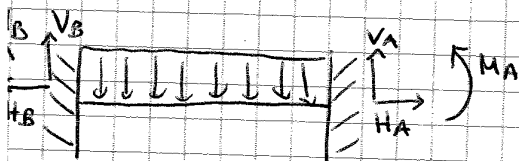
$h = 3i + 1c + 2g - m$

Esempio:



$N = 3 \times 2 - 1 \times 3 = 2$

Se metto un carico:



$V_A = V_B$
 $H_A = H_B$
 $M_A = M_B$
 $H_A + H_B = 0$

$V_A + V_B = P \Rightarrow V_A = V_B = \frac{P}{2}$

$M_B + V_B l = 0$

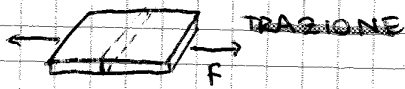
$(M_B) \rightarrow$ ^{che} unica incognita non è possibile ricavare \Rightarrow il grado di iperstaticità è pari a $(1) = h$.

LEZIONE 8

4

Esiste un legame tra $\hat{\sigma}$ e \hat{E} che è la RELAZIONE COSTITUTIVA, LEGGE FISICA O LEGGE DI HOOKE.

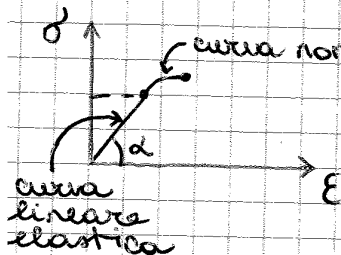
Questa relazione dipende dalle caratteristiche fisiche del corpo. Consideriamo il corpo G , applichiamo su di esso delle forze di trazione



Per ipotesi lo stato di tensione è unidimensionale quindi lo stato di tensione è indicato solo da un σ e da un solo E .

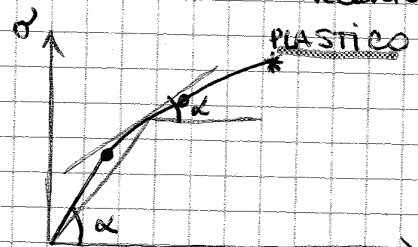
Scrivere la relazione costitutiva vuol dire scrivere una $\sigma = f(E)$ o $E = f(\sigma)$. La prima è una struttura di RIGIDEZZA, la seconda di DEFORNABILITÀ.

LEGA LEGGERA ID: se ho un carico, una forza F , essa genera un t_{DA} costante sulla sezione.



$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{Anche } E \text{ è costante.}$$

Nel tratto NON lineare $E \neq$ costante, ma E è in funzione di E . Viene quindi chiamato E_T , MODULO TANGENTE, dovuto all'angolo che forma la tg al grafico nel punto appartenente al tratto non lineare elastico: $\sigma = E_T \cdot E$.



Nel tratto plastico il provino non torna più come prima, cioè ha subito delle deformazioni permanenti. Cio, fino a raggiungere il punto di ROTTURA o FRATTURA.

Le prove sulle strutture sono fatte dall'ASME, dalle quali nasce poi il MODULO DI YOUNG E .

$$\{\sigma\} = [C] \{E\} \quad [C] = [C] \text{ è una matrice costitutiva:}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{16} \\ C_{21} & \dots & C_{26} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{61} & \dots & C_{66} \end{bmatrix} \text{ ha 36 coefficienti di rigidità.}$$

$$\{E\} = [S] \{\sigma\} \quad [S] = [C]^{-1}$$

Questa è la LEGGE DI HOOKE generalizzata, per un corpo qualsiasi in un punto.

MATERIALE OMOGENEO:

$[C]$, $[S]$ sono indipendenti da x, y, z .

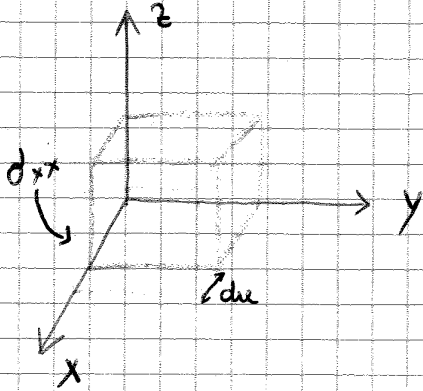


LEZIONE 9

A volte si preferisce introdurre quantità integrali che non riguardano un solo punto ma tutto il corpo.

Una di queste quantità è il LAVORO INTERNO DI DEFORMAZIONE che nel caso della molla coincide con l'energia elastica. Questo lavoro descrive lo stato di carico del corpo nel suo complesso:

$$L_i = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \sigma_{xz} \epsilon_{xz} + \sigma_{yz} \epsilon_{yz} + \sigma_{xy} \epsilon_{xy}] dV$$



$$dV = dx dy dz$$

Per effetto di una σ_{xx} il corpo si deforma di una quantità du ; ci sarà una forza elementare $\sigma_{xx} dy dz = dF_x$.

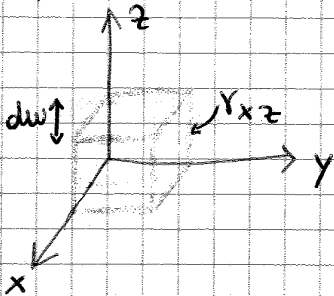
Il lavoro legato a tale deformazione è:

$$dF_x \cdot du = dL_{\sigma_{xx}} = \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dx dy dz = \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dV \quad ||$$

$$L_{\sigma_{xx}} = \sum dL_{\sigma_{xx}} = \int_V \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dV \leftarrow \frac{1}{2} \text{ non c'è perché si suppone che } \epsilon \text{ e } \sigma \text{ sono } \underline{\text{INDIPENDENTI}}.$$

Tale lavoro è anche detto di DILATAZIONE.

Per quanto concerne i contributi al taglio:



$$dw = \gamma_{xz} dx$$

Forza agente = TENSIONE TANGENZIALE: τ_{xz} .

$$dF_{\tau_{xz}} = \tau_{xz} dy dz$$

$$dL_{\tau_{xz}} = \tau_{xz} dw = \tau_{xz} \gamma_{xz} dV$$

Tale lavoro è detto di DISTORSIONE.

$$L_i = \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV$$

per il taglio si mettono il γ

$$L_i = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV$$

|| Se σ e ϵ sono linearmente dipendenti tra loro si mette $\frac{1}{2}$ davanti al segno di integrale.

LAVORO ESTERNO L_e :

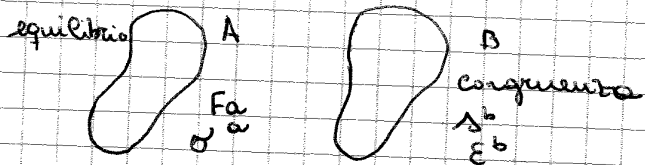
È il lavoro delle forze applicate.

Consideriamo delle forze concentrate \vec{F}_i ($i=1, N_c$), queste producono lavoro:

$$L_e = \sum_{i=1}^{N_c} \vec{F}_i \cdot \vec{\delta}_i$$



Date due configurazioni:



Se misuro direttamente la σ^a e ϵ^a il lavoro interno è proprio uguale a quello est:

$$L_i^{AB} - L_e^{AB} = 0$$

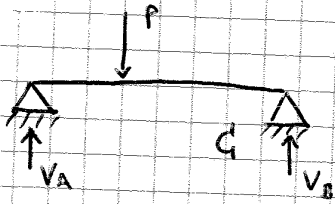
L'ENERGIA È COSTANTE = Π

$$d\Pi = 0$$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA.

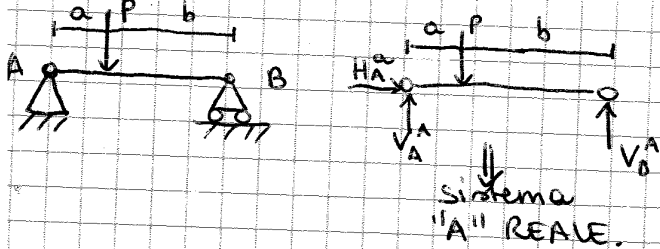
Scrivere che i due lavori sono uguali, equivale a scrivere una condizione di congruenza o una di equilibrio per un corpo B dato la config. del corpo A (o viceversa).

Sistema "A":



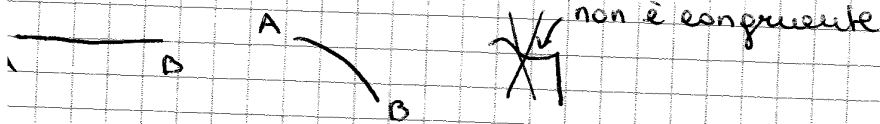
Dobbiamo inventare una config. "B" congruente per poi calcolare le reazioni V_A^A e V_B^A e così imporre l'equilibrio di "A".

A è il sistema reale, B è quello virtuale (o esperimento).



Oltre alle equazioni della statica, possiamo scrivere delle equazioni usando i lavori virtuali.

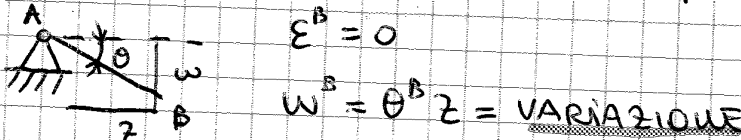
Il sistema "B" deve essere congruente e posso sceglierlo tra infinite configurazioni:



LE DEFORMAZIONI DEVONO ESSERE CONTINUE.

$$L_e^{AB} = P^A \cdot \dots + V_A^A \cdot \dots + V_B^A \cdot \dots + H_A^A \cdot \dots \quad (\text{somma delle varie forze per i rispettivi spostamenti}).$$

come sistema "B" scelgo il più semplice con deformazione $\hat{\epsilon} = 0$:



$$\epsilon^B = 0$$

$$W^B = \theta^B z = \text{VARIAZIONE}$$

$$L_e^{AB} = \int \sigma_{xx}^A \epsilon_{xx}^B + \dots \quad \text{ma } \epsilon = 0 \Rightarrow L_i^{AB} = 0;$$

$$L_e^{AB} = 0.$$

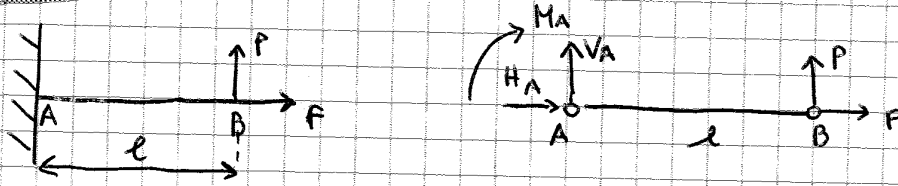
$$L_e^{AB} = P^A W_P^B - V_A^A W_A^B - V_B^A W_B^B + H_A^A W_A^B = 0$$

↓

ESERCITAZIONE 4

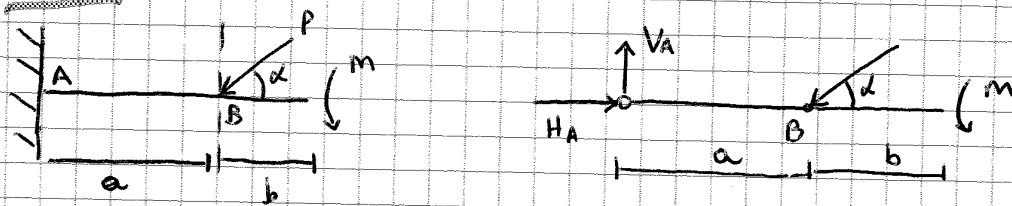
50

ES. 1



$$\begin{aligned} \uparrow) \quad & V_A + P = 0 \Rightarrow V_A = -P; \\ \rightarrow) \quad & F + H_A = 0 \Rightarrow H_A = -F; \\ \curvearrowright) \quad & M_A - P \cdot l = 0 \Rightarrow M_A = P \cdot l. \end{aligned}$$

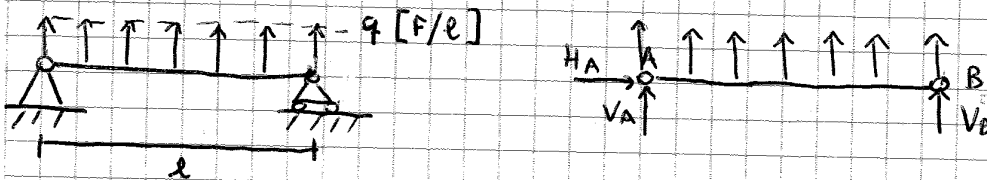
ES. 2



$$h = 3 - 3 = 0$$

$$\begin{aligned} \uparrow) \quad & P \cdot \cos \alpha - V_A = 0 \Rightarrow V_A = P \cdot \cos \alpha; \\ \rightarrow) \quad & H_A - P \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow H_A = P \cdot \sin \alpha; \\ \curvearrowright) \quad & V_A \cdot a + M_A - m = 0 \Rightarrow M_A = m - V_A \cdot a = m - P \cdot \cos \alpha \cdot a. \end{aligned}$$

ES. 3



$$h = 2 + 1 - 3 = 0$$

$$\begin{aligned} \uparrow) \quad & V_A + V_B = q \cdot l \Rightarrow V_A = +q \cdot l + \frac{q}{2} \cdot l = \frac{3 \cdot q}{2} \cdot l; \\ \rightarrow) \quad & H_A = 0; \\ \curvearrowright) \quad & -V_B \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow 0 = q \cdot \frac{l}{2} \cdot l + V_B \cdot l \Rightarrow V_B = -\frac{q}{2} \cdot l. \end{aligned}$$

LEZIONE 10

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Dati due sistemi:

"a" equilibrato e "b" congruente si ha che:

$$L_i^{ab} = L_e^{ab} \quad ||$$

Si può anche scrivere:

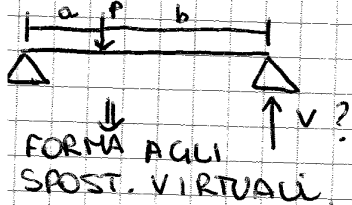
$$\int \{ \epsilon^b \}^T \{ \sigma^a \} dV = \sum_1^{N_c} F_i^a \delta_i^b \quad ||$$

Abbiamo 2 modi per utilizzare il PLV:

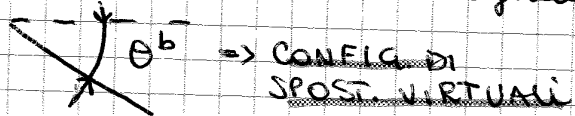
1) Hp: "b" congruente: → FORMA AGLI SPOSTAMENTI VIRTUALI:

In tal caso il PLV diventa una CONDIZIONE DI EQUILIBRIO.

Esempio: TRAVE:



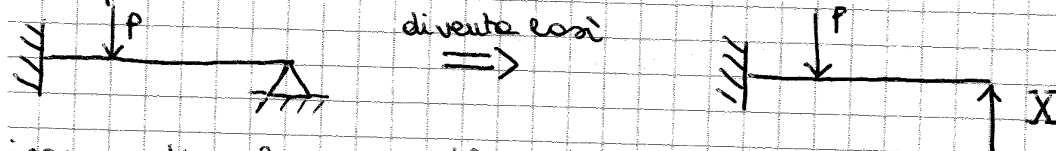
Per calcolare v mi è ideato un sistema congruente:



2) Hp: "a" equilibrato: → FORMA AGLI FORZE VIRTUALI:

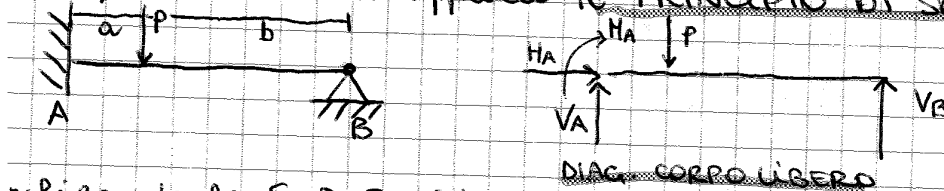
In tal caso il PLV diventa un'eq. di CONGRUENZA.
È un problema di iperstatica.

Esempio:

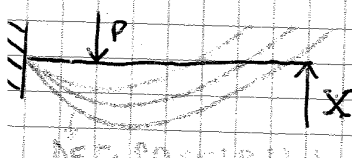


insegna trasformare il problema iperstatico in un altro problema come si esplica in tale struttura il PLV?

come prima cosa si applica il PRINCIPIO DI SOVR. DEGLI EFFETTI:

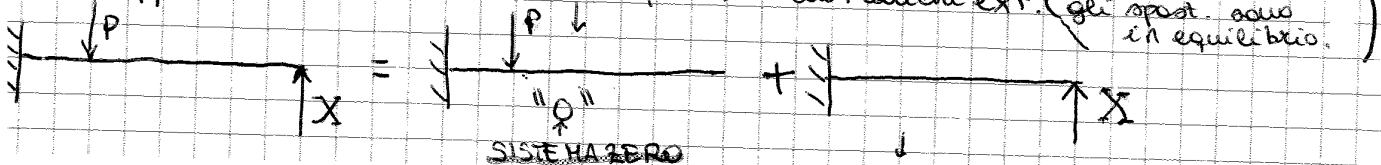


applicando la S.D.E. si ha al posto della reazione un'equazione un'inequazione
 $V_B = X \rightarrow$ forza virtuale



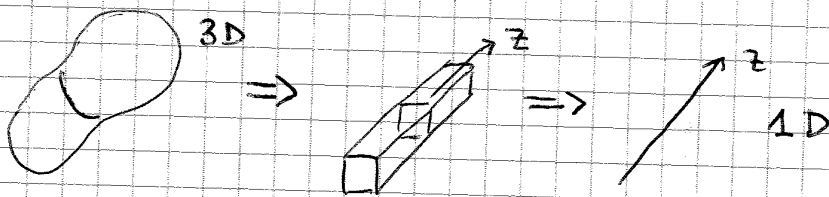
PLV:
Tra tutte le configuraz. possibili devo trovare quella CONGRUENTE a quella ideale di parvezza.

sovr. effetti:

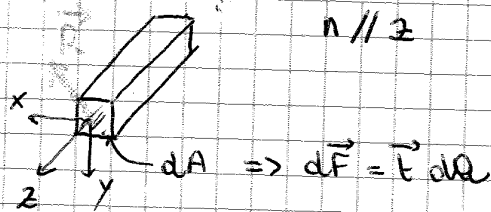


CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE : → caratt delle sezioni.

Considero un corpo 3D e risolviendolo in unidimensionale:



Per ogni z diversa abbiamo una caratteristica diversa. Considerando un elemento dA di un corpo G, in esso agisce una forza $d\vec{F} = \vec{E} dA$ che dà vita a una sollecitazione. Il nostro scopo è trovare la caratteristica di sollecitazione non in una area ma in tutto il corpo:



$$\vec{R} = \int_A d\vec{F} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} = \int \vec{E} dA = \int \hat{\sigma} \vec{n} dA.$$

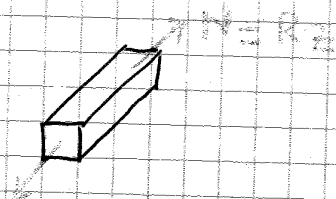
Non basta conoscere solo la risultante delle forze ma bisogna considerare anche il momento:

$$\vec{M} = \int r \times d\vec{F} = \int r \times \hat{\sigma} \vec{n} dA = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

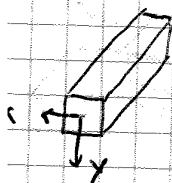
R_x, R_y, R_z
 M_x, M_y, M_z } CARATT. DI SOLLECITAZIONE → dipendono dallo stato di sollecitazione.

Le azioni a essa corrispondono:

$R_z = N$ → SFORZO NORMALE → Può allungare o accorciare la trave

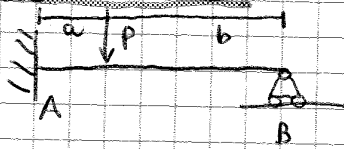


$T_x = T_x$ → TAGLIO LUNGO X → la trave si separa e le due sue parti tendono a scorrere e strisciare fra loro.

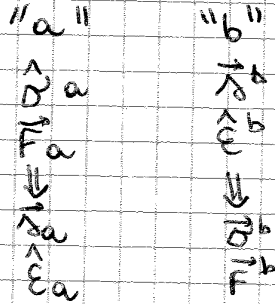
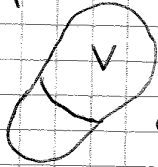


$T_y = T_y$ → TAGLIO LUNGO Y → scorrimento delle parti lungo y.

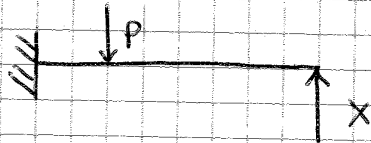
LEZIONE 11



Abbiamo detto che il PLV vale per due sistemi "a" e "b" di un corpo G:

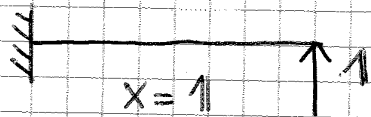


Sistema "b":



$X =$ forza virtuale

Sistema "a":

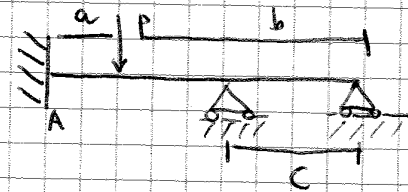


$$\Rightarrow "b" = "0" + X "a"$$

Inoltre avevamo detto che:

$$L_e^{ab} = L_i^{ab} \quad \text{ed} \quad L_i^{ab} = 0$$

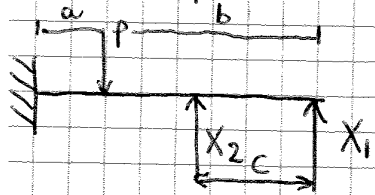
Cosa succede modificando la struttura?



Aggiungiamo un altro carrello a distanza c da B.

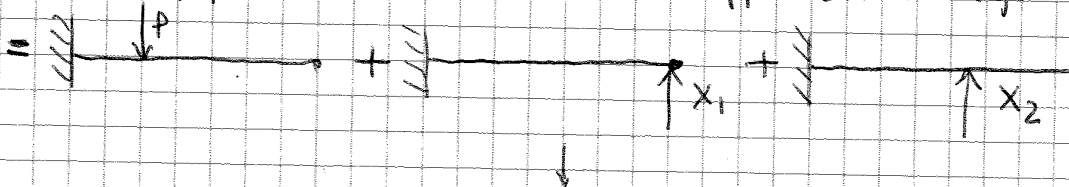
innanzitutto si modifica il grado di iperstaticità in quanto si raddoppia \Rightarrow STRUTTURA 2 VOLTE IPERSTATICA.

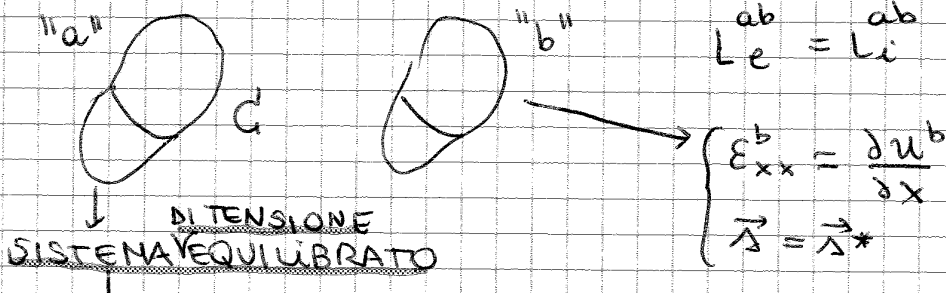
anche in questo caso bisogna trovare un sistema "b" conveniente:



Avremo due forze virtuali X_1, X_2

applichiamo per risolverlo, la sovrapposizione degli effetti:





SISTEMA EQUILIBRATO

Vuol dire che prendendo le componenti delle tensioni esse soddisfanno le equazioni indefinite di equilibrio, ciò vuol dire che:

$$\vec{t}^a = \hat{\sigma}^a \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow \text{Se non agiscono forze ext}$$

$$\vec{t}^a = \hat{\sigma}^a \vec{n} = \vec{p} \rightarrow \text{Se agisce una press. ext}$$

Se nel sistema equilibrato applico il PLV questo mi assicura che "b" sarà congruente oppure se "b" è congruente si sa a prescindere che "a" è equilibrato.

$$\begin{matrix} ab \\ Li = Le \end{matrix}$$

Supponendo che ci siano forze di superficie:

$$Le^{ab} = \int_S \vec{p}^a \cdot \vec{s}^b dS$$

$$Li^{ab} = \int_V (E_{xx}^b \sigma_{xx}^a + \dots + \gamma_{xy}^b \sigma_{xy}^a) dV$$

Vediamo se dalle PLV posso arrivare a trovare le EIE:

$$Hp: E_{xx}^b = \frac{\partial u^b}{\partial x}, E_{yy}^b = \frac{\partial v^b}{\partial y}, E_{zz}^b = \frac{\partial w^b}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz}^b = \frac{\partial u^b}{\partial z} + \frac{\partial w^b}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz}^b = \frac{\partial v^b}{\partial z} + \frac{\partial w^b}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}^b = \frac{\partial u^b}{\partial y} + \frac{\partial v^b}{\partial x}$$

Per i poteri ho le deformazioni in funzione degli spostamenti.

$$Li^{ab} = \int E_{xx}^b \sigma_{xx}^a dV = \int \frac{\partial u^b}{\partial x} \sigma_{xx}^a dV$$

Dobbiamo riuscire a scrivere il lavoro in tale forma:

$$Li^{ab} = \int_V u^b \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^a}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^a}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^a}{\partial z} \right) dV$$

$$\delta L_e = \delta L_i$$

$$\delta L_i = \frac{1}{2} K_S \delta S \cdot 2$$

$$\delta L_e = F \delta S$$

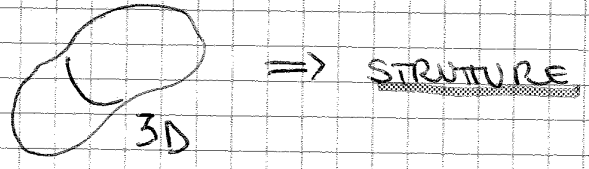
Il PLV porta all'equazione:

$$\delta L_e^{ab} = \delta L_e^{ab} \parallel \rightarrow \text{è la formulazione più esatta del principio.}$$

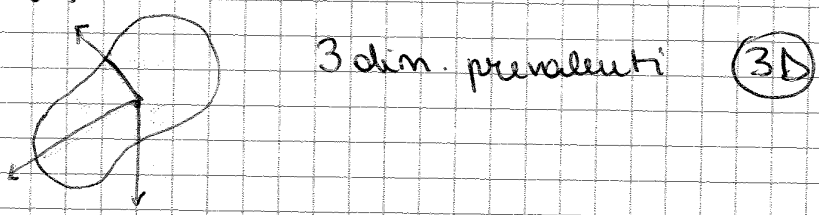
$$\delta S (K_S - F) = 0 \parallel$$

TEORIA DELLE STRUTTURE:

Non vanno studiati più i corpi generici. Il problema va trasformato dal corpo generico alle strutture:

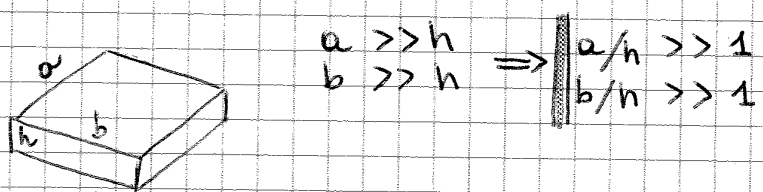


Se su tale corpo disegno 3 assi generici posso calcolare 3 distanze maxime a, b, c del baricentro al contorno del corpo, su tali assi:



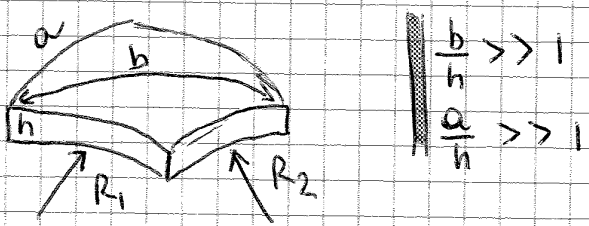
PANNELLO PIANO/LASTRA \Rightarrow STRUTTURE A PARETE SOTTILE: (2D)

2 dim. prevalenti



USCIO/STRUTTURA A PARETE SOTTILE DOTATA DI CURVATURA:

Quando il pannello è incurvato esso possiede raggio di curvatura



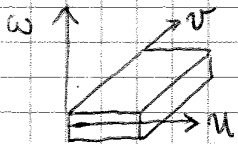
al posto della z semplice potrei avere qualunque altra funzione quali seno, coseno, polinomi di Legendre ecc. purché di grado dall'incognita che intendo eliminare. 162

IL METODO ASINTOTICO si occupa di capire l'importanza dei termini che vanno inseriti nella funzione che descrive la struttura (*).
 (una volta fissati gli errori)

CARATTERISTICA METODI ASSIOMATICI:

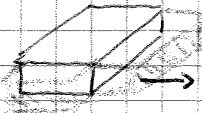
In tali metodi non viene introdotta una espansione infinita come (*)
 ma una espansione normale:

Data una PIASTRA con determinate coordinate:



$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \\ v(x, y, z) &= \\ w(x, y, z) &= \end{aligned}$$

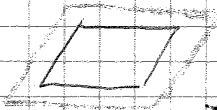
Se si deforma così:



Non mi importa come varia la z , la elimino quindi si ha:

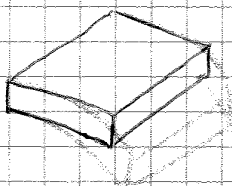
TEORIA MEMBRANALE PIASTRA:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) \rightarrow \text{Deformazione spost. lungo } x \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) \rightarrow \text{Deformazione lungo } y \\ w(x, y, z) &= w^0(x, y) \rightarrow // // z \end{aligned}$$



TEORIA DELLA FLESSIONE DELLA PIASTRA TERMINI RELATIVI ALLA ROTAZIONE

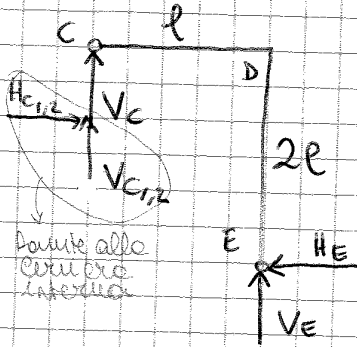
Se la piastra si deforma così:



Si ha sia uno spostamento che una rotazione:

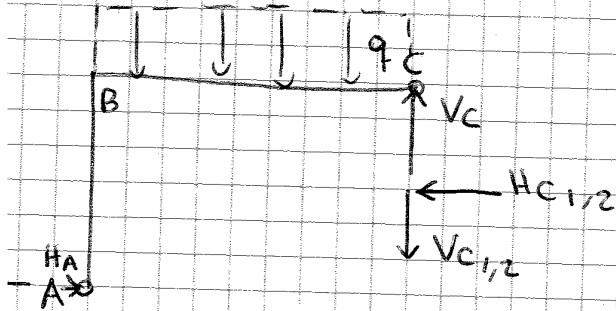
$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) + z \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v^0(x, y) + z \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{TEORIA} \\ \text{DI} \\ \text{REISSNER-} \\ \text{MINDLIN} \end{array} \right.$$

CORPO 1:



$$\sum \curvearrowright 2H_E l - V_E l \Rightarrow V_E = 2H_E$$

CORPO 2:



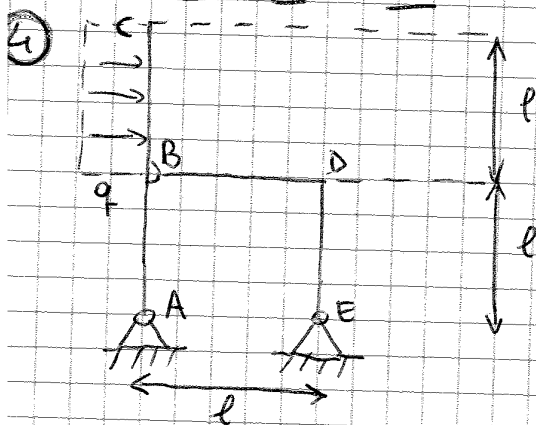
$$\sum \curvearrowright -H_A l - 2ql(l) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$H_A = -2ql$$

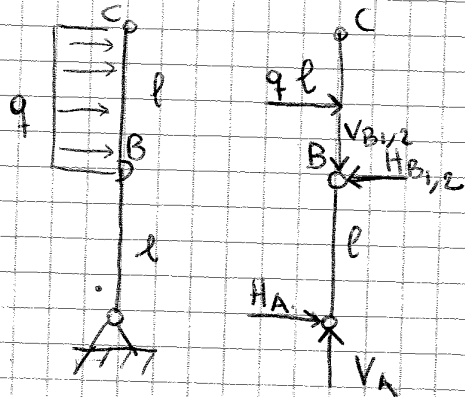
$$\rightarrow) H_E = H_A = -2ql$$

$$\uparrow) V_C + V_E - 2ql = 0 \Rightarrow V_C = 6ql$$

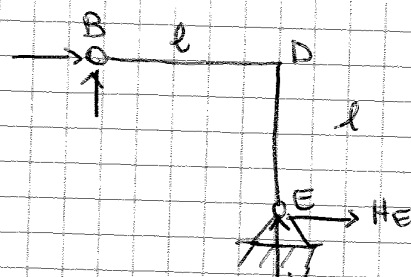


ABC → CORPO 1
BDE → CORPO 2

CORPO 1:



CORPO 2:



$$\sum \curvearrowright V_E l + H_E l = 0$$

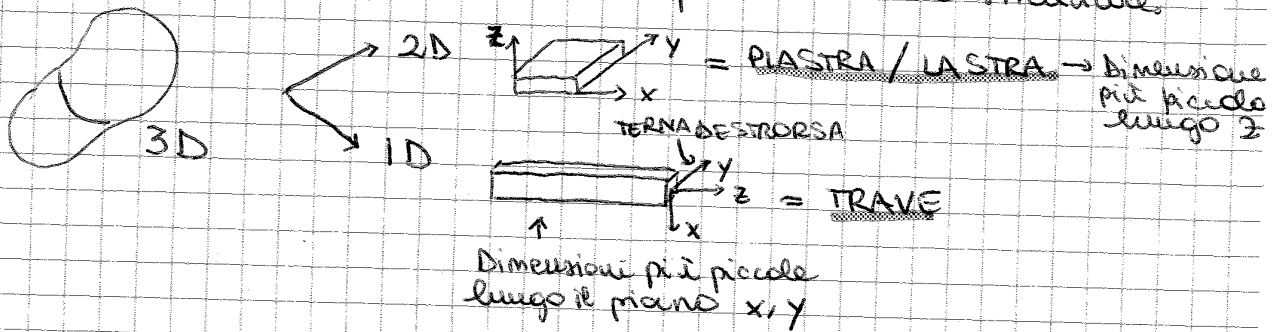
$$\Downarrow$$

$$H_E = -V_E$$

LEZIONE 12

TEORIA DELLE STRUTTURE.

Abbiamo detto che ad un corpo 3D corrispondono due strutture:



Le incognite sono sempre: $\bar{\delta}, \hat{\sigma}, \hat{\epsilon}$

Sviluppare una teoria delle strutture vuol dire scrivere una grandezza in funzione di altre grandezze:

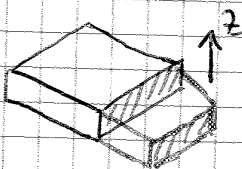
$$\bullet f(x, y, z) \stackrel{2D}{\equiv} \sum_{i=0}^{N=\infty} F_i(z) u_i(x, y) \Rightarrow \text{PIASTRA}$$

$$\bullet f(x, y, z) \stackrel{1D}{\equiv} \sum_{i=0}^{N=\infty} F_i(x, y) u_i(z) \Rightarrow \text{TRAVE}$$

METODO ASSIOMATICO:

Teoria membranale:

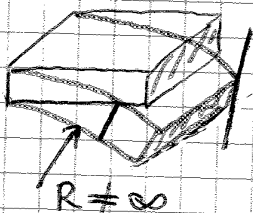
Si riferiscono a una membrana, struttura che non si può piegare ma si può solo espandere:



- $u(x, y, z) = u_0(x, y) = u^0(x, y) \rightarrow$ DIREZIONE z COSTANTE
- $v(x, y, z) = v_0(x, y) = v^0(x, y)$
- $w(x, y, z) = w_0(x, y) = w^0(x, y)$

$F_0(z) = 1$

Teoria flemiale:



retta lineare

- $u(x, y, z) = u^0(x, y) + z \phi_x(x, y)$
- $v(x, y, z) = v^0(x, y) + z \phi_y(x, y)$
- $w(x, y, z) = w^0(x, y) + z \phi_z(x, y)$

$F_0(z) = 1$
 $F_1(z) = z$

Def. lineare + deformazione angolare.

$\epsilon_{xx} \neq 0$ $\gamma_{xz} \neq 0$

Cosa è lo scorrimento a taglio?

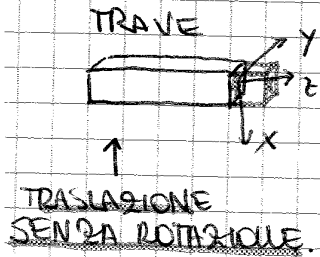
Considerando un corpo materializzato idealmente in tante lamelle, lo scorrimento a taglio è l'attrito presente tra tali lamelle. Quindi le componenti dello scorrimento a taglio tendono a far scorrere tra loro tali lamelle.

- Se NON c'è scorrimento a taglio $\Rightarrow \gamma_{xz} = 0$

- Se c'è $\Rightarrow \gamma_{xz} \neq 0$.

Facendo un'analisi asintotica inoltre si vede che la teoria di Kirchhoff è valida e corretta e consistente.

Cosa succede nei MODELLI UNIDIMENSIONALI?

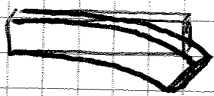


Da di essa può essere costruita la teoria membranale

TEORIA MEMBRANALE TRAVE:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) = u^0(z) \\ v(x, y, z) = v^0(z) \\ w(x, y, z) = w^0(z) \end{cases}$$

TEORIA FLESSIONALE TRAVE:



In seguito alla deformazione la porzione di piano rimane piana, 3 incognite dipendenti però da una sola incognita: z.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(z) + x \bar{\phi}_x(z) + y \bar{\phi}_y(z) \\ v(x, y, z) &= v^0(z) + x \check{\phi}_x(z) + y \check{\phi}_y(z) \\ w(x, y, z) &= w^0(z) + x \phi_x(z) + y \phi_y(z) \end{aligned}$$

Nella trave la dimensione della sezione è molto più piccola rispetto la coordinata z. Diciamo quindi che la sezione (x, y) varia durante la deformazione ma in modo impercettibile rispetto alle variazioni indotte da z. Quindi dalle relazioni scritte è possibile individuare i termini meno importanti:

$$\begin{aligned} x \bar{\phi}_x(z), y \bar{\phi}_y(z), x \check{\phi}_x(z), y \check{\phi}_y(z) &\Rightarrow \text{spostamenti all'interno della sezione} \\ x \phi_x(z), y \phi_y(z) &\Rightarrow \text{spostamenti assiali} \end{aligned}$$

contorno meno.

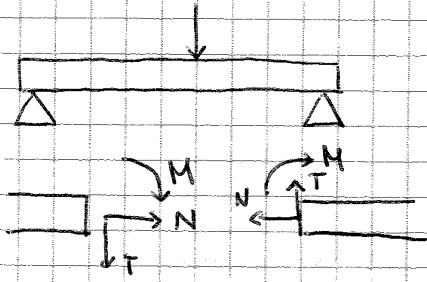
Introducendo l'ipotesi di SEZIONE RIGIDA si ha:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(z) \\ v(x, y, z) = v^0(z) \\ w(x, y, z) = w^0(z) + x \phi_x(z) + y \phi_y(z) \end{cases} \Rightarrow \text{TEORIA DI TIMOSHENKO}$$

ESERCITAZIONE 6

CONCETTI TEORICI: 170

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

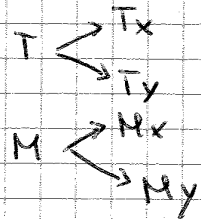


⇒ Si suppone idealmente che la trave venga tagliata e si fanno le eq. di equilibrio.

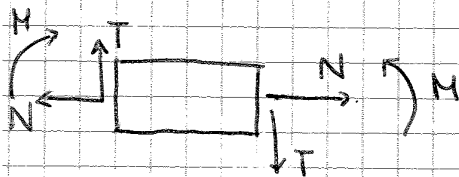
N = sforzo normale;
T = taglio;
M = momento flettente.

z = asse della trave

→ le caract. di sollecitez. variano lungo tale asse e bisogna fare dei grafici per trovare i punti critici.

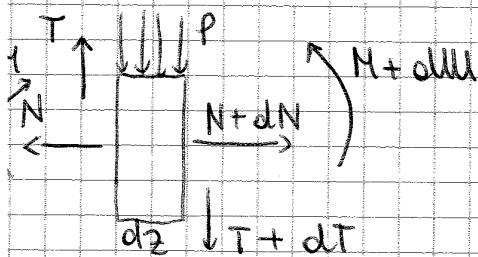


CONVENZIONE DI SEGNO:



M positivo verso il basso

Considerando un pezzo infinitesimo di trave su cui agisce un carico distribuito P:



$$1) T + dT - T + p dz = 0$$

$$p = - \frac{dT}{dz}$$

$$2) -M + M + dM - (T + dT) dz - p dz \frac{dz}{2} = 0$$

$$T = \frac{dM}{dz}$$

CONSIDERAZIONI:

Se $p = 0$ ($T = 0$) ⇒ T cost (M cost);

Se $p = \text{cost}$ ($T = \text{cost}$) ⇒ T lineare (M lineare);

Se P concentrato → Salto nel diagramma di taglio T;

Se c'è una coppia C ⇒ Salto nel diagramma di momento M;

Se c'è un salto in T vuol dire che vi è un cambio di pendenza nel

Utilizzare i seguenti valori e costruire i diagrammi di taglio:

72

$$P = 10 \text{ N}$$

$$M = 2000 \text{ Nmm}$$

$$a = 400 \text{ mm}$$

$$b = 600 \text{ mm}$$

TRATTO AC: $\begin{cases} T = 8 \text{ N} \\ M(A) = 0 ; M(C) = 3200 \text{ N}\cdot\text{mm} \end{cases}$

TRATTO BC: $\begin{cases} T = -2 \text{ N} \\ M(C) = 3200 \text{ mm}\cdot\text{N} , M(B) = 2000 \text{ N}\cdot\text{mm} \end{cases}$

↑
Nel punto B il momento è pari alla coppia est applicata

DIAGRAMMA DI TAGLIO:

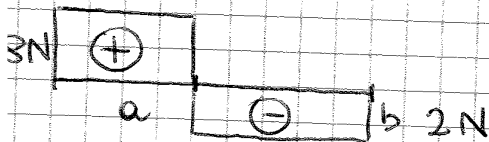
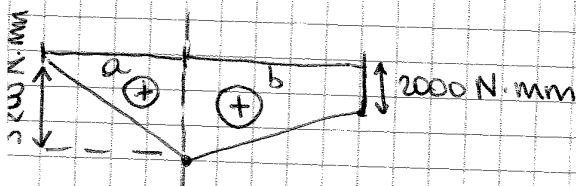
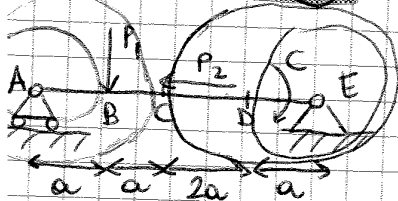


DIAGRAMMA DI MOMENTO:

→ // quando è positivo va rappresentato dalla parte sotto rispetto la trave.



ESERCIZIO 2



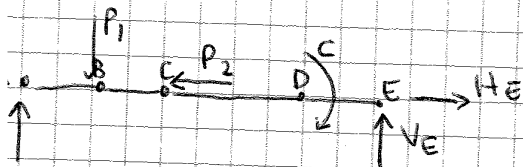
$$P_1 = 50 \text{ N}$$

$$P_2 = 50 \text{ N}$$

$$C = 10000 \text{ Nmm}$$

$$a = 1000 \text{ mm}$$

SOLUZIONI:



$$H_E = P_2$$

$$V_A = \frac{L}{5} \left(4P_1 - \frac{C}{a} \right)$$

$$V_E = \frac{L}{5} \left(P_1 + \frac{C}{a} \right)$$

76

$$M(A) = 0$$

$$M(B) = 20000 \text{ Nmm}$$

$$M(C) = -10000 \text{ Nmm}$$

$$M(D) = \begin{cases} 30000 \text{ Nmm} \rightarrow \text{TRATTO ED} \\ -70000 \text{ Nmm} \rightarrow \text{TRATTO DC} \end{cases}$$

$$M(E) = 0$$

DIAGRAMMA DI SFRORTO: N



DIAGRAMMA DI TAGLIO: T

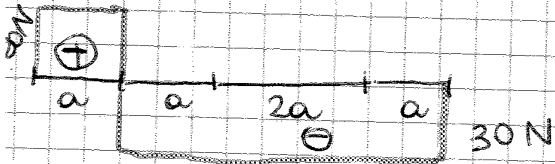
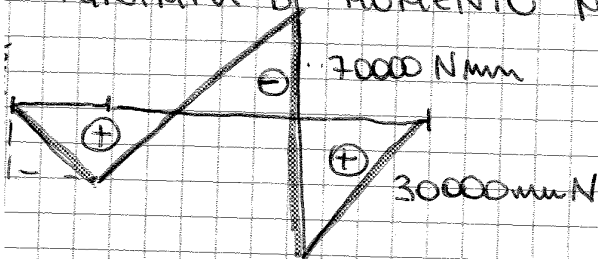
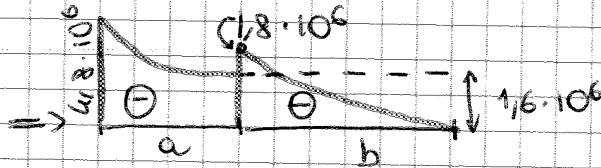
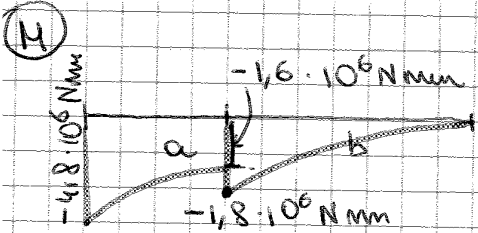
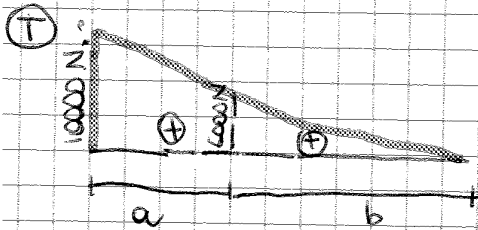
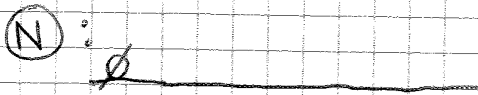


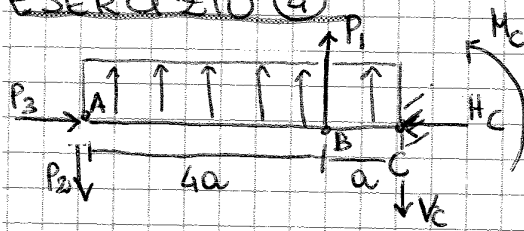
DIAGRAMMA DI MOMENTO M:



DIAGRAMMI:



ESERCIZIO (4)



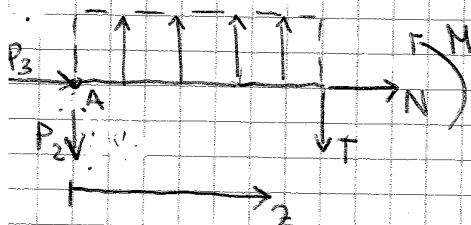
- $q = 1 \frac{N}{mm}$
- $P_1 = 2000 N$
- $P_2 = 500 N$
- $P_3 = 250 N$
- $a = 200 mm$

$H_c = P_3$

$V_c = P_1 + q \cdot 5a - P_2$

$M_c = q \frac{(5a)^2}{2} + P_1 \cdot a - P_2 \cdot 5a$

TRATTO AB: $0 < z < 4a$



$$\begin{cases} P_3 + N = 0 \Rightarrow N = -P_3 \\ -qz + T + P_2 = 0 \Rightarrow T = -P_2 + qz \\ M + P_2 z - q \frac{z^2}{2} = 0 \Rightarrow M = -P_2 z + q \frac{z^2}{2} \end{cases}$$

$N = -250 N$

$T(z=0) = -500 N$

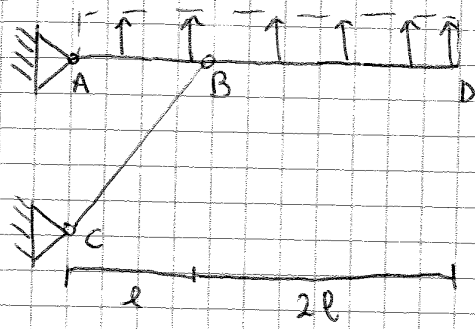
$T(z=4a) = -P_2 + 4qa = -500 + 4 \cdot 1200 = 300 N$

$M(z=0) = 0$

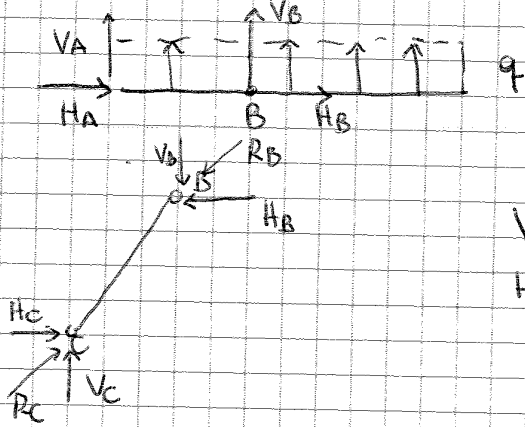
$M(z=4a) = -P_2 \cdot 4a = -500 \cdot 4 \cdot 200 = -400000 Nmm = -8 \cdot 10^4 Nmm$

Esercizio da fare

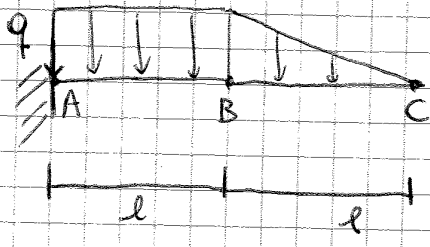
78



$$q = \frac{1}{3} \frac{N}{mm}$$
$$l = 2000 \text{ mm}$$



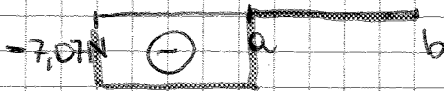
$$V_C = V_B$$
$$H_C = H_B$$



180

DIAGRAMMI :

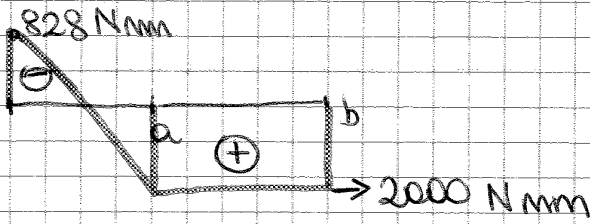
(N) :



(T) :

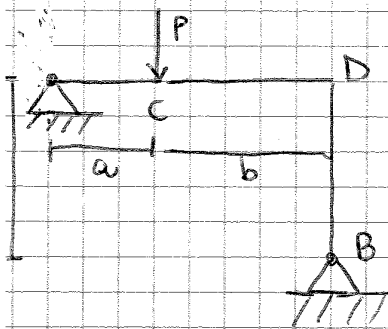


(M) :



ESERCIZIO DA FARE :

AC / CD / DB



- $P = 10 \text{ N}$
- $a = 400 \text{ mm}$
- $b = 600 \text{ mm}$
- $d = 500 \text{ mm}$

Noi consideriamo le variazioni:

$$\delta w_B^b = (a+b) \delta \theta^b$$

$$\delta w_P^b = a \delta \theta^b$$

Essendo il moto della trave un moto di corpo rigido possiamo dire che il lavoro interno è pari a 0 (perché corpo rigido):

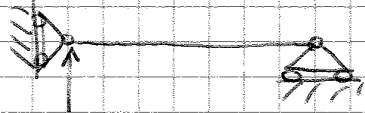
$$\delta L_i^{ab} = 0 \Rightarrow \text{per il PLV} \Rightarrow \delta L_e^{ab} = 0$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\delta L_e^{ab} = (P^a \delta w_P^b - V_B^a \delta w_B^b) = 0$$

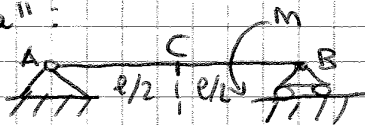
$$P^a a \delta \theta^b - V_B^a (a+b) \delta \theta^b = 0 \Rightarrow V_B = \frac{Pa}{a+b}$$

ESERCIZIO DA FARE → Trattare VA con il PLV togliendo la xest. vincolare che bisogna calcolare:



CALCOLO SPOSTAMENTI:

"a":



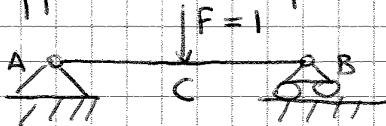
V_C, φ_B

$$M^a = \frac{M}{l} z \quad (0 < z < l)$$

"a" = sistema reale

(senza carichi ext)

"b" = sistema analogo senza MY ma con una forza unitaria applicata nel punto C in cui voglio calcolare lo spostamento:



TRATTO AC: $(0 < z < \frac{l}{2})$

$$M^b = \frac{z}{2}$$

TRATTO CB: $(\frac{l}{2} < z < l)$

$$M^b = -\frac{z}{2} + \frac{l}{2}$$

$$\delta L_e^{ab} = \int_0^l \frac{M^a M^b}{EI} dz = \int_0^{l/2} \frac{M^a M^b}{EI} dz + \int_{l/2}^l \frac{M^a M^b}{EI} dz$$

M^a e M^b → devono essere scelti con lo stesso sistema di riferimento

$$\delta L_e^{ab} = 1 \cdot v_C$$



Ulteriore semplificazione:

$$"X" = X \cdot "u" \Rightarrow X \cdot \left. \begin{array}{l} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} \right\} \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \end{array}$$

Ora assumiamo che il sistema "a" coincide con "u":

$$"a" = "u"$$

Includendo con $f \rightarrow$ spostamento, reaz. vincolare, sollecitazione si ha:

$$f(b) = f(0) + X f(a)$$

$$M^b \downarrow = M^0 + X M^a$$

Amici per trovare il loro interno devo trovare M^0 e M^a :

Sistema "0":

$$\begin{cases} H_A^0 = 0 \\ V_A^0 = F \\ M_A^0 = Fa \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0 < z < a) \\ N^0 = 0 \\ T^0 = V_A^0 \\ M^0 = V_A^0 z - M_A^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N^0 = 0 \\ T^0 = F \\ M^0 = F(z - a) \end{cases}$$

$(0 < z < (a+b))$

$$\begin{cases} N^0 = 0 \\ T^0 = 0 \\ M^0 = 0 \end{cases}$$

sistema "a":

$$\begin{cases} H_A^a = 0 \\ V_A^a = 1 \\ M_A^a = 1 \cdot l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0 < z < (a+b)) \\ N^a = 0 \\ T^a = -V_A^a \\ M^a = M_A^a - V_A^a z = 1(l - z) = l - z \end{cases}$$

ora possiamo scrivere l'espressione del loro interno:

$$\text{xt: } \delta L_e^{ab} = 1 \cdot \chi_B = 0$$

è pari a 0 per via della presenza di un vincolo in B. per che $\delta L_e = 0$

$$\delta L_i^{ab} = \int_0^l \frac{N^a M^b}{EI} dz = \int_0^l \frac{M^a (N^0 + X M^a)}{EI} dz = 0$$

svolgendo i prodotti si ha:

$$X = \frac{\int_0^l M^a M^0 dz}{\int_0^l (M^a)^2 dz}$$

LEZIONE 13

ELEMENTI STRUTTURALI:

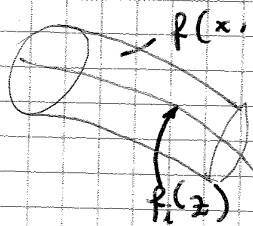
ASTA:

Elemento unidimensionale membranale.
 Essa si può ESPANDERE attraverso una funzione:

$$f(x, y, z) = \sum_{i=0}^N F_i(x, y) f_i(z)$$

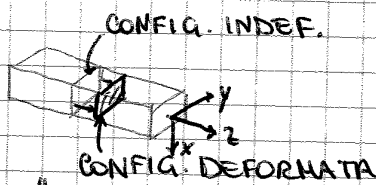
\uparrow \uparrow \leftarrow
 Funzioni note nel caso unidimensionale Nuove variabili

Può essere una deformazione, una spost. qualsiasi cosa



- Fissata F e la forma delle funzioni.

Membranale vuol dire che una dimensione di essa può essere ritenuta costante.



$f = w(z) \rightarrow$ Ho creato una funzione in cui si deforma solo una dimensione, la sezione resta costante. (PIÙ O MENO)

TEORIA MEMBRANALE PIASTRA: $w(x, y, z) = w^0(z)$.

Seguendo tale approccio la teoria ha carattere ASSIOMATICO quindi non ci sono ipotesi che possano essere verificate.

Qual è la conseguenza di ciò?

Supponendo che w rimane costante, u e v che fanno?

Non si può dire che non esiste alcun materiale che lascia la sezione indeformata quindi:

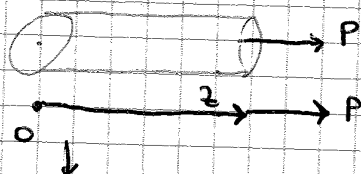
$$\left. \begin{matrix} u \neq 0 \\ v \neq 0 \end{matrix} \right\} \text{ però non molto più piccoli di } w: u, v \ll w$$

Solo con queste ipotesi la teoria è valida.
 Si può quindi scrivere:

$$\left. \begin{matrix} u(x, y, z) = 0 \\ v(x, y, z) = 0 \end{matrix} \right\} \text{ Non sono realmente } 0 \text{ ma possono essere ritratti trascurabili rispetto } w.$$

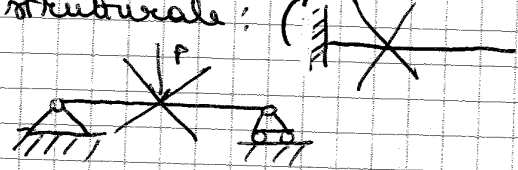
la teoria si semplifica:

$$\begin{cases} w(x, y, z) = 0 \\ v(x, y, z) = 0 \\ w(x, y, z) = w^0(z) \end{cases}$$



Ha un solo grado di libertà indicato da P . Di conseguenza il vincolo incastro non è compatibile con tale elemento strutturale:

L'asta essendo membranale può solo allungarsi.



Considerando una sezione dell'asta si ha:

$\hat{\sigma}: \sigma_{zz} = \frac{P}{A} = |\vec{E} dA|$

$\hat{E}: \epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz} = \frac{P}{EA}$

TENSIONE

DEFORMAZIONE

Si risolve il problema elastico con queste semplici relazioni.

Inoltre è possibile calcolare:

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \equiv \frac{dw}{dz}$$

$$\frac{dw(z)}{dz} = \frac{P}{EA} \Rightarrow \int_0^z \frac{dw(z)}{dz} dz = \int_0^z \frac{P}{EA} dz$$

COSTANTE

$$w(z) - w(0) = \int_0^z \left(\frac{P}{EA} \right) dz$$

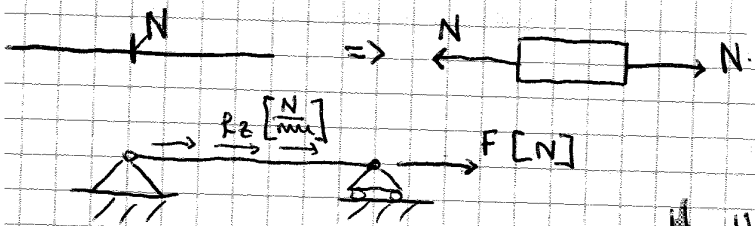
$$w(z) - w(0) = \frac{P}{EA} \cdot z$$

$$w(z) = w(0) + \frac{P}{EA} \cdot z \rightarrow \text{SPOSTAMENTO}$$

= 0 se fosse incernierata in un suo estremo.

In tal modo è stato risolto completamente il problema dell'asta.

FORZO NORMALE ASTA: → CDS.

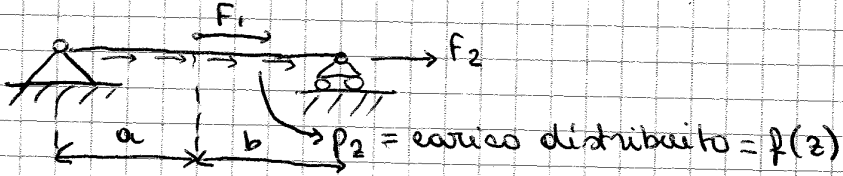


$$N = \int_A \sigma_{zz} dA$$

L'UNICA PRESENTE NELL'ASTA PERCHÉ $M_F, T = 0$.

LEZIONE 14

Abbiamo detto che l'ASTA è un elemento 1D membranale.



Abbiamo inoltre calcolato il DIAGRAMMA DELLO SFORZO NORMALE (N) che è anch'ora funzione di z: $N(z)$!!!

Attraverso la conoscenza dei diagrammi di sollecitazione è possibile definirne:

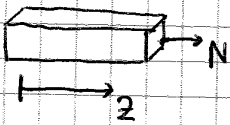
- TENSORE DEGLI SFORZI : $\hat{\sigma} \Rightarrow \sigma_{zz} = \frac{N(z)}{A} = \frac{N}{A}$ ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy} \approx 0$)

- DEFORMAZIONE : con la legge di Hooke e applicando la correzione di Plain Strain in cui: $\epsilon_{zz} \rightarrow \epsilon$:

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$$

- SPOSTAMENTO : $\vec{s} \Rightarrow w(z) - w(0) = \int_0^z \frac{N(z)}{EA} dz$ $\left[\begin{matrix} u=0 \\ v=0 \end{matrix} \right]$

Bisogna adesso definire come è fatta una equazione di equilibrio in tal caso:



$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Lo sforzo Normale N equivale alla distribuzione dei tensori degli sforzi (σ_{zz})

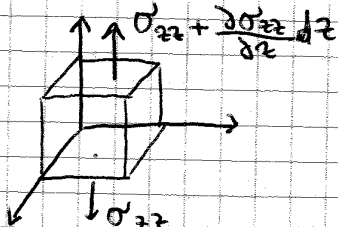
RELAZIONE DI EQUIVALENZA : $N = \int_A \sigma_{zz} dA$

NON È UNA EQUAZIONE DI EQUILIBRIO.

QUAZ. DI EQUILIBRIO IN FUNZIONE DELLE C.d.S.
 Quindi come nasce l'equazione di equilibrio?
 sarà pari a:

$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$ oppure $\rho \cdot g$ Se c'è un carico DI VOLUME $\left[\frac{N}{m^3} \right]$

alle EQUAZIONE DI EQUILIBRIO è stata ottenuta considerando un solido in equilibrio e σ_{zz} era la sua TRASLAZIONE UNGO Z ma non di un'asta ma di un elemento TRIPLO MENSIONALE



Moltiplicando la (*) per dA si ha che

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \cdot dA = 0 \Rightarrow \boxed{N_{,z} = 0}$$



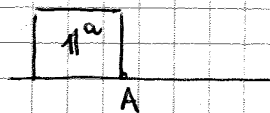
$$L_e^{ab} = w_A^b \cdot 1^a$$

$$w_A^b = \int \frac{N^a N^b}{EA} dz$$

DIAGRAMMA



→ SFORZO NORMALE COSTANTE (SISTEMA "b")



→ SFORZO NORMALE (SISTEMA "a")

ESERCIZIO DA FARE:

Calcolare w_B

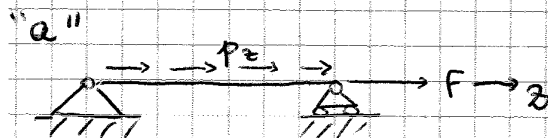
CONDIZIONI DI EQUILIBRIO SUL CONTORNO (ASTA) MEDIANTE PLV:

Vediamo ora se è possibile usare il PLV per trovare le equazioni indefinite di equilibrio.

$$L_i^{ab} = \int \{\sigma^T\} \{\epsilon^b\} dV = \int_V \{\epsilon^b\}^T \{\sigma\} dV \Rightarrow \sigma_{ij}, i = 0$$

Qual è l'equivalente delle eq. indefinite di equilibrio per l'asta?

IN FORMA FORTE (ONEL PUNTO): $N_{,z} = -p_z$



$z=0 \rightarrow w=0$ → COND. CINEMATICA
 $z=L \rightarrow N=F$ → COND. MECCANICA

$0, L \rightarrow$ PUNTI DEL CONTORNO (UNA LINEA [1D] HA COME CONTORNO 2 PUNTI)

$$N(0) = F + p_z L$$

$$N_{,z} = -p_z$$

H_p: "a" EQUILIBRATO
 "b" CONGRUENTE. → partiamo con questa ipotesi.

Considero la variazione dei lavori:

$$L_i^{ab} = \delta L_i^{ab} = \int_V \delta \epsilon^b \sigma^a dV \rightarrow \text{"b", } \epsilon^b, w^b \text{ congruenti}$$

$$L_e^{ab} = \delta L_e^{ab}$$

$$\delta L_e = F \delta w(L) + \int p_z \delta w(z) dz$$

mettiamo gli apici perché abbiamo già stabilito quale sistema è virtuale.

SISTEMA VIRTUALE

↓
 QUELLO IN CUI C'È IL δ

$$\delta L_i = \int \delta \epsilon \sigma dV = \int \sigma \frac{d \delta w}{dz} dV =$$

$$= \int_0^L N \frac{d}{dz} \delta w dz = - \int \frac{dN}{dz} \delta w dz +$$

$$+ N(L) w(L) - N(0) w(0)$$

dove: $\epsilon = \frac{dw}{dz}$
 $\delta \epsilon = \frac{d \delta w}{dz}$
 $dV = A dz$
 $N = \sigma A$

$$\delta L_i = - \int \frac{dN}{dz} \delta w dz + N(L) w(L) - N(0) w(0)$$